Συστήματα της τροπικής λογικής

0.1 Εισαγωγή

Η τροπική λογική είναι ένας κλάδος της Λογικής, ο οποίος ασχολείται με έννοιες όπως 'κάτι είναι πιθανό' και 'κάτι είναι αναγκαίο'.

Ξεκινάμε δίνοντας τους απαραίτητους ορισμούς της τροπικής λογικής. Ο πρώτος ορισμός αφορά τη τυπική γλώσσα της τροπικής λογικής. Με τη χρήση της θα φτιάξουμε προτάσεις, θα ορίσουμε την έννοια της αλήθειας και των τυπικών αποδείξεων.

Ορισμός 0.1. Η γλώσσα αποτελείται από

1. σύμβολα $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, ...$, που τις λέμε ατομικές προτάσεις,
2. σταθερές T, F, που αντιστοιχούν στα κλασσικά "true", "false",
3. $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, οι κλασσικοί σύνδεσμοι,
4. $\Box, \Diamond$, νέα σύμβολα: το σύμβολο της αναγκαιότητας και το σύμβολο του πιθανού.

Εξετάσουμε τις προτάσεις μέσα σε κόσμους. Ο ορισμός της αλήθειας, γίνεται αναδρομικά, όπως είδαμε και στην κλασσική προτασιακή και κατηγορηματική λογικη. Πριν δώσουμε τον ορισμό της αλήθειας, πρέπει να ορίσουμε την έννοια του μοντέλου, στο οποίο θα εξετάσουμε την αλήθεια.

Ορισμός 0.2. Το ζεύγος $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$, καλείται δομή (μοντέλο), αν W είναι μια συλλογή κόσμων, και $P = (P_0, P_1, ...)$ είναι μια ακολουθία, με $P_i \subseteq W$.

Μιας και οι προτάσεις είναι πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων, τα περισσότερα μοντέλα που θα φτιάχνουμε θα έχουν πεπερασμένο το πλήθος από P_i μη κενά.

0.2 Ορισμός της αλήθειας

Στα παρακάτω, a είναι ένας κόσμος, με $a \in W$ και A μια πρόταση. Έστω $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$, ένα μοντέλο. Συμβολίζουμε τη φράση 'η A αληθεύει στο $\mathcal{M}$' με $\models_a^{\mathcal{M}} A$ ή εναλλακτικά με $\mathcal{M} \models_a A$. Τώρα θα δώσουμε τον αναδρομικό ορισμό της αλήθειας.

Ορισμός 0.3.
1. $\mathcal{M} \models_a \mathbb{P}_i$ αν και μόνο αν $a \in P_i$.
2. $\mathcal{M} \models_a T$.
3. Δεν ισχύει ποτέ $\mathcal{M} \models_a F$.
4. $\mathcal{M} \models_a \neg A$ αν και μόνο αν δεν ισχύει $\mathcal{M} \models_a A$.
5. $\mathcal{M} \models_a A \wedge B$ αν και μόνο αν $\mathcal{M} \models_a A$ και $\mathcal{M} \models_a B$.
6. $\mathcal{M} \models_a A \vee B$ αν και μόνο αν $\mathcal{M} \models_a A$ ή $\mathcal{M} \models_a B$.
7. $\mathcal{M} \models_a A \rightarrow B$ αν και μόνο αν Αν $\mathcal{M} \models_a A$ τότε $\mathcal{M} \models_a B$.
8. $\mathcal{M} \models_a A \leftrightarrow B$ αν και μόνο αν $\mathcal{M} \models_a A$ ανν $\mathcal{M} \models_a B$.
9. $\mathcal{M} \models_a \Box A$ αν και μόνο αν για κάθε $b \in W$ $\mathcal{M} \models_b A$.
10. $\mathcal{M} \models_a \Diamond A$ αν και μόνο αν υπάρχει $b \in W$ ώστε $\mathcal{M} \models_b A$.

Μια πρόταση A λέγεται έγκυρη, αν $\mathcal{M} \models_a A$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{M}$ και κάθε κόσμο $a \in W$. Τότε συμβολίζουμε $\models A$.

0.3 Βασικά αξιώματα

Ο σκοπός μας σε αυτή τη παράγραφο είναι να δούμε ποιες προτάσεις είναι έγκυρες. Ορισμένες προτάσεις έχουν ιδιαίτερη χρήση στην τροπική λογική. Αυτές λοιπόν θα έχουν όνομα. Ξεκινάμε με τη πρόταση

$$T. \quad \Box A \rightarrow A.$$

Θα δείξουμε ότι η πρόταση αυτή είναι έγκυρη. Έστω $\mathcal{M}$ τυχαίο μοντέλο και κόσμος $a \in W$ ώστε $\mathcal{M} \models_a \Box A$. Άρα για κάθε $b \in W$ $\mathcal{M} \models_b A$. Δηλαδή και για $a = b$. Έτσι $\mathcal{M} \models_a A$. Κατά συνέπεια η πρόταση T είναι έγκυρη.

$$5. \quad \Diamond A \to \Box\Diamond A.$$

Η πρόταση αυτή λέει πως αν κάτι είναι πιθανό, τότε είναι και αναγκαία πιθανό. θα δείξουμε πως και αυτή είναι έγκυρη. Έστω $\mathcal{M}$ τυχαίο μοντέλο και κόσμος $a \in W$ ώστε $\mathcal{M} \models_a \Diamond A$. Τότε υπάρχει $b \in W$ ώστε $\mathcal{M} \models_b A$. Άρα $\mathcal{M} \models_b \Diamond A$, και αυτό οφείλεται στην ανεξαρτησία του επιλεγόμενου κόσμου. Οπότε $\mathcal{M} \models_a \Box\Diamond A$.

Συνεχίζουμε με μια λίστα από αξιώματα, τη σημασία των οποίων θα τα αναλύσουμε στις επόμενες παραγράφους.

$$K. \quad \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

$$4. \quad \Box A \to \Box\Box A$$

$$D. \quad \Box A \to \Diamond A$$

$$B. \quad A \to \Box\Diamond A$$

$$H. \quad \Box(\Box A \to B) \vee (\Box B \to A)$$

$$G. \quad \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$$

$$Df\Diamond. \quad \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$$

Παράδειγμα 0.4. Εξετάστε αν η πρόταση $A \to \Box A$ είναι έγκυρη.

Απόδειξη. Η πρόταση δεν είναι έγκυρη. Έστω α και β, δύο διαφορετικοί κοσμοι. Θέτουμε W= { α,β }, $P_n = \{\alpha\}$, για κάθε $n \geq 0$. Τότε στο $\mathcal{M} = \mathcal{W}, \mathcal{P}$ ισχύει $\mathcal{M} \models_\alpha \mathbb{P}_0$ □

0.4 Σχέση τροπικής με κλασσική λογική

Η τροπική λογική είναι μια επέκταση της κλασσική λογικής. Κάθε πρόταση που αληθεύει στην κλασσική, επίσης αληθεύει στην τροπική. Ο κύριος λόγος είναι πως δεν αλλάζουμε τη λογική των συνδέσμων. Δηλαδή η ερμηνεία που δίνουμε στους γνωστούς συνδέσμους είναι ίδια με τη κλασσική. Έτσι, αν A

είναι ταυτολογία, με τη κλασσική έννοια (δηλαδή ο πίνακας αλήθειας έχει σε κάθε γραμμή 1), τότε $\models A$. Συμβολίζουμε με PL το σύνολο των κλασσικών προτασιακών ταυτολογιών

0.5 Τυπικές αποδείξεις και πλαίσια

Μια τυπική απόδειξη της πρότασης A από σύνολο υποθέσεων Τ είναι πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $A_1, ..., A_n$, ώστε σε κάθε βήμα είτε $A_i \in T$ είτε A_i είναι αξίωμα του συστήματος στο οποίο κάνουμε την τυπική απόδειξη, είτε A_i προέρχεται από εφαρμογή κάποιου κανόνα στα παραπάνω A_j, με $j < i$.

Οι δύο βασικοί κανόνες είναι

$$MP. \quad \text{Αν} \;\; A \to B \text{ και } A \text{ τότε } B$$

$$RN. \quad \text{Αν} \;\; A \;\; \text{τότε } \Box A$$

Λέμε πως μα πρόταση είναι θεώρημα του συστήματος, αν υπάρχει τυπική απόδειξη χωρίς υποθέσεις, παρά μόνο από τα αξιώματα του συστήματος.

Παράδειγμα 0.5. Να δείξετε ότι η πρόταση $T\Diamond. \quad A \to \Diamond A$ είναι τυπικό θεώρημα του συστήματος $T + Df\Diamond$.

Απόδειξη. 1. $\Box\neg A \to \neg A, \quad T$

2. $A \to \neg\Box\neg A, \quad$ 1. PL (αντιθετοαναστροφή)

3. $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A \quad Df\Diamond.$

4. $A \to \Diamond A \qquad$ 2., 3. PL

□

Σε αναλογία με τη κλασσική λογική, και στην τροπική έχομε τη πληρότητα. Αλλά για να συσχετίσουμε τις τυπικές αποδείξεις με εξέταση αλήθειας θα πρέπει να εισάγουμε την έννοια του πλαισίου.

Ορισμός 0.6. Έστω W συλλογή από κόσμους και Ε σχέση πάνω στο W. Τη τριάδα W, E, P, όπου P όπως και πριν, λέγεται πλαίσιο. Ανάλογα με τις ιδιότητες της Ε, χαρακτηρίζεται και το πλαίσιο. Για παράδειγμα αν Ε είναι συμμετρική, τότε και το πλαίσιο λέγεται σμμετρικό.

Το μοντέλο που ορίσαμε στην αρχή, δεν είναι παρά μόνο ειδική περίπτωση του πλαισίου, όπου κάθε δύο κόσμοι σχετίζοντα.

Ο ορισμός αλήθειας στο πλαίσιο δεν αλλάζει, για (1)- (8) του ορισμού 0.3. Αλλάζει όμως και το (9) και το (10) ως εξής:

- $\mathcal{M} \models_a \Box A$ αν και μόνο αν για κάθε $b \in W$ με $(a,b) \in E$, $\mathcal{M} \models_b A$.
- $\mathcal{M} \models_a \Diamond A$ αν και μόνο αν υπάρχει $b \in W$ με $(a,b) \in E$, ώστε $\mathcal{M} \models_b A$.

Παράδειγμα 0.7. Θεωρούμε $W = \{a_0, a_1, a_2\}$, $E = \{(a_0, a_0), (a_0, a_1), (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_2)\}$, $P_0 = \{a_0, a_1\}$. Τότε $a_0 \models \Box\mathbb{P}_0$, $a_1 \neg \models \Box\mathbb{P}_0$, $a_0 \neg \models \Box\Box\mathbb{P}_0$.

0.6 Χαρακτηρισμός πλαισίων και πληρότητα

Δίνουμε τη παρακάτω λίστα με τις ιδιότητες της E.

1. E είναι ανακλαστική αν ισχύει $\forall a \in W \quad (a,a) \in E$
2. E είναι μεταβατική αν ισχύει $\forall a,b,c \in W \quad (a,b),(b,c) \in E \Rightarrow (a,c)\ inE$
3. E είναι σειριακή αν ισχύει $\forall a \in W \exists b \in W \quad (a,b) \in E$
4. E είναι συμμετρική αν ισχύει $\forall a,b \in W \quad (a,b) \in E \Rightarrow (b,a)\ inE$
5. E είναι ευκλείδεια αν ισχύει $\forall a,b,c \in W \quad (b,a),(c,a) \in E \Rightarrow (b,c)\ inE$

Θεώρημα 0.8.

- *Μια πρόταση A είναι τυπικό θεώρημα στο K αν και μόνο αν A ισχύει σε κάθε πλαίσιο.*
- *Μια πρόταση A είναι τυπικό θεώρημα στο T αν και μόνο αν A ισχύει σε κάθε ανακλαστικό πλαίσιο.*
- *Μια πρόταση A είναι τυπικό θεώρημα στο 4 αν και μόνο αν A ισχύει σε κάθε μεταβατικό πλαίσιο.*
- *Μια πρόταση A είναι τυπικό θεώρημα στο D αν και μόνο αν A ισχύει σε κάθε σειριακό πλαίσιο.*
- *Μια πρόταση A είναι τυπικό θεώρημα στο B αν και μόνο αν A ισχύει σε κάθε συμμετρικό πλαίσιο.*
- *Μια πρόταση A είναι τυπικό θεώρημα στο 5 αν και μόνο αν A ισχύει σε κάθε ευκλείδειο πλαίσιο.*

Περιεχόμενα