Σημειώσεις του Μαθήματος

Μ250 Λογική

Σχήμα 1:

Κώστας Σκανδάλης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2006

Εισαγωγή

Η Λογική ασχολείται με τους νόμους ορθού συλλογισμού και μελετά τους κανόνες βάσει των οποίων βγάζουμε σωστά συμπεράσματα. Στις θετικές επιστήμες συνεχώς συναντάμε διαδικασίες διεξαγωγής συμπερασμάτων από κάποιες αποδεκτές υποθέσεις. Ειδικό ενδιαφέρον για τη Λογική έχουν οι μαθηματικές αποδείξεις. Κύριος σκοπός της Μαθηματικής Λογικής είναι η αυστηρή θεμελίωση και η μελέτη των μαθηματικών εννοιών όπως: θεώρημα, αξίωμα, συνέπεια, απόδειξη, αντίφαση κ.α..

Η αυθαίρετη χρήση της έννοιας ''απόδειξη'' και η αλόγιστη χρησιμοποίηση της καθημερινής, φυσικής γλώσσας στις αποδείξεις θεωρημάτων, οδήγησαν τα Μαθηματικά σε αντιφάσεις και γλωσσικά παράδοξα. Τον 19ο αιώνα ξεκίνησε μια προσπάθεια σωστής και αυστηρής θεμελίωσης των Μαθηματικών. Χάρη στο έργο των Frege, Peano, Boole και άλλων, πολλοί κλάδοι των Μαθηματικών πήραν μιά νέα, τυποποιημένη μορφή. Πολλές θεωρίες ξαναδιατυπώνονται με την αξιωματική μέθοδο και σε αυστηρή γλώσσα, που δεν έχει τις ασάφειες της καθημερινής γλώσσας.

Η κλασική Λογική του Αριστοτέλη φάνηκε ανεπαρκής για τη σωστή θεμελίωση των Μαθηματικών. Και τούτο διότι οι αποδεικτικοί κανόνες που μελέτησε ο Αριστοτέλης και χρησιμοποιούσαν οι μαθηματικοί από την εποχή του Ευκλείδη, ήταν διατυπωμένοι στη φυσική γλώσσα. Οι ασάφειες και η έλλειψη αυστηρότητας της γλώσσας δημιούργησαν τα γλωσσικά παράδοξα.

Η σύγχρονη Μαθηματική Λογική είναι ανάπτυξη και επέκταση της κλασικής Λογικής. Η σημερινή της μορφή οφείλεται στους Frege, Russell και Whitehead. Λέγεται και Συμβολική Λογική επειδή χρησιμοποιεί μιά αυστηρή, συμβολική γλώσσα και ένα από τα αντικείμενα μελέτης της είναι οι τυποποιμένες, συμβολικές γλώσσες των σύγχρονων Μαθηματικών.

Εξετάζοντας τις γλώσσες των μαθηματικών θεωριών, η Λογική δεν ενδιαφέρεται για την ''μαθηματική πραγματικότητα'', για συγκεκριμένα αντικείμενα των Μαθηματικών ούτε για τις ιδιότητές τους.

Η μελέτη των γλωσσών έχει δύο απόψεις: τη συντακτική και τη σημασιολογική (εννοιολογική) άποψη. Η πρώτη μελετά τις σώστες εκφράσεις της γλώσσας και τους κανόνες σύνταξης σε επίπεδο συμβόλων χωρίς να αποδίδει καμία ερμηνεία στα σύμβολα αυτά. Η άλλη άποψη ασχολείται με την απόδοση νοήματος και την απόδοση τιμών αληθείας στις εκφράσεις της γλώσσας.

Η σύγχρονη Μαθηματική Λογική έχει εφαρμογές και εκτός των Μαθηματικών. Είναι π.χ. βασικό μάθημα της Επιστήμης Υπολογιστών.

Οι σημειώσεις είναι χωρισμένες σε δύο μέρη. Το πρώτο είναι αφιερωμένο στον Προτασιακό Λογισμό και το δεύτερο στον Κατηγορηματικό Λογισμό.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ο Προτασιακός Λογισμός είναι ένας βασικός και στοιχειώδης κλάδος της Μαθηματικής Λογικής.

Στις φυσικές γλώσσες, π.χ. στην ελληνική, εκφραζόμαστε με προτάσεις. Κάποιες από αυτές είναι απλές και άλλες σύνθετες. Οι σύνθετες προτάσεις σχηματίζονται από απλούστερες με τη βοήθεια γλωσσικών συνδέσμων. Το νόημα μιας σύνθετης πρότασης καθορίζεται από το νόημα των προτάσεων που την αποτελούν και από τους συνδέσμους.

Η σημασιολογική άποψη του Προτασιακού Λογισμού ασχολείται με τον τρόπο απόδοσης νοήματος στις σύνθετες προτάσεις. Είναι ουσιαστικά μιά θεωρία των γλωσσικών συνδέσμων. Δεν μελετά ακριβώς τη σημασία των προτάσεων και δεν ενδιαφέρεται για το ειδικό, νοηματικό τους περιεχόμενο. Περιορίζεται σε μιά χονδρική περιγραφή της σημασίας των προτάσεων: τις χαρακτηρίζει απλώς ως αληθείς ή ψευδείς.[1]

Παρά την απλότητά του, ο Προτασιακός Λογισμός έχει πολλές εφαρμογές, ειδικά στα Μαθηματικά, όπου η έννοια της αλήθειας είναι βασική και πολύ σημαντική. Είναι απαραίτητο να ξέρουμε αν είναι αληθινές οι προτάσεις με τις οποίες διατυπώνονται τα θεωρήματα των Μαθηματικων και οι προτάσεις που χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις των θεωρημάτων αυτών.

Θα γνωρίσουμε παρακάτω, κυρίως, τη σημασιολογική άποψη του Προτασιακού Λογισμού. Θα μελετήσουμε τις έννοιες της ταυτολογίας και της συνέπειας, και θα γνωρίσουμε τους βασικούς Νόμους του Προτασιακού Λογισμού. Στο τέλος, στην παράγραφο 1.11 θα περιγράψουμε ένα τυπικό, αξιωματικό σύστημα γιά τον Προτασιακό Λογισμό και θα γνωρίσουμε τις έννοιες συντακτικής συνέπειας και τυπικού θεωρήματος. Οι δύο απόψεις του Προτασιακού Λογισμού συγκρίνονται στην τελευταία παράγραφο.

[1] Όπως και στην κλασική Λογική, δεχόμαστε δύο δυνατές τιμές αληθείας. Υπάρχουν όμως και άλλες, μη κλασικές λογικές, που δέχονται περισσότερες τιμές αληθείας.

1.1 Προτάσεις. Λογικές τιμές αληθείας.

Οι έννοιες **πρόταση**, **αληθής** και **ψευδής** είναι αρχικές έννοιες του Προτασιακού Λογισμού. Δεν ορίζονται. Τους όρους ''αληθής'' και ''ψευδής'' τους λέμε **λογικές τιμές** ή **τιμές αληθείας**. Δεχόμαστε ότι σε κάθε πρόταση αντιστοιχεί μία ακριβώς τιμή αληθείας.

Τις προτάσεις τις συμβολίζουμε με μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου: $p, q, r, \ldots$ Για τις λογικές τιμές χρησιμοποιούμε τα σύμβολα: **1** (για το ''αληθής'') και **0** (για το ''ψευδής'').

1.2 Λογικοί σύνδεσμοι. Λογικές πράξεις.

Στα Μαθηματικά, όπως και στις φυσικές γλώσσες, χρησιμοποιούνται πολλοί σύνδεσμοι. Ο Προτασιακός Λογισμός μελετά μονό μερικούς απ΄ αυτούς. Θα δούμε όμως αργότερα ότι αυτοί οι σύνδεσμοι είναι αρκετοί και καλύπτουν πλήρως τους γλωσσικούς. Έτσι π.χ. οι ακόλουθες προτάσεις:

1. Η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει λύσεις *εάν και μόνον εάν* $\beta^2 \geq 4\gamma$
2. Για να έχει λύσεις η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ *αρκεί και πρέπει* να ισχύει $\beta^2 \geq 4\gamma$
3. Η συνθήκη $\beta^2 \geq 4\gamma$ είναι *αναγκαία και ικανή* για να έχει λύσεις η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$

εκφράζουν το ίδιο γεγονός με διαφορετικά λόγια. Περιπτώσεις σαν την παραπάνω περιγράφονται από έναν λογικό σύνδεσμο, τον σύνδεσμο της ισοδυναμίας.

Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε τους πέντε βασικούς **λογικούς συνδέσμους**.
Αυτοί είναι:
ο σύνδεσμος ''όχι'' της άρνησης
ο σύνδεσμος ''και'' της σύζευξης
ο σύνδεσμος ''ή'' της διαζέυξης
ο σύνδεσμος ''αν ... τότε ...'' της συνεπαγωγής
ο σύνδεσμος ''εάν και μόνον εάν'' της ισοδυναμίας

Με τη βοήθεια αυτών των συνδέσμων σχηματίζουμε σύνθετες προτάσεις από απλούστερες. Οι λογικοί σύνδεσμοι ορίζουν λοιπόν κάποιες πράξεις πάνω στις προτάσεις. Αυτές οι πράξεις λέγονται **λογικές πράξεις**.

Τα αποτελέσματα των λογικών πράξεων πάνω σε προτάσεις είναι πάλι προτάσεις (σύνθετες προτάσεις). Γιά τις λογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων θα δεχτούμε ορισμούς πού συμφωνούν με την ''κοινή'' λογική των φυσικών γλωσσών. Οι ορισμοί περιγράφονται και από τους λεγόμενους **πίνακες τιμών αληθείας**.

Η λογική τιμή του αποτελέσματος μιάς λογικής πράξης καθορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές των προτάσεων από τις οποίες σχηματίστηκε η σύνθετη πρόταση.

ΑΡΝΗΣΗ

Άρνηση μιας πρότασης p λέμε την πρόταση ''όχι p'' που συμβολίζεται

$$\neg p$$

Δεχόμαστε ότι η άρνηση της πρότασης p είναι αληθής όταν η πρόταση p είναι ψευδής και ότι η άρνηση της πρότασης p είναι ψευδής όταν η p είναι αληθής.

p	$\neg p$
0	**1**
1	**0**

Σημείωση.. Συχνά στα Μαθηματικά η άρνηση $\neg p$ της πρότασης p διαβάζεται και ''δεν p'', ''δεν ισχύει p'' ή ''δεν είναι αλήθεια, ότι p''. Έτσι π.χ. η άρνηση της πρότασης

''υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$''

διαβάζεται

''δεν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$'' ή

''δεν είναι αλήθεια, ότι υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$''

Στον Προτασιακό Λογισμό περιοριζόμαστε σε έναν μόνο τρόπο εκφώνισης της άρνησης λέμε ''όχι p'' και αποφεύγουμε τις άλλες εκφράσεις, ειδικά την τελευταία.[2]

Η άρνηση ως λογική πράξη είναι μονομελής. Εφαρμοζόμενη σε μία πρόταση p δίνει ως αποτέλεσμα μιά νέα πρόταση, την $\neg p$. Λέμε ότι το σύμβολο είναι μονοθέσιο. Οι υπόλοιπες λογικές πράξεις είναι διμελείς και τα αντίστοιχα σύμβολα είναι διθέσια.

ΣΥΖΕΥΞΗ

Σύζευξη δύο προτάσεων p, q λέμε την πρόταση ''p και q'' που συμβολίζεται

$$p \wedge q$$

Δεχόμαστε ότι η σύζευξη των προτάσεων p, q είναι αληθής μόνον στην περίπτωση που και η πρόταση p και η πρόταση q είναι αληθείς. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις η σύζευξη είναι ψευδής.

p	q	$p \wedge q$
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

ΔΙΑΖΕΥΞΗ

Διάζευξη δύο προτάσεων p, q λέμε την πρόταση ''p ή q'' που συμβολίζεται

$$p \vee q$$

Δεχόμαστε ότι η διάζευξη των προτάσεων p, q είναι αληθής αν *τουλάχιστον* μία από τις προτάσεις p, q είναι αληθής. Στην περίπτωση που και η πρόταση p και η πρόταση q είναι ψευδείς, η διάζευξη τους είναι ψευδής.

[2] Ο όρος ''είναι αλήθεια ότι p'' είναι έκφραση μιας γλώσσας στην οποία σχολιάζεται η υπό μελέτη γλώσσα (στην οποία ανήκει η p). Η μη διάκριση μεταξύ της λεγόμενης μεταγλώσσας και της εξεταζόμενης γλώσσας μπορεί να οδηγήσει σε γλωσσικά παράδοξα.

p	q	$p \vee q$
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

Σημείωση.. Η διάζευξη $p \vee q$ διαβάζεται και "p είτε q", όχι όμως "ή p ή q". Ο ορισμός που δεχτήκαμε παραπάνω αντιστοιχεί στην εγκλειστική διάζευξη της καθημερινής γλώσσας και όχι στην αποκλειστική. Την αποκλειστική διάζευξη $p \veebar q$ θα την ορίσουμε αργότερα με βάση τις υπόλοιπες λογικές πράξεις.

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ

Συνεπαγωγή δύο προτάσεων p, q λέμε την πρόταση "αν p , τότε q" που συμβολίζεται:

$$p \to q$$

Το πρώτο μέρος της συνεπαγωγής (δηλαδή η πρόταση p) λέγεται *υπόθεση* και το δεύτερο μέρος (η πρόταση q) λέγεται *συμπέρασμα* της συνεπαγωγής.

Δεχόμαστε ότι μια συνεπαγωγή είναι ψευδής *μόνο* στην περίπτωση αληθινής υπόθεσης και ψευδούς συμπεράσματος. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις η συνεπαγώγη είναι αληθής.

p	q	$p \to q$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Στα Μαθηματικά, εκτός από το "αν ..., τότε ...", χρησιμοποιούνται και άλλοι τρόποι γιά την έκφραση της συνεπαγωγής. Έτσι π.χ. διαβάζουμε την $p \to q$ και ως:
"p συνεπάγεται q", "q έπεται της p",
"η p είναι ικανή συνθήκη για την q",
"η q είναι αναγκαία συνθήκη για την p",
"αρκεί p για την q",
"αν p πρέπει q".

Όπως φαίνεται από τον πίνακα, η συνεπαγωγή (ως λογική πράξη) *δεν* είναι συμμετρική. Χρειάζεται λοιπόν προσοχή στη χρήση των παραπάνω φράσεων. Απαγορεύεται η εναλλακτική χρησιμοποίηση των όρων ικανή - αναγκαία, καθώς και των αρκεί - πρέπει.

Σημείωση.: Ίσως δεν είναι αμέσως φανερό αν ο ορισμός τιμών αληθείας για τη συνεπαγωγή συμφωνεί με την "κοινή λογική" και τη διαίσθησή μας. Ειδικά οι δύο πρώτες γραμμές του παραπάνω πίνακα δημιουργούν αμφιβολίες και επιφυλάξεις. Είναι οι περιπτώσεις συνεπεγωγής με ψευδή υπόθεση. Ας δούμε όμως πότε η διαίσθηση μας λέει ότι *δεν* αληθεύει μιά συνεπαγωγή "αν p, τότε q". Αυτό συμβαίνει ακριβώς οταν ισχύει "p και όχι q". Η τελευταία πρόταση είναι αληθινή *μόνο* στην περίπτωση που η p είναι αληθής και η q

είναι ψευδής. Άρα μόνο σ' αυτή την περίπτωση η συνεπαγωγή ''αν p, τότε q'' είναι ψευδής.

Έστω $p \to q$ συνεπαγωγή. Η συνεπαγωγή:

1. $\neg p \to \neg q$ λέγεται **αντίθετή** της,
2. $q \to p$ λέγεται **αντίστροφή** της,
3. $\neg q \to \neg p$ λέγεται **αντιστροφοαντίθετή** της.

Τις λογικές τιμές των παραπάνω συνεπαγωγών μπορούμε να τις δούμε, και να τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες τιμές της συνεπαγωγής $p \to q$, κατασκευάζοντας έναν πίνακα λογικών τιμών. Η κατασκευή βασίζεται στους πίνακες λογικών τιμών για την συνεπαγωγή και την άρνηση.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \to \neg q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

Οι λογικές τιμές της συνεπαγωγής $p \to q$ δεν ταυτίζονται ούτε με τις λογικές τιμές της αντίστροφης συνεπαγωγής $q \to p$, ούτε τις αντίθετης συνεπαγωγής $\neg p \to \neg q$. Η πρώτη παρατήρηση σημαίνει ότι η συνεπαγωγή (ως λογική πράξη) δεν είναι συμμετρική. Το γεγονός αυτό συμφωνεί με την ''κοινή λογική''. Συμφωνεί επίσης με τη διαίσθησή μας και μιά παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε μελετώντας τον παραπάνω πίνακα. Βλέπουμε ότι η συνεπαγωγή $p \to q$ και η αντιστοφοαντίθετή $\neg q \to \neg p$ έχουν πάντα τις ίδιες λογικές τιμές. Οι εκφράσεις: ''αν p, τότε q'' και ''αν όχι q, τότε όχι p'', έχουν το ίδιο νόημα.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

Ισοδυναμία δύο προτάσεων p, q λέμε την πρόταση ''p εάν και μόνον εάν q'' που συμβολίζεται:

$$p \leftrightarrow q$$

Δεχόμαστε ότι η ισοδυναμία δύο προτάσεων είναι αληθής στις περιπτώσεις που οι προτάσεις έχουν την ίδια λογική τιμή. Αν οι προτάσεις έχουν διαφορετικές λογικές τιμές, η ισοδυναμία τους είναι ψευδής.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Όπως είδαμε στην αρχή της παραγράφου, υπάρχουν και άλλοι τρόποι να εκφράσουμε την ισοδυναμία δύο προτάσεων.

1.3 Τύποι του Προτασιακού Λογισμού.

Για τη μελέτη της δομής των σύνθετων προτάσεων, που είναι ένας από τους σκοπούς του Προτασιακού Λογισμου, χρειαζόμαστε πιό αυστηρή, τυποποιημένη γλώσσα. Μιά τέτοια γλώσσα είναι απαραίτητη γιά την απόλυτη ακρίβεια της έκφρασης.

Ξεκινώντας από απλές προτάσεις, με τη βοήθεια των λογικών συνδέσμων, σχηματίζουμε σύνθετες προτάσεις. Με πολλαπλή εφαρμογή των λογικών πράξεων χτίζουμε άλλες, πιο σύνθετες προτάσεις. Για να υπογραμμίσουμε τη σειρά με την οποία εφαρμόστηκαν οι πράξεις, χρησιμοποιούμε παρενθέσεις. Παρακάτω θα δούμε μιά πιο αυστηρή περιγραφή των κανόνων σχηματισμού σύνθετων προτάσεων.

Για να συμβολίσουμε προτάσεις, χρησιμοποιούμε τα γράμματα:

$$p,\, q,\, r, \ldots,\, p_1,\, p_2,\, p_3, \ldots$$

που λέγονται **προτασιακές μεταβλητές**. Το **αλφάβητο** της γλώσσας του Προτασιακού Λογισμού, εκτός από τις προτασιακες μεταβλητές. περιέχει και άλλα σύμβολα. Αυτά είναι τα **σύμβολα λογικών συνδέσμων**:

$$\neg,\, \wedge,\, \vee,\, \rightarrow,\, \leftrightarrow$$

και **παρενθέσεις**: (,) .

Οι σωστές εκφράσεις της γλώσσας του Προτασιακού Λογισμού είναι κάποιες πεπερασμένες ακολουθίες των συμβόλων του αλφαβήτου. Όχι όμως όλες. Δεν είναι π.χ. σωστές οι εκφράσεις:

$$\rightarrow p, \quad q\neg \vee r, \quad)pq\wedge$$

Υπάρχουν συγκεκριμένοι κανόνες ‘‘γραμματικής’’ για τον σχηματισμό των σωστών εκφράσεων.

Οι **τύποι του Προτασιακού Λογισμού** ορίζονται ως εξής:

1. Οι προτασιακές μεταβλητές είναι τύποι του Προτασιακού Λογισμού.

2. Αν φ και ψ είναι τύποι του Προτασιακού Λογισμού, τότε και οι εκφράσεις:

$$(\neg\varphi),\, (\varphi \wedge \psi),\, (\varphi \vee \psi),\, (\varphi \rightarrow \psi),\, (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

είναι επίσης τύποι του Προτασιακού Λογισμού.
Μερικά παραδείγματα τύπων του Προτασιακού Λογισμού είναι τα ακόλουθα:

$$(\neg(\neg p)), \quad (p \rightarrow \neg(q \leftrightarrow p)), \quad (((p \wedge q) \vee r) \vee (\neg q)).$$

Οι τύποι του Προτασιακού Λογισμού, αν δεν υπάρχει περίπτωση να δημιουργηθεί παρεξήγηση, λέγονται απλώς τύποι. Για να τους συμβολίσουμε χρησιμοποιούμε τα γράμματα: $\varphi,\, \psi,\, \ldots,\, \varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3, \ldots$

Κάθε τύπος, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, προκύπτει από ένα πεπερασμένο πλήθος εφαρμογών των λογικών συνδέσμων σε προτασιακές μεταβλητές. Είναι φανερό ότι το πλήθος των λογικών συνδέσμων σε έναν τύπο είναι ίσο με το πλήθος των αριστερών παρενθέσεων (και των δεξιών παρενθέσεων). Συχνά όμως, χάριν απλότητας, δεν γράφουμε όλες τις παρενθέσεις. Τις παραλείπουμε όταν δεν υπάρχει αμφιβολία για το που αναφέρονται τα σύμβολα συνδέσμων. Έτσι σχηματίζονται κάποιες **συντμήσεις τύπων** του Προτασιακού Λογισμού, τους οποίους επίσης θα λέμε τύπους. Δεν είναι π.χ. απαραίτητο να γράφουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις σε έναν τύπο. Συμφωνούμε (συμβατικά) ότι οι λογικές πράξεις εκτελούνται με τη σειρά που τις γνωρίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Έτσι λοιπόν το σύμβολο $\neg$ της άρνησης δεσμεύει πιο ισχυρά από όλα τα άλλα σύμβολα λογικών συνδέσμων. Το σύμβολο $\wedge$ της σύζευξης δεσμεύει πιο ισχυρά από τα $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ κ. ο. κ.

Παραδείγματα: Αντί του $((\neg p) \rightarrow q)$ γράφουμε $\neg p \rightarrow q$. Στον τύπο $(\neg(p \rightarrow q))$ δεν μπορούμε όμως να παραλείψουμε όλες τις παρενθέσεις, αφού το σύμβολο $\neg$ της άρνησης αναφέρεται στην συνεπαγωγή $p \rightarrow q$. Για τον τύπο $(\neg(p \rightarrow q))$, μπορούμε να γράψουμε πιο σύντομα $\neg(p \rightarrow q)$. Ο τύπος $(p \wedge (q \vee r))$ γράφεται και ως $p \wedge (q \vee r)$, ενώ ο τύπος $(p \vee (q \wedge r))$ έχει σύντμηση $p \vee q \wedge r$.

Σημείωση.. Στις εφαρμογές, οι τύποι του Προτασιακού Λογισμού γίνονται προτάσεις μετά την αντικατάσταση των προτασιακών μεταβλητών τους με συγκεκριμένες προτάσεις. Το νόημα των προτάσεων που προκύπτουν καθορίζεται από το νόημα των απλών προτάσεων και από την ερμηνεία των λογικών συνδέσμων.

1.4 Αποτιμήσεις

Ο Προτασιακός Λογισμός δεν ασχολείται με άλλες τιμές των προτάσεων εκτός από τις δύο τιμές αληθείας **0** και **1**. Όταν δοθούν λογικές τίμες στις προτασιακές μεταβλήτες ενός τύπου, η λογική τιμή του καθορίζεται μονοσήμαντα. Την διαδικασία απόδοσης λογικής τιμής σ' έναν τύπο μπορούμε να την δούμε ως αντικατάσταση των μεταβλήτων του τύπου με τις τιμές **0** και **1**. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τους πίνακες τιμών αληθείας για τους λογικούς συνδέσμους, βρίσκουμε σταδιακά τις λόγικες τιμές των πιο συνθετών τύπων.

Παράδειγμα. Η λογική τιμή του τύπου $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$, όταν οι λογικές τιμές των μεταβλητών p, q είναι **0**, **1** αντίστοιχα, είναι **0**. Από τους πίνακες της συνεπαγωγής και της άρνησης βρίσκουμε ότι ο τύπος $(p \rightarrow q)$ έχει τιμή **1** και ο τύπος $\neg q$ έχει τιμή **0**. Μετά, από τον πίνακα της σύζευξης βλέπουμε ότι ο τύπος $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ παίρνει, σ' αυτήν την περιπτώση, τιμή **0**.

Αργότερα θα περιγράψουμε πιο αυστηρά τον τρόπο απόδοσης λογικής τιμής στους τύπους του Προτασιακού Λογισμού. Είναι όμως φανερό από τα παραπάνω ποιά είναι αυτή η διαδικασία.

Υπάρχει μια απλή και αποτελεσματική μέθοδος εύρεσης λογικών τιμών των τύπων με βάση τις τιμές των μεταβλητών τους. Είναι η λεγόμενη *μέθοδος πινάκων* λογικών τιμών (ή $\mathbf{0}-\mathbf{1}$ μέθοδος). Για να βρούμε τις διάφορες λογικές τιμές ενός τύπου με ν μεταβλητές, φτιάχνουμε έναν πίνακα με 2^n γραμμές (τόσες είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις αποτίμησης των n μεταβλητών). Στις πρώτες n στήλες του πίνακα γράφουμε τις τιμές των μεταβλητών (μία αποτίμηση σε κάθε γραμμή). Η τελευταία στήλη θα περιέχει τις λογικές τιμές του εξεταζόμενου τύπου. Τις τιμές αυτές τις βρίσκουμε σταδιακά, συμπληρώνοντας τις τιμές των απλούστερων τύπων από τους οποίους αποτελείται ο εξεταζόμενος. Σ' αυτούς τους ενδιάμεσους τύπους είναι αφιερωμένες οι υπόλοιπες στήλες του πίνακα.

Παράδειγμα: Για να βρούμε τον πίνακα λογικών τιμών του τύπου $\neg p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$, μελετάμε πρώτα τους τύπους $\neg p$ και $(q \wedge \neg r)$. Νωρίτερα βρίσκουμε τις λογικές τιμές του τύπου $\neg r$. Συμπληρώνοντας τις αντίστοιχες στήλες, έχουμε τον επόμενο πίνακα:

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$(q \wedge \neg r)$	$\neg p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**

Η διαδικασία απόδοσης λογικής τιμής σε τύπους του Προτασιακού Λογισμού μπορεί να περιγραφεί και ως εξής.

Αποτίμηση των μεταβλητών λέμε κάθε αντιστοίχιση V των λογικών τιμών $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ στις προτασιακές μεταβλητές. Κάθε αποτίμηση V των μεταβλητών επεκτείνεται σε μια **αποτίμηση** V^* των τύπων του Προτασιακού Λογισμού. Η τιμή $V^*(\varphi)$ ενός τύπου φ, που προκύπτει από την αποτίμηση V των μεταβλητών, μπορεί να οριστεί με επαγωγή ως προς το πλήθος των συμβόλων λογικών συνδέσμων του τύπου. Για τύπους με $\mathbf{0}$ σύμβολα συνδέσμων, δηλαδή για τις προτασιακές μεταβλητές, θέτουμε απλώς $V^*(p) = V(p)$. Αν γνωρίζουμε τις αποτιμήσεις V^* όλων των τύπων με το πολύ n σύμβολα συνδέσμων, μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της αποτίμησης V^* σε τύπους με $n+1$ σύμβολα συνδέσμων. Συγκεκριμένα. γνωρίζοντας τις τιμές $V^*(\varphi)$ και $V^*(\psi)$ των τύπων φ και ψ, αντίστοιχα, ορίζουμε τις τιμές των τύπων:

$$V^*(\neg\varphi),\, V^*(\varphi \wedge \psi),\, V^*(\varphi \vee \psi),\, V^*(\varphi \rightarrow \psi),\, V^*(\varphi \leftrightarrow \psi)$$

σύμφωνα με τους πίνακες τιμών αληθείας των λογικών συνδέσμων.

Μια παραλλαγή του τελευταίου βήματος του ορισμού τις αποτίμησης V^* δίνει η άσκηση 15.

Σημείωση.. Μελετώντας τον ορισμό της αποτίμησης V^* που προκύπτει από μια αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών, βλέπουμε ότι η τιμή $V^*(\varphi)$ ενός τύπου φ δεν εξαρτάται από τις τιμές των μεταβλητών που δεν εμφανίζονται στον τύπο φ. Για την εύρεση της λογικής τιμής $V^*(\varphi)$, αρκεί να γνωρίζουμε μόνον τις τιμές που δίνει η αποτίμηση V στις μεταβλητές του τύπου φ. Έτσι π.χ. για να βρούμε την τιμή $V^*((p \rightarrow q) \wedge \neg q)$, αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές $V(p)$ και $V(q)$.

1.5 Ταυτολογίες

Συμβαίνει, η λογική τιμή ενός τύπου του Προτασιακού Λογισμού να είναι σταθερή, ανεξάρτητα από τις τιμές που μπορούν να δοθούν στις μεταβλητές του. π.χ. ο τύπος $p \vee \neg p$ είναι πάντα αληθής. Τέτοιοι τύποι έχουν ειδικό ενδιαφέρον στη Λογική.

Ένας τύπος του Προτασιακού Λογισμού λέγεται **λογικά αληθής** ή **ταυτολογία**, αν λαμβάνει την λογική τιμή **1** για οποιαδήποτε αποτίμηση των μεταβλητών του. Ένας τύπος του Προτασιακού Λογισμού λέγεται **λογικά ψευδής** ή **αντίφαση**, αν για οποιαδήποτε αποτίμηση των μεταβλητών του, λαμβάνει την λογική τιμή $\mathbf{0}$.

Οι τύποι που δεν είναι ούτε ταυτολογίες ούτε αντιφάσεις λέγονται **σχετικοί**. Οι τύποι που δεν είναι αντιφάσεις, δηλαδή οι τύποι που για μια τουλάχιστον αποτίμηση των μεταβλητών τους παίρνουν την λογική τιμή $\mathbf{1}$, λέγονται **ικανοποιήσιμοι**.

Οι ταυτολογίες του Προτασιακού Λογισμού εκφράζουν τους βασικούς νόμους του σωστού συλλογισμού όχι μόνο των Μαθηματικών αλλά και κάθε άλλης επιστήμης.

Είναι φανερό ότι ένας τύπος φ είναι ταυτολογία τότε και μόνον τότε, όταν ο τύπος $\neg\varphi$ είναι αντίφαση.

Παραδείγματα. Ο τύπος $\neg p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$, που εξετάσαμε πιο πάνω είναι σχετικός. Για κάποιες αποτιμήσεις παίρνει την τιμή $\mathbf{1}$, ενώ για άλλες παίρνει την τιμή $\mathbf{0}$. Δεν είναι λοιπόν ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση.

Ο τύπος $p \to p$ είναι αληθής για κάθε τιμή της μεταβλητής p, άρα είναι ταυτολογία. Ο τύπος $p \wedge \neg p$ είναι αντίφαση.

Τη μέθοδο των πινάκων, που χρησημοποιούμε για την εύρεση των λογικών τιμών ενός τύπου για όλες τις δυνατές αποτιμήσεις, μπορούμε να την εφαρμόσουμε για να ελέγξουμε αν ένας τύπος είναι ταυτολογία. Η μέθοδος αυτή είναι εννοιολογικά απλή και αποτελεσματική. Είναι όμως αρκετά επίπονη και κουραστική, ειδικά για τύπους με μεγάλο πλήθος μεταβλητών.

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να διαπιστώσουμε πιο σύντομα ότι ένας τύπος του Προτασιακού Λογισμού είναι ταυτολογία. Ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Υποθέτουμε ότι ο τύπος δεν είναι ταυτολογία, δηλαδή ότι για κάποια αποτίμηση παίρνει τη λογική τιμή $\mathbf{0}$. Σταδιακά βρίσκουμε ποιές πρέπει να είναι τότε οι λογικές τιμές των μεταβλητών του τύπου. Αν από τον έλεγχο προκύψει ότι κάποια από τις μεταβλητές θα πρέπει να είχε σ΄ αυτήν την αποτίμηση τη λογική τιμή $\mathbf{0}$ και $\mathbf{1}$ συγχρόνως, καταλήγουμε σε άτοπο. Είναι φανερό πως δεν υπάρχει τέτοια αποτίμηση. Αφού λοιπόν δεν υπάρχει αποτίμηση που να δίνει στον τύπο τη λογική τιμή $\mathbf{0}$, έπεται ότι ο τύπος είναι ταυτολογία.

Ας δούμε ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της μεθόδου. Για να ελέγξουμε ότι ο τύπος

$$(p \to q) \to (r \vee p \to r \vee q)$$

είναι ταυτολογία, υποθέτουμε προς στιγμή, ότι δεν είναι. Υποθέτουμε δηλαδή ότι υπάρχει μια αποτίμηση V των μεταβλητών p, q, r για την οποία ο τύπος είναι ψευδής. Τότε όμως οι τύποι $p \to q$ και $r \vee p \to r \vee q$, πρέπει να έχουν τις λογικές τιμές $\mathbf{1}$ και $\mathbf{0}$ αντίστοιχα. Το τελευταίο ισχύει μόνον όταν ο τύπος $r \vee p$ έχει τιμή $\mathbf{1}$ και ο τύπος $r \vee q$ τιμή $\mathbf{0}$. Έπεται ότι $V(r) = \mathbf{0}$ και $V(q) = \mathbf{0}$. Επειδή όμως είχαμε $V^*(r \vee p) = \mathbf{1}$, πρέπει να είναι $V(p) = \mathbf{1}$. Αλλά από το γεγονός $V^*(p \to q) = \mathbf{1}$, και το $V(q) = \mathbf{0}$, προκύπτει ότι $V(p) = \mathbf{0}$. Η αποτίμηση V θα έδινε στην μεταβλητή p τιμή $\mathbf{0}$ και $\mathbf{1}$ συγχρόνως. Αυτό είναι αδύνατο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει αποτίμηση που δίνει στον τύπο μας την τιμή $\mathbf{0}$ και συνεπώς αυτός είναι ταυτολογία.

Η διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$(r$	$\vee$	p	$\rightarrow$	r	$\vee$	$q)$
			0							
	1						**0**			
					1				**0**	
								0		**0**
				0		**1**				
0		**0**								
0	$<-$	αδύνατο	$->$			**1**				

1.6 Νόμοι του Προτασιακού Λογισμού

Οι πιο γνωστές ταυτολογίες λέγονται Νόμοι του Προτασιακού Λογισμού. Παρακάτω αναφέρονται μερικοί από αυτούς τους νόμους.

1. Νόμος ταυτότητας:
$$p \leftrightarrow p$$

2. Αντιμεταθετικοί νόμοι:
$$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$$
$$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$$

3. Προσεταιριστικοί νόμοι:
$$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

4. Επιμεριστικοί νόμοι:
$$(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$
$$(p \wedge q) \vee r \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

5. Νόμος απόκλεισης τρίτου:
$$p \vee \neg p$$

6. Νόμος διπλής άρνησης:
$$\neg\neg p \leftrightarrow p$$

7. Νόμοι του de Morgan:
$$\neg (p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg (p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

8. Νόμος αντιθετοαντιστροφής:
$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

9. Νόμος υποθετικού συλλογισμού (ή μετάβασης συνεπαγωγής):

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

10. Νόμος απόσπασης (ή **Modus Ponens**):

$$p \wedge (p \to q) \to q$$

11. Νόμος συλλογισμού αρνητικής μορφής (ή **Modus Tollens**):

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$$

12. Νόμοι αντικατάστασης:

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg (\neg p \vee \neg q)$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow \neg (\neg p \wedge \neg q)$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$$

13. Νόμος άρνησης συνεπαγωγής:

$$\neg (p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

14. Νόμος άρνησης ισοδυναμίας:

$$\neg (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Το ότι οι παραπάνω τύποι είναι λογικά αληθινοί διαπιτώνεται εύκολα με την κατασκευή πινάκων λογικών τιμών.

1.7 Επάρκεια λογικών συνδέσμων

Μέχρι τώρα μελετήθηκαν πέντε λογικοί σύνδεσμοι. Στη συνέχεια θα δούμε ότι αυτοί είναι αρκετοί για να εκφράσουμε όλους τους δυνατούς συνδέσμους της φυσικής γλώσσας. Συμβαίνει μάλιστα να φτάνουν για την πλήρη έκφραση και λιγότεροι σύνδεσμοι.

Τις λογικές πράξεις, που ορίζονται από τους συνδέσμους, μπορούμε να τις δούμε και ως πράξεις πάνω στις λογικές τιμές **0** και **1**. Η άρνηση είναι μια μονομελής πράξη, ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις βασικές λογικές πράξεις είναι διμελείς. Οποιοσδήποτε άλλος σύνδεσμος ορίζει μια πράξη πάνω στις λογικές τιμές. Αντίστροφα, όλες τις απεικονίσεις του συνόλου $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ των τιμών αληθείας στον εαυτό του, μπορούμε να τις θεωρήσουμε μονομελείς πράξεις πάνω σε προτάσεις και τις απεικονίσεις του συνόλου $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \times \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ των ζευγών τιμών αληθείας στο σύνολο $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, μπορούμε να τις θεωρήσουμε διμελείς πράξεις πάνω σε προτάσεις.

Παράδειγμα. Ο διπλανός πίνακας ορίζει μια διμελή πράξη πάνω σε προτάσεις. Το αποτέλεσμα αυτής της πράξης πάνω σε δύο προτάσεις p, q είναι αληθές μόνο στην περίπτωση που ακριβώς μία από τις προτάσεις p, q είναι αληθής.

Η παραπάνω πράξη είναι γνωστή ως *αποκλειστική διάζευξη* και συμβολίζεται συνήθως με $\veebar$.

Μπορούμε εύκολα να βρούμε έναν τύπο του Προτασιακού Λογισμού, που έχει πίνακα λογικών τιμών ίδιο με τον παραπάνω, και δεν χρησιμοποιεί άλλους συνδέσμους εκτός από τους βασικούς. Ένας τέτοιος τύπος είναι π.χ. ο $p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q$.

Επειδή ο τελευταίος τύπος έχει τις ίδιες λογικές τιμές μ΄ αυτές της αποκλειστικής διάζευξης $p \veebar q$, μπορεί να θεωρηθεί ορισμός της.

p	q	$p \veebar q$
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Λέμε ότι δύο τύποι φ, ψ του Προτασιακού Λογισμού είναι **λογικά ισοδύναμοι**, όταν για κάθε αποτίμηση των μεταβλητών οι τύποι φ, ψ παίρνουν την ίδια λογική τιμή. Αυτό, προφανώς, συμβαίνει όταν ο τύπος $\varphi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία. Αν οι τύποι φ, ψ είναι λογικά ισοδύναμοι, θα γράφουμε

$$\varphi \equiv \psi$$

Ας προσέξουμε ότι η έκφραση $\varphi \equiv \psi$ *δεν* είναι τύπος του Προτασιακού Λογισμού. Είναι μια συντομογραφία της ελληνικής γλώσσας, την οποία χρησιμοποιούμε εδώ ως *μεταγλώσσα* για την περιγραφή του Προτασιακού Λογισμού. Η διαφορά μεταξύ της γλώσσας του Προτασιακού Λογισμού και της μεταγλώσσας φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα. Η έκφραση $p \leftrightarrow \neg p$ είναι ένας τύπος του Προτασιακού Λογισμού. Δεν είναι ταυτολογία. Δεν μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι οι τύποι p και $\neg p$ είναι λογικά ισοδύναμοι, ούτε να γράψουμε $p \equiv \neg p$.

Παράδειγμα. Οι τύποι $p \to q$ και $\neg p \vee q$ είναι λογικά ισοδύναμοι, διότι ο τύπος $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ είναι ταυτολογία (βλ. νόμοι αντικατάστασης). Μπορούμε λοιπόν να γράφουμε $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

Το παραπάνω, δηλαδή το γεγονός $p \to q \equiv \neg p \vee q$, αποτελεί βάση για τον ορισμό της συνεπαγωγής μέσω της άρνησης και της διάζευξης. Θα δούμε στη συνέχεια ότι από την άρνηση και την διάζευξη μπορουν να οριστούν όλοι οι υπόλοιποι λογικοί σύνδεσμοι. Από τους νόμους αντικατάστασης έχουμε:

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Η πρώτη παρατήρηση δίνει έναν ορισμό της σύζευξης μέσω της άρνησης και της διάζευξης. Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη παρατήρηση και τους ορισμούς της συνεπαγωγής και της σύζευξης, βρίσκουμε έναν ορισμό της ισοδυναμίας μέσω της άρνησης και της διάζευξης. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι πέντε βασικοί λογικοί σύνδεσμοι μπορούν να εκφραστούν με βάση μόνο δύο από αυτούς. Ισχύει κάτι περισσότερο. Με τη βοήθεια της άρνησης και της διάζευξης μπορούν να οριστούν όλες οι δυνατές πράξεις πάνω στις προτάσεις.

Υπάρχουν 4 μονομελείς και 16 διμελείς πράξεις πάνω στις λογικές τιμές[3] . Αυτές μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια των πέντε βασικών πράξεων, άρα και με τη βοήθεια της άρνησης και της διάζευξης.

Το παραπάνω μπορούμε, με άλλα λόγια, να το περιγράψουμε και ως εξής. Αν φανταστούμε έναν οποιονδήποτε γλωσσικό σύνδεσμο με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να σχηματίζουμε σύνθετες προτάσεις και τέτοιον ώστε αυτός καθορίζει μονοσήμαντα τη λογική τιμή της σύνθετης πρότασης με βάση τις τιμές των προτάσεων που την αποτελούν, τότε αυτός ο σύνδεσμος μπορεί να οριστεί μέσω των βασικών συνδέσμων: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Έπεται ότι κάθε λογικός σύνδεσμος μπορεί να εκφραστεί μόνο με τους σύνδεσμους: $\neg$, $\vee$.

Το γεγονός αυτό το σχολιάζουμε λέγοντας ότι το σύστημα συνδέσμων $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκές (ή πλήρες). Γενικά, λέμε ότι ένα σύστημα συνδέσμων είναι **επαρκές**, αν με τη βοήθεια των συνδέσμων αυτού του συστήματος μπορούμε να ορίσουμε όλες της λογικές πράξεις πάνω σε προτάσεις. Στις ασκήσεις θα γνωρίσουμε και άλλα επαρκή συστήματα συνδέσμων εκτός από το $\{\neg, \vee\}$.

Η αιτιολόγηση της επάρκειας του συστήματος $\{\neg, \vee\}$ δεν είναι δύσκολη. Ήδη ξέρουμε πως εκφράζονται οι πέντε βασικοί σύνδεσμοι και η αποκλειστική διάζευξη $\veebar$ μέσω των $\neg$, $\vee$. Θα εξετάσουμε τώρα μερικές άλλες περιπτώσεις. Οι υπόλοιπες θα συμπληρωθούν ως ασκήσεις.

Ο μονομελής σύνδεσμος F που δίδεται από τον πρώτο πίνακα μπορεί να οριστεί π.χ. ως $p \wedge \neg p$.

p	$F(p)$
0	**0**
1	**0**

p	q	$p \mid q$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

p	q	$p \downarrow q$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**0**

Ο σύνδεσμος $\mid$, που λέγεται σύνδεσμος *ασυμβιβαστότητας*, μπορεί να οριστεί ως $\neg(p \wedge q)$ είτε ως $\neg p \vee \neg q$. Ο σύνδεσμος $\downarrow$ της *ταυτόχρονης άρνησης* (ούτε p ούτε q) εκφράζεται από τον τύπο $\neg p \wedge \neg q$, που είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\neg (p \vee q)$.

1.8 Κανόνες σχηματισμού ταυτολογιών

Οι λογικά αληθινοί τύποι του Προτασιακού Λογισμού παίζουν σπουδαίο ρόλο στη Μαθηματική Λογική και συνεπώς αξίζουν ιδιαίτερης μελέτης. Με τη μέθοδο πινάκων τιμών αληθείας δεν σχηματίζουμε ταυτολογίες, απλώς ελέγχουμε αν ένας δοσμένος τύπος είναι ταυτολο-

[3]Τόσες είναι οι δυνατές απεικονίσεις του $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ και του $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \times \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ στο $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, αντίστοιχα.

γία. Υπάρχουν μερικοί κανόνες βάσει των οποίων μπορούμε να σχηματίζουμμε ταυτολογίες. Παρακάτω θα γνωρίσουμε κάποιους απ΄ αυτούς τους κανόνες.

Κανόνας απόσπασης (Modus Ponens)

Αν οι τύποι φ και $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογίες, τότε και ο τύπος ψ είναι ταυτολογία.

Πραγματικά, για οποιαδήποτε αποτίμηση V των μεταβλητών έχουμε $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$ και $V^*(\varphi \to \psi) = \mathbf{1}$, αφού φ και $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογίες. Έπεται ότι $V^*(\psi) = \mathbf{1}$. Είδαμε λοιπόν ότι για κάθε αποτίμηση των μεταβλητών ο τύπος ψ παίρνει τη λογική τιμή $\mathbf{1}$. Αυτό σημαίνει ότι είναι ταυτολογία.

Για να διατυπώσουμε τους επόμενους κανόνες, χρειαζόμαστε μια σύμβαση. Έστω φ, τ, τ' τύποι. Έστω p μια μεταβλητή του τύπου φ. Ο τύπος που προκύπτει από την αντικατάσταση της μεταβλητής p (παντού όπου αυτή εμφανίζεται στον τύπο φ) με τον τύπο τ, συμβολίζεται

$$\varphi\,[p/\tau]\,.$$

Όμοια, ο τύπος που προκύπτει από την αντικατάσταση στον φ όλων των εμφανίσεων του τύπου τ με τον τύπο τ' συμβολίζεται

$$\varphi\,[\tau/\tau']\,.$$

Παραδείγματα. Το p είναι μια μεταβλητή του τύπου $\varphi\,:\,p \wedge \neg\, p\, \vee q$. Αν πάρουμε ως τ τον τύπο $p \vee r \to \neg\, q$, τότε ο τύπος $\varphi\,[p/\tau]$ είναι ο εξής:

$$(p \vee r \to \neg\, q) \wedge \neg\, (p\, \vee r \to \neg\, q) \vee\, q.$$

Αν θεωρήσουμε σ τον τύπο $\neg p$ και σ' τον τύπο $(p \to q)\, \wedge \neg q$, τότε για τον παραπάνω τύπο φ, ο τύπος $\varphi\,[\sigma/\sigma']$ είναι ο:

$$p \wedge\, (p \to q) \wedge \neg\, q\, \vee q$$

Κανόνας αντικατάστασης μεταβλητών

Αν ο τύπος φ είναι ταυτολογία, p μια μεταβλητή του και τ οποιοσδήποτε τύπος, τότε ο τύπος $\varphi\,[p/\tau]$ είναι ταυτολογία.

Πράγματι, έστω ότι ο τύπος φ έχει εκτός από την p μεταβλητές τις $q_1, \ldots, q_n$. Οι μεταβλητές του $\varphi\,[p/\tau]$ είναι τότε οι $q_1, \ldots, q_n$ και οι μεταβλητές του τύπου τ. Για να αποδείξουμε ότι ο τύπος $\varphi\,[p/\tau]$ είναι ταυτολογία, αρκεί να δούμε ότι για κάθε αποτίμηση V των μεταβλητών έχουμε $V^*(\varphi\,[p/\tau]) = \mathbf{1}$. Έστω V αποτίμηση των μεταβλητών. Αυτή δίνει στον τύπο τ την τιμή $V^*(\tau)$. Θεωρούμε μια νέα αποτίμηση V' με $V'(q_1) = V(q_1), \ldots, V'(q_n) = V(q_n)$ και $V'(p) = V^*(\tau)$. Η αποτίμηση V' δίνει στον τύπο φ τη λογική τιμή $V'^*(\varphi)$, που είναι ίση με την τιμή $V^*(\varphi\,[p/\tau])$. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό του τύπου $\varphi\,[p/\tau]$ και το γεγονός $V'(p) = V^*(\tau)$. Επειδή ο τύπος φ είναι ταυτολογία, έχουμε $V'^*(\varphi) = \mathbf{1}$, και συνεπώς $V^*(\varphi\,[p/\tau]) = \mathbf{1}$. Δείξαμε λοιπόν ότι ο τύπος $\varphi\,[p/\tau]$ παίρνει την τιμή $\mathbf{1}$ για οποιαδήποτε αποτίμηση των μεταβλητών, άρα είναι ταυτολογία.

Κανόνας αντικατάστασης

Έστω φ, τ, τ' τύποι του Προτασιακού Λογισμού. Αν οι τύποι τ, τ' είναι λογικά ισοδύναμοι, τότε και οι τύποι φ, $\varphi[\tau/\tau']$ είναι λογικά ισοδύναμοι. Αν ο τύπος φ είναι ταυτολογία, τότε και ο τύπος $\varphi[\tau/\tau']$ είναι ταυτολογία.

Αν οι τύποι τ, τ' είναι λογικά ισοδύναμοι, τότε για κάθε αποτίμηση V των μεταβλητών έχουμε $V^*(\tau) = V^*(\tau')$. Από τον ορισμό του τύπου $\varphi[\tau/\tau']$ έπεται ότι τότε ισχύει και $V^*(\varphi) = V^*(\varphi[\tau/\tau'])$. Βλέπουμε λοιπόν ότι φ, $\varphi[\tau/\tau']$ είναι λογικά ισοδύναμοι. Άρα, αν ο τύπος φ είναι ταυτολογία, τότε και ο λογικά ισοδύναμος μ΄ αυτον $\varphi[\tau/\tau']$ είναι ταυτολογία.

Μερικούς άλλους κανόνες σχηματισμού ταυτολογιών περιέχει η άσκηση 20. Απλές εφαρμογές των κανόνων αντικατάστασης έχουμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα. Ο τύπος $\varphi : p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ είναι ταυτολογία (νόμοι αντικατάστασης). Συνεπώς, οι τύποι:

$$p \wedge \neg q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg\neg q)$$

$$(r \leftrightarrow \neg s \vee t) \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg(r \leftrightarrow \neg s \vee t) \vee \neg q)$$

είναι ταυτολογίες. Ο πρώτος είναι ο $\varphi[q/\neg q]$ και ο δεύτερος ο $\varphi[p/\tau]$, όπου τ είναι: $r \leftrightarrow \neg s \vee t$. Αντικαθιστώντας στον πρώτο τον τύπο $\neg\neg q$ με τον λογικά ισοδύναμο q, έχουμε μια νέα ταυτολογία

$$p \wedge \neg q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee q).$$

Εφαρμόζοντας ξανά τον κανόνα αντικατάστασης στον τελευταίο τύπο και στους λογικά ισοδύναμους τύπους $\neg p \vee q$ και $p \rightarrow q$, έχουμε την ταυτολογία

$$p \wedge \neg q \leftrightarrow \neg(p \rightarrow q).$$

1.9 Κανονικές μορφές

Λέμε ότι ένας τύπος είναι **στοιχειώδης διαζευκτικός** όταν είναι μορφής

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n,$$

όπου κάθε $\varphi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ είναι προτασιακή μεταβλητή ή άρνηση προτασιακής μεταβλητής. Όμοια, λέμε ότι ένας τύπος είναι **στοιχειώδης συζευκτικός** όταν είναι μορφής

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \ ,$$

όπου κάθε $\varphi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ είναι προτασιακή μεταβλητή ή άρνηση προτασιακής μεταβλητής.

Παραδείγματα. Ο τύπος $\neg q \vee s \vee \neg p \vee \neg s$ είναι στοιχειώδης διαζευκτικός. Ο τύπος $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$ είναι στοιχειώδης συζευκτικός. Ο τύπος $\neg p$ είναι και στοιχειώδης διαζευκτικός και στοιχειώδης συζευκτικός.

Παρατήρηση. Ένας στοιχειώδης διαζευκτικός τύπος είναι ταυτολογία εάν και μόνον εάν περιέχει τουλάχιστον δύο όρους εκ των οποίων ο ένας είναι μια μεταβλητή και ο άλλος είναι η άρνηση αυτής της μεταβλητής.

Λέμε ότι ένας τύπος είναι σε **κανονική διαζευκτική μορφή** όταν είναι μορφής $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n$, όπου κάθε $\psi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ είναι στοιχειώδης συζευκτικός τύπος. Αναλόγως, λέμε ότι ένας τύπος είναι σε **κανονική συζευκτική μορφή** όταν είναι μορφής $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$, όπου κάθε $\psi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ είναι στοιχειώδης διαζευκτικός τύπος.

Παραδείγματα. Ο τύπος

$$(p \wedge s \wedge \neg q) \vee (t \wedge \neg p) \vee (s) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg q \wedge q)$$

είναι σε κανονική διαζευκτική μορφή. Ο τύπος

$$(\neg r \vee p \vee \neg t \vee q) \wedge (\neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg p)$$

είναι σε κανονική συζευκτική μορφή. Ας παρατηρήσουμε ότι π.χ. ο τύπος $(p \wedge \neg q \wedge r)$ είναι σε κανονική συζευκτική μορφή (τρεις όροι, ο καθένας στοιχειώδης διαζευκτικός) και σε κανονική διαζευκτική μορφή (ένας στοιχειώδης συζευκτικός όρος).

Η παραπάνω παρατήρηση εύκολα γενικεύεται ως εξής.

Παρατήρηση. Ένας τύπος $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ σε κανονική συζευκτική μορφή είναι ταυτολογία τότε και μόνον τότε όταν καθένας από τους τύπους ψ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ περιέχει μια μεταβλητή και την άρνησή της.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε πολύ απλά να διαπιστώσουμε αν ένας τύπος του Προτασιακού Λογισμού είναι η όχι ταυτολογία. Αρκεί αυτός ο τύπος να είναι σε κανονική συζευκτική μορφή ή να γνωρίζουμε έναν τύπο λογικά ισοδύναμο με τον εξεταζόμενο, που να είναι σε κανονική συζευκτική μορφή.

Λέμε ότι ο τύπος φ' είναι **μια κανονική συζευκτική (διαζευκτική) μορφή** του τύπου φ , όταν $\varphi \equiv \varphi'$ και φ' είναι σε κανονική συζευκτική (διαζευκτική) μορφή.

Εν γένει, οι τύποι του Προτασιακού Λογισμού δεν είναι σε κανονική μορφή. Υπάρχει όμως μια μέθοδος εύρεσης μιας κανονικής συζευκτικής και μιας κανονικής διαζευκτικής μορφής για οποιονδήποτε τύπο του Προτασιακού Λογισμού. Η διαδικασία είναι αποτελεσματική αλλά αρκετά επίπονη. Βασίζεται στους νόμους του Προτασιακού Λογισμού. Θα δώσουμε τώρα μια περιγραφή της και θα δούμε μερικά παραδείγματα εύρεσης κανονικών μορφών.

Αρχικά απαλείφουμε τα σύμβολα $\leftrightarrow$ και $\rightarrow$. Από τους νόμους αντικατάστασης έχουμε $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ και $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, βρίσκουμε έναν τύπο λογικά ισοδύναμο με τον δοσμένο και στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Στη συνέχεια μεταφέρουμε τα σύμβολα $\neg$ της άρνησης κοντά στις προτασιακές μεταβλητές. Αυτό το πετυχαίνουμε εφαρμόζοντας τα παρακάτω

$$\neg (\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi \text{ και } \neg (\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi,$$

που προκύπτουν από τους νόμους του de Morgan. Συγχρόνως απαλείφουμε τις διπλές αρνήσεις με βάση το $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$. Στη τελευταία φάση, εκμεταλευόμενοι τους επιμεριστικούς νόμους

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi),\ \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi),$$

βρίσκουμε την κατάλληλη κανονική μορφή.

Η διαδικασία γίνεται πιο σύντομη, αν αντί για την πολλαπλή χρήση των νόμων του Προτασιακού Λογισμού, χρησιμοποιήσουμε τις γενικεύσεις τους (βλ. άσκηση 25), δηλαδή ότι:

$$\begin{aligned}
\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) &\leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n, \\
\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n) &\leftrightarrow \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n, \\
\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n) &\leftrightarrow (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2) \vee \ldots \vee (\varphi \wedge \psi_n) \\
\varphi \vee (\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n) &\leftrightarrow (\varphi \vee \psi_1) \wedge (\varphi \vee \psi_2) \wedge \ldots \wedge (\varphi \vee \psi_n)
\end{aligned}$$

είναι ταυτολογίες. Επίσης είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι έχουμε $\psi \vee \varphi \equiv \varphi$, όταν ψ είναι λογικά ψευδής και $\psi \wedge \varphi \equiv \varphi$ όταν ψ είναι ταυτολογία.

Παραδείγματα. Θα βρούμε κανονικές μορφές για τους τύπους $(p \to q) \to p$ και $\neg(p \vee q) \leftrightarrow p \wedge q$.
Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
(p \to q) \to p &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee p \\
&\equiv (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee p \equiv (p \wedge \neg q) \vee p \\
&\equiv (p \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \equiv p \wedge (\neg q \vee p)
\end{aligned}$$

Ο τύπος $(p \wedge \neg q) \vee p$ είναι μια κανονική διαζευκτική μορφή του τύπου $(p \to q) \to p$. Οι τύποι $(p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)$ και $p \wedge (\neg q \vee p)$ είναι κανονικές συζευκτικές του μορφές.

Για τον δεύτερο τύπο έχουμε

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee q) \leftrightarrow p \wedge q &\equiv (\neg(p \vee q) \to p \wedge q) \wedge (p \wedge q \to \neg(p \vee q)) \\
&\equiv (\neg\neg(p \vee q) \vee p \wedge q) \wedge (\neg(p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)) \\
&\equiv ((p \vee p) \vee p \wedge q) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee \neg p \wedge \neg q) \\
&\equiv (p \vee q \vee p) \wedge (p \vee q \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg q)
\end{aligned}$$

Ο τελευταίος τύπος είναι σε κανονική συζευκτική μορφή. Είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ διότι

$$p \vee q \vee p \equiv p \vee q \vee q \equiv p \vee q, \qquad (p \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q,$$

$$\neg p \vee \neg q \vee \neg p \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg q \equiv \neg p \vee \neg q, \quad (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Μια άλλη κανονική συζευκτική μορφή του τύπου $\neg(p \vee q) \leftrightarrow p \wedge q$ είναι λοιπόν ο τύπος $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

Στη συνέχεια έχουμε

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee q) \leftrightarrow p \wedge q &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\
&\equiv (p \vee q) \wedge \neg p \vee (p \vee q) \wedge \neg q \\
&\equiv (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)
\end{aligned}$$

Βρήκαμε μια κανονική διαζευκτική μορφή του εξεταζόμενου τύπου. Μια πιο απλή έχουμε αν παρατηρήσουμε ότι οι τύποι $p \wedge \neg p$, $q \wedge \neg q$ είναι αντιφάσεις και συνεπώς

$$(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \equiv (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q).$$

1.10 Συνέπεια

Τις ενέργειες διεξαγωγής συμπερασμάτων από κάποιες υποθέσεις τις λέμε συλλογισμούς. Ένας συλλογισμός θεωρείται ορθός, όταν οδηγεί από αληθινές υποθέσεις σε αληθινά συμπεράσματα. Λέμε ότι το συμπέρασμα, σ΄ έναν ορθό συλλογισμό, είναι συνέπεια των υποθέσεων. Ο Προτασιακός Λογισμός δίνει μια περιγραφή των ορθών συλλογισμών και της έννοιας της συνέπειας.

Έστω Δ σύνολο τύπων, ψ τύπος. Λέμε ότι ο τύπος ψ είναι **σημασιολογική** (ή εννοιολογική) **συνέπεια** του Δ, όταν για κάθε αποτίμηση των μεταβλητών, για την οποία όλοι οι τύποι του Δ γίνονται αληθείς, ο τύπος ψ είναι αληθής. Όταν ψ είναι συνέπεια του Δ γράφουμε $\Delta \models \psi$, τα στοιχεία του Δ τα λέμε **υποθέσεις** και το ψ **συμπέρασμα**.

Λέμε ότι μια αποτίμηση V *ικανοποιεί* το σύνολο τύπων Δ, όταν ικανοποιεί όλα τα στοιχεία του Δ, δηλαδή όταν $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$ για κάθε τύπο φ του Δ.

Είναι φανερό ότι για να δείξουμε ότι $\Delta \models \psi$, φτάνει να δούμε ότι $V^*(\psi) = \mathbf{1}$ μόνο για εκείνες τις αποτιμήσεις V που ικανοποιούν το σύνολο υποθέσεων Δ.

Όταν $\Delta = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ αντί για $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$ γράφουμε πιο σύντομα $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$. Μπορεί το σύνολο των υποθέσεων να είναι κενό. Γράφουμε απλώς $\models \varphi$, όταν ο τύπος φ είναι συνέπεια κενού συνόλου υποθέσεων.

Παρατήρηση 1. $\models \varphi$ τότε και μόνον τότε, όταν φ είναι ταυτολογία.

Πράγματι, έστω $\models \varphi$. Αν V είναι οποιαδήποτε αποτίμηση των μεταβλητών, τότε δεν υπάρχει υπόθεση που να μην ικανοποιείται από την V (διότι δεν υπάρχουν καθόλου υποθέσεις !). Πρέπει λοιπόν για την V να ισχύει $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$, λόγω του $\models \varphi$. Αφού φ γίνεται αληθής για κάθε αποτίμηση των μεταβλητών, είναι ταυτολογία.

Αντιστρόφως, αν φ είναι ταυτολογία, τότε $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$ για κάθε αποτίμηση V. Συνεπώς $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$ για όλες τις αποτιμήσεις που ικανοποιούν το (εδώ κενό) σύνολο υποθέσεων. Άρα $\models \varphi$.

Παραδείγματα

1. $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$
   Για τις αποτιμήσεις που ικανοποιούν τους φ, ψ, δηλαδή ισχύει $V^*(\varphi) = \mathbf{1},\ V^*(\psi) = \mathbf{1}$, πρέπει να έχουμε και $V^*(\varphi \wedge \psi) = \mathbf{1}$.

2. $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$
   Έστω ότι $V^*(\varphi \rightarrow \psi) = \mathbf{1}$, $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$. Τότε υποχρεωτικά $V^*(\psi) = \mathbf{1}$.

3. $\varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \chi, \neg\psi \models \chi$
   Έστω ότι V ικανοποιεί τις υποθέσεις. Πρέπει $V^*(\neg\psi) = \mathbf{1}$, άρα $V^*(\psi) = \mathbf{0}$. Έπεται ότι $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$, αφού $V^*(\varphi \vee \psi) = \mathbf{1}$. Επειδή $V^*(\varphi \rightarrow \chi) = \mathbf{1}$ και $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$, έχουμε και $V^*(\chi) = \mathbf{1}$.

4. $\varphi, \neg\,\varphi \models \psi$
   Δεν υπάρχουν αποτιμήσεις που ικανοποιούν τις υποθέσεις φ και $\neg\,\varphi$ συγχρόνως. Άρα

μπορύμε να πούμε ότι κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τις $\varphi, \neg\varphi$ έχει οποιαδήποτε ιδιότητα. π.χ. κάθε τέτοια αποτίμηση κάνει τον τύπο ψ αληθινό.

Σύνολα υποθέσεων, σαν το παραπάνω, που δεν ικανοποιούνται από καμία αποτίμηση θα μελετήσουμε αργότερα. Βλέπουμε τώρα ότι από τέτοιες υποθέσεις μπορούμε να βγάλουμε *οποιοδήποτε* συμπέρασμα.

Η επόμενη παρατήρηση δείχνει μια ακόμα σχέση μεταξύ των εννοιών συνέπειας και ταυτολογίας, άρα και τη σπουδαιότητα των ταυτολογιών για τη Λογική.

Παρατήρηση 2. $\varphi \models \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $\models \varphi \to \psi$.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $\varphi \models \psi$. Έστω V αποτίμηση των μεταβλητών. Αν ήταν $V^*(\varphi \to \psi) = \mathbf{0}$, τότε $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$ και $V^*(\psi) = \mathbf{0}$. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού αν $\varphi \models \psi$ και $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$ πρέπει $V^*(\psi) = \mathbf{1}$. Έχουμε λοιπόν υποχρεωτικά $V^*(\varphi \to \psi) = \mathbf{1}$, για κάθε αποτίμηση V. Αυτό σημαίνει ότι ο τύπος $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογία, άρα ότι $\models \varphi \to \psi$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογία. Αν V είναι οποιαδήποτε αποτίμηση με $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$, τότε λόγω $V^*(\varphi \to \psi) = \mathbf{1}$ έχουμε και $V^*(\psi) = \mathbf{1}$. Αυτό δείχνει ότι $\varphi \models \psi$.

Σημείωση. Η παραπάνω παρατήρηση είναι γνωστή και ως ''σημασιολογική μορφή του Θεωρήματος Απαγωγής του Προτασιακού Λογισμού''. Παίζει σπουδαίο ρόλο στα Μαθηματικά. Πολύ συχνά για να αποδείξουμε ένα θεώρημα διατυπωμένο

$$\text{`` αν } \varphi, \ \text{ τότε } \psi\text{''}$$

δεχόμαστε το φ ως αληθινή υπόθεση και με βάση αυτό βγάζουμε το ψ ως συμπέρασμα.

Ισχύει και μια γενίκευση της παρατήρησης, συγκεκριμένα έχουμε:

$\Delta \cup \{\varphi\} \models \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $\Delta \models \varphi \to \psi$. Η αιτιολόγηση είναι όμοια μ' αυτήν της παρατήρησης (άσκηση 27).

Η έννοια του ορθού συλλογισμού εκφράστηκε μέσω της έννοιας της σημασιολογικής συνέπειας. Παρακάτω αναφέρονται οι πιο γνωστοί κανόνες ορθού συλλογισμού. Οι αιτιολογήσεις είναι απλές ασκήσεις.

1.	$p, p \to q \models q$	Συλλογισμός απόσπασης (Modus Ponens)
2.	$p \to q, \neg q \models \neg p$	Συλλογισμός αρνητικής μορφής (Modus Tollens)
3.	$p \to q, q \to r \models p \to r$	Υποθετικός συλλογισμός
4.	$p \vee q, \neg p \models q$	Διαζευκτικός συλλογισμός
5.	$p \to q, r \to s, p \vee r \models q \vee s$	Δημιουργικό δίλημμα
6.	$p \wedge q \models p$	Απλουστευτικός συλλογισμός
7.	$p \models p \vee q$	Προσθετικός συλλογισμός

Ένα σύνολο Δ τύπων του Προτασιακού Λογισμού λέγεται **σημασιολογικά** (ή εννοιολογικά) **αντιφατικό**, όταν υπάρχει τύπος ψ, τέτοιος ώστε αυτός και η άρνηση του είναι συνέπειες του Δ, δηλαδή $\Delta \models \psi$ και $\Delta \models \neg\psi$.

Αν το σύνολο Δ δεν είναι αντιφατικό, τότε λέγεται **σημασιολογικά** (ή εννοιολογικά) **συνεπές**.

Μια αιτιολόγηση όμοια μ' αυτήν του παραδείγματος 4 (σελ. 18) δείχνει τις ακόλουθες παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 3. Ένα σύνολο τύπων Δ του Προτασιακού Λογισμού είναι αντιφατικό τότε και μόνον τότε, όταν κάθε τύπος είναι συνέπεια του Δ.

Παρατήρηση 4. Ένα σύνολο τύπων Δ του Προτασιακού Λογισμού είναι συνεπές τότε και μόνον τότε, όταν είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή υπάρχει αποτίμηση των μεταβλητών που ικανοποιεί το Δ.

Παραδείγματα. Το $\{\neg p, q \vee p, \neg r \wedge q\}$ είναι συνεπές, αφού ικανοποιείται από κάθε αποτίμηση V με $V(p) = \mathbf{0}$, $V(q) = \mathbf{1}$, $V(r) = \mathbf{0}$. Το $\{p \to q, r, s \wedge p, r \to \neg r \wedge q\}$ είναι αντιφατικό διότι δεν το ικανοποιεί καμία αποτίμηση των μεταβλητών.

Τελειώνουμε τη μελέτη της σημασιολογικής συνέπειας με μια ακόμα σημαντική παρατήρηση.

Παρατήρηση 5. Έστω Δ σύνολο τύπων, ψ τύπος.

$\Delta \models \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $\Delta \cup \{\neg \psi\}$ είναι αντιφατικό.

Ας υποθέσουμε ότι $\Delta \models \psi$. Αν υπήρχε αποτίμηση που ικανοποιεί τα στοιχεία του Δ και τον τύπο $\neg \psi$, θα είχαμε $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$ για όλα τα στοιχεία φτου Δ και $V^*(\psi) = \mathbf{0}$. Αυτό είναι αδύνατο, λόγω του $\Delta \models \psi$. Άρα το $\Delta \cup \{\neg \psi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο και συνεπώς είναι αντιφατικό.

Αντιστρόφως, έστω V αποτίμηση των μεταβλητών με $V^*(\varphi) = \mathbf{1}$ για κάθε φ του Δ. Επειδή το σύνολο $\Delta \cup \{\neg \psi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, έπεται ότι $V^*(\neg \psi) = \mathbf{0}$. Άρα $V^*(\psi) = \mathbf{1}$. Κάθε αποτίμηση λοιπόν που κάνει αληθινούς τους τύπους του Δ δίνει και στον τύπο ψ τη λογική τιμή $\mathbf{1}$.

1.11 Τυπική Άποψη του Προτασιακού Λογισμού.

Θα περιγράψουμε εδώ και θα μελετήσουμε ένα τυπικό, αξιωματικό σύστημα για τον Προτασιακό Λογισμό. Τους τύπους του Προτασιακού Λογισμού, που γνωρίσαμε στην παράγραφο 1.3, θα μελετήσουμε τώρα πιο τυπικά ως γραπτές εκφράσεις χωρίς καμία σημασία και χωρίς λογική τιμή.

Μερικούς τύπους θα τους θεωρήσουμε ως αρχικά αποδεκτούς, δηλαδή αξιώματα. Θα δεχθούμε έναν τρόπο τυπικής διεξαγωγής συμπερασμάτων, που λέγεται αποδεικτικός κανόνας. Στη συνέχεια θα εισάγουμε την έννοια τυπικής απόδειξης και τυπικού θεωρήματος (συνέπειας).

Σημείωση. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να οριστεί ένα τυπικό σύστημα για τον Προτασιακό Λογισμό. Διαφέρουν απ΄ αυτό που θα γνωρίσουμε στην επιλογή αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων. Όλα όμως είναι ισοδύναμα με την έννοια ότι δίνουν τα ίδια τυπικά θεωρήματα.

Αξιώματα του Προτασιακού Λογισμού

Δεχόμαστε ως αξιώμα κάθε τύπο του Προτασιακού Λογισμού που έχει μια από τις παρακάτω μορφές.

$$\begin{array}{ll}
(A1) & \varphi \to (\psi \to \varphi) \\
(A2) & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \\
(A3) & (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi) \\
(A4) & (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\psi \to \varphi) \\
(A5) & (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)) \\
(A6) & \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi \\
(A7) & \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi \\
(A8) & \varphi \to \varphi \vee \psi \\
(A9) & \varphi \wedge \psi \to \varphi \\
(A10) & \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi) \\
(A11) & (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi) \\
(A12) & (\varphi \to (\psi \wedge \neg \psi)) \to \neg \varphi \\
(A13) & (\varphi \wedge \neg \varphi) \to \psi \\
(A14) & \varphi \vee \neg \varphi
\end{array}$$

Σημείωση. Τα παραπάνω 14 σχήματα αξιωμάτων δίνουν άπειρο πλήθος αξιωμάτων, αφού στη θέση των φ, ψ, χ μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιουσδήποτε τύπους του Προτασιακού Λογισμού. Υπάρχουν συστήματα με λιγότερα σχήματα αξιωμάτων. Δυο απ΄ αυτά είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{array}{llcll}
(B1) & \varphi \vee \varphi \to \varphi & , & (B2) & \varphi \to \varphi \vee \psi \\
(B3) & \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi & , & (B4) & (\varphi \to \psi) \to (\chi \vee \varphi \to \chi \vee \psi)
\end{array}$$

και

$$(C)\ \ (((\varphi \to \psi) \to (\neg \chi \to \neg \vartheta) \to \chi) \to \zeta) \to ((\zeta \to \varphi) \to (\vartheta \to \varphi)).$$

Τα συστήματα αυτά γίνονται όμως σε τυποποιημένες γλώσσες με λιγότερα αρχικά σύμβολα ($\neg$, $\vee$ και $\neg$, $\to$ αντίστοιχα) και τα υπόλοιπα ορίζονται (δηλαδή π.χ. το $p \wedge q$ είναι συντμήση κάποιου τύπου). Τα αξιώματα, ειδικά του τελευταίου συστήματος, είναι δυσανάγνωστα και οι τυπικές αποδείξεις πιο επίπονες.

Αποδεικτικός κανόνας

Δεχόμαστε έναν μόνο κανόνα, τον λεγόμενο κανόνα **απόσπασης** ή Modus Ponens. Τον συμβολίζουμε

$$\frac{\varphi \to \psi,\, \varphi}{\psi}$$

και εννοούμε μ΄ αυτό ότι δεχόμαστε τον τύπο ψ ως **άμεση τυπική συνέπεια** των τύπων $\varphi \to \psi$ και φ.

Σημείωση. Μερικά τυπικά συστήματα έχουν και άλλους, εκτός από τον Modus Ponens, αποδεικτικούς κανόνες. Δέχονται κάποιους από τους:

$$\frac{\varphi,\, \psi}{\varphi \wedge \psi},\ \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi},\ \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi},\ \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi},\ \frac{\varphi}{\psi \vee \varphi},\ \frac{\varphi \vee \psi,\, \neg \varphi}{\psi},\ \frac{\varphi \vee \psi,\, \neg \psi}{\varphi},$$

$$\frac{\varphi \to \psi,\, \neg \psi}{\neg \varphi},\ \frac{\varphi \to \psi,\, \psi \to \varphi}{\varphi \leftrightarrow \psi},\ \frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi \to \psi},\ \frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \to \varphi},\ \frac{\varphi}{\neg \neg \varphi},\ \frac{\neg \neg \varphi}{\varphi},\ \frac{\varphi \to \psi,\, \psi \to \chi}{\varphi \to \chi}$$

και οι τυπικές τους αποδείξεις γίνονται πιο σύντομες.

Τυπικές αποδείξεις

Έστω Γ σύνολο τύπων του Προτασιακού Λογισμού. **Τυπική απόδειξη από τις υποθέσεις** Γ(ή από το Γ) λέμε κάθε πεπερασμένη ακολουθια τύπων $\psi_1,\, \psi_2,\, \ldots,\, \psi_n$ με την ιδιότητα:

κάθε όρος ψ_i της ακολουθίας ($i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$) ανήκει στο Γ(είναι υπόθεση του Γ)
ή είναι αξίωμα του Προτασιακού Λογισμού
ή είναι άμεση τυπική συνέπεια *προηγούμενων* όρων.

Το τελευταίο σημαίνει ότι υπάρχουν στην ακολουθία όροι $\psi_j,\, \psi_m$ (με $j < i,\, m < i$), τέτοιοι ώστε ψ_j είναι μορφής $\psi_m \to \psi_i$. Τότε από τον κανόνα απόσπασης έχουμε

$$\frac{\psi_m \to \psi_i,\, \psi_m}{\psi_i}.$$

Αν ο τύπος φ είναι τελευταίος όρος μιας τυπικής απόδειξης από το Γ, τότε λέγεται **τυπική συνέπεια του** Γ ή **τυπικό θεώρημα από τις υποθέσεις** Γ. Το γεγονός αυτό το συμβολίζουμε με $\Gamma \vdash \varphi$. Αν $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, γράφουμε $\varphi_1,\, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ αντί $\{\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n\} \vdash \psi$. Στην περίπτωση που το σύνολο υποθέσεων Γ είναι *κενό*, λέμε απλώς: **τυπική απόδειξη, τυπικό θεώρημα** και γράφουμε $\vdash \varphi$, αν φ είναι τυπικό θεώρημα.

Παρατήρηση 1. Αν σε μια τυπική απόδειξη (από το Γ) κρατήσουμε μόνον μερικούς αρχικούς όρους, πάλι έχουμε τυπική απόδειξη (από το Γ). Επομένως, κάθε όρος μιας τυπικής απόδειξης (από το Γ) είναι τυπικό θεώρημα (από το Γ). Είναι φανερό επίσης ότι κάθε υπόθεση ενός συνόλου Γ είναι τυπικό θεώρημα από το Γ και κάθε αξίωμα του Προτασιακού Λογισμού είναι τυπικό θεώρημα (τυπικές αποδείξεις με μήκος 1). Επίσης είναι προφανές ότι αν $\Gamma \vdash \varphi$ και Γ' είναι υπερσύνολο του Γ, τότε $\Gamma' \vdash \varphi$.

Επειδή κάθε τυπική απόδειξη έχει πεπερασμένους όρους, χρησιμοποιεί μόνον πεπερασμένο πλήθος υποθέσεων. Αν το σύνολο Γ είναι άπειρο και $\Gamma \vdash \varphi$, τότε για κάποιο πεπερασμένο Γ_0 υποσύνολο του Γ έχουμε ότι $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

Παραδείγματα. Τους όρους μιας τυπικής απόδειξης τους γράφουμε συχνά κάθετα με αιτιολόγηση δίπλα τους.

α)
1. $\varphi \vee \neg\varphi$ — $(A14)$
2. $\varphi \vee \neg\varphi \to \neg\varphi \vee \varphi$ — $(A6)$
3. $\neg\varphi \vee \varphi$ — $\mathrm{MP}(1,2)$, απόσπαση από 1, 2.

Έχουμε λοιπόν: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi \;\to \neg\varphi \vee \varphi$

β)
1. $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ — $(A1)$
2. $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ — $(A2)$
3. $((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ — $\mathrm{MP}(1,2)$
4. $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ — $(A1)$
5. $\varphi \to \varphi$ — $\mathrm{MP}(3,4)$

Ο τύπος $\varphi \to \varphi$ είναι λοιπόν τυπικό θεώρημα.

γ) Θα δούμε ότι $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$, δηλαδή ότι ο τύπος $\varphi \wedge \psi$ είναι τυπική συνέπεια των υποθέσεων φ, ψ.

1.	φ	(υπόθεση)
2.	ψ	(υπόθεση)
3.	$\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$	$(A10)$
4.	$\psi \to \varphi \wedge \psi$	$\mathrm{MP}(1,3)$
5.	$\varphi \wedge \psi$	$\mathrm{MP}(2,4)$

Παρατήρηση 2. Αν $\Gamma \vdash \varphi$ και $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, τότε $\Gamma \vdash \psi$.

Πράγματι αν $\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi$ και $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$, $\varphi \to \psi$ είναι τυπικές αποδείξεις από τις υποθέσεις Γ, τότε η ακολουθία

$$\psi_1,\, \ldots,\, \psi_k,\, \varphi,\, \vartheta_1,\, \ldots,\, \vartheta_m,\, \varphi \to \psi,\, \psi$$

είναι επίσης τυπική απόδειξη (του τύπου ψ) από το Γ.

Θεώρημα Απαγωγής

$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

Αν $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, τότε προφανώς $\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \psi$ και $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$. Από την παραπάνω παρατήρηση βλέπουμε ότι $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

Έστω τώρα ότι $\psi_1, \ldots, \psi_n$ είναι μια τυπική απόδειξη, από τις υποθέσεις Γ και φ, του τύπου ψ. Με επαγωγή ως προς i θα δείξουμε ότι $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Περίπτωση 1. ψ_i είναι στοιχείο του Γ. Τότε

1. $\psi_i \to (\varphi \to \psi_i)$ (A1)
2. ψ_i (υπόθεση του Γ)
3. $\varphi \to \psi_i$ MP(1,2)

είναι μια τυπική απόδειξη του $\varphi \to \psi_i$ από το Γ.

Περίπτωση 2. ψ_i είναι η υπόθεση φ. Ξέρουμε ότι $\vdash \varphi \to \varphi$, άρα και $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$.

Περίπτωση 3. ψ_i είναι αξίωμα του Προτασιακού Λογισμού. Όμοια με την περίπτωση 1 έχουμε $\vdash \varphi \to \psi_i$, άρα και $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$.

Περίπτωση 4. ψ_i είναι άμεση τυπική συνέπεια των ψ_m, ψ_j με ψ_j να είναι $\psi_m \to \psi_i$ και $m < i$, $j < i$. Από την επαγωγική υπόθεση, λόγω $m < i$, $j < i$ έχουμε ότι $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_m$, $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi_m \to \psi_i)$.

Επειδή $\vdash (\varphi \to (\psi_m \to \psi_i)) \to ((\varphi \to \psi_m) \to (\varphi \to \psi_i))$ (αξίωμα A2), εφαρμόζοντας δύο φορές την παρατήρηση 2 έχουμε ότι $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$, που είναι το ζητούμενο.

Σημείωση. Το Θεώρημα Απαγωγής εκφράζει για την τυπική συνέπεια μια ιδιότητα, που έχει και σημασιολογική συνέπεια (παρατ. 2, σελ. 19 και άσκηση 27(γ)).

Πόρισμα. $\vdash (\varphi \to \chi) \to ((\chi \to \psi) \to (\varphi \to \psi))$
και συνεπώς έχουμε:

$$\text{Αν } \Gamma \vdash \varphi \to \chi \text{ και } \Gamma \vdash \chi \to \psi, \text{τότε και } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Για να δείξουμε το $\vdash (\varphi \to \chi) \to ((\chi \to \psi) \to (\varphi \to \psi))$ αρκεί, εφαρμόζοντας τρείς φορές το Θεώρημα Απαγωγής, να δούμε ότι $\varphi \to \chi$, $\chi \to \psi$, $\varphi \vdash \psi$. Έυκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία $\varphi \to \chi$, $\chi \to \psi$, φ, χ, ψ είναι μια τυπική απόδειξη του ψ από τις υποθέσεις $\varphi \to \chi$, $\chi \to \psi$, φ.

Αντίστοιχα με την έννοια της σημασιολογικής αντιφατικότητας, ορίζεται η συντακτική αντιφατικότητα. Συγκεκριμένα, λέμε ότι ένα σύνολο τύπων Γ είναι **συντακτικά αντιφατικό**, όταν υπάρχει τύπος ψ, τέτοιος ώστε αυτός και η άρνηση του είναι τυπικές συνέπειες του Γ, δηλαδή $\Gamma \vdash \psi$ και $\Gamma \vdash \neg\psi$. Αν το σύνολο Γ δεν είναι αντιφατικό, τότε λέγεται **συντακτικά συνεπές**.

Ισχύουν πολλές ανάλογες ιδιότητες.

Παρατήρηση 3. Ένα σύνολο Γ τύπων του Προτασιακού Λογισμού είναι συντακτικά αντιφατικό τότε και μόνον τότε, όταν κάθε τύπος είναι τυπικό θεώρημα από το Γ.

Ας υποθέσουμε ότι $\Gamma \vdash \psi$ και $\Gamma \vdash \neg\psi$. Έστω φ οποιοσδήποτε τύπος.
Επειδή $\vdash \psi \wedge \neg\psi \to \varphi$ (αξίωμα A13),
$\vdash \psi \to (\neg\psi \to \psi \wedge \neg\psi)$ (αξίωμα A10)
έχουμε διαδοχικά $\Gamma \vdash \neg\psi \to \psi \wedge \neg\psi$, $\Gamma \vdash \psi \wedge \neg\psi$, $\Gamma \vdash \varphi$.

Το αντίστροφο είναι προφανές.

Παρατήρηση 4. $\Gamma \vdash \neg\varphi$ τότε και μόνον τότε, όταν $\Gamma \cup \{\varphi\}$ είναι συντακτικά αντιφατικό.

Αν $\Gamma \vdash \neg\varphi$, τότε $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi$ και επειδή $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ έχουμε ότι το $\Gamma \cup \{\varphi\}$ είναι συντακτικά αντιφατικό. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $\Gamma \cup \{\varphi\}$ είναι συντακτικά αντιφατικό. Τότε κάθε τύπος είναι τυπική του συνέπεια, άρα και $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi$. Έχουμε λοιπόν $\Gamma \vdash \varphi \to \neg\varphi$ και προφανώς $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\varphi$ (Παράδειγμα β, σελ.22). Όπως στην Παρατήρηση 3 βλέπουμε ότι $\Gamma \vdash (\varphi \to \neg\varphi) \wedge (\neg\varphi \to \neg\varphi)$ (βλ. άσκηση 36(γ)). Επειδή $(\varphi \to \neg\varphi) \wedge (\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi \to \neg\varphi)$ είναι αξίωμα (A11) έχουμε $\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi \to \neg\varphi$. Το $\Gamma \vdash \neg\varphi$ έπεται από το ότι $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ (αξίωμα A14).

Πόρισμα. Το σύνολο $\{\varphi, \neg\varphi\}$ είναι, προφανώς, συντακτικά αντιφατικό. Άρα $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$. Έπεται λοιπόν $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Για να αποδείξουμε ότι και $\neg\neg\varphi \to \varphi$ είναι τυπικό θεώρημα μπορούμε να βασιστούμε στην ακόλουθη χρήσιμη παρατήρηση.

Παρατήρηση 5. Αν $\Sigma, \varphi \vdash \psi$ και $\Sigma, \neg\varphi \vdash \psi$, τότε $\Sigma \vdash \psi$.

Δηλαδή, αν ψ αποδεικνύεται τυπικά από τις υποθέσεις Σ και φ, και μπορεί να αποδειχθεί τυπικά από τις υποθέσεις Σ και $\neg\varphi$, τότε μπορεί να αποδειχθεί τυπικά μόνο από το Σ. Αντίστοιχη ιδιότητα της σημασιολογικής συνέπειας εκφράζει η άσκηση 33. Η αιτιολόγιση της παραπάνω παρατήρησης περιέχεται στην άσκηση 38.

Πόρισμα. Έχουμε $\neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$, αφού $\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi\}$ αντιφατικό. Επίσης $\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \varphi$. Συνεπώς ισχύει και $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$. Άρα $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.

Δείξαμε παραπάνω ότι $\varphi \to \neg\neg\varphi$ και $\neg\neg\varphi \to \varphi$ είναι τυπικά θεωρήματα. Για το $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ και $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ χρειαζόμαστε άλλη μια ιδιότητα της τυπικής συνέπειας.

Παρατήρηση 6. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ και $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$.

Συνεπώς έχουμε ότι $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$. Η αιτιολόγηση είναι απλή και βασίζεται στα αξιώματα A3, A4 και A5.

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να βρούμε πολλά τυπικά θεωρήματα, χωρίς να κατασκευάζουμε τυπικές αποδείξεις για αυτά. Έτσι λοιπόν έχουμε.

$$
\begin{array}{ll}
(\Theta 1) & \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi \\
(\Theta 2) & \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi) \\
(\Theta 3) & \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi) \\
(\Theta 4) & \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \\
(\Theta 5) & \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi) \\
(\Theta 6) & \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \\
(\Theta 7) & \vdash (\varphi \to \psi) \to (\chi \vee \varphi \to \chi \vee \psi) \\
(\Theta 8) & \vdash (\varphi \to \psi) \to (\chi \wedge \varphi \to \chi \wedge \psi) \\
(\Theta 9) & \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \\
(\Theta 10) & \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi
\end{array}
$$

Το Θ1 αποδείχθηκε πιο πάνω. Για το Θ2 αρκεί, σύμφωνα με την παρατήρηση 6, να δούμε ότι $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ και $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$. Το σύνολο $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi\}$ είναι συντακτικά αντιφατικό άρα $\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$. Από το Θεώρημα Απαγωγής έχουμε $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ και συνεπώς $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$. Όμοια, από την αντιφατικότητητα του $\{\neg\psi \to \neg\varphi, \varphi, \neg\psi\}$ έχουμε $\neg\psi \to \neg\varphi, \varphi \vdash \neg\neg\psi$. Επειδή $\vdash \neg\neg\psi \to \psi$, έχουμε $\neg\psi \to \neg\varphi, \varphi \vdash \psi$ και όπως παραπάνω βλέπουμε ότι
$\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

Για το Θ5 ας παρατηρήσουμε ότι:

$$
\begin{array}{lll}
\varphi \to \psi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi, & \text{άρα και} & \varphi \to \psi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \vee \psi, \\
\varphi \to \psi, \varphi \vdash \varphi, & \text{άρα και} & \varphi \to \psi, \varphi \vdash \neg\varphi \vee \psi. \text{ (βλ. άσκηση 35),}
\end{array}
$$

και βάσει της Παρατήρησης 5 $\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$.

Ακόμα έχουμε $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ (αφού $\{\neg\varphi, \varphi\}$ αντιφατικό)
και $\psi \vdash \varphi \to \psi$ ($\psi \to (\varphi \to \psi)$ είναι A1)
και συνεπώς: $\neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \to \psi$ (βλ. άσκηση 38).
Από το Θεώρημα Απαγωγής, έπεται ότι $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$
που μαζί με το προηγούμενο $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$
δείχνουν το ζητούμενο Θ5.

Θα δείξουμε ακόμα το Θ9. Τα Θ3, Θ4, Θ6, Θ7, Θ8 και Θ10 έχουν όμοιες αιτιολογήσεις (ασκήσεις 40,42,44).

Επειδή $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$ (αξίωμα A8), από το Θ2 έχουμε
$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi$.
Όμοια $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\psi$. Άρα $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi$, $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\psi$.
Επομένως $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$ (άσκηση 36 (γ)). Από το Θεώρημα Απαγωγής
$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi \wedge \neg\psi$.
Για το $\vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi \to \neg(\varphi \vee \psi)$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο $\{\neg\varphi, \neg\psi, \varphi \vee \psi\}$

είναι αντιφατικό. Αυτό προκύπτει από τα:

$$\neg\varphi,\,\neg\psi,\,\varphi\vdash\varphi\wedge\neg\varphi$$

$$\neg\varphi,\neg\psi,\,\psi\vdash\varphi\wedge\neg\varphi\quad(\{\neg\varphi,\,\neg\psi,\,\varphi\}\text{ αντιφατικό })$$

και συνεπώς

$$\neg\varphi,\,\neg\psi,\,\varphi\vee\psi\vdash\varphi\wedge\neg\varphi.$$

1.12 Πληρότητα του Προτασιακού Λογισμού

Κατασκευάζοντας ένα τυπικό σύστημα για τον Προτασιακό Λογισμό εισάγουμε μια νέα έννοια, που μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε ως συντακτική ''αλήθεια''. Θεωρούμε ''αληθινούς'' τους τύπους που αποδεχθήκαμε ως αξιώματα καθώς και τις τυπικές συνέπειες τους. Θα δούμε εδώ ότι η συντακτική ''αλήθεια'' ταυτίζεται με τη σημασιολογική, δηλαδή τα τυπικά θεωρήματα είναι ακριβώς οι λογικά αληθινοί τύποι. Γενικότερα, ταυτίζονται οι συντακτικές και σημασιολογικές έννοιες συνέπειας και αντιφατικότητας.

Πριν διατυπώσουμε το βασικό θεώρημα θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 1. Κάθε τυπικό θεώρημα είναι λογικά αληθινός τύπος.
Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι τα αξιώματα των σχημάτων (A1) - (A14) είναι ταυτολογίες. Ξέρουμε επίσης ότι ο κανόνας Modus Ponens οδηγεί από ταυτολογίες σε ταυτολογία (βλ. σελ. 14). Έπεται λοιπόν ότι κάθε όρος μιας τυπικής απόδειξης είναι ταυτολογία. Άρα κάθε τυπικό θεώρημα είναι ταυτολογία.

Το αντίστροφο, δηλαδή το γεγονός ότι όλες οι ταυτολογίες είναι τυπικά θεωρήματα χαρακτηρίζεται ως πληρότητα του τυπικού συστήματος. Η αιτιολόγηση της πληρότητας δεν είναι τόσο απλή. Βασίζεται στο ακόλουθο τεχνικό λήμμα.

Λήμμα Για κάθε τύπο φ του Προτασιακού Λογισμού, υπάρχουν τύποι φ', φ'' σε κανονική συζευκτική και κανονική διαζευκτική μορφή αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε

$$\vdash\varphi'\leftrightarrow\varphi\text{ και }\vdash\varphi''\leftrightarrow\varphi$$

Θα περιγράψουμε μια απόδειξη του λήμματος, με επαγωγή ως προς το πλήθος των συμβόλων συνδέσμων του τύπου φ. Το ζητούμενο είναι φανερό για τύπους με 0 σύμβολα συνδέσμων, δηλαδή για τις προτασιακές μεταβλητές. Ας υποθέσουμε ότι ξέρουμε το ζητούμενο για τύπους με το πολύ n σύμβολα συνδέσμων. Έστω ότι ο τύπος φ έχει $n+1$ σύμβολα συνδέσμων. Τότε έχει μια από τις μορφές

$$\neg\psi,\,\psi\vee\chi,\,\psi\wedge\chi,\,\psi\to\chi,\,\psi\leftrightarrow\chi$$

όπου ψ, χ έχουν το πολύ n σύμβολα συνδέσμων (άρα για αυτούς ισχύει το ζητούμενο, από την επαγωγική υπόθεση). Θα εξετάσουμε μόνο την πρώτη περίπτωση, στις άλλες η αιτιολόγηση είναι όμοια. Έστω φ είναι μορφής $\neg\psi$.

Για να βρούμε έναν τύπο φ' σε κανονική συζευκτική μορφή με την ιδιότητα $\vdash\varphi'\leftrightarrow\varphi$ χρησιμοποιούμε την ύπαρξη τύπου ψ'' σε κανονική διαζευκτική μορφή με την ιδιότητα $\vdash\psi''\leftrightarrow\psi$.

Έπεται ότι $\vdash \neg\psi'' \leftrightarrow \neg\psi$ (Θ6, άσκηση 37, Θ2, άσκηση 43).

Έστω ότι ο ψ'' είναι $\vartheta_1 \vee \vartheta_2 \vee \ldots \vee \vartheta_k$, με στοιχειώδεις συζευκτικούς ϑ_i $(i = 1,\, 2, \ldots,\, k)$. Έχουμε λοιπόν

$$\vdash \neg(\vartheta_1 \vee \vartheta_2 \vee \ldots \vee \vartheta_k) \leftrightarrow \varphi$$

Έχουμε $\vdash \neg(\vartheta_1 \vee \vartheta_2 \vee \ldots \vee \vartheta_k) \leftrightarrow \neg\vartheta_1 \wedge \neg\vartheta_2 \wedge \ldots \wedge \neg\vartheta_k$ (άσκηση 45). Καθένας από τους τύπους ϑ_i είναι μορφής $\chi_1^i \wedge \chi_2^i \wedge \ldots \wedge \chi_{m_i}^i$, όπου χ_1^i είναι μεταβλητή η άρνησή της. Για κάθε $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k$ έχουμε

$$\vdash \neg\vartheta_i \leftrightarrow \neg\chi_1^i \vee \neg\chi_2^i \vee \ldots \vee \neg\chi_{m_i}^i, \qquad \text{(άσκηση 45)}$$

Αν χ_j^i είναι μεταβλητή μ, συμβολίζουμε με $\overline{\chi}_j^i$ το $\neg\mu$ και αν χ_j^i είναι μορφής $\neg\mu$, συμβολίζουμε με $\overline{\chi}_j^i$ τη μεταβλητή μ. Έχουμε προφανώς $\vdash \neg\chi_j^i \leftrightarrow \overline{\chi}_j^i$ (Θ1 και Παράδειγμα β, σελ. 22, Παρατήρηση 6, σελ. 25).

Έπεται ότι

$$\vdash \neg\chi_1^i \vee \neg\chi_2^i \vee \ldots \vee \neg\chi_{m_i}^i \leftrightarrow \overline{\chi}\,_1^i \vee \overline{\chi}\,_2^i \vee \ldots \vee \overline{\chi}\,_{m_i}^i \qquad \text{(άσκηση 47)}$$

Ο τύπος $\overline{\chi}\,_1^i \vee \overline{\chi}\,_2^i \vee \ldots \vee \overline{\chi}\,_{m_i}^i$ είναι στοιχειώδης διαζευκτικός. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\vdash \neg\vartheta_1 \wedge \neg\,\vartheta_2 \wedge \ldots \wedge \neg\,\vartheta_k \leftrightarrow (\overline{\chi}\,_1^1 \vee \ldots \vee \overline{\chi}\,_{m_1}^1) \wedge (\overline{\chi}\,_1^2 \vee \ldots \vee \overline{\chi}\,_{m_2}^2) \wedge \ldots \wedge (\overline{\chi}\,_1^n \vee \ldots \vee \overline{\chi}\,_{m_k}^n)$$

Ας συμβολίσουμε φ' τον τύπο που είναι στο δεξιό μέρος της ισοδυναμίας, ο οποίος είναι σε κανονική συζευκτική μορφή. Έχουμε

$$\vdash \varphi' \leftrightarrow \varphi \qquad \text{(βλ. άσκηση 41)}$$

που είναι το ζητούμενο.

Παρατήρηση 2. Έστω $\psi_1,\, \psi_2,\, \ldots, \psi_n$ στοιχειώδεις διαζευκτικοί τύποι, ο καθένας απ΄ τους οποίους περιέχει μια μεταβλητή και την άρνησή της. Τότε $\vdash \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$.

Αρκεί να δούμε ότι $\vdash \psi_i$ για κάθε $i = 1,\, 2, \ldots, n$ (βλ. άσκηση 36(γ)) Έστω ότι $p_i,\, \neg\, p_i$ είναι όροι του ψ_i. Με πολλαπλή χρήση του (Α6), (Θ.3) και του αποτελέσματος της άσκησης 43(α), βλέπουμε ότι

$$\vdash \psi_i \leftrightarrow (p_i \vee \neg\, p_i) \vee \vartheta_i,$$

όπου ϑ_i αποτελείται από τους υπόλοιπους όρους του ψ_i. Ξέρουμε όμως ότι $\vdash p_i \vee \neg p_i$ (Α14) και επομένως $\vdash (p_i \vee \neg p_i) \vee \vartheta_i$ (Α8). Επειδή $\vdash (p_i \vee \neg\, p_i) \vee \vartheta_i \rightarrow \psi_i$, έχουμε το ζητούμενο $\vdash \psi_i$.

Κλείνουμε τη παράγραφο με το βασικό θεώρημα, που εκφράζει την πληρότητα του αξιωματικού συστήματος για τον Προτασιακό Λογισμό.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

Για κάθε τύπο του Προτασιακού Λογισμού

$$\vdash \varphi \text{ τότε και μόνον τότε, όταν } \models \varphi$$

Η Παρατήρηση 1 λέει ότι αν $\vdash \varphi$, τότε $\models \varphi$. Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι φ είναι ταυτολογία. Από το λήμμα ξέρουμε ότι υπάρχει τύπος φ' σε κανονική συζευκτική μορφή με $\vdash \varphi' \leftrightarrow \varphi$. Επειδή τότε $\models \varphi' \leftrightarrow \varphi$, έπεται ότι φ' είναι ταυτολογία. Έχουμε δει από παρατήρηση ότι κάθε στοιχειώδης διαζευκτικός όρος του φ' περιέχει μια μεταβλητή και την άρνηση της. Συνεπώς έχουμε (Παρατήρηση 2), ότι $\vdash \varphi'$. Λόγω του $\vdash \varphi' \rightarrow \varphi$ έχουμε και $\vdash \varphi$.

Ισχύει και μια γενίκευση του Θεωρήματος Πληρότητας από το οποίο έπεται ότι οι έννοιες σημασιολογικής και συντακτικής συνέπειας και αντιφατικότητας ταυτίζονται. Συγκεκριμένα έχουμε

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω Γ σύνολο τύπων, φ τύπος του Προτασιακού Λογισμού

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ τότε και μόνον τότε, όταν } \Gamma \models \varphi.$$

Δηλαδή ο τύπος φ είναι συντακτική συνέπεια του Γ ακριβώς όταν είναι σημασιολογική συνέπεια του.

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι ένα σύνολο τύπων του Προτασιακού Λογισμού είναι σημασιολογικά αντιφατικό τότε και μόνον τότε, όταν είναι συντακτικά αντιφατικό.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι σχετικά απλή στην περίπτωση πεπερασμένου συνόλου υποθέσεων Γ (άσκηση 48). Η γενική περίπτωση μπορεί να βασιστεί σ΄ ένα θεώρημα (σημασιολογική μορφή Θεωρήματος Συμπάγειας) που λέει ότι
''Ένα σύνολο τύπων του Προτασιακού Λογισμού είναι ικανοποιήσιμο τότε και μόνον τότε, όταν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του είναι ικανοποιήσιμο''

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι οι προτασιακές μεταβλητές p, q, r, s έχουν λογικές τιμές $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ αντίστοιχα. Βρείτε τις λογικές τιμές των τύπων:

   (α΄) $(p \lor q) \lor r$
   (β΄) $p \lor (q \lor r)$
   (γ΄) $q \to r \land p$
   (δ΄) $q \to (p \to r)$
   (ε΄) $p \lor q \to q \land \neg s$
   (ϛ΄) $p \leftrightarrow s \to (\neg p \leftrightarrow s)$
   (ζ΄) $q \land \neg s \to (p \leftrightarrow s)$
   (η΄) $(p \lor \neg q) \lor r \to s \land \neg s$

2. Έστω ότι φ είναι ικανή συνθήκη για την ψ. Είναι η φ αναγκαία για την ψ; Είναι η ψ αναγκαία για την φ; Είναι η $\neg\varphi$ αναγκαία για την $\neg\psi$; Είναι η $\neg\psi$ αναγκαία για την $\neg\varphi$;

3. Συμπληρώστε τα παρακάτω με μια από τις φράσεις :
   - ικανή αλλά όχι αναγκαία, - αναγκαία αλλά όχι ικανή,
   - ικανή και αναγκαία, - ούτε ικανή ούτε αναγκαία

   (α΄)Το να είναι ψευδής η υπόθεση είναι .... συνθήκη για την αλήθεια της συνεπαγωγής.

   (β΄)Η αλήθεια του συμπεράσματος είναι .... συνθήκη για την αλήθεια της συνεπαγωγής.

   (γ΄)Το να είναι ψευδής η υπόθεση είναι .... συνθήκη για να είναι ψευδής η συνεπαγωγή.

   (δ΄)Το να είναι ψευδές ένα μέλος της σύζευξης είναι .... συνθήκη για να είναι ψευδής η σύζευξη.

   (ε΄)Το να είναι ψευδές ένα μέλος της διάζευξης είναι .... συνθήκη για να είναι ψευδής η διάζευξη.

   (ϛ΄)Το να είναι αληθές ένα μέλος της ισοδυναμίας είναι .... συνθήκη για να είναι αληθής η ισοδυναμία.

4. Αρκεί η πληροφορία ότι η λογική τιμή του p είναι $\mathbf{0}$ για την εύρεση της λογικής τιμής των παρακάτω τύπων; Αν ναι, βρείτε αυτή την τιμή. Αν όχι, δείξτε ότι και οι δύο τιμές είναι δυνατές.

   (α΄) $(p \to q) \to r$
   (β΄) $p \land (q \to r)$
   (γ΄) $\neg(p \lor q) \leftrightarrow \neg p \land \neg q$
   (δ΄) $p \land q \leftrightarrow p \lor r$

5. Ποιες από τις παρενθέσεις στους παρακάτω τύπους μπορούμε να παραλείψουμε (χωρίς να αλλάξει το νόημά τους).

   (α΄) $((p \land (q \lor (\neg r))) \to ((\neg s) \leftrightarrow r))$

(β′) $((p \vee q) \vee r) \wedge (\neg s) \wedge \neg (r \vee s)$

6. Για ποιες λογικές τιμές των μεταβλητών του, ο τύπος $(\neg p \to q) \vee ((\neg r \to p) \wedge \neg p)$ έχει λογική τιμή $\mathbf{0}$;

7. Ελέγξτε ότι οι τύποι $p \wedge q$, $\neg(\neg p \vee \neg q)$ έχουν πάντα την ίδια λογική τιμή. Συμπεράνετε ότι η σύζευξη μπορεί να οριστεί μέσω της άρνησης και της διάζευξης.

8. Βρείτε ορισμό της διάζευξης με τη βοήθεια της άρνησης και της σύζευξης.

9. Δείξτε ότι ο τύπος $\neg p \vee q$ μπορούμε να τον δεχθούμε ως ορισμό της συνεπαγωγής $p \to q$.

10. Βρείτε ορισμό της ισοδυναμίας με τη βοήθεια των υπόλοιπων λογικών συνδέσμων. Δώστε ένα ορισμό της ισοδυναμίας μέσω της άρνησης και της διάζευξης.

11. Δείξτε ότι οι 4 μονομελείς και οι 16 διμελείς λογικές πράξεις μπορούν να οριστούν από την άρνηση και τη διάζευξη.

12. Δείξτε ότι $\neg$, $\vee$ ορίζονται από τον σύνδεσμο $|$. Δείξτε ότι ορίζονται και από τον σύνδεσμο $\downarrow$ (σελ. 13).

13. Δείξτε ότι τα συστήματα συνδέσμων είναι επαρκή.

    (α′) $\{\neg, \vee\}$

    (β′) $\{\neg, \wedge\}$

    (γ′) $\{\neg, \to\}$

    (δ′) $\{\downarrow\}$

    (ε′) $\{|\}$.

14. Δείξτε ότι δεν είναι επαρκή τα συστήματα συνδέσμων

    (α′) $\{\wedge, \vee\}$

    (β′) $\{\leftrightarrow, \wedge\}$

    (γ′) $\{\leftrightarrow, \vee\}$

15. Δείξτε ότι για κάθε αποτίμηση των μεταβλητών V και οποιοσδήποτε τύπους φ, ψ ισχύει (θεωρούμε τις λογικές τιμές ως αριθμούς):
    $V^*(\neg \varphi) = \mathbf{1} - V^*(\varphi)$
    $V^*(\varphi \wedge \psi) = \min(V^*(\varphi), V^*(\psi)) = V^*(\varphi) \cdot V^*(\psi)$
    $V^*(\varphi \vee \psi) = \max(V^*(\varphi), V^*(\psi)) = V^*(\varphi) + V^*(\psi) - V^*(\varphi) \cdot V^*(\psi)$
    Βρείτε αντίστοιχες ιδιότητες για τους τύπους $\varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$.

16. Ελέγξτε ότι οι νόμοι του Προτασιακού Λογισμού είναι ταυτολογίες.

17. Εξετάστε ποιοί από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογίες.

    (α′) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$

    (β′) $(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$

(γ′) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

(δ′) $(p \to (q \vee \neg q)) \to p$

(ε′) $(p \to q) \to (p \vee q)$

(ϛ′) $(p \to (q \to p)) \to p$

(ζ′) $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow (p \wedge q \to r)$

(η′) $((p \to q) \to p) \to p$

(ϑ′) $(p \vee q \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \vee (q \to r))$

(ι′) $p \vee ((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$

(ια′) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

(ιβ′) $((p \wedge q) \to r) \to ((p \to r) \wedge (q \to r))$

(ιγ′) $(p \to (q \vee r) \leftrightarrow ((p \to r) \vee (q \to r))$

(ιδ′) $(p \to q) \to (r \vee p \to r \vee q)$

18. Ελέγξτε αν οι παρακάτω τύποι είναι λογικά ισοδύναμοι

    (α′) $p \to q$

    (β′) $p \to p \wedge q$

    (γ′) $\neg q \to (p \to q)$

19. Δείξτε ότι αν οι τύποι $\varphi_1 \to \varphi_2$, $\varphi_2 \to \varphi_3$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \to \varphi_n$, $\varphi_n \to \varphi_1$ είναι ταυτολογίες, τότε οι τύποι φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_n είναι λογικά ισοδύναμοι.

20. Δείξτε ότι:

    (α′) αν φ, $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογίες, τότε ψ είναι ταυτολογία.

    (β′) αν $\neg \varphi$, $\varphi \vee \psi$ είναι ταυτολογίες, τότε ψ είναι ταυτολογία.

    (γ′) ένα μέλος της διάζευξης είναι ταυτολογία, τότε η διάζευξη είναι ταυτολογία. Ισχύει το αντίστροφο;

    (δ′) και τα δύο μέλη της σύζευξης είναι ταυτολογίες, τότε η σύζευξη είναι ταυτολογία. Ισχύει το αντίστροφο;

    (ε′) αν ψ είναι ταυτολογία, τότε $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογία.

21. Δείξτε ότι με οποιαδήποτε σειρά εκτελεστούν οι διαζεύξης στο $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$ πάντα έχουμε την ίδια λογική τιμή. (Αυτό δικαιολογεί γιατί δεν γράφουμε παρενθέσεις στους τύπους σαν τον παραπάνω). Διατυπώστε αντίστοιχη ιδιότητα της σύζευξης.

22. Δείξτε ότι είναι ταυτολογίες οι τύποι:

    (α′) $((\neg p \vee q) \to \neg (p \leftrightarrow \neg q \wedge r)) \to ((p \leftrightarrow \neg q \wedge r) \to \neg(\neg p \vee q))$,

    (β′) $(\neg (q \to r) \vee (q \leftrightarrow \neg p)) \vee \neg(\neg(q \to r) \vee (\neg q \leftrightarrow p))$

23. Έστω ότι φ_n είναι ο τύπος $(\ldots(p \to p) \to p) \ldots) \to p)$ (n φορές), δηλαδή φ_1 είναι p και φ_{n+1} είναι $(\varphi_n) \to p$. Για ποιά n ο τύπος φ_n είναι ταυτολογία;

24. Βρείτε μια κανονική διαζευκτική μορφή και μια κανονική συζευκτική μορφή για τους πιο κάτω τύπους:

    (α′) $p \wedge (q \vee (\neg p \wedge r))$

    (β′) $p \leftrightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$

    (γ′) $p \rightarrow (q \wedge (\neg p \leftrightarrow q))$

    (δ′) $p \vee ((q \wedge p) \rightarrow (q \leftrightarrow \neg p))$

25. Ελέγξτε ότι είναι ταυτολογίες οι πιο κάτω τύποι (γενικεύσεις νόμων του Προτασιακού Λογισμού)

    (α′) $p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n) \leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p \wedge q_n)$,

    (β′) $p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n) \leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \ldots \wedge (p \vee q_n)$,

    (γ′) $\neg (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \leftrightarrow \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n$,

    (δ′) $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n$

26. Αποδείξτε ότι αν οι υποθέσεις ενός συνόλου Δ τύπων του Προτασιακού Λογισμού είναι ταυτολογίες και $\Delta \models \varphi$, τότε και ο τύπος φ είναι ταυτολογία.

27. Δείξτε τις πιο κάτω ιδιότητες της σημασιολογικής συνέπειας:

    (α′) Αν φ είναι μια υπόθεση από το Δ, τότε $\Delta \models \varphi$.

    (β′) Αν $\Delta \models \varphi$ και $\Delta \subseteq \Delta'$, τότε $\Delta' \models \varphi$.

    (γ′) $\Delta \cup \{\varphi\} \models \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $\Delta \models \varphi \rightarrow \psi$.

28. Έστω φ_1, φ_2, …, φ_n, ψ τύποι. Δείξτε ότι:

    (α′) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$,

    (β′) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \models \varphi_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$,

    (γ′) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ τότε και μόνον τότε όταν $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \models \psi$,

    (δ′) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν

    $$\models (\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \ldots (\varphi_n \rightarrow \psi) \ldots))$$

29. Δείξτε ότι ο τύπος $\varphi \wedge \neg \varphi \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία. Συμπεράνετε ότι $\varphi, \neg \varphi \models \psi$.

30. Αιτιολογήστε την ορθότητα των συλλογισμών (1)-(7)στη σελ. 19.

31. Εξετάστε αν τα σύνολα τύπων
    $\Delta_1 = \{(p \rightarrow q) \vee r,\ r \leftrightarrow p \wedge q, \neg p \vee \neg q\}$
    $\Delta_2 = \{\neg p \vee r,\ q \wedge \neg r \leftrightarrow p,\ p \vee (q \rightarrow \neg r)\}$
    είναι συνεπή. Εξετάστε αν $\Delta_1 \models s \rightarrow \neg p \vee \neg q$, $\Delta_2 \models q \wedge \neg r \rightarrow s$.

32. Δείξτε ότι $\psi \models \varphi$ και $\varphi \models \psi$ τότε και μόνον τότε όταν $\varphi \equiv \psi$.

33. Δείξτε ότι $\Delta \cup \{\varphi\} \models \psi$ και $\Delta \cup \{\neg \varphi\} \models \psi$ τότε και μόνο τότε όταν $\Delta \models \psi$.

34. Εξετάστε αν είναι συνεπή τα παρακάτω σύνολα προτάσεων.

(α′) Ο εξεταστής είναι αυστηρός αλλά δίκαιος
Ο εξεταστής δεν είναι ούτε αυστηρός ούτε δίκαιος

(β′) Ο αριθμός p είναι περιττός είτε διαιρείται με το 2.
Ο αριθμός p είναι άρτιος αλλά δεν διαιρείται με το 2.

(γ′) Οι φιλόσοφοι δεν μελετούν Μαθηματικά ή τα θεωρούν άχρηστα.
Οι φιλόσοφοι μελέτουν τα Μαθηματικά εάν και μόνον εάν τα θεωρούν άχρηστα.

35. Δείξτε ότι αν $\Gamma \vdash \varphi$, τότε $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ και $\Gamma \vdash \psi \vee \varphi$.

36. Δείξτε ότι:

(α′) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$
(με $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ εννοούμε τον τύπο $(\ldots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

(β′) Αν $\Gamma \vdash \varphi_1$, $\Gamma \vdash \varphi_2$, $\ldots, \Gamma \vdash \varphi_n$ και $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, τότε $\Gamma \vdash \psi$.

(γ′) Αν $\Gamma \vdash \varphi_1$, $\Gamma \vdash \varphi_2$, $\ldots, \Gamma \vdash \varphi_n$, τότε $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$.

37. Δείξτε ότι (α′) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$, $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$
και γενικότερα (β′) $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \vdash \varphi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

38. Δείξτε ότι αν $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ και Γ, $\psi \vdash \chi$, τότε Γ, $\varphi \vee \psi \vdash \chi$ (Υποδ: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Απαγωγής, την άσκηση 36(γ′) και το αξίωμα Α.11).
Συμπεράνετε ότι αν Γ, $\varphi \vdash \chi$ και Γ, $\neg\varphi \vdash \chi$, τότε $\Gamma \vdash \chi$.

39. Δείξτε ότι $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι συντακτικά αντιφατικό τότε και μόνον τότε, όταν $\Gamma \vdash \varphi$. (Υποδ: $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$).

40. Δείξτε ότι $\varphi \to \psi$, $\psi \to \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Συμπεράνετε ότι

$$\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

41. Δείξτε ότι αν $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ και $\Gamma \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, τότε $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$. (Υποδ. Άσκηση 40)

42. Δείξτε ότι:

(α′) $\vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)$, (Υποδ. Άσκηση 38)

(β′) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$, (Υποδ. Ασκήσεις 36, 37)

(γ′) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\chi \vee \varphi \to \chi \vee \psi)$,

(δ′) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\chi \wedge \varphi \to \chi \wedge \psi)$.
(Υποδ: Για το (γ′) δείξτε πρώτα ότι $\varphi \to \psi, \chi \vdash \chi \vee \varphi$ και $\varphi \to \psi$, $\varphi \vdash \chi \vee \varphi$ και για το (δ′): $\varphi \to \psi$, $\chi \wedge \varphi \vdash \chi$, $\varphi \to \psi$, $\chi \wedge \varphi \vdash \psi$).

43. Δείξτε ότι αν $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ και $\vdash \psi \leftrightarrow \psi'$, τότε:

(α′) $\vdash \varphi \vee \psi \leftrightarrow \varphi' \vee \psi'$,

(β′) $\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi \wedge \psi'$

44. Δείξτε ότι $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$.
(Υποδ. Χρησιμοποιήστε το $\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$ (Θ.9), την άσκηση 43 (β′) και το (Θ.2)).

45. Δικαιολογήστε, επαγωγικά, τις ακόλουθες γενικεύσεις των (Θ.9) και (Θ.10)

(α′) $\vdash \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n) \leftrightarrow \neg\,\varphi_1 \wedge \neg\,\varphi_2 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n$,

(β′) $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \leftrightarrow \neg\,\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$.

46. Δείξτε ότι:

(α′) $\vdash \varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2) \vee \ldots \vee (\varphi \wedge \psi_n)$

(β′) $\vdash \varphi \vee (\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi_1) \wedge (\varphi \vee \psi_2) \wedge \ldots \wedge (\varphi \vee \psi_n)$

47. Δικαιολογήστε, επαγωγικά, την εξής γενίκευση της άσκησης 43.
Αν $\vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_1'$, $\vdash \varphi_2 \leftrightarrow \varphi_2', \ldots, \vdash \varphi_n \leftrightarrow \varphi_n'$, τότε:

(α′) $\vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n \leftrightarrow \varphi_1' \vee \varphi_2' \vee \ldots \vee \varphi_n'$,

(β′) $\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \leftrightarrow \varphi_1' \wedge \varphi_2' \wedge \ldots \wedge \varphi_n'$.

48. Αποδείξτε την ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος Πληρότητας:

$$\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \vdash \varphi \text{ τότε και μόνον τότε, όταν } \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \models \varphi.$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Μετά την κρίση που είχαν τα Μαθηματικά, στο τέλος του 19ου αιώνα, γεννήθηκε η ανάγκη πιο αυστηρής τυποποίησής τους. Πολλές μαθηματικές θεωρίες ξαναδιατυπώθηκαν σε αυστηρή γλώσσα, υπό μορφή αξιωματικών συστημάτων.

Ο προτασιακός Λογισμός δίνει μια χονδρική μελέτη της μαθηματικής γλώσσας. Με πιο λεπτομερή μελέτη της δομής της γλώσσας, καθώς και με τους τρόπους απόδοσης νοήματος στα σύμβολά της, ασχολείται ένας άλλος κλάδος της Μαθηματικής Λογικής. Ο κλάδος αυτός λέγεται Κατηγορηματικός Λογισμός ή Λογισμός Ποσοδεικτών.

Στις μαθηματικές εκφράσεις εκτός από τους λογικούς συνδέσμους συναντάμε και άλλα σύμβολα. Κάποια από αυτά χρησιμοποιούνται για την περιγραφή αντικειμένων (αριθμών, σημείων, συνόλων κ.α.). Άλλα σύμβολα χρησιμοποιούνται για την περιγραφή ιδιοτήτων των αντικειμένων και πράξεων πάνω σ' αυτα. Ειδικά σύμβολα χρησιμοποιούνται για τους λεγόμενους ποσοδείκτες, που παίζουν σπουδαίο ρόλο στις μαθηματικές εκφράσεις. Ένας από τους σκοπούς του Κατηγορηματικού Λογισμού είναι η μελέτη των κανόνων σωστής χρήσης της γλώσσας των Μαθηματικών, και ιδιαίτερα των ποσοδεικτών.

Θα μελετήσουμε εδώ ένα είδος συμβολικών γλωσσών, τις λεγόμενες πρωτοβάθμιες γλώσσες, που είναι πλουσιότερες από τη γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού και αρκούν για την τυποποίηση μεγάλου μέρους των Μαθηματικών.

Η σημασιολογική και η συντακτική άποψη του Κατηγορηματικού Λογισμού είναι γενικότερες από τις αντίστοιχες του Προτασιακού Λογισμού. Οι εκφράσεις των πρωτοβάθμιων γλωσσών ερμηνεύονται στη μαθηματική πραγματικότητα. Περιγράφουν αντικείμενα μαθηματικών χώρων και ιδιότητες τους. Οι τύποι των πρωτοβάθμιων γλωσσών επιδέχονται περισότερες ερμηνείες από τους τύπους του Προτασιακού Λογισμού. Ο Κατηγορηματικός Λογισμός μελετά μια γενικότερη έννοια τυπικής απόδειξης.

Πολλά από τα αποτελέσματα του Προτασιακού Λογισμού γενικεύονται σχετικά εύκολα, άλλα απαιτούν δύσκολα, μη στοιχειώδη μέσα. Θα γνωρίσουμε ένα σύστημα αξιωμάτων του Κατηγορηματικού Λογισμού, το οποίο είναι πλήρες.

2.1 Κατηγορήματα. Ποσοδείκτες

Οι εκφράσεις που περιγράφουν ιδιότητες αντικειμένων και σχέσεις μεταξύ τους λέγονται *κατηγορήματα* η προτασιακοί τύποι [4].
Έτσι π.χ. οι εκφράσεις

"x είναι περιττός "

"x μικρότερο του y"

"x είναι μέγιστος κοινός διαιρέτης των y, z"

είναι κατηγορήματα μιας, δύο και τριών μεταβλητών αντίστοιχα. Αν οι μεταβλητές ενός κατηγορήματος αντικατασταθούν από αντικείμενα (του χώρου στον οποίο αναφέρονται), προκύπτουν προτάσεις.
Για μερικά κατηγορήματα στα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται ειδικά σύμβολα π.χ. $=$, $<$, $\leq$, $\in$, $|$.
Με τη βοήθεια των λογικών συνδέσμων σχηματίζουμε πιο σύνθετα κατηγορήματα από άλλα απλούστερα. Π.χ. η έκφραση

''x δεν είναι περιττός *και* x είναι μέγιστος κοινός διαιρέτης των y, z''

είναι ένα νέο κατηγόρημα.

Νέα κατηγορήματα σχηματίζουμε επίσης με τη χρήση των λέξεων ''κάθε'' και ''υπάρχει''. Οι εκφράσεις

" κάθε x είναι περιττός"

"υπάρχει x μικρότερο του y"

"υπάρχει x που είναι μέγιστος κοινός διαιρέτης των y, z "

είναι πάλι κατηγορήματα. Το πρώτο είναι πρόταση. Τα άλλα δύο είναι μιας και δύο μεταβλητών αντίστοιχα. Τα νέα κατηγορήματα, που σχηματίστηκαν με τον παραπάνω τρόπο, είναι λοιπόν μιας μεταβλητής λιγότερης απ΄ αυτά από τα οποία προκύπτουν.

Οι λέξεις ''κάθε'' και ''υπάρχει'' λέγονται *ποσοδείκτες*, **καθολικός** (ή γενικός) και **υπαρξιακός** αντίστοιχα. [5] Στα Μαθηματικά χρησιμοποιούμε για τους ποσοδείκτες ειδικά σύμβολα. Τελευταία επικρατούν τα σύμβολα $\forall$, $\exists$˙ παλαιότερα πιο συνηθισμένα ήταν τα $\bigwedge$, $\bigvee$ ή $\prod$, $\sum$.

Τους ποσοσδείκτες και τα κατηγορήματα θα μελετήσουμε πιο αυστηρά στις επόμενες παραγράφους.

Σημείωση 1. Αν εφαρμόσουμε ποσοδείκτη σε ένα μονομελές κατηγόρημα (δηλ. σε κατηγόρημα μιας μεταβλητής) προκύπτει πρόταση. Το αν η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής δεν είναι, εν γένει, απόλυτο. π.χ. η πρόταση ''υπάρχει x ώστε $x \odot x = \mathbf{1}$'' είναι αληθής αν το $\mathbf{1}$ ερμηνευτεί ως ο φυσικός 1 και το $\odot$ ως πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών, ενώ δεν είναι

[4] Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση των προτασιακών τύπων με τους τύπους του Προτασιακού Λογισμού. Στους τελευταίους οι μεταβλητές συμβολίζουν προτάσεις.

[5] Συχνά ο καθολικός ποσοδείκτης διαβάζεται''για κάθε'', ''για όλα'' και ο υπαρξιακός ''για κάποια'', ''υπάρχει τουλάχιστον ένα''.

αληθής αν το $\odot$ ερμηνευτεί ως πρόσθεση φυσικών αριθμών και το $\mathbf{1}$ πάλι ως ο αριθμός 1. [6]

Σημείωση 2. Εν γένει, η φράση “για κάθε x ισχύει $P(x)$” συνεπάγεται την “υπάρχει x ώστε $P(x)$”. Ας προσέξουμε όμως ότι αυτό *δεν* συμβαίνει στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε *κενό χώρο.*

2.2 Πρωτοβάθμιες Γλώσσες

Σ' αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε το συντακτικό των πρωτοβάθμιων γλωσσών, που χρησιμοποιούνται για την τυποποίηση πολλών βασικών μαθηματικών θεωριών. Οι θεωρίες αυτές ενδιαφέρονται για κάποιους μαθηματικούς χώρους. Οι αντίστοιχες γλώσσες διαθέτουν μεταβλητές για τον συμβολισμό αντικειμένων των εξεταζόμενων χώρων. Οι ποσοδείκτες αναφέρονται μόνο στα αντικείμενα αυτά[7].

Οι συμβολικές γλώσσες φαίνονται δυσανάγνωστες σε σχέση με την φυσική γλώσσα και οι εκφράσεις τους είναι σχετικά σύνθετες. Μπορούμε όμως χάρη σ' αυτές να τυποποιήσουμε αυστηρά τις βασικές για τα Μαθηματικά έννοιες όπως συνέπεια, πρότυπο, απόδειξη κ.α.

Πολλά σύμβολα είναι κοινά για όλες τις πρωτοβάθμιες γλώσσες. Άλλα επιλέγονται κατάλληλα για την θεωρία και αντιστοιχούν στις αρχικές έννοιές της.

Παρακάτω εισάγουμε την γενική μορφή μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας περιγράφοντας το αλφάβητο της και τους κανόνες σύνταξης σωστών εκφράσεων.

Αλφάβητο

Τα σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας είναι τα εξής:

(α')	σύμβολα μεταβλητών:	$x_1, x_2, x_3, \ldots$
(β')	σύμβολα συνδέσμων:	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
(γ')	σύμβολα ποσοδεικτών:	$\forall, \exists$
(δ')	σύμβολο ισότητας:	$=$
(ε')	παρενθέσεις:	(,)

Τα παραπάνω σύμβολα χαρακτηρίζονται ως **λογικά** και είναι κοινά για όλες τις πρωτοβάθμιες γλώσσες. Εκτός απ' αυτά μπορούν να υπάρχουν και άλλα σύμβολα, που λέγονται **μη λογικά**.

Συγκεκριμένα, για κάθε πρωτοβάθμια γλώσσα υπάρχουν τρία σύνολα I, J, K πεπερασμένα (ενδεχομένως κενά) ή άπειρα (αριθμήσιμα ή μη αριθμήσιμα), τα οποία καθορίζουν, αντίστοιχα, τα λεγόμενα:

[6] Δυστυχώς δεν υπάρχει απλή, μηχανική μέθοδος για τον έλεγχο αλήθειας των εκφράσεων που χρησιμοποιούν ποσοδείκτες, ανάλογη μ' αυτή των $\mathbf{0}-\mathbf{1}$ πινάκων στον Προτασιακό Λογισμό.

[7] Υπάρχουν και άλλες συμβολικές γλώσσες, οι οποίες εκτός από τις μεταβλητές για τα αντικείμενα των χώρων έχουν και άλλες για τον συμβολισμό υποσυνόλων και σχέσεων στους χώρους. Οι γλώσσες αυτές λέγονται δευτεροβάθμιες

(σ′)	σύμβολα κατηγορημάτων:	$\{P_i \,:\, i \in I\}$
(ζ′)	σύμβολα συναρτήσεων:	$\{f_j \,:\, j \in J\}$
(η′)	σύμβολα σταθερών:	$\{c_k \,:\, k \in K\}$

Σε κάθε σύμβολο κατηγορήματος P αντιστοιχεί ένας θετικός φυσικός αριθμός $\overline{n}(P)$, που δείχνει πόσων μεταβλητών σχέση συμβολίζει το P. Το σύμβολο P λέγεται n-θέσιο, όταν $\overline{n}(P) = n$.

Σε κάθε σύμβολο συνάρτησης f αντιστοιχεί ένας θετικός φυσικός αριθμός $\overline{m}(f)$, που δείχνει πόσων μεταβλητών συνάρτηση συμβολίζει το f. Το f λέγεται n-θέσιο, όταν $\overline{m}(f) = n$.

Μια πρωτοβάθμια γλώσσα καθορίζεται πλήρως, όταν δωθούν τα μη λογικά σύμβολά της. Περιγράφοντας λοιπόν τη γλώσσα αρκεί να πούμε ποιά είναι τα σύμβολα των κατηγοριών (σ′), (ζ′), (η′) και πόσες θέσεις έχει το καθένα από τα σύμβολα των (σ′), (ζ′).

Σημείωση 1. Μερικοί ορίζουν τις πρωτοβάθμιες γλώσσες με λιγότερα λογικά σύμβολα. Παίρνουν π.χ. λιγότερα σύμβολα συνδέσμων είτε έναν μόνο ποσοδείκτη. Αρκεί το σύνολο συνδέσμων να είναι επαρκές (βλ. σελ.13). Θα δούμε αργότερα πως μπορεί να οριστεί ο γενικός ποσοδείκτης με τη βοήθεια του υπαρξιακού και αντιστρόφως.

Σημείωση 2. Ορίζονται και πρωτοβάθμιες γλώσσες χωρίς ισότητα. Σ′ αυτές το σύμβολο $=$ δεν θεωρείται λογικό. Δεν εξετάζεται καθόλου ή κατατάσσεται στα μή λογικά σύμβολα. Εδώ το θεωρούμε λογικό σύμβολο, διότι θα του αποδίδεται πάντα η ίδια ερμηνεία - η ταυτότητα αντικειμένων.

Παραδείγματα

1. Μια πρωτοβάθμια γλώσσα για την αριθμητική έχει ως μη λογικά σύμβολα τα:

σύμβολα κατηγορημάτων:	$<$	με $\overline{n}(<) = 2$
σύμβολα συναρτήσεων:	$+, \cdot$	με $\overline{m}(+) = 2$, $\overline{m}(\cdot) = 2$
σύμβολα σταθερών:	$\mathbb{O}, \mathbb{I}$	

2. Για την αριθμητική χρησιμοποιείται συχνά και μια άλλη πρωτοβάθμια γλώσσα, η $\mathcal{L}^A$, που έχει ένα ακόμα σύμβολο συνάρτησης S με $\overline{m}(S) = 1$ και ένα μόνο σύμβολο σταθεράς, το $\mathbb{O}$.

3. Για την τυποποίηση της θεωρίας συνόλων αρκεί μια γλώσσα $\mathcal{L}^\Sigma$ με ένα μόνο μη λογικό σύμβολο, το 2-θέσιο σύμβολο κατηγορήματος $\in$. Καμιά φορά χρησιμοποιείται και ένα σύμβολο σταθεράς, το $\varnothing$.

4. Για την θεωρία ομάδων χρησιμοποιείται γλώσσα με ένα 2-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο και ένα σύμβολο σταθεράς. Συνηθίζονται τα $\circ$ και e ή $+$ και $\mathbb{O}$.

5. Οι θεωρίες δακτυλίων και σωμάτων τυποποιούνται σε μια γλώσσα με μη λογικά σύμβολα όμοια με τα σύμβολα συναρτήσεων και σταθερών της γλώσσας της αριθμητικής.

Όροι και τύποι

Οι σωστές εκφράσεις μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας είναι κάποιες πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων του αλφάβητου. Υπάρχουν δύο είδη σωστών εκφράσεων: οι **όροι** (ή ονόματα), που περιγράφουν αντικείμενα και οι **τύποι**, που περιγράφουν ιδιότητες των αντικειμένων. Παρακάτω θα γνωρίσουμε αυστηρούς κανόνες σχηματισμού όρων και τύπων.

Ο1. Τα σύμβολα μεταβλητών και σταθερών είναι όροι.
Ο2. Αν f είναι m-θέσιο σύμβολο συνάρτησης και $t_1, \ldots, t_m$ είναι όροι, τότε η έκφραση $f(t_1, \ldots, t_m)$ είναι όρος.

Κάθε όρος λοιπόν προκύπτει από πολλαπλή εφαρμογή συμβόλων συναρτήσεων πάνω σε σύμβολα σταθερών και μεταβλητών.

Παραδείγματα. Οι εκφράσεις

$$x_1,\, \mathbb{I},\, +(\mathbb{I},\, x_1),\, \cdot(\mathbb{O},\, \mathbb{I}),\, \cdot(+(\mathbb{I},\, x_1),\, x_2)$$

είναι όροι της γλώσσας της αριθμητικής, που περιγράψαμε στο Παράδειγμα 1 της προηγούμενης σελίδας. Μόνο ο πρώτος και ο τρίτος από αυτούς είναι όροι της γλώσσας $\mathcal{L}^A$ (Παραδειγμα 2).
Άλλοι όροι τις $\mathcal{L}^A$ είναι π.χ. οι

$$S(x_3),\, S(S(S(\mathbb{O}))),\, +(S(\cdot(x_1,\, S(S(\mathbb{O})))),\, x_1).$$

Οι γλώσσα $\mathcal{L}^\Sigma$ της θεωρίας συνόλων, που έχει μόνο ένα 2-θέσιο σύμβολο κατηγορήματος $\in$, έχει ως όρους μόνο τα σύμβολα μεταβλητών, αφού δεν περιέχει σύμβολα συναρτήσεων ούτε σταθερών.

Σημείωση. Λόγω μαθηματικής παράδοσης και χάριν απλότητας θα γράφουμε πολλούς όρους πιο σύντομα. Όταν το σύμβολο f είναι 2-θέσιο αντί για τον όρο $f(t,\, s)$ θα γράφουμε $t\, f\, s$. Έτσι λοιπόν αντί για το $\cdot(\mathbb{O},\, \mathbb{I})$ γράφουμε $\mathbb{O} \cdot \mathbb{I}$. Το τελευταίο από τα παραπάνω παραδείγματα γράφεται και $S(x_1 \cdot S(S(\mathbb{O}))) + x_1$.

Τα σύμβολα κατηγορημάτων περιγράφουν σχέσεις που είναι αρχικές έννοιες μιας μαθηματικής θεωρίας. Πιο σύνθετα κατηγορήματα εκφράζονται από τους λεγόμενους τύπους της γλώσσας. Οι τύποι σχηματίζονται ως έξης:

Τ1. Αν $t,\, s$ είναι όροι, τότε η έκφραση $t = s$ είναι τύπος.
Τ2. Αν $t_1,\, \ldots,\, t_n$ είναι όροι και P είναι n- θέσιο σύμβολο κατηγορήματος, τότε η έκφραση $P(t_1,\, \ldots, t_n)$ είναι τύπος.
Τ3. Αν $\varphi,\, \psi$ είναι τύποι και x σύμβολο μεταβλητής, τότε οι εκφράσεις

$$(\neg\, \varphi),\, (\varphi \wedge \psi),\, (\varphi \vee \psi),\, (\varphi \rightarrow \psi),\, (\varphi \leftrightarrow \psi),\, (\exists x \varphi),\, (\forall x \varphi)$$

είναι τύποι.

Οι τύποι που δίδονται από τους κανόνες Τ1, Τ2 λέγονται **ατομικοί** τύποι.

Παραδείγματα. Οι εκφράσεις

$$x_1 + \mathbb{O} = S(S(x_2)), \quad < (S(x_3),\, \mathbb{O})$$

είναι ατομικοί τύποι της γλώσσας $\mathcal{L}^A$ της αριθμητικής. Αν δεχθούμε μια σύμβαση ανάλογη μ' αυτήν για τους όρους, μπορούμε να γράφουμε τον τελευταίο τύπο ως $S(x_3) < \mathbb{O}$. Άλλα παραδείγματα τύπων της γλώσσας $\mathcal{L}^A$ είναι τα

$(x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2)$

$(\neg (\forall x_4 \; \mathbb{O} + x_2 = (x_2 \cdot x_3) + x_4))$

$(x_2 < x_1 \rightarrow (\exists x_3 \; ((\neg (x_3 = \mathbb{O})) \wedge x_2 + x_3 = x_1)))$

Όπως και στον Προτασιακό Λογισμό, δεχόμαστε μερικές συμβάσεις, που μας επιτρέπουν να παραλείπουμε παρενθέσεις. Δεν γράφουμε παρενθέσεις όταν δεν υπάρχει αμφιβολία που αναφέρονται τα σύμβολα συνδέσμων και οι ποσοδείκτες. Έτσι π.χ. δεν γράφουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις.

Επίσης, λόγω παράδοσης, γράφουμε $t \neq s$ αντί του $\neg (t = s)$ και $t \notin s$ αντί του $\neg (t \in s)$, στη γλώσσα $\mathcal{L}^\Sigma$ της θεωρίας συνόλων.

Ο τελευταίος από τους παραπάνω τύπους γράφεται λοιπόν πιο σύντομα ως

$$x_2 < x_1 \rightarrow \exists \, x_3(x_3 \neq \mathbb{O} \wedge x_2 + x_3 = x_1).$$

Ας δούμε μερικά ακόμα παραδείγματα τύπων. Οι ατομικοί τύποι της $\mathcal{L}^\Sigma$ είναι μορφής $t = s$ ή $t \in s$, όπου t, s είναι μεταβλητές. Άλλοι τύποι της $\mathcal{L}^\Sigma$ είναι π.χ. οι εκφράσεις

$\forall x_3 \; (x_3 \in x_1 \leftrightarrow x_3 \in x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

$\exists x_1 \forall x_2 \; x_2 \notin x_1$

Σημείωση. Ας προσέξουμε ότι οι εκφράσεις σαν την

$$\exists \mathbb{O} \; (\mathbb{O} < x_1 \vee x_1 \neq x_2)$$

δεν είναι σωστές. Σύμφωνα με τον κανόνα Τ3, οι ποσοδείκτες συνοδεύονται από μεταβλητές. Δεν είναι επίσης σωστή η έκφραση

$$\exists x_1 \;\; x_1 < x_2 \;\; \forall x_2$$

αφού οι ποσοδείκτες γράφονται αμέσως *πριν* από τον τύπο στον οποίο αναφέρονται. Στην παραπάνω έκφραση υπάρχει ασάφεια, αφού δεν είναι φανερό αν εννοούμε

$$\forall x_2 \exists x_1 \;\; x_1 < x_2 \quad ή \quad \exists x_1 \forall x_2 \;\; x_1 < x_2$$

Όπως θα δούμε αργότερα, οι δύο αυτοί τύποι δεν είναι λογικά ισοδύναμοι.

Ελεύθερες και δεσμευμένες μεταβλητές

Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε πόσων μεταβλητών κατηγόρημα περιγράφει ένας δοσμένος τύπος μια πρωτοβάθμιας γλώσσας.

Ακτίνα (επιρροής) ενός ποσοδείκτη λέμε τον τύπο στον οποίο αναφέρεται ο ποσοσδείκτης. Συγκεκριμένα, ο τύπος φ είναι ακτίνα του $\exists$ στον τύπο $(\exists x \varphi)$, και ανάλογα είναι ακτίνα του $\forall$ στον τύπο $(\forall x \varphi)$. Λέμε ότι ο ποσοδείκτης **δεσμεύει**, στην ακτίνα επιρροής του, τη μεταβλητή που τον συνοδεύει. Έτσι λοιπόν στους τύπους $(\exists x \varphi)$ και $(\forall x \varphi)$ όλες οι εμφανίσεις της μεταβλητής x στο φ λέγονται **δεσμευμένες**. Οι μη δεσμευμένες εμφανίσεις μιας μεταβλητής λέγονται **ελεύθερες**.

Έστω φ τύπος, x μεταβλητή. Λέμε ότι η x είναι **ελεύθερη** μεταβλητή του φ, αν *τουλάχιστον* μια εμφάνισή της στο φ είναι ελεύθερη. Λέμε ότι η x είναι **δεσμευμένη** μεταβλητή του φ, αν *τουλάχιστον* μια εμφάνισή της στον φ είναι δεσμευμένη. Όπως θα δούμε παρακάτω, μια μεταβλητή μπορεί να είναι σ΄ έναν τύπο συγχρόνως δεσμευμένη και ελεύθερη.

Παραδείγματα.

1. Στον τύπο φ:
$$\forall x_1 \, (\mathbb{O} < x_1 \rightarrow \exists x_2 \, (\mathbb{O} < x_2 \wedge x_2 \cdot x_2 = x_1))$$
όλες οι εμφανίσεις της μεταβλητής x_1 είναι δεσμευμένες, αφού βρίσκονται στην ακτίνα του $\forall x_1$, που είναι ο τύπος ψ:
$$(\mathbb{O} < x_1 \rightarrow \exists x_2 \, (\mathbb{O} < x_2 \wedge x_2 \cdot x_2 = x_1)).$$
Ακτίνα του $\exists x_2$ είναι ο τύπος $(\mathbb{O} < x_2 \wedge x_2 \cdot x_2 = 1)$. Ο ποσοσδείκτης δεσμεύει σ΄ αυτόν όλες τις εμφανίσεις της μεταβλητής x_2. Η μεταβλητή x_1 είναι ελεύθερη στον τύπο ψ. Δεν είναι όμως ελεύθερη στον αρχικό τύπο φ.

2. Ο τύπος $x_1 + x_3 < x_1 \rightarrow x_1 < \mathbb{O} \wedge x_1 < \mathbb{I}$ δεν έχει ποσοδείκτες. Όλες οι εμφανίσεις των x_1, x_3 είναι ελεύθερες. Οι μεταβλητές x_1, x_3 είναι λοιπόν οι ελεύθερες μεταβλητές του τύπου αυτού.

3. Στον τύπο
$$\forall x_1 \; (x_1 \neq \mathbb{O} \vee x_1 + x_2 = \mathbb{I}) \rightarrow \exists x_2 \; x_2 + x_3 = x_1 \cdot x_2$$
η πρώτη και η δεύτερη εμφάνιση της x_1 είναι δεσμευμένη, ενώ η τρίτη είναι ελεύθερη. Η πρώτη εμφάνιση της x_2 είναι ελεύθερη, ενώ οι άλλες δύο εμφανίσεις της είναι δεσμευμένες. Η εμφάνιση της x_3 είναι ελεύθερη. Ο παραπάνω τύπος έχει λοιπόν ελεύθερες μεταβλητές τις x_1, x_2, x_3. Δεσμευμένες μεταβλητές του είναι οι x_1, x_2.

Ένας τύπος με m ελεύθερες μεταβλητές παριστάνει m-μελές κατηγόρημα (κατηγόρημα m μεταβλητών). Τους τύπους που δεν έχουν ελεύθερες μεταβλητές (τα 0-μελή κατηγορήματα) τους λέμε **προτάσεις**.

Παραδείγματα. Ο τύπος $\forall x_1 \, (\mathbf{0} < x_1 \rightarrow \exists x_2 \, (\mathbf{0} < x_2 \wedge x_2 \cdot x_2 = x_1))$ (Παραδ. 1 παραπάνω) είναι πρόταση. Ο τύπος της $\mathcal{L}^{\Sigma}$
$$\forall x_3 \;\; (x_3 \in x_1 \leftrightarrow x_3 \in x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$
έχει ελεύθερες μεταβλητές τις x_1, x_2. Δεν είναι λοιπόν πρόταση. Εφαρμόζοντας π.χ. δύο φορές τον καθολικό ποσοσδείκτη μπορύμε να δεσμεύσουμε τις μεταβλητές x_1, x_2. Ο τύπος που προκύπτει
$$\forall x_1 \, \forall x_2 \;\; (\forall x_3 \; (x_3 \in x_1 \leftrightarrow x_3 \in x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$$
είναι πρόταση.

Έστω φ τύπος με ελεύθερες μεταβλητές τις $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Ο τύπος $\forall z_1, \forall z_2, \ldots, \forall z_n \varphi$ λέγεται **καθολική κλειστότητα** του φ. Η καθολική κλειστότητα ενός τύπου είναι πρόταση, αφού δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές (βλ. το τελευταίο παράδειγμα).

2.3 Ερμηνείες Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

Θα ασχοληθούμε τώρα με την απόδοση νοήματος στις εκφράσεις των πρωτοβάθμιων γλωσσών. Στον Προτασιακό Λογισμό οι μεταβλητές της γλώσσας ερμηνευόταν ως αληθείς ή ψευδείς προτάσεις, δηλαδή ως στοιχεία του συνόλου λογικών τιμών $\{\mathbb{O}, \mathbb{I}\}$. Το νόημα των συμβόλων λογικών συνδέσμων ήταν μια για πάντα καθορισμένο. Κάθε αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών όριζε μονοσήμαντα τη λογική τιμή κάθε τύπου. Κάτι ανάλογο, αλλά πιο πολύπλοκο, συμβαίνει και στον Κατηγορηματικό Λογισμό. Οι μεταβλητές θα παίρνουν τιμές σ' ένα οποιοδήποτε σύνολο (μαθηματικό χώρο). Τα υπόλοιπα λογικά σύμβολα θα έχουν πάντα την ίδια, αναμενόμενη, σημασία. Υπάρχουν όμως περισσότερες δυνατότητες απόδοσης νοήματος στα μη λογικά σύμβολα της γλώσσας.

Αφού δωθεί ερμηνεία στα σύμβολα του αλφαβήτου, κάθε αποτίμηση των μεταβλητών θα ορίζει μονοσήμαντα το νόημα των συντακτικά σωστών εκφράσεων της γλώσσας. Οι τύποι, και ειδικά οι προτάσεις, αποκτούν τιμή αληθείας.

Έστω $\mathcal{L}$ πρωτοβάθμια γλώσσα. Μια **ερμηνεία** $\mathfrak{A}$ της $\mathcal{L}$ αποτελείται από:

1. Ένα μη κενό σύνολο A, που λέγεται **σύμπαν** ή **χώρος** της ερμηνείας.
2. Μια αντιστοίχιση n-μελούς σχέσης $P^{\mathfrak{A}}$ (δηλ. $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$), σε κάθε n-θέσιο σύμβολο κατηγορήματος P.
3. Μια αντιστοίχιση συνάρτησης m μεταβλητών $f^{\mathfrak{A}}$ (δηλ. $f^{\mathfrak{A}} : A^m \to A$), σε κάθε m-θέσιο σύμβολο συνάρτησης f.
4. Μια αντιστοίχιση στοιχείου $c^{\mathfrak{A}}$ του σύμπαντος (δηλ. $c^{\mathfrak{A}} \in A$), σε κάθε σύμβολο σταθεράς c.

Έτσι λοιπόν, μια ερμηνεία μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας $\mathcal{L}$, με σύνολα μη λογικών συμβόλων τα $\{P_i : i \in I\}$, $\{f_j : j \in J\}$, $\{c_k : k \in K\}$, μπορούμε να τη δούμε ως τετράδα

$$\mathfrak{A} =< A, \{P_i^{\mathfrak{A}} : i \in I\}, \{f_j^{\mathfrak{A}} : j \in J\}, \{c_k^{\mathfrak{A}} : k \in K\} >$$

όπου A είναι το σύμπαν της, $P_i^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{\overline{n}(P_i)}$ (για $i \in I$), $f_j^{\mathfrak{A}} : A^{\overline{m}(f_j)} \to A$ (για $j \in J$) και $c_k^{\mathfrak{A}} \in A$ (για $k \in K$).
Οι ερμηνείες των πρωτοβάθμιων γλωσσών είναι δηλαδή κάποιοι μαθηματικοί χώροι και λέγονται **δομές**.

Παραδείγματα.

1. Έστω $\mathcal{L}^O$ γλώσσα, που έχει ως μη λογικά σύμβολα ένα 2-θέσιο σύμβολο συνάρτησης $\circ$ και ένα σύμβολο σταθεράς e. Οι δομές $< \mathbb{N}, +_{\mathbb{N}}, 0 >$, $< \mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, 5 >$, $< \mathbb{Q}, \cdot_{\mathbb{Q}}, 1 >$ είναι παράδειγματα ερμηνειών της $\mathcal{L}^O$. Το σύμβολο $\circ$ ερμηνεύεται στην πρώτη δομή ως η πράξη $+_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ προσθέσης φυσικών αριθμών. Στις άλλες δομές, ερμηνεύεται ως πρόσθεση ακέραιων $+_{\mathbb{Z}}$ και πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών, αντίστοιχα. Το σύμβολο σταθεράς e ερμηνεύεται ως φυσικός αριθμός 0, ο ακέραιος 5 και ο ρητός 1, αντίστοιχα.
2. Η ερμηνεία $\mathfrak{N}$ για τη γλώσσα $\mathcal{L}^A$ ορίζεται ως εξής:

(α΄) Το σύμπαν της είναι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών

(β΄) Το σύμβολο κατηγορήματος $<$ αντιστοιχεί στη σχέση $<_{\mathbb{N}}$ διάταξης των φυσικών αριθμών.

(γ΄) Το σύμβολο συνάρτησης S αντιστοιχεί στη συνάρτηση $S_{\mathbb{N}}$, που για κάθε φυσικό αριθμό δίνει ως αποτέλεσμα τον επόμενό του. Τα σύμβολα $+, \cdot$ αντιστοιχούν στην πρόσθεση $+_{\mathbb{N}}$ και πολλαπλασιασμό $\cdot_{\mathbb{N}}$ των φυσικών αριθμών.

(δ΄) Το σύμβολο $\mathbb{O}$ σταθεράς αντιστοιχεί στον αριθμό 0.

Έχουμε δηλαδή $<^{\mathfrak{N}}=<_{\mathbb{N}}$, $S^{\mathfrak{N}} = S_{\mathbb{N}}$, $+^{\mathfrak{N}} = +_{\mathbb{N}}$, $\cdot^{\mathfrak{N}} = \cdot_{\mathbb{N}}$ και $\mathbb{O}^{\mathfrak{N}} = 0$. Η παραπάνω ερμηνεία της $\mathcal{L}^A$ λέγεται *φυσική* της ερμηνεία και γράφεται ως δομή

$$\mathfrak{N} =< \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}, S_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, 0 > .$$

Σημείωση. Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση των συμβόλων της γλώσσας με της ερμηνείες τους, που είναι αντικείμενα της μαθηματικής πραγματικότητας. Έτσι π.χ. το $+$ παραπάνω είναι ένα γράμμα του αλφαβήτου της $\mathcal{L}^A$, ενώ το $+_{\mathbb{N}}$ είναι μια συνάρτηση.

Αφού καθορίσουμε την ερμηνεία των μη λογικών συμβόλων και δεχθούμε ότι τα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =$ έχουν τη φυσιολογική τους σημασία, κάποιες από της εκφράσεις της γλώσσας αποκτούν νόημα. Π.χ. ο όρος $S(S(\mathbb{O}))$ στη φυσική ερμηνεία $\mathfrak{N}$ της $\mathcal{L}^A$ συμβολίζει τον αριθμό 2. Παραμένει αόριστο το νόημα των όρων που περιέχουν μεταβλητές (π.χ. $S(x_1) + S(\mathbb{O})$) και των τύπων που έχουν ελεύθερες μεταβλητές (π.χ. $\exists x_1\ x_1 < x_2$). Η σημασία τους εξαρτάται από τις τιμές των μεταβλητών.

Έστω $\mathcal{L}$ μια πρωτοβάθμια γλώσσα και $\mathfrak{A}$ μια ερμηνεία της με σύμπαν το σύνολο A. **Αποτίμηση των μεταβλητών** της $\mathcal{L}$ στην $\mathfrak{A}$ λέμε κάθε αντιστοίχιση V στοιχείων του A στις μεταβλητές της $\mathcal{L}$ (δηλαδή $V : M \rightarrow A$, όπου M το σύνολο των μεταβλητών).

Κάθε αποτίμηση V των μεταβλητών στη δομή $\mathfrak{A}$ επεκτείνεται μονοσήμαντα σε αποτίμηση V^* των όρων της $\mathcal{L}$ (δηλ. $V^* : \mathcal{O} \rightarrow A$, όπου $\mathcal{O}$ το σύνολο των όρων). Συγκεκριμένα, ορίζουμε την τιμή $V^*(t)$ του όρου t (με επαγωγή ως προς το πλήθος των συμβόλων συναρτήσεων στον όρο t) ως εξής:

1. $V^*(x_i) = V(x_i)$, για όρους που είναι μεταβλητές
   $V^*(c) = c^{\mathfrak{A}}$, για όρους που είναι σύμβολα σταθερών

2. Για όρους μορφής $f(t_1, \ldots, t_m)$, όπου f m-θέσιο σύμβολο συνάρτησης και $t_1, \ldots, t_m$ όροι

$$V^*(f(t_1, \ldots, t_m)) = f^{\mathfrak{A}}(V^*(t_1), \ldots, V^*(t_m)).$$

Παραδείγματα.

1. Στη δομή $\mathfrak{N}$ για τη γλώσσα $\mathcal{L}^A$ για την αποτίμηση V με $V(x_i) = 2i + 1$, έχουμε
   $V^*(\mathbb{O}) = \mathbb{O}^{\mathfrak{N}} = 0$
   $V^*(S(\mathbb{O})) = S^{\mathfrak{N}}(V^*(\mathbb{O})) = S_{\mathbb{N}}(0) = 1$
   $V^*(S(x_1)) = S^{\mathfrak{N}}(V^*(x_1)) = S_{\mathbb{N}}(V(x_1)) = S_{\mathbb{N}}(3) = 4$
   $V^*(S(x_1) + S(\mathbb{O})) = +^{\mathfrak{N}}(V^*S(x_1)), V^*(S(\mathbb{O})) = +_{\mathbb{N}}(4, 1) = 5$

   Ας παρατηρήσουμε ότι για την εύρεση των τιμών V^* των παραπάνω όρων ήταν αρκετό να γνωρίζουμε μόνο την τιμή $V(x_1) = 3$.

2. Ο όρος $((x_3 \circ x_1) \circ (e \circ x_1))$ της γλώσσας $\mathcal{L}^{\mathcal{O}}$ (παραδ. 1., σελ.42) στη δομή $\mathfrak{A} =< \mathbb{N}, +_{\mathbb{N}}, 0 >$, για μια αποτίμηση V με $V(x_1) = 2$, $V(x_3) = 7$ παίρνει την τιμή
$V^*(((x_3 \circ x_1) \circ (e \circ x_1)) = V^*(x_3 \circ x_1) +_{\mathbb{N}} V^*(e \circ x_1) =$
$= (V(x_3) +_{\mathbb{N}} V(x_1)) +_{\mathbb{N}} V^*(e^{\mathfrak{A}} +_{\mathbb{N}} V(x_1)) = (7 +_{\mathbb{N}} 2) +_{\mathbb{N}} (0 + 2) = 11.$

   Εύκολα βρίσκουμε ότι ο ίδιος όρος για την αποτίμηση V με $V^*(x_1) = 3$, $V^*(x_3) = 3$ παίρνει, στη δομή $\mathfrak{A}$, την τιμή 9.

   Ο ίδιος όρος στη δομή $\mathfrak{B} =< \mathbb{Q}, \cdot_{\mathbb{Q}}, 1 >$, για την αποτίμηση V με $V(x_1) = 2$, $V(x_3) = -\frac{1}{3}$ παίρνει την τιμή
$V^*(((x_3 \circ x_1) \circ (e \circ x_1)) = V^*(x_3 \circ x_1) \cdot_{\mathbb{Q}} V^*(e \circ x_1) =$
$= (V(x_3) \cdot_{\mathbb{Q}} V(x_1)) \cdot_{\mathbb{Q}} (e^{\mathfrak{B}} \cdot_{\mathbb{Q}} V(x_1)) = (-\frac{1}{3} \cdot_{\mathbb{Q}} 2) \cdot_{\mathbb{Q}} (1 \cdot_{\mathbb{Q}} 2) = -\frac{4}{3}.$

Παρατήρηση. Όπως είδαμε παραπάνω για την εύρεση της τιμής $V^*(t)$ ενός όρου t, του οποίου οι μεταβλητές είναι μεταξύ των $x_1, \ldots, x_n$, αρκεί να γνωρίζουμε μόνο τις τιμές, που δίνει η αποτίμηση V στις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ (βλ. άσκηση 52 α΄). Αν λοιπόν οι μεταβλητές του όρου t είναι μεταξύ των $x_1, \ldots, x_n$ και $V(x_1) = a_1, \ldots, V(x_n) = a_n$, αντί του $V^*(t)$ γράφουμε συχνά $t[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$.

Τη διαδικασία απόδοσης σημασίας στους όρους μιας γλώσσας $\mathcal{L}$ σε μια δομή $\mathfrak{A}$ μπορούμε να την περιγράψουμε διαισθητικά ως αντικατάσταση των μεταβλητών της $\mathcal{L}$ με στοιχεία του σύμπαντος της $\mathfrak{A}$. Κάτι παρόμοιο γίνεται και για την απόδοση νοήματος (τιμής αληθείας) στους τύπους της $\mathcal{L}$. Παρακάτω θα γνωρίσουμε τον αυστηρό ορισμό που οφείλεται στον A. Tarski.

Έστω $\mathcal{L}$ πρωτοβάθμια γλώσσα, $\mathfrak{A}$ μια ερμηνεία της και V μια αποτίμηση των μεταβλητών της $\mathcal{L}$ στην $\mathfrak{A}$. Έστω ϑ τύπος της $\mathcal{L}$. Λέμε ότι ο τύπος ϑ **ικανοποιείται στην $\mathfrak{A}$ από την αποτίμηση** V, και γράφουμε

$$\mathfrak{A} \models \vartheta[V]$$

όταν:

1. ϑ είναι ατομικός τύπος μορφής $t = s$, όπου t, s όροι:

$$\mathfrak{A} \models t = s\,[V] \text{ εάν και μόνο εάν } V^*(t) = V^*(s)$$

2. ϑ είναι ατομικός τύπος μορφής $P(t_1, \ldots, t_n)$, όπου P n-θέσιο σύμβολο κατηγορήματος και $t_1, \ldots, t_n$ όροι:

$$\mathfrak{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)[V] \text{ εάν και μόνο εάν } < V^*(t_1), \ldots, V^*(t_n) > \in P^{\mathfrak{A}}$$

   (δηλαδή η διατεταγμένη n-άδα $< V^*(t_1), \ldots, V^*(t_n) >$, ικανοποιεί τη σχέση $P^{\mathfrak{A}}$)

3. α) ϑ είναι σύνθετος τύπος και έχει μια από τις μορφές

$$\neg \varphi,\ \varphi \wedge \psi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \rightarrow \psi,\ \varphi \leftrightarrow \psi$$

$\mathfrak{A} \models (\neg\varphi)[V]$ εάν και μόνον εάν *δεν* ισχύει $\mathfrak{A} \models \varphi[V]$ (γράφουμε $\mathfrak{A} \not\models \varphi[V]$)
$\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[V]$ εάν και μόνον εάν $\mathfrak{A} \models \varphi[V]$ *και* $\mathfrak{A} \models \psi[V]$
$\mathfrak{A} \models (\varphi \vee \psi)[V]$ εάν και μόνον εάν $\mathfrak{A} \models \varphi[V]$ *είτε* $\mathfrak{A} \models \psi[V]$
$\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[V]$ εάν και μόνον εάν $\mathfrak{A} \not\models \varphi[V]$ *είτε* $\mathfrak{A} \models \psi[V]$
$\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[V]$ εάν και μόνον εάν $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[V]$ *και* $\mathfrak{A} \models (\psi \to \varphi)[V]$

3. β) ϑ είναι σύνθετος τύπος μορφής $\forall x\varphi$ ή $\exists x\varphi$.

Ας συμβολίσουμε με $V(x/a)$ την αποτίμηση που δίνει στη μεταβλητή x την τιμή a και σε όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές την ίδια τιμή με την αποτίμηση V

$\mathfrak{A} \models \forall x\varphi[V]$ εάν και μόνον εάν *για κάθε* $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \varphi[V(x/a)]$
$\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[V]$ εάν και μόνον εάν *υπάρχει* $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \varphi[V(x/a)]$
(όπου A είναι το σύμπαν της ερμηνείας $\mathfrak{A}$).

Σημείωση. Στα λογικά σύμβολα $=, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \forall, \exists$ δώσαμε το συνηθισμένο, φυσιολογικό τους νόημα. Στον Προτασιακό Λογισμό είδαμε ότι ο τύπος $\varphi \to \psi$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον $\neg\varphi \vee \psi$ και ο τύπος $\varphi \leftrightarrow \psi$ με τον τύπο $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Παράδειγμα. Ο τύπος $(x_1 \cdot x_2) + S(\mathbb{O}) = x_1 + x_2$ της γλώσσας $\mathcal{L}^A$ ικανοποιείται στη φυσική δομή από κάθε μια αποτίμηση V με $V(x_1) = 4$ και $V(x_2) = 1$. Πραγματικά, έχουμε τότε $V^*(x_1 + x_2) = 5$ και $V^*((x_1 \cdot x_2) + S(\mathbb{O})) = 5$.
Άρα $V^*((x_1 \cdot x_2) + S(\mathbb{O})) = V^*(x_1 + x_2)$. Συνεπώς $\mathfrak{N} \models ((x_1 \cdot x_2) + S(\mathbb{O}) = x_1 \cdot x_2)[V]$, αν $V(x_1) = 4$ και $V(x_2) = 1$.

Ο ίδιος τύπος δεν ικανοποιείται στην $\mathfrak{N}$ από την αποτίμηση V με $V(x_1) = 2$, $V(x_2) = 3$, διότι έχουμε $V^*((x_1 \cdot x_2) + S(\mathbb{O})) = 7$ και $V^*(x_1 + x_2) = 5$.
Άρα $\mathfrak{N} \not\models ((x_1 \cdot x_2) + S(\mathbb{O}) = x_1 + x_2)[V]$, για V όπως παραπάνω. Σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε ότι
$\mathfrak{N} \models ((x_1 \cdot x_2 + S(\mathbb{O}) \neq x_1 + x_2)[V]$, αν $V(x_1) = 2$, $V(x_2) = 3$.

Ο ορισμός ικανοποίησης τύπου του Tarski, αν και φαίνεται πολύπλοκος, είναι εννοιολογικά απλός. Πριν δώσουμε και άλλα παραδείγματα θα κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση, που θα απλοποιήσει τις διατυπώσεις.

Παρατήρηση. Για να ελέγξουμε αν ένας τύπος ϑ ικανοποιείται σε μια δομή $\mathfrak{A}$ από μια αποτίμηση V, αρκεί να γνωρίζουμε μόνο τις τιμές που δίνει η V στις ελεύθερες μεταβλητές του ϑ. Ειδικά αν ϑ είναι *πρόταση* το $\mathfrak{A} \models \vartheta[V]$ *δεν εξαρτάται* από την V. Το παραπάνω είναι φανερό για ατομικούς τύπους (βλ.παρατήρηση στη σελ. 44). Για σύνθετους τύπους μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά ως προς το πλήθος των λογικών συμβόλων στο τύπο ϑ (βλ. άσκηση 52 (γ$'$)). Για την περίπτωση που ο τύπος ϑ είναι μορφής $\forall y\varphi$ ή $\exists y\varphi$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν οι ελεύθερες μεταβλητές του ϑ είναι μεταξύ των $x_1, \ldots, x_n$, τότε οι ελεύθερες μεταβλητές του φ είναι μεταξύ των $y, x_1, \ldots, x_n$.

Με βάση τα παραπάνω αντι του $\mathfrak{A} \models \vartheta[V]$, όταν οι ελεύθερες μεταβλητές του ϑ είναι μεταξύ των $x_1, \ldots, x_n$ και $V(x_1) = a_1, \ldots, V(x_n) = a_n$, γράφουμε $\mathfrak{A} \models \vartheta[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$. Ειδικά αν ϑ είναι πρόταση θα γράφουμε αντί του $\mathfrak{A} \models \vartheta[V]$ απλώς $\mathfrak{A} \models \vartheta$, αφού η ικανοποίηση πρότασης σε δομή δεν εξαρτάται από οποιαδήποτε αποτίμηση των μεταβλητών.

Αν μια πρόταση ϑ ικανοποιείται σε μια δομή $\mathfrak{A}$ λέμε ότι είναι **αληθινή** στην $\mathfrak{A}$.

Παράδειγμα. Έστω $\mathcal{L}$ γλώσσα με μοναδικό μη λογικό σύμβολο ένα 2-θέσιο σύμβολο κατηγορήματος P. Παραδείγματα ερμηνειών της $\mathcal{L}$ είναι οι δομές
$\mathfrak{A} =< \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}>$, $\mathfrak{B} =< \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq_{\mathbb{R}}>$
(όπου $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο των υποσυνόλων του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και $\subseteq_{\mathbb{R}}$ είναι η σχέση του περιέχεσθαι μεταξύ των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$).

Ο τύπος $P(x_1, x_2)$ ικανοποιείται στην $\mathfrak{A}$ από κάθε V με $V(x_1) = 3$ και $V(x_2) = 7$, ενώ δεν ικανοποιείται από καμία V με $V(x_1) = 5$, $V(x_2) = 4$. Έχουμε $\mathfrak{A} \models P(x_1, x_2)[x_1/3, x_2/7]$ και $\mathfrak{A} \not\models P(x_1, x_2)[x_1/5, x_2/4]$, δηλαδή $\mathfrak{A} \models \neg P(x_1, x_2)[x_1/5, x_2/4]$. Γενικότερα
$\mathfrak{A} \models P(x_1, x_2)[V]$ εάν και μόνον εάν $V(x_1)$ είναι μικρότερος φυσικός αριθμός από τον $V(x_2)$.

Βλέπουμε εύκολα ότι $\mathfrak{A} \models \exists x_1 P(x_1, x_2)[x_2/2]$, αφού υπάρχει $a \in \mathbb{N}$ ώστε
$\mathfrak{A} \models P(x_1, x_2)[x_1/a, x_2/2]$ (π.χ. $a = 1$).

Όμως $\mathfrak{A} \not\models \exists x_1 P(x_1, x_2)[x_2/0]$, διότι δεν υπάρχει στο $\mathbb{N}$ στοιχείο μικρότερο από το 0. Για κάθε $a \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mathfrak{A} \not\models P(x_1, x_2)[x_1/a, x_2/0]$, δηλαδή $\mathfrak{A} \models \neg P(x_1, x_2)[x_1/a, x_2/0]$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\mathfrak{A} \models \neg\exists x_1 P(x_1, x_2)[x_2/0]$ και επίσης ότι $\mathfrak{A} \models \forall x_1 \neg P(x_1, x_2)[x_2/0]$.

Ας εξετάσουμε ακόμα την πρόταση $\forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2)$. Για το $\mathfrak{A} \models \forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2)$ θα πρέπει για όλα τα $b \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\mathfrak{A} \models \exists x_1 P(x_1, x_2)[x_2/b]$. Είδαμε όμως ότι
$\mathfrak{A} \not\models \exists x_1 P(x_1, x_2)[x_2/0]$. Συνεπώς $\mathfrak{A} \not\models \forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2)$, δηλαδή η πρόταση $\forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2)$ δεν είναι αληθινή στην δομή $\mathfrak{A}$.

Στην δομή $\mathfrak{B}$ όμως η παραπάνω πρόταση είναι αληθινή. Πραγματικά, για κάθε $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ υπάρχει $\Delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ώστε Δ είναι υποσύνολο του Γ (π.χ. $\Delta = \varnothing$). Άρα για κάθε $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ισχύει $\mathfrak{B} \models \exists x_1 P(x_1, x_2)[x_2/\Gamma]$ επομένως $\mathfrak{B} \models \forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2)$.

Σημείωση 1. Συχνά στις μαθηματικές εκφράσεις δεν φαίνονται καθαρά οι ποσοδείκτες. Για την τυποποίηση π.χ. της πρότασης ''κάθε ακέραιος είναι ρητός'' μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο μονοθέσια σύμβολα κατηγορημάτων A, P. Η πρόταση $\forall x(A(x) \to P(x))$, σε κατάλληλη ερμηνεία, έχει το παραπάνω νόημα. Έτσι λοιπόν μπορούμε να τυποποιήσουμε ως προτάσεις μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας τις εκφράσεις της κλασσικής λογικής ''κάθε S είναι P'', ''κάποιο S είναι P'', ''κανένα S δεν είναι P'', ''κάποια S δεν είναι P'' (βλ. άσκηση 62).

Σημείωση 2. Ο ποσοδείκτης $\exists$ σημαίνει ''υπάρχει τουλάχιστον ένα''. Δεν χρειάζεται να εισάγουμε, ως αρχικό σύμβολο στις πρωτοβάθμιες γλώσσες, ειδικό ποσοδείκτη για την έκφραση του ''υπάρχει ακριβώς ένα''. Μπορούμε να ορίσουμε το $\exists! x\varphi$ ως συντμηση του τύπου $\exists x(\varphi \wedge \forall y(\varphi(x/y) \to y = x))$, όπου y είναι μια μεταβλητή που δεν εμφανίζεται στον τύπο φ και $\varphi(x/y)$ ο τύπος που προκύπτει από την αντικατάσταση με y κάθε ελεύθερης εμφάνισης της x στον τύπο φ. Έχουμε ότι (βλ. ασκ. 61) $\mathfrak{A} \models (\exists! x\varphi)[V]$ εάν και μόνον εάν υπάρχει ακριβώς ένα $a \in A$, τέτοιο ώστε $\mathfrak{A} \models \varphi[V(x/a)]$ σε κάθε ερμηνεία $\mathfrak{A}$ και για κάθε αποτίμηση V.

2.4 Λογικά αληθινοί τύποι

Ένας τύπος φ μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας $\mathcal{L}$ μπορεί σε μια ερμηνεία $\mathfrak{A}$ της $\mathcal{L}$ να ικανοποιείται από μια αποτίμηση V και να μην ικανοποεέιται από μια άλλη αποτίμηση W. Μπορεί δηλαδή να συμβαίνει $\mathfrak{A} \models \varphi[V]$ και $\mathfrak{A} \not\models \varphi[W]$. Υπάρχουν όμως τύποι που ικανοποιούνται σε μια δομή $\mathfrak{A}$ από *κάθε* αποτίμηση των μεταβλητών. Τέτοιοι τύποι λέγονται **έγκυροι στη δομή** $\mathfrak{A}$.

Μια πρόταση ϑ είναι έγκυρη σε μια δομή $\mathfrak{A}$, όταν απλώς ικανοποιείται στην $\mathfrak{A}$. Ο ορισμός έγκυρου σε μια δομή τύπου γενικεύει λοιπόν την έννοια αληθινής σε μια δομή πρότασης. Γιαυτό αν ο τύπος φ είναι έγκυρος στην $\mathfrak{A}$, θα λέμε ότι είναι **αληθινός στην** $\mathfrak{A}$ και θα γράφουμε $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Παράδειγματα.

1. Ο τύπος $\mathbb{O} \neq x_1 \to \mathbb{O} < x_1$ είναι έγκυρος στη δομή $\mathfrak{A} =< \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}, 0 >$, αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε
$$\mathfrak{A} \models (\mathbb{O} \neq x_1 \to \mathbb{O} < x_1)\,[x_1/n].$$
Ο ίδιος τύπος δεν είναι όμως έγκυρος στη δομή $\mathfrak{B} =< \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}, 0 >$ αφού δεν ικανοποιείται στην $\mathfrak{B}$ π.χ. από αποτίμηση με $V(x_1) = -1$.

2. Οι τύποι $x_1 = x_1$ και $P(x_1) \to P(x_2)$ είναι έγκυροι σε κάθε (κατάλληλη για τη γλώσσα) δομή.

Παρατήρηση 1. Ας προσέξουμε ότι αν μια πρόταση ϑ δεν είναι αληθινή σε μια δομή $\mathfrak{A}$ (δηλ. $\mathfrak{A} \not\models \vartheta$), τότε στην $\mathfrak{A}$ είναι αληθινή η άρνησή τους (δηλ. $\mathfrak{A} \models \neg\vartheta$). Αυτό *δεν* συμβαίνει γενικά για οποιουσδήποτε τύπους φ, αφού για κάποιες αποτιμήσεις V, W μπορεί να ισχύει $\mathfrak{A} \models \varphi[V]$ και $\mathfrak{A} \not\models \varphi[W]$. Τότε ούτε ο φ ούτε ο $\neg\varphi$ δεν είναι έγκυροι στην $\mathfrak{A}$, δηλαδή $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ και $\mathfrak{A} \not\models \neg\varphi$.

Παρατήρηση 2. Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι αν ένας τύπος φ είναι έγκυρος σε μια δομή $\mathfrak{A}$, τότε στην $\mathfrak{A}$ είναι έγκυρος και ο τύπος $\forall x\varphi$, και αντιστρόφως. Γενικότερα, αν οι ελεύθερες μεταβλητές του τύπου φ βρίσκονται μεταξύ των $x_1, \ldots, x_n$, τότε ο τύπος φ είναι έγκυρος σε μια δομή $\mathfrak{A}$ ακριβώς όταν ικανοποιείται στην $\mathfrak{A}$ η καθολική του κλειστότητα, δηλαδή ο τύπος $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$.

Στο πρώτο από τα παραπάνω παραδείγματα είχαμε έναν τύπο που είναι έγκυρος σε μια δομή και δεν είναι έγκυρος σε μια άλλη. Είδαμε επίσης τύπους που είναι έγκυροι σε όλες τις δομές. Αν ένας τύπος φ μιας γλώσσας $\mathcal{L}$ είναι έγκυρος σε όλες τις ερμηνείες της $\mathcal{L}$, τότε λέγεται απλώς **έγκυρος** ή **λογικά αληθινός**. Για τους λογικά αληθινούς τύπους γράφουμε $\models \varphi$.

Λέμε ότι οι δύο τύποι φ, ψ είναι **λογικά ισοδύναμοι**, και γράφουμε $\varphi \equiv \psi$, όταν η ισοδυναμία $\varphi \leftrightarrow \psi$ είναι λογικά αληθινός τύπος (δηλ. $\models \varphi \leftrightarrow \psi$).

Χρησιμοποιούμε τους γνωστούς από τον Προτασιακό Λογισμό συμβολισμούς, αφού η έννοια του λογικά αληθινού τύπου στον Κατηγορηματικό Λογισμό είναι ανάλογη μ΄ αυτήν του Προτασιακού Λογισμού. Υπάρχει μια πιο ισχυρή σχέση μεταξύ των δύο εννοιών. Συγκεκριμένα, είναι λογικά αληθινοί οι τύποι που έχουν ‘‘ταυτολογική μορφή’’. Τέτοιοι είναι π.χ. οι τύποι
$$\forall x P(x) \lor \neg\forall x P(x)\,,\ \forall x \exists y (x < y) \to \forall x \exists y (x < y)$$

$$\neg(x = \mathbb{O} \vee \exists y(y + 1 = x)) \leftrightarrow \neg(x = \mathbb{O}) \wedge \neg(\exists y(y + 1 = x)),$$

που προκύπτουν από τις ταυτολογίες $p \vee \neg p$, $p \to p$, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ στις οποίες οι προτασιακές μεταβλητές αντικαταστάθηκαν από τύπους μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας. Πιο αυστηρά, αποδεικνύεται η ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 3. Έστω Φ τύπος του Προτασιακού Λογισμού με προτασιακές μεταβλητές $p_1, \ldots, p_n$. Έστω $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ τύποι μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας $\mathcal{L}$. Συμβολίζουμε με $\Phi(p_1/\vartheta_1, \ldots, p_n/\vartheta_n)$ τον τύπο της $\mathcal{L}$, που προκύπτει από τον Φ μετά την αντικατάσταση των $p_1, \ldots, p_n$ με $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ αντίστοιχα. Ισχύει το εξής (βλ. άσκηση 63 γ ΄):

Αν Φ είναι ταυτολογία, τότε $\Phi(p_1/\vartheta_1, \ldots, p_n/\vartheta_n)$ είναι λογικά αληθινός.

Το ότι ένας τύπος φ μιας γλώσσας $\mathcal{L}$ είναι λογικά αληθινός μπορούμε να το αποδείξουμε άμεσα, ελέγχοντας ότι σε κάθε ερμηνεία $\mathfrak{A}$ της $\mathcal{L}$ και για κάθε αποτίμηση των μεταβλητών V ισχύει $\mathfrak{A} \models \varphi[V]$. Μπορούμε όμως να παρατηρήσουμε κάποιους κανόνες, που μας επιτρέπουν να σχηματίζουμε λογικά αληθινούς τύπους από άλλους γνωστούς. Ισχύουν π.χ. κανόνες ανάλογοι μ΄ αυτούς που γνωρίσαμε στον Προτασιακό Λογισμό (βλ. ασκ. 20, σελ.32):

1. αν $\models \varphi$ και $\models \varphi \to \psi$, τότε $\models \psi$,
2. αν $\models \varphi$ ή $\models \psi$, τότε $\models \varphi \vee \psi$,
3. αν $\models \varphi$ και $\models \psi$, τότε $\models \varphi \wedge \psi$,
4. αν $\models \varphi \wedge \psi$, τότε $\models \varphi$ και $\models \psi$.

Έτσι π.χ. για να αποδείξουμε ότι για κάποιους τύπους φ, ψ ισχύει $\varphi \equiv \psi$, αρκεί να δείξουμε ότι $\models \varphi \to \psi$ και ότι $\models \psi \to \varphi$.

Ένας νέος κανόνας είναι ο πιο κάτω **κανόνας γενίκευσης**.

$$\models \varphi \text{ εάν και μόνον εάν } \models \forall x \varphi$$

Η απόδειξή του είναι απλή και βασίζεται στην Παρατήρηση 2. Έπεται ότι ένας τύπος φ είναι λογικά αληθινός τότε και μόνον τότε όταν η καθολική του κλειστότητα είναι λογικά αληθινή πρόταση.

Σημείωση. Πρέπει να προσέξουμε ότι ο κανόνας γενίκευσης *δεν* λέει ότι $\varphi \equiv \forall x \varphi$. Όπως θα δούμε αργότερα, ενώ έχουμε $\models \forall x \varphi \to \varphi$ για οποιονδήποτε τύπο φ, εν γένει *δεν ισχύει* $\models \varphi \to \forall x \varphi$. Δεν είναι λογικά αληθινός π.χ. ο τύπος $x \neq \mathbb{I} \to \forall x(x \neq \mathbb{I})$ (βλ. άσκ. 64).

2.5 Νόμοι του Κατηγορηματικού Λογισμού

Εκτός από τους τύπους που έχουν ταυτολογική μορφή υπάρχουν πολλοί άλλοι λογικά αληθινοί τύποι των πρωτοβάθμιων γλωσσών. Οι πιο γνωστοί απ΄ αυτούς λέγονται νόμοι του Κατηγορηματικού Λογισμού. Παρακάτω θα γνωρίσουμε τους νόμους που αφορούν στους ποσοδείκτες.

Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι οι ποσοδείκτες που δεν δεσμεύουν πραγματικά μεταβλητές δεν αλλάζουν ουσιαστικά το νόημα των τύπων. Αν σ′ έναν τύπο φ η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη τότε (βλ. άσκ. 66).

$$\varphi \equiv \forall x \varphi \quad \text{και} \quad \varphi \equiv \exists x \varphi$$

Ενδιαφέρον έχουν λοιπόν μόνο οι ποσοδείκτες που δεσμεύουν ελεύθερες μεταβλητές. Γιαυτό το λόγο θα χρησιμοποιήσουμε εδώ λίγο διαφορετικό συμβολισμό, που θυμίζει τον συνηθισμένο στα Μαθηματικά. Θα γράψουμε $\varphi(x)$ για να τονίσουμε ότι η x είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τύπο φ. Τον τύπο που προκύπτει από την αντικατάσταση στον $\varphi(x)$ κάθε ελεύθερης εμφάνισης του x με έναν όρο t, θα τον συμβολίσουμε εδώ $\varphi(t)$.

1. **Νόμοι του de Morgan για ποσοσδείκτες**

   (α′) $\neg \forall x \varphi(x) \equiv \exists x \neg \varphi(x)$

   (β′) $\neg \exists x \varphi(x) \equiv \forall x \neg \varphi(x)$

2. **Νόμοι αντικατάστασης**
   Μια από τις αρχές της κλασσικής λογικής του Αριστοτέλη μας λέει ότι : ‘‘αν μια ιδιότητα την έχουν όλα τα αντικείμενα, τότε την έχει το κάθε ένα απ′ αυτά’’. Η αρχή αυτή περιγράφεται από το ακόλουθο σχήμα τύπων:

   $$\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$$

   το οποιο όμως για κάποιους όρους t δεν δίνει λογικά αληθινό τύπο (βλ. άσκ. 68). Δεν θα εξηγήσουμε εδώ πότε η μεταβλητή x στον τύπο φ αντικαταστάσιμη από τον όρο t. Θα αναφέρουμε όμως τρείς ενδιαφέρουσες, επιτρεπτές περιπτώσεις.

   (α′) $\models \forall x \varphi(x) \to \varphi(x)$

   (β′) $\models \forall x \varphi(x) \to \varphi(a)$, αν a όρος χωρίς μεταβλητές.

   (γ′) $\models \forall x \varphi(x) \to \varphi(y)$, αν y μεταβλητή που δεν εμφανίζεται στον φ.

   Οι αποδείξεις των παραπάνω νόμων δεν είναι δύσκολες αλλά αρκετά επίπονες. Για το (γ′) μπορούμε να βασιστούμε π.χ. στην εξής παρατήρηση (η οποία μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή ως προς το πλήθος λογικών συμβόλων στον τύπο $\varphi(x)$):
   Για κάθε ερμηνεία $\mathfrak{A}$ και κάθε αποτίμηση των μεταβλητών V

   $$\mathfrak{A} \models \varphi(y)[V] \quad \text{εαν και μόνον εάν} \quad \mathfrak{A} \models \varphi(x)[V(x/V(y))].$$

3. **Νόμοι αφαίρεσης.**
   Τα παρακάτω είναι ειδικές περιπτώσεις της κλασσικής αρχής που λέει: ‘‘αν t είναι παράδειγμα, τότε υπάρχει παράδειγμα’’.

   (α′) $\models \varphi(x) \to \exists x \varphi(x)$

(β′) $\models \varphi(a) \to \exists x \varphi(x)$

(γ′) $\models \varphi(y) \to \exists x \varphi(x)$

όπου a και y είναι όπως στους νόμους 2(β′), (γ′).

Τους νόμους 3 μπορούμε να τους αποδείξουμε με βάση τους 2 και τους νόμους του de Morgan. Χρειάζεται όμως να παρατηρήσουμε ότι (βλ. άσκ. 67 γ′):
(∗) Αν $\psi \equiv \vartheta$, τότε $\forall x \psi \equiv \forall x \vartheta$ και $\exists x \psi \equiv \exists x \vartheta$.

4. **Επιμεριστικοί νόμοι**

(α′) $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x)$

(β′) $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x)$

(γ′) $\models \forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x) \to \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))$

(δ′) $\models \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \exists x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x)$

Σημειώνουμε ότι οι αντίστροφες των (γ′) και (δ′) συνεπαγωγές δεν είναι, εν γένει, λογικά αληθινοί τύποι (βλ. ασκ. 65 α′,β′).
Σε ειδικές όμως περιπτώσεις έχουμε:

Αν η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ϑ, τότε

(ε′) $\forall x(\vartheta \vee \varphi(x)) \equiv \vartheta \vee \forall x \varphi(x)$

(σ') $\exists x(\vartheta \wedge \varphi(x)) \equiv \vartheta \wedge \exists x \varphi(x)$

5. **Νόμοι μεταφοράς ποσοδεικτών**
Αν η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ϑ, τότε

(α′) $\forall x(\vartheta \to \varphi(x)) \equiv (\vartheta \to \forall x \varphi(x))$

(β′) $\forall x(\varphi(x) \to \vartheta) \equiv (\exists x \varphi(x) \to \vartheta)$

Για να δείξουμε το 5(α′) αρκεί να εφαρμόσουμε τον νόμο 4σ' με $\neg\vartheta$ στη θέση του ϑ και την ταυτολογία $(a \to b) \leftrightarrow (\neg a \vee b)$. Για το 5(β′) παρατηρούμε διαδοχικά ότι:

$\forall x(\varphi(x) \to \vartheta) \equiv \forall x(\vartheta \vee \neg\varphi(x))$	($p \to q \equiv q \vee \neg p$ (*) παραπάνω)
$\forall x(\vartheta \vee \neg\varphi(x)) \equiv \vartheta \vee \forall x \neg\varphi(x)$	(νόμος 4ε′)
$\vartheta \vee \forall x \neg\varphi(x) \equiv \vartheta \vee \neg\exists x \varphi(x)$	(ασκήσεις 67 β′, γ′)
$\vartheta \vee \neg\exists x \varphi(x) \equiv \exists x \varphi(x) \to \vartheta$	($p \vee \neg q \equiv q \to p$)

Επειδή η λογική ισοδυναμία είναι μεταβατική (βλ. άσκηση 67 α′), έπεται ότι
$\forall x(\varphi(x) \to \vartheta) \equiv \exists x \varphi(x) \to \vartheta$.

6. **Νόμοι μονοτονίας**

(α′) $\models \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x))$

(β′) $\models \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists x\varphi(x) \to \exists x\psi(x))$

Το ότι οι παραπάνω τύποι είναι λογικά αληθινοί μπορούμε να το διαπιστώσουμε π.χ. ελέγχοντας την εγκυρότητα τους σε κάθε δομή. Οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν είναι πάντα λογικά αληθινές. Αν π.χ. πάρουμε ως $\varphi(x)$, $\psi(x)$ τους τύπους $\mathbb{O} < x$, $x < \mathbb{O}$ έχουμε προτάσεις που δεν ικανοποιούνται στη δομή $< \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}, 0 >$.

7. **Νόμοι μετανόμασης δεσμευμένων μεταβλητών.**
   Αν η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται στον τύπο $\varphi(x)$, τότε

   (α′) $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$

   (β′) $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$

   Οι νόμοι αυτοί λένε ότι σε μια δεσμευμένη μεταβλητή μπορούμε να δώσουμε ένα νέο όνομα χωρίς να αλλάξουμε το νοηματικό περιεχόμενο του τύπου. Π.χ. οι τύποι $\forall x\ x = x$, $\forall y\ y = y$ έχουν την ίδια σημασία. Όμοια και για τους $\exists x\, x|z$, $\exists y\, y|z$.Δεν είναι, όμως, εν γένει αληθινός ο τύπος $\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)$. Εύκολα μπορούμε να βρούμε παραδείγματα τύπων φ και δομών στις οποίες η ισοδυναμία αυτή δεν ικανοποιείται από κάποιες αποτιμήσεις V των μεταβλητών με $V(x) \neq V(y)$[8]

8. **Νόμοι αντιμετάθεσης ποσοδεικτών**

   (α′) $\forall x\forall y\varphi(x, y) \equiv \forall y\forall x\varphi(x, y)$

   (β′) $\exists x\exists y\varphi(x, y) \equiv \exists y\exists x\varphi(x, y)$

   (γ′) $\models \exists x\forall y\varphi(x, y) \to \forall y\exists x\varphi(x, y)$

   Επιτρέπεται η αντιμετάθεση δύο ποσοδεικτών του ίδιου τύπου αλλά δεν επιτρέπεται η αντιμετάθεση ποσοδεικτών διαφορετικού τύπου.
   Η συνεπαγωγή $\forall y\exists x\varphi(x, y) \to \exists x\forall y\varphi(x, y)$ δεν είναι, εν γένει, λογικά αληθινή (βλ.ασκ. 65).

9. **Νόμος ύπαρξης παραδείγματος**

$$\models \forall x\varphi(x) \to \exists x\varphi(x)$$

[8]Ανάλογες περιπτώσεις συναντάμε στα Μαθηματικά. Π.χ. η αντικατάσταση του k στην έκφραση

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k \text{ με } j \text{ δίνει } \sum_{j=1}^{n} 2^j$$

που έχει το ίδιο νόημα. Αν σε κάποιο συλλογισμό το n είναι μεταβλητό, η αλλαγή του με π.χ. m οδηγεί στην έκφραση

$$\sum_{k=1}^{m} 2^k,$$

που μπορεί να έχει άλλο νόημα.

Η απόδειξη του ότι είναι έγκυρος σε κάθε δομή ο τύπος $\forall x \varphi(x) \to \exists x \varphi(x)$ βασίζεται στο ότι το σύμπαν κάθε δομής είναι ένα μη κενό σύνολο.

2.6 Πρωτοβάθμιες Θεωρίες. Πρότυπα

Οι πρωτοβάθμιες γλώσσες έχουν μεγάλη εκφραστική δύναμη και αρκούν για την τυποποίηση πολλών μαθηματικών θεωριών. Τα αντικείμενα που ενδιαφέρουν μια θεωρία συμβολίζονται από τις μεταβλητές. Για τις αρχικές έννοιες της θεωρίας επιλέγουμε κατάλληλα μη λογικά σύμβολα. Έτσι καθορίζουμε το αλφάβητο μιας γλώσσας $\mathcal{L}$. Τα θεωρήματα εκφράζονται από τους τύπους της $\mathcal{L}$. Η θεωρία ταυτίζεται με ένα σύνολο τύπων της γλώσσας $\mathcal{L}$, με το σύνολο των θεωρημάτων της. Συχνά τα θεωρήματα μιας θεωρίας περιγράφονται πιο απλά, ως συνέπειες μερικών αρχικά αποδεκτών προτάσεων (αξιωμάτων). Οι τύποι που εκφράζουν τα αξιώματα περιγράφουν πλήρως τη θεωρία (αφού καθοριστεί η έννοια της συνέπειας).

Ορίζουμε γενικά ως (*πρωτοβάθμια*) **θεωρία** κάθε σύνολο τύπων μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας. Ο γενικός αυτός ορισμός καλύπτει τις περιπτώσεις που ενδιαφέρουν τα Μαθηματικά.

Στην επόμενη παράγραφο θα εισάγουμε την σημασιολογική συνέπεια και αργότερα την συντακτική συνέπεια.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα θεωριών.

Παράδειγμα 1. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για την τυποποίησης της θεωρίας ομάδων.

1. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια γλώσσα $\mathcal{L}^G$ με μη λογικά σύμβολα συναρτήσεων $\circ$ (2-θέσιο), $^{-1}$ (μονοθέσιο) και ένα σύμβολο σταθεράς e. Τις δομές στις οποίες είναι έγκυροι οι τύποι
   $\varphi_1 : \quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
   $\varphi_2 \quad\ e \circ x = x \wedge x \circ e = x$
   $\varphi_3 : \quad x \circ x^{-1} = e \wedge x^{-1} \circ x = e$
   τις λέμε *ομάδες*. Το σύνολο τύπων $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ είναι μια πρωτοβάθμια θεωρία.

2. Αντί της $\mathcal{L}^G$ συχνά χρησιμοποιείται μια γλώσσα με μη λογικά σύμβολα τα: $+$, $-$, $\mathbb{O}$. Η θεωρία που αποτελείται από τους τύπους
   $\varphi'_1 : \quad x + (y + z) = (x + y) + z$
   $\varphi'_2 \quad\ \mathbb{O} + x = x \wedge x + \mathbb{O} = x$
   $\varphi'_3 : \quad x + (-x) = \mathbb{O} \wedge (-x) + x = \mathbb{O}$
   δεν διαφέρει ουσιαστικά από την παραπάνω.

3. Η διαφορά δεν είναι επίσης ουσιαστική αν πάρουμε αντί των τύπων $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ τις καθολικές τους κλειστότητες. Οι δομές της $\mathcal{L}^G$ στις οποίες είναι έγκυροι οι τύποι
   $\overline{\varphi_1} : \quad \forall x \forall y \forall z\, x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
   $\overline{\varphi_2} \quad\ \forall x (e \circ x = x \wedge x \circ e = x)$
   $\overline{\varphi_3} : \quad \forall x\, (x \circ x^{-1} = e \wedge x^{-1} \circ x = e)$
   είναι ακριβώς οι ομάδες (βλ. παρατηρ. 2 σελ. 47)

4. Η θεωρία ομάδων τυποποιείται και στην γλώσσα $\mathcal{L}^O$ (σελ. 42), που έχει λιγότερα μη λογικά σύμβολα. Ομάδες είναι οι δομές για την $\mathcal{L}^O$, στις οποίες είναι έγκυροι οι τύποι $\varphi_1, \varphi_2, \psi$, όπου $\psi : \exists y\, (x \circ y = e \wedge y \circ x = e)$

5. Τέλος μπορούμε να πάρουμε ως θεωρία ομάδων το σύνολο που αποτελείται από τους τύπους
   $\varphi_1 :\quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
   $\varphi_2'' \quad e \circ x = x$
   $\varphi_3'' :\quad \exists y\,(y \circ x = e)$
   αφού όλοι οι προηγούμενοι τύποι είναι έγκυροι σε κάθε δομή στην οποία είναι έγκυροι οι φ_1, φ_2'', φ_3''.

Παράδειγμα 2.

1. Η θεωρία δακτυλίων τυποποιείται στην γλώσσα $\mathcal{L}^\Delta$ με μη λογικά σύμβολα:

$+, \cdot$	2-θέσια σύμβολα συναρτήσεων
$-$	1-θέσιο σύμβολο συνάρτησης
$\mathbb{O}$	σύμβολο σταθεράς

   και αποτελείται από τους τύπους φ_1', φ_2', φ_3' (παραπάνω) και τους:

   $$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$
   $$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$
   $$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

   Ας συμβολίσουμε με T τη θεωρία δακτυλίων. Η θεωρία αντιμεταθετικών δακτυλίων είναι η $T' = T \cup \{\vartheta\}$, όπου ϑ είναι ο τύπος

   $$x \cdot y = y \cdot x$$

2. Αν στην $\mathcal{L}^\Delta$ επισυνάψουμε ένα ακόμα σύμβολο σταθεράς e και πάρουμε το σύνολο τύπων $T \cup \{\varphi_2\}$ (φ_2 όπως στη σελ.52) της νέας γλώσσας, έχουμε τη λεγόμενη θεωρία δακτυλίων με μονάδα. Θεωρία σωμάτων είναι η $T \cup \{\varphi_2, \zeta\}$, όπου
   $\zeta :\quad x \neq \mathbb{O} \rightarrow \exists y\,(y \circ x = e)$

Παράδειγμα 3. Το σύνολο P_0 των παρακάτω 9 τύπων της $\mathcal{L}^A$ είναι μια πρωτοβάθμια θεωρία:

$S(x) \neq \mathbb{O}$	$x + S(y) = S(x+y)$	$\neg(x < \mathbb{O})$
$S(x) = S(y) \rightarrow x = y$	$x \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$	$x < S(y) \leftrightarrow x < y \vee x = y$
$x + \mathbb{O} = x$	$x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$	$x < y \vee x = y \vee x = y \vee y < x$

Η αριθμητική του Peano είναι μια θεωρία P, που περιέχει την P_0 και ένα *άπειρο* πλήθος αξιωμάτων (το λεγόμενο αξιωματικό σχήμα επαγωγής)[9] μορφής:

$$\varphi(\mathbb{O}) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))) \rightarrow \forall x \varphi(x),$$

όπου φ οποιοσδήποτε τύπος της γλώσσας $\mathcal{L}^A$.

Παράδειγμα 4. Το σύνολο όλων των προτάσεων που είναι αληθινές στη δομή $< \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0, 1 >$ είναι μια πρωτοβάθμια θεωρία (πρωτοβάθμια ανάλυση). Γενικότερα, για κάθε δομή $\mathfrak{A}$ μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας $\mathcal{L}$, το σύνολο $Th(\mathfrak{A})$ όλων των προτάσεων που ικανοποιούνται στην $\mathfrak{A}$ είναι μια θεωρία (και λέγεται πρωτοβάθμια θεωρία της δομής

[9] Η αρχή της επαγωγής στους φυσικούς αριθμούς δεν μπορεί να εκφραστεί με έναν τύπο πρωτοβάθμιας γλώσσας. Η αιτιολόγηση είναι δύσκολη και χρησιμοποιεί προχωρημένα μέσα της Μαθηματικής Λογικής

$\mathfrak{A}$)

Έστω $\mathcal{L}$ μια πρωτοβάθμια γλώσσα και T μια θεωρία στη γλώσσα $\mathcal{L}$. **Πρότυπο** (ή μοντέλο) της T λέμε κάθε δομή για την $\mathcal{L}$ στην οποία είναι έγκυροι όλοι οι τύποι της T. Γράφουμε $\mathfrak{A} \models T$ όταν $\mathfrak{A}$ είναι πρότυπο της T, δηλαδή όταν για κάθε τύπο φ της T ισχύει $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Παραδείγματα.

1. Κάθε ομάδα είναι πρότυπο της θεωρίας ομάδων. Οι ερμηνείες $< \mathbb{N}, +_{\mathbb{N}}, 0 >$ της $\mathcal{L}^0$ και $< \mathbb{Z}, \cdot_{\mathbb{Z}}, -_{\mathbb{Z}}, 3 >$ της γλώσσας του παραδείγματος 1(α′) δεν είναι πρότυπα της θεωρίας ομάδων.

2. Η φυσική δομή $\mathfrak{N}$ είναι πρότυπο της θεωρίας P_0 και της αριθμητικής P του Peano. Υπάρχουν και άλλες, μη φυσικές, ερμηνείες της $\mathcal{L}^A$, που είναι πρότυπα της θεωρίας P.

3. Μια θεωρία T, που περιέχει μια πρόταση φ και την άρνησή της δεν έχει κανένα πρότυπο. Δεν μπορεί σε μια δομή $\mathfrak{A}$ να συμβαίνει $\mathfrak{A} \models \varphi$ και συγχρόνως $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.

2.7 Συνέπεια

Έστω T σύνολο τύπων, φ τύπος μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας. Λέμε ότι ο τύπος φ είναι *(σημασιολογική)* **συνέπεια** του T, και γράφουμε $T \models \varphi$, όταν σε κάθε ερμηνεία της $\mathcal{L}$, στην οποία είναι έγκυροι όλοι οι τύποι του T, είναι έγκυρος και ο τύπος φ. Με άλλα λόγια, ο τύπος φ είναι συνέπεια της θεωρίας T, αν είναι αληθινός σε κάθε πρότυπο της T.

Ο παραπάνω ορισμός είναι παρόμοιος με τον ορισμό της σημασιολογικής συνέπειας στον Προτασιακό Λογισμό (βλ. σελ. 18).
Η έννοια της συνέπειας περιγράφει τις γνωστές από τα Μαθηματικά, διαδικασίες διεξαγωγής συμπερασμάτων. Γιαυτό, όταν έχουμε $T \models \varphi$, τα στοιχεία του T τα λέμε **υποθέσεις** και τον τύπο φ **συμπέρασμα**.

Όταν $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, αντί για $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$, γράφουμε πιο σύντομα $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$. Ένας τύπος ψ είναι συνέπεια κενού συνόλου υποθέσεων εαν και μονον εάν είναι έγκυρος σε όλες τις δομές, δηλαδή είναι λογικά αληθινός. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\models \psi$, που γνωρίσαμε νωρίτερα.

Παραδείγματα.

1. Έστω T σύνολο αξιωμάτων για τη θεωρία ομάδων (βλ. παραδ. 1 σελ.52). Ένας τύπος είναι συνέπεια του T όταν είναι έγκυρος σε όλα τα πρότυπα του T, δηλαδή όταν είναι έγκυρος σε όλες τις ομάδες. Συνέπειες του T είναι λοιπόν όλα τα θεωρήματα της θωρίας ομάδων. Έτσι π.χ. έχουμε

$$
\begin{aligned}
&T \models x \circ x = x \to x = e,\\
&T \models x \circ z = y \circ z \to x = y,\\
&T \models \exists z\, x \circ z = y.
\end{aligned}
$$

Δεν ισχύει όμως $T \models x \circ y = y \circ x$, διότι υπάρχουν πρότυπα του T, στα οποία η πράξη δεν είναι αντιμεταθετική.

2. Η πρόταση $\forall x\ \mathbb{O} + x = x$ είναι συνέπεια της αριθμητικής του Peano. Πραγματικά, σε κάθε πρότυπο $\mathfrak{B}$ για την θεωρία P έχουμε $\mathfrak{B} \models \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$ και $\mathfrak{B} \models \forall x(\mathbb{O} + S(x) = S(\mathbb{O} + x))$ (τρίτο και τέταρτο αξίωμα αντίστοιχα). Άρα

$$\mathfrak{B} \models \forall x\,(\mathbb{O} + x = x \rightarrow \mathbb{O} + S(x) = S(x))$$

Ο τύπος $\mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O} \wedge \forall x\,(\mathbb{O} + x = x \rightarrow \mathbb{O} + S(x) = S(x)) \rightarrow \forall x\,(\mathbb{O} + x = x)$ είναι ένα από τα αξιώματα επαγωγής (για τον τύπο $\mathbb{O} + x = x$). Επειδή $\forall x\,(\mathbb{O} + x = x)$ είναι έγκυρος σε κάθε πρότυπο για την θεωρία P, έχουμε $P \models \forall x\,(\mathbb{O} + x = x)$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $P \models \forall x \forall y\, y + x = x + y$ και ότι $P \models \forall x \forall y\, y \cdot x = x \cdot y$, δηλαδή ότι σε κάθε πρότυπο της θεωρίας P οι ερμηνείες των συμβόλων $+, \cdot$ είναι αντιμεταθετικές πράξεις.

Παρατήρηση 1. Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι οι συνέπειες μιας θεωρίας είναι έγκυρες σε κάθε πρότυπό της. Ισχύει δηλαδή:

Αν $T \models \varphi$ και $\mathfrak{A} \models T$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi$ (Άσκηση 75).

Πολλές ιδιότητες της σημασιολογικής συνέπειας του Προτασιακού Λογισμού γενικεύονται και ισχύουν στον κατηγορηματικό Λογισμό (ασκήσεις 73, 74). Οι γνωστοί συλλογισμοί (βλ. σελ. 19) παραμένουν ορθοί. Στους συλλογισμούς όμως, που γίνεται ουσιαστικά χρήση ποσοδεικτών, πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί. Ο έλεγχος της ορθότητας ενός συλλογιμσού είναι πιο δύσκολος, διότι οι τύποι δέχονται περισσότερες ερμηνείες στον Κατηγορηματικό Λογισμό. Η ιδιότητα της απαγωγής (Παρατ.2, σελ. 19), που ενάγει τον έλεγχο στην εξέταση αν ένας τύπος είναι ταυτολογία, δεν αληθεύει στην γενική του μορφή στον Κατηγορηματικό Λογισμό (βλ. ασκ. 77). Ισχύουν κάποιες ασθενέστερες της μορφές.

Θεώρημα Απαγωγής

Έστω T σύνολο τύπων, ψ τύπος και ϑ *πρόταση* μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας $\mathcal{L}$.

$T \cup \{\vartheta\} \models \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $T \models \vartheta \rightarrow \psi$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι ψ είναι συνέπεια του $T \cup \{\vartheta\}$. Έστω $\mathfrak{A}$ οποιοδήποτε πρότυπο του T και V μια αποτίμηση των μεταβλητών. Ας υποθέσουμε ότι $\mathfrak{A} \models \vartheta[V]$. Επειδή ϑ είναι πρόταση, έχουμε ότι $\mathfrak{A} \models \vartheta$, δηλ είναι έγκυρη στο $\mathfrak{A}$. Το $\mathfrak{A}$ είναι λοιπόν πρότυπο του $T \cup \{\vartheta\}$ και συνεπώς (λόγω της υπόθεσης $T \cup \{\vartheta\} \models \psi$) ο τύπος ψ είναι έγκυρος στο $\mathfrak{A}$. Άρα $\mathfrak{A} \models \psi[V]$. Είδαμε ότι $\mathfrak{A} \models (\vartheta \rightarrow \psi)[V]$ για κάθε αποτίμηση V, δηλ. ότι $\vartheta \rightarrow \psi$ είναι έγκυρος στη δομή $\mathfrak{A}$. Επειδή αυτό ισχύει σε κάθε πρότυπο $\mathfrak{A}$ του T, έχουμε το ζητούμενο $T \models \vartheta \rightarrow \psi$.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι $T \models \vartheta \rightarrow \psi$. Έστω $\mathfrak{A} \models T \cup \{\vartheta\}$. Τότε $\mathfrak{A} \models T$, άρα $\mathfrak{A} \models \vartheta \rightarrow \psi$. Λόγω του $\mathfrak{A} \models \vartheta$, έχουμε και $\mathfrak{A} \models \psi$ (βλ. άσκηση 72). Συνεπώς $T \cup \{\vartheta\} \models \psi$.

Όπως και στον Προτασιακό Λογισμό ορίζονται οι έννοιες αντιφατικού και συνεπούς συνόλου τύπων (βλ. σελ. 19).

Έστω T σύνολο τύπων μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας $\mathcal{L}$. Το T λέγεται *(σημασιολογικά)* **αντιφατικό**, όταν υπάρχει τύπος φ της $\mathcal{L}$, τέτοιος ώστε $T \models \varphi$ και $T \models \neg\varphi$. Το T λέγεται *(σημασιολογικά)* **συνεπές**, όταν δεν είναι σημασιολογικά αντιφατικό.

Θα σημειώσουμε μερικές ιδιότητες, αντίστοιχες με εκείνες που γνωρίσαμε στον Προτασιακό Λογισμό. Οι αποδείξεις τους είναι απλές (ασκήσεις 73 γ′, 76, 78).

Παρατήρηση 2. Το T είναι αντιφατικό εάν και μόνον εάν κάθε τύπος της $\mathcal{L}$ είναι συνέπεια του T.

Παρατήρηση 3. Το T είναι συνεπές εάν και μόνον εάν υπάρχει δομή στην οποία είναι έγκυροι όλοι οι τύποι του T(πρότυπο του T). Σημασιολογικά αντιφατικές είναι λοιπόν οι θεωρίες που δεν έχουν κανένα πρότυπο, και μόνον αυτές.

Παρατήρηση 4. Ισχύει μια μορφή της λεγόμενης ‘‘αναγωγής αντιφατικότητας’’ (βλ. Παρατήρηση 5, σελ. 20). Συγκεκριμένα έχουμε:

$$T \models \vartheta \text{ τότε και μόνον τότε, όταν } T \cup \{\neg\vartheta\} \text{ είναι αντιφατικό}$$

για οποιαδήποτε *πρόταση* ϑ.

Η παραπάνω ιδιότητα αποδεικνύεται εύκολα με βάση το Θεώρημα Απαγωγής (σελ. 54).

Κλείνουμε την παράγραφο με ένα σημαντικό θεώρημα του Κατηγορηματικού Λογισμού. Η απόδειξη του κάθε άλλο παρά απλή είναι και χρησιμοποιεί μη στοιχειώδεις μεθόδους.

Θεώρημα Συμπάγειας

Έστω T σύνολο τύπων μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας. Το T έχει πρότυπο εάν και μόνον εάν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T έχει πρότυπο.

Μια ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος συμπάγειας είναι η εξής:

Το T είναι σημασιολογικά συνεπές εάν και μόνον εάν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι σημασιολογικά συνεπές.

2.8 Τυπική Άποψη του Κατηγορηματικού Λογισμού

Θα γνωρίσουμε τώρα μια διαφορετική άποψη του Κατηγορηματικού Λογισμού. Τις πρωτοβάθμιες γλώσσες θα τις μελετήσουμε καθαρά συντακτικά, όπως τη γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού στην παράγραφο 1.11, χωρίς να αποδίδουμε νόημα στις εκφράσεις τους. Αφού δεχθούμε κάποιους τύπους ως λογικά αξιώματα και εισάγουμε την έννοια τυπικής απόδειξης, τις πρωτοβάθμιες θεωρίες μπορούμε να τις δούμε ως τυπικά, αξιωματικά συστήματα.

Η μελέτη είναι γενική, κοινή για όλες τις πρωτοβάθμιες γλώσσες. Έστω $\mathcal{L}$ μια τέτοια γλώσσα.

Λογικά Αξιώματα

1. Δεχόμαστε τα σχήματα αξιωμάτων του Προτασιακού Λογισμού (σελ. 21). Κάθε τύπος της $\mathcal{L}$, που έχει μια από τις μορφές (A1)-(A14) είναι λογικό αξίωμα (για την $\mathcal{L}$).

2. Αξιώματα για τους ποσοδείκτες.

$$(A15) \quad \forall x\varphi \to \varphi(x/t),$$

όπου φ τύπος, t όρος και x μεταβλητή *αντικαταστάσιμη* από τον όρο t στον τύπο φ. Το τελευταίο σημαίνει ότι καμία μεταβλητή του t δεν γίνεται δεσμευμένη μετά την αντικατάσταση των ελεύθερων εμφανίσεων του x με τον όρο t. Με άλλα λόγια καμία ελεύθερη εμφάνιση του x δεν βρίσκεται σε ακτίνα ποσοδείκτη $\forall y$ ή $\exists y$ για καμία μεταβλητή του t.

$$(A16) \quad \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi),$$

όπου η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη στον φ.

$$(A17) \quad \exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$$

3. Αξιώματα ισότητας

$$\begin{array}{ll} (A18) & x = x \\ (A19) & x = y \to y = x \\ (A20) & x = y \wedge y = z \to x = z \end{array}$$

όπου x, y, z οποιεσδήποτε μεταβλητές.

$$(A21) \quad z_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge z_m = y_m \to f(z_1, \ldots, z_m) = f(y_1, \ldots, y_m)$$

όπου f m-θέσιο σύμβολο συνάρτησης και z_i, y_i μεταβλητές $(i = 1, \ldots, m)$

$$(A22) \quad z_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge z_n = y_n \to (P(z_1, \ldots, z_n) \leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n)),$$

όπου P n-θέσιο σύμβολο κατηγορήματος και z_i, y_i μεταβλητές $(i = 1, \ldots, n)$

Σημειώσεις. Καθένα από τα 22 σχήματα περιέχει άπειρο πλήθος αξιωμάτων. Έτσι π.χ. για κάθε τύπο φ της $\mathcal{L}$ και οποιαδήποτε μεταβλητή x ο τύπος $\exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$ είναι αξίωμα (σχήμα A17). Το σχήμα (A15) αντιστοιχεί στον νόμο αντικατάστασης (σελ. 48). Ειδικές περιπτώσεις αξιωμάτων του (A15) είναι οι τύποι μορφής

$$\begin{array}{ll} \forall x\varphi \to \varphi & \\ \forall x\varphi \to \varphi(x/a), & \text{αν } a \text{ όρος χωρίς μεταβλητές} \\ \forall x\varphi \to \varphi(x/y), & \text{αν } y \text{ δεν εμφανίζεται στον } \varphi \end{array}$$

διότι η x είναι αντικαταστάσιμη σε οποιονδήποτε τύπο φ από τον εαυτό της, από σταθερούς όρους και από μεταβλητές που δεν εμφανίζονται στον φ. Μια μεταβλητή είναι επίσης αντικαταστάσιμη από οποιονδήποτε όρο σε τύπο που δεν περιέχει ποσοδείκτες, αφού δεν υπάρχει κίνδυνος δέσμευσης καμίας μεταβλητής του όρου.

Το σχήμα (A18) περιέχει τα αξιώματα $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$ κλπ., ενώ το (A19) τα: $x_i = x_j \to x_j = x_i$ για όλα τα i, j. Δεν υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές των σχημάτων (A19) - (A22) είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Έτσι λοιπόν ο τύπος $x_4 = x_2 \wedge x_2 = x_4 \to x_4 = x_4$ είναι ένα από τα αξιώματα του (A20).

Το σχήμα (A21) δεν περιέχει κανέναν τύπο, αν η γλώσσα $\mathcal{L}$ δεν έχει σύμβολα συναρτήσεων (τέτοια είναι π.χ. η γλώσσα $\mathcal{L}^{\Sigma}$ για τη θεωρία συνόλων , σελ. 38). Όμοια, το (A22) δεν δίνει κανένα αξίωμα, αν η γλώσσα $\mathcal{L}$ δεν έχει σύμβολα κατηγορημάτων (όπως π.χ. η γλώσσα $\mathcal{L}^{G}$ για τη θεωρία ομάδων, σελ. 51).

Ας δούμε μερικά παραδείγματα λογικών αξιωμάτων για την γλώσσα $\mathcal{L}^{A}$ της αριθμητικής.

$$
\begin{array}{ll}
S(x_1) < x_2 \to (x_2 = \mathbb{O} \to S(x_1) < x_2) & (A1) \\
\exists x_1\,(x_4 + x_1 = x_3) \vee \neg\exists x_1\,(x_4 + x_1 = x_3) & (A14) \\
\forall x_1(x_1 = x_1) \to \mathbb{O} = \mathbb{O} & (A15) \\
\forall x_1 \forall x_2\,(x_1 \cdot x_2 = x_3 + x_1) \to x_3 \cdot x_2 = x_3 + x_1 & (A15) \\
\forall x_4\,(x_1 < x_3 \to x_1 \neq x_4) \to (x_1 < x_3 \to \forall x_4(x_1 \neq x_4)) & (A16) \\
x_1 = x_3 \wedge x_2 = x_4 \to x_1 + x_2 = x_3 + x_4 & (A21) \\
x_1 = x_2 \wedge x_3 = x_3 \to x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3 & (A21) \\
x_2 = x_3 \wedge x_1 = x_4 \to (x_1 < x_2 \leftrightarrow x_4 < x_3) & (A22)
\end{array}
$$

Αποδεικτικοί κανόνες

Δεχόμαστε δύο αποδεικτικούς κανόνες, που εισάγουν την έννοια **άμεσης τυπικής συνέπειας**.Εκτός από τον γνωστό κανόνα απόσπασης (βλ. σελ. 21), δεχόμαστε τον λεγόμενο **κανόνα γενίκευσης** (Generalisation Rule), Που σχηματικά παριστάνεται ως εξής

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$$

Ο κανόνας αυτός λέει ότι, για οποιονδήποτε τύπο φ και οποιαδήποτε μεταβλητή x, ο τύπος $\forall x \varphi$ είναι άμεση τυπική συνέπεια του φ.

Έχουμε λοιπόν δύο τρόπους διεξαγωγής άμεσης τυπικής συνέπειας. Π.χ. ο τύπος $\forall x_1(x_1 = x_1)$ είναι άμεση τυπική συνέπεια του $x_1 = x_1$ (κανόνας γενίκευσης) και ο τύπος $\mathbb{O} = \mathbb{O}$ είναι άμεση τυπική συνέπεια των τύπων $\forall x_1(x_1 = x_1) \to \mathbb{O} = \mathbb{O}$ και $\forall x_1(x_1 = x_1)$.

Σημειώσεις. Υπάρχουν και άλλοι τρόποι επιλογής λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων για τον Κατηγορηματικό Λογισμό. Είναι όμως ισοδύναμοι με τον παραπάνω, διότι δίνουν τα ίδια τυπικά θεωρήματα του Κατηγορηματικού Λογισμού.

Ο κανόνας γενίκευσης έχει την εξής σημασία στα Μαθηματικά. Συχνά αποδεικνύεται ότι ‘‘ισχύει η ιδιότητα $\varphi(x)$’’ χωρίς να υποθέτουμε οτιδήποτε για το x. Τότε θεωρούμε ότι αποδείχθηκε το ‘‘για κάθε x ισχύει $\varphi(x)$’’.

Ας θυμηθούμε επίσης ότι αν ο τύπος φ είναι λογικά αληθινός ($\models \varphi$), τότε ο τύπος $\forall x \varphi$ είναι λογικά αληθινός ($\models \forall x \varphi$), σύμφωνα με τον σημασιολογικό κανόνα γενίκευσης (σελ. 48)

Τυπικές Αποδείξεις

Η έννοια της τυπικής απόδειξης στον Κατηγορηματικό Λογισμό γενικεύει εκείνη του Προτασιακού Λογισμού (βλ. σελ. 22). Η μόνη διαφορά είναι στο ότι ένας όρος της ακολουθίας (απόδειξης) μπορεί να εμφανιστεί σ' αυτήν ως άμεση τυπική συνέπεια κάποιου προηγούμενου με βάση τον κανόνα γενίκευσης.

Έστω T σύνολο τύπων της $\mathcal{L}$. **Τυπική απόδειξη από τις υποθέσεις** T (από το T) λέμε κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\psi_1, \ldots, \psi_n$ τύπων της $\mathcal{L}$ με την ιδιότητα:
κάθε όρος ψ_i της ακολουθίας ($i = 1, \ldots, n$)
ανήκει στο T (είναι υπόθεση του T)
ή είναι λογικό αξίωμα του Κατηγορηματικού Λογισμού
ή είναι άμεση τυπική συνέπεια προηγούμενων όρων (προηγούμενου όρου).

Το τελευταίο σημαίνει ότι ή υπάρχουν πριν από τον ψ_i τύποι ψ_j, ψ_m ($j < i$, $m < i$), τέτοιοι ώστε ψ_j είναι μορφής $\psi_m \to \psi_i$ ή υπάρχει πριν από τον ψ_i τύπος $\psi_k (k < i)$, ώστε ψ_i είναι μορφής $\forall x \psi_k$ (x μια μεταβλητή).

Ακριβώς όπως στον Προτασιακό Λογισμό ορίζονται οι έννοιες **τυπικής συνέπειας** από το T (τυπικού θεωρήματος από τις υποθέσεις T). Χρησιμοποιούμε τους ίδιους συμβολισμούς ($T \vdash \varphi$). Ειδικά το $\vdash \varphi$ (τυπικό θεώρημα κενού συνόλου υποθέσεων) το διαβάζουμε και ως "φ είναι **τυπικό θεώρημα** του Κατηγορηματικού Λογισμού".

Αν δούμε το σύνολο υποθέσεων T ως μια πρωτοβάθμια θεωρία, λέμε τα στοιχεία του T **μη λογικά αξιώματα** της θεωρίας T. Αν φ είναι τυπική συνέπεια του T (δηλ. $T \vdash \varphi$), λέμε ότι φ είναι τυπικό θεώρημα της θεωρίας T.

Ας σημειώσουμε πρώτα μερικές απλές παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 1. Τα λογικά αξιώματα είναι τυπικά θεωρήματα του Κατηγορηματικού Λογισμού (έχουν αποδείξεις μήκους 1). Όμοια κάθε μη λογικό αξίωμα μιας θεωρίας T είναι τυπικό της θεώρημα.

Παρατήρηση 2. Οι τυπικές αποδείξεις έχουν πεπερασμένο χαρακτήρα, δηλαδή κάθε μια χρησιμοποιεί μόνον πεπερασμένο πλήθος (λογικών και μη) αξιωμάτων. Βλέπουμε λοιπόν ότι $T \vdash \varphi$ εάν και μόνον εάν $T_0 \vdash \varphi$ για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο T_0 του T.

Είναι επίσης φανερό ότι αν $T \vdash \varphi$ και T' είναι υπερσύνολο του T, τότε $T' \vdash \varphi$.

Παρατήρηση 3. Αν $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \varphi \to \psi$, τότε $T \vdash \psi$.
Αν $T \vdash \varphi$, τότε (για οποιαδήποτε μεταβλητή x) $T \vdash \forall x \varphi$.
Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν $T \vdash \forall x \varphi$, τότε (επειδή $\forall x \varphi \to \varphi$ είναι λογικό αξίωμα) έχουμε $T \vdash \forall x \varphi \to \varphi$ και συνεπώς $T \vdash \varphi$. Από τα παραπάνω έπεται ότι ένας τύπος είναι τυπικό θεώρημα μιας θεωρίας T τότε και μόνον τότε, όταν η καθολική του κλειστότητα είναι τυπικό θεώρημα της T.

Πολύ χρήσιμη είναι η παρατήρηση ότι οι τύποι που έχουν ταυτολογική μορφή είναι τυπικά θεωρήματα του Κατηγορηματικού Λογισμού. Αυτό μας επιτρέπει να βρίσκουμε πολλά τυπικά θεωρήματα χωρίς να κατασκευάζουμε άμεσα τυπικές αποδείξεις.

Παρατήρηση 4. Αν Φ είναι ταυτολογία του Προτασιακού Λογισμού, τότε ο τύπος $\Phi(a_1/\vartheta_1,\ldots,a_n/\vartheta_n)$ (βλ. σελ. 47) είναι τυπικό θεώρημα του Κατηγορηματικού Λογισμού.

Πραγματικά, αν Φ_1, $\Phi_2,\ldots,\Phi_m$ είναι μια τυπική απόδειξη του Φ (υπάρχει λόγω πληρότητας του Προτασιακού Λογισμού, βλ. σελ. 27), τότε η ακολουθία

$$\Phi_1(a_1/\vartheta_1,\ldots,a_n/\vartheta_n),\ \Phi_2(a_1/\vartheta_1,\ldots,a_n/\vartheta_n),\ldots,\Phi_m(a_1/\vartheta_1,\ldots,a_n/\vartheta_n)$$

είναι μια τυπική απόδειξη του τύπου $\Phi(a_1/\vartheta_1,\ldots,a_n/\vartheta_n)$ (που χρησιμοποιεί μόνο τα αξιώματα (A1)-(A14) και τον κανόνα απόσπασης).

Με βάση το παραπάνω εύκολα γενικεύονται πολλές ιδιότητες της τυπικής συνέπειας, που γνωρίσαμε στον Προτασιακό Λογισμό.

Με κάποιους περιορισμούς ισχύει και για την συντακτική συνέπεια η ιδιότητα της απαγωγής.

Θεώρημα Απαγωγής

Έστω $\mathcal{L}$ πρωτοβάθμια γλώσσα. Έστω T σύνολο τύπων, ψ τύπος και ϑ πρόταση της $\mathcal{L}$.

$$T \vdash \vartheta \to \psi \text{ εάν και μόνον εάν } T \cup \{\vartheta\} \vdash \psi.$$

Η αιτιολόγηση είναι όμοια με εκείνη στη σελ. 23. Η μόνη διαφορά είναι στο ότι για να δείξουμε ότι $T \vdash \vartheta \to \psi_i$ στην περίπτωση τύπου ψ_i μορφής $\forall x\psi_k$ (με $k < i$), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο τύπος $\forall x(\vartheta \to \psi_k) \to (\vartheta \to \forall x\psi_k)$ είναι λογικό αξίωμα (A16). Από την επαγωγική υπόθεση ($k < i$) έχουμε $T \vdash \vartheta \to \psi_k$, άρα $T \vdash \forall x(\vartheta \to \psi_k)$. Συνεπώς $T \vdash \vartheta \to \forall x\psi_k$.

Κάποιους από τους νόμους του Κατηγορηματικού Λογισμού τους πήραμε ως λογικά αξιώματα. Οι υπόλοιποι είναι τυπικά θεωρήματα. Θα το δούμε παρακάτω για μερικούς από τους νόμους.

Παράδειγμα 1. Νόμος αντιμετάθεσης γενικών ποσοδεικτών:

$$\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi.$$

Έχουμε	$\vdash \forall x\forall y\varphi \to \forall y\varphi,$	(αξίωμα A15)
και	$\vdash \forall y\varphi \to \varphi,$	(αξίωμα A15)
άρα	$\vdash \forall x\forall y\varphi \to \varphi,$	(βλ. άσκηση 84 (α′))

Με βάση την παρατήρηση 3 (σελ. 58) έπεται ότι

$$\vdash \forall x(\forall x\forall y\varphi \to \varphi).$$

Επειδή η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη στον τύπο $\forall x\forall y\varphi$, ο τύπος $\forall x(\forall x\forall y\varphi \to \varphi) \to (\forall x\forall y\varphi \to \forall x\varphi)$ είναι λογικό αξίωμα (A16). Επομένως έχουμε

$$\vdash \forall x\forall y\varphi \to \forall x\varphi$$

Όπως παραπάνω βλέπουμε διαδοχικά ότι

$$\vdash \forall y(\forall x\forall y\varphi \to \forall x\varphi)$$
$$\vdash \forall y(\forall x\forall y\varphi \to \forall x\varphi) \quad \to (\forall x\forall y\varphi \to \forall y\forall x\varphi)$$
$$\vdash \forall x\forall y\varphi \to \forall y\forall x\varphi$$

Δικαιολογήσαμε μια από τις συνεπαγωγές του νόμου αντιμετάθεσης. Η άλλη δικαιολογείται όμοια. Άρα έχουμε (βλ. ασκ. 84 (β΄))

$$\vdash \forall x \forall y \varphi \to \forall y \forall x \varphi.$$

Παράδειγμα 2. Νόμος του de Morgan: $\neg \forall x \varphi \leftrightarrow \exists x \neg \varphi$

Έχουμε	$\vdash \exists x \neg \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \neg \varphi$	(αξίωμα A17)
Επειδή	$\vdash \neg \neg \varphi \leftrightarrow \varphi$	(ταυτολογία)
Έχουμε	$\vdash \forall x \neg \neg \varphi \leftrightarrow \forall x \varphi,$	(άσκηση 85)

Ο τύπος $(a \leftrightarrow b) \to (\neg\, a \leftrightarrow \neg b)$ είναι ταυτολογία του Προτασιακού Λογισμού. Άρα ο τύπος $(\forall x \neg \neg \varphi \leftrightarrow \forall x \varphi) \to (\neg \forall x \neg \neg \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \varphi)$ είναι τυπικό θεώρημα. Έπεται ότι

$$\vdash \neg\, \forall x \neg\, \neg \varphi \leftrightarrow \neg\, \forall x \varphi,$$

που μαζί με το παραπάνω $\vdash \exists x \neg \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \neg \varphi$ μας δίνει

ότι	$\vdash \exists x \neg \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \varphi$	(βλ. ασκ. 84 (στ΄))
και επίσης	$\vdash \neg \forall x \varphi \leftrightarrow \exists x \neg \varphi$	(άσκηση 84 (γ ΄))

Όμοια είναι οι αιτιολογήσεις του ότι οι υπόλοιποι νόμοι του Κατηγορηματικού Λογισμού (σελ. 71 - 74) είναι τυπικά θεωρήματα του. Στις τυπικές αποδείξεις γίνεται χρήση μόνο των αξιωματικών σχημάτων (A1)-(A17), δεν χρειάζονται τα αξιώματα ισότητας.

Χρησιμοποιώντας τα (A18)-(A22) μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιουσδήποτε όρους t, s, u της γλώσσας $\mathcal{L}$ έχουμε

$$\begin{array}{ll} \text{(I1)} & \vdash t = t \\ \text{(I2)} & \vdash t = s \to s = t \\ \text{(I3)} & \vdash t = s \wedge s = u \to t = u \end{array}$$

Το (I2) π.χ. δικαιολογείται ως εξής. Από το (A19) έχουμε ότι $\vdash x_1 = x_2 \to x_2 = x_1$. Ο τύπος $x_1 = x_2 \to x_2 = x_1$ δεν έχει ποσοδείκτες, επομένως η x_1 είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t.

Άρα ο τύπος $\forall x_1(x_1 = x_2 \to x_2 = x_1) \to (t = x_2 \to x_2 = t)$ είναι αξίωμα (A15). Επειδή έχουμε $\vdash \forall x_1(x_1 = x_2 \to x_2 = x_1)$ (Παρατήρηση 3, σελ. 59), έπεται ότι $\vdash t = x_2 \to x_2 = t$. Όμοια έχουμε διαδοχικά

$$\begin{array}{l} \vdash \forall x_2(t = x_2 \to x_2 = t) \\ \vdash \forall x_2(t = x_2 \to x_2 = t) \ \to (t = s \to s = t) \\ \vdash t = s \to s = t \end{array}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι για κάθε m-θέσιο σύμβολο συνάρτησης f και κάθε n-θέσιο σύμβολο κατηγορήματος P της $\mathcal{L}$

$$\begin{array}{ll} \text{(I4)} & \vdash t_1 = s_1 \wedge \ldots \wedge t_m = s_m \to f(t_1, \ldots, t_m) = f(s_1, \ldots, s_m) \\ \text{(I5)} & \vdash t_1 = s_1 \wedge \ldots \wedge t_n = s_n \to (P(t_1, \ldots, t_m) \leftrightarrow P(s_1, \ldots, s_m)) \end{array}$$

όπου s_i, t_1 όροι της $\mathcal{L}$.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα τυπικών θεωρημάτων κάποιων πρωτοβάθμιων θεωριών.

Παράδειγμα 3. Τους παρακάτω τρείς τύπους της γλώσσας $\mathcal{L}^G$

$$\begin{aligned} &x_1 \circ (x_2 \circ x_3) \quad = (x_1 \circ x_2) \circ x_3 \\ &e \circ x_1 = x_1 \\ &x_1^{-1} \circ x_1 = e \end{aligned}$$

μπορούμε να πάρουμε ως μη λογικά αξιώματα της θεωρίας ομάδων G. Θα δείξουμε ότι $x_1 \circ x_1^{-1} = e$ είναι τυπικό θεώρημα από τις υποθέσεις G και θα έχουμε ότι $G \vdash t \circ t^{-1} = e$, για οποιονδήποτε όρο t της $\mathcal{L}^G$. Μια αιτιολόγηση όμοια μ' αυτήν της (I2) παραπάνω μας δίνει ότι για οποιουσδήποτε όρους t, s, u της $\mathcal{L}^G$ έχουμε ότι οι τύποι:

$$t \circ (s \circ u) = (t \circ s) \circ u,\ (t \circ s) \circ u = t \circ (s \circ u),\ e \circ t = t,\ t = e \circ t,\ t^{-1} \circ t = e$$

είναι τυπικά θεωρήματα της θεωρίας G. Ειδικά εχουμε

1. $G \vdash x_1^{-1} \circ (x_1 \circ x_1^{-1}) = (x_1^{-1} \circ x_1) \circ x_1^{-1}$
2. $G \vdash ((x_1^{-1})^{-1} \circ x_1^{-1}) \circ (x_1 \circ x_1^{-1}) = (x_1^{-1})^{-1} \circ (x_1^{-1} \circ (x_1 \circ x_1^{-1}))$
3. $G \vdash e \circ x_1^{-1} = x_1^{-1}$
4. $G \vdash x_1 \circ x_1^{-1} = e \circ (x_1 \circ x_1^{-1})$
5. $G \vdash (x_1^{-1})^{-1} \circ x_1^{-1} = e$

   Εφαρμόζοντας το (I4) με $f(x_1, x_2)$ τον όρο $x_1 \circ x_2$ έχουμε

6. $\vdash x_1^{-1} \circ x_1 = e \wedge x_1^{-1} = x_1^{-1} \to (x_1^{-1} \circ x_1) \circ x_1^{-1} = e \circ x_1^{-1}$
7. $\vdash (x_1^{-1})^{-1} = (x_1^{-1})^{-1} \wedge x_1^{-1} \circ (x_1 \circ x_1^{-1}) = x_1^{-1} \to (x_1^{-1})^{-1} \circ (x_1^{-1} \circ (x_1 \circ x_1^{-1})) = (x_1^{-1})^{-1} \circ x_1^{-1}$

   Επειδή όμως $G \vdash x_1^{-1} \circ x_1 = e \wedge x_1^{-1} = x_1^{-1}$ από το (6) έχουμε

   $$G \vdash (x_1^{-1} \circ x_1) \circ x_1^{-1} = e \circ x_1^{-1}$$

   Το τελευταίο μαζί με τα (1) και (3) μας δίνει $G \vdash x_1^{-1} \circ (x_1 \circ x_1^{-1}) = x_1^{-1}$
   Άρα $G \vdash (x_1^{-1})^{-1} = (x_1^{-1})^{-1} \wedge x_1^{-1} \circ (x \circ x_1^{-1}) = x_1^{-1}$ και λόγω του (7) έχουμε
   $G \vdash (x_1^{-1})^{-1} \circ (x_1^{-1} \circ (x_1 \circ x_1^{-1})) = (x_1^{-1})^{-1} \circ x_1^{-1}$,
   που μαζί με τα (2) και (5) έπεται ότι

8. $G \vdash ((x_1^{-1})^{-1} \circ x_1^{-1}) \circ (x_1 \circ x_1^{-1}) = e$.

Το (I4) μας δίνει

$$\vdash (x_1^{-1})^{-1} \circ x_1^{-1} = e \wedge x_1 \circ x_1^{-1} = x_1 \circ x_1^{-1} \to ((x_1^{-1}) \circ x_1^{-1}) \circ (x_1 \circ x_1^{-1}) = e \circ (x_1 \circ x_1^{-1})$$

και όπως παραπάνω καταλήγουμε στο

$$G \vdash ((x_1^{-1}) \circ x_1^{-1}) \circ (x_1 \circ x_1^{-1}) = e \circ (x_1 \circ x_1^{-1}).$$

Απ′ αυτό και τα (4),(8) έχουμε τελικά

$$G \vdash x_1 \circ x_1^{-1} = e$$

που είναι το ζητούμενο.

Παράδειγμα 4. Θα δείξουμε ότι ο τύπος φ:

$$x \neq \mathbb{O} \to \exists y(S(y) = x)$$

είναι τυπικό θεώρημα της αριθμητικής του Peano (σελ. 53). Επειδή

$$\varphi(x/\mathbb{O}) \wedge \forall x(\varphi \to \varphi(x/S(x))) \to \forall x \varphi$$

είναι αξίωμα της θεωρίας P, αρκεί να δούμε ότι
(1) $P \vdash \mathbb{O} \neq \mathbb{O} \to \exists y(S(y) = \mathbb{O})$
και
(2) $P \vdash (x \neq \mathbb{O} \to \exists y(S(y) = x)) \to (S(x) \neq \mathbb{O} \to \exists y(S(y) = S(x)))$.
Ο τύπος $a \to (\neg a \to b)$ είναι ταυτολογία του Προτασιακού Λογισμού.
Άρα $\vdash \mathbb{O} = \mathbb{O} \to (\mathbb{O} \neq \mathbb{O} \to \exists y(S(y) = \mathbb{O}))$
και επειδή $P \vdash \mathbb{O} = \mathbb{O}$, έχουμε το (1).
Ο τύπος $\forall y(S(y) \neq S(x)) \to S(x) \neq S(x)$ είναι αξίωμα (Α 15).
Έχουμε λοιπόν $\vdash S(x) = S(x) \to \neg\forall y(S(y) \neq S(x))$ (άσκηση 84)
άρα και $\vdash S(x) = S(x) \to \exists y(S(y) = S(x))$.
Έπεται ότι $\vdash \exists y(S(y) = S(x))$ (αφού $\vdash S(x) = S(x)$).
Χρησιμοποιώντας δύο φορές το γεγονός ότι (βλ. ασκ. 84 ζ′))
"Αν $T \vdash \psi$, τότε για οποιοδήποτε τύπο ϑ έχουμε $T \vdash \vartheta \to \psi$",
έχουμε $P \vdash (S(x) \neq \mathbb{O} \to \exists y(S(y) = S(x))$
και $P \vdash (x \neq \mathbb{O} \to \exists(S(y) = x)) \to (S(x) \neq \mathbb{O} \to \exists y(S(y) = S(x))$
Δείξαμε λοιπόν το (2).

Οι παρακάτω ορισμοί είναι ανάλογοι μ′ εκείνους που γνωρίσαμε στον Προτασιακό Λογισμό.

Έστω T σύνολο τύπων μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας $\mathcal{L}$. Το T λέγεται **συντακτικά αντιφατικό**, όταν υπάρχει τύπος φ της $\mathcal{L}$ ώστε $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \neg\varphi$. Το T λέγεται **συντακτικά συνεπές**, αν δεν είναι συντακτικά αντιφατικό.

Παρατηρήσεις 5. Εύκολα βλέπουμε ότι ένα σύνολο τύπων είναι αντιφατικό εάν και μόνον εάν κάθε τύπος της $\mathcal{L}$ είναι τυπική του συνέπεια ($p \to (\neg p \to q)$ είναι ταυτολογία). Για να είναι λοιπόν συντακτικά αντιφατική μια θεωρία T, αρκεί και πρέπει $T \vdash x_1 \neq x_1$. Λόγω του πεπερασμένου χαρακτήρα των τυπικών αποδείξεων (βλ. Παρατ. 2 σελ. 58) έχουμε ότι, αν μια θεωρία T είναι συντακτικά αντιφατική, τότε ένα πεπερασμένο υποσύνολο T_0 μη λογικών αξιωμάτων της T είναι συντακτικά αντιφατικό. Και αντίστροφα, αφού προφανώς υπερσύνολα αντιφατικού συνόλου είναι αντιφατικό.

Παρατηρήσεις 6. Οι ιδιότητες "αναγωγής της αντιφατικότητας" και "αποδείξεων με περιπτώσεις" που έχει η συνέπεια στον Προτασιακό Λογισμό (Παρατ. 5, σελ. 20, άσκηση 33 και Παρατηρήσεις 4,5, σελ. 24) και η σημασιολογική συνέπεια στον Κατηγορηματικό

Λογισμό (παρατ. 4, σελ. 56 και άσκηση 82), ισχύουν και για την συντακτική συνέπεια. Συγκεριμένα έχουμε ότι:

Αν T σύνολο τύπων, ψ τύπος και ϑ πρόταση τότε:

1. $T \cup \{\vartheta\}$ είναι συντακτικά αντιφατικό εάν και μόνον εάν $T \vdash \neg\vartheta$
2. $T, \vartheta \vdash \psi$ και $T, \neg\vartheta \vdash \psi$ εάν και μόνον εάν $T \vdash \psi$

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι απλές εφαρμογές του Θεωρήματος Απαγώγής για την τυπική συνέπεια (σελ. 58).

2.9 Πληρότητα Κατηγορηματικού Λογισμού.

Ο Κατηγορηματικός Λογισμός γενικεύει την έννοια της λογικής αληθείας που γνωρίσμαμε στον Προτασιακό Λογισμό. Λογικά αληθινοί είναι οι τύποι που είναι έγκυροι σε όλες της συνατές ερμηνείες. Δεν υπάρχει όμως μέθοδος, ανάλογη μ΄ εκείνη των $\mathbf{0} - \mathbb{I}$ πινάκων, που να επιτρέπει για τυχόν τύπο να αποφανθούμε, μετά από πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών βημάτων, αν αυτός ο τύπος είναι λογικά αληθινός.

Μια νέα έννοια αληθείας εισάγει η τυπική άποψη του Κατηγορηματικού Λογισμού. Συντακτικά αληθινά θεωρούμε τα λογικά αξιώματα και τις τυπικές τους συνέπειες, δηλαδή τους τύπους για τους οποίους υπάρχει τυπική απόδειξη.

Θα δούμε ότι οι δύο αυτές έννοιες ταυτίζονται. Λογικά αληθινοί τύποι είναι τα τυπικά θεωρήματα και μόνον αυτά. Το τυπικό σύστημα που κατασκευάσαμε για τον Κατηγορηματικό Λογισμό είναι λοιπόν πλήρες. Αντίστοιχο αποτέλεσμα είχαμε και στον Προτασιακό Λογισμό (βλ. Θεώρημα Πληρότητας, σελ. ...). Η πληρότητα του Κατηγορηματικού Λογισμού αποδείχθηκε από τον K. Gödel το 1930.

Α΄ Θεώρημα Πληρότητας

Για κάθε τύπο φ μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας

$$\vdash \varphi \text{ εάν και μόνον εάν } \models \varphi$$

Γενικότερα, ταυτίζονται οι έννοιες συντακτικής και σημασιολογικής συνέπειας.

Β΄ Θεώρημα Πληρότητας

Έστω T σύνολο τύπων και φ τύπος μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας

$$T \vdash \varphi \text{ εάν και μόνον εάν } T \models \varphi$$

Το παραπάνω σημαίνει ότι η απόδειξη εγκυρότητας ενός τύπου φ σε όλα τα πρότυπα μιας πρωτοβάθμιας θεωρίας T μπορούν να αντικατασταθούν με τυπική απόδειξη του φ από τις υποθέσεις T.

Η αιτιολόγηση λογικής αλήθειας των τυπικών θεωρημάτων είναι απλή και εκφράζεται από το λεγόμενο Θεώρημα Εγκυρότητας. Η άλλη κατεύθυνση του Θεωρήματος Πληρότητας είναι δύσκολη. Η αιτιολόγηση χρησιμοποιεί μη στοιχειώδη μέσα της Μαθηματικής Λογικής και είναι εκτός ύλης αυτού του μαθήματος. Θα αναφέρουμε παρακάτω, χωρίς απόδειξη, το λεγόμενο Θεώρημα Συμβιβαστότητας από το οποίο προκύπτει το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος Πληρότητας του Κατηγορηματικού Λογισμού.

Παρατήρηση 1. Τα λογικά αξιώματα είναι λογικά αληθινοί τύποι (βλ. σελ. 94). Είναι επίσης φανερό ότι η λογική αλήθεια διατηρείται από τους αποδεικτικούς κανόνες απόσπασης και γενίκευσης (βλ. σελ. 48). Έπεται ότι κάθε όρος μιας τυπικής απόδειξης είναι λογικά αληθινός τύπος.

Όμοια βλέπουμε ότι όλοι οι όροι μιας τυπικής απόδειξης από ένα σύνολο υποθέσεων T, είναι έγκυροι σε όλα τα πρότυπα του T.

Δείξαμε λοιπόν το ακόλουθο

Θεώρημα Εγκυρότητας

Έστω T σύνολο τύπων και φ τύπος μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας.

$$\text{Αν } T \vdash \varphi, \ \text{τότε } T \models \varphi.$$

Ειδικά έχουμε: Αν $\vdash \varphi$, τότε $\models \varphi$.

Πόρισμα 1. Αν μια πρωτοβάθμια θεωρία έχει πρότυπο, τότε είναι συντακτικά συνεπής.

Πραγματικά, αν T είναι συντακτικά αντιφατική, τότε $T \vdash x_1 \neq x_1$ άρα $T \models x_1 \neq x_1$. Δεν υπάρχει, σε τέτοια περίπτωση, κανένα πρότυπο για τη θεωρία T.

Θεώρημα Συμβιβαστότητας

Έστω T σύνολο τύπων μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας . Αν το T είναι συντακτικά συνεπές, τότε υπάρχει πρότυπο του T.

Πόρισμα 2. Αν μια πρωτοβάθμια θεωρία είναι σημασιολογικά αντιφατική, τότε (επειδή δεν έχει κανένα πρότυπο) είναι και συντακτικά αντιφατική.

Πόρισμα 3. Αν μια πρόταση ϑ είναι σημασιολογική συνέπεια μιας θεωρίας T, τότε είναι τυπικό θεώρημα από τις υποθέσεις T.

Πραγματικά, αν $T \models \vartheta$, τότε η θεωρία $T \cup \{\neg\vartheta\}$ δεν έχει πρότυπο, άρα είναι συντακτικά αντιφατική. Με βάση την ιδιότητα αναγωγής της αντιφατικότητας (Παρατήρηση 6, σελ. 63) έχουμε $T \vdash \neg\neg\vartheta$, άρα και $T \vdash \vartheta$.

Το παραπάνω γενικεύεται αμέσως για οποιουσδήποτε τύπους, διότι για έναν τύπο φ έχουμε $T \models \varphi$ (ή $T \vdash \varphi$) εάν και μόνον εάν το ίδιο ισχύει για την καθολική του κλειστότητα $\overline{\varphi}$, δηλαδή $T \models \overline{\varphi}$ (ή $T \vdash \overline{\varphi}$ αντίστοιχα). Έχουμε λοιπόν το ζητούμενο.

Πόρισμα 4. Έστω T σύνολο τύπων και φ τύπος μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας.

$$\text{Αν } T \models \varphi, \ \text{τότε} T \vdash \varphi.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

49. Βρείτε όλους τους όρους και τους τύπους που περιέχονται στους παρακάτω τύπους:

    (α′) $(\neg \exists x \forall y\ (((x \circ y) \circ \mathbb{I}) \circ x = y + z)) \vee \forall x \forall y\ (x \circ \mathbb{I} = y \circ \mathbb{I} \rightarrow x = y + z)$

    (β′) $\forall t \exists s\ ((s \circ t) + x = \mathbb{O}) \rightarrow \forall x\ (\mathbb{O} \circ z = x)$

    (γ′) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists s \forall t\ (t \in s \leftrightarrow (t = x_1 \vee t = x_2) \vee t = x_3)$

50. Βρείτε τις ελεύθερες και τις δεσμευμένες μεταβλητές στους τύπους

    (α′) $\exists x\ (\mathbb{O} < x) \rightarrow (x = z) \wedge \forall x \forall y\ (x < y)$

    (β′) $\forall x\ (x + \mathbb{I} = y) \rightarrow \exists x (x|y)$

    (γ′) $\exists x\ ((x \circ x) + (x + x) = \mathbb{I}) \vee \exists y\ (x + \mathbb{I} = y + y)$

51. Δώστε μερικά παραδείγματα για τη γλώσσα $\mathcal{L}^A$ (σελ. 38)

52*. Έστω $\mathcal{L}$ πρωτοβάθμια γλώσσα και $\mathfrak{A}$ μια ερμηνεία της.

    (α′) Έστω t όρος της $\mathcal{L}$ με μεταβλητές μεταξύ των $x_1, \ldots, x_n$ και V, W δύο αποτιμήσεις των μεταβλητών στην $\mathfrak{A}$ τέτοιες ώστε $V(x_1) = W(x_1), \ldots, V(x_n) = W(x_n)$. Δείξτε ότι τότε
    $$V^*(t) = W^*(t)$$

    (β′) Αν επιπλέον $V(x_1) = W(y)$, όπου y μεταβλητή, δείξτε ότι
    $$V^*(t) = W^*(t(x_1/y)).$$

    (γ′) Έστω φ τύπος της $\mathcal{L}$ με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $x_1, \ldots, x_n$ και V, W δύο αποτιμήσεις όπως στην (α′) παραπάνω.
    Δείξτε ότι τότε
    $$\mathfrak{A} \models \varphi[V] \text{ εάν και μόνον εάν } \mathfrak{A} \models \varphi[W]$$

53. Έστω V η αποτίμηση στο $\mathbb{N}$ με $V(x_k) = k^2 + k + 1$.

    (α′) Βρείτε στη φυσική δομή $\mathfrak{N}$ της $\mathcal{L}^A$ τις τιμές $V^*(t)$ για τους όρους t :
    $(x_2 \cdot x_1) + S(x_1)$, $x_1 + x_3) \cdot S(S(\mathbb{O}))$, $((x_1 + x_2) \cdot S(S(\mathbb{O})) + S(S(S(\mathbb{O}))) \cdot x_2$.

    (β′) Ελέγξτε αν για αυτήν την αποτίμηση ικανοποιούνται στην $\mathfrak{A}$ οι τύποι:
    $(x_1 + x_3) \cdot S(S(\mathbb{O})) < (x_2 \cdot x_1) + S(x_1)$,
    $\forall x_1 \exists x_2\ (x_1 \cdot S(S(\mathbb{O})) + x_2 \cdot S(S(S(\mathbb{O}))) = S(S(S(S(\mathbb{O})))) \cdot x_3$,
    $\exists x_1\, (S(S(S(\mathbb{O}))) < x_1) \wedge \forall x_2\, (S(S(S(\mathbb{O}))) < (x_1 \cdot x_3) + S(\mathbb{O}))$.

54. Ελέγξτε αν οι παραπάνω τύποι ικανοποιούνται στη δομή $< \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}, id_{\mathbb{Z}}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}, 1 >$, όπου $id_{\mathbb{Z}}$ η ταυτοτική συνάρτηση στο $\mathbb{Z}$, για μια αποτίμηση με $V(x_1) = 1$, $V(x_2) = 2$, $V(x_3) = 0$.

55. Βρείτε μια ερμηνεία της $\mathcal{L}^A$ στην οποία ικανοποιείται η πρόταση:
    $\exists x \forall y\ \ (\mathbb{O} < y\ \wedge\ y < x)$.

56. Δώστε παραδείγματα προτάσεων φ, ψ (κατάλληλης γλώσσας) τέτοιων ώστε:

(α′) $< \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}> \models \varphi$ και $< \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}> \not\models \varphi$,

(β′) $< \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}> \models \psi$ και $< \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}> \not\models \psi$

57. Γράψτε τύπους της γλώσσας $\mathcal{L}^A$ της αριθμητικής, των οποίων η σημασία στη δομή $\mathfrak{N}$ είναι:

    (α′) x είναι άρτιος

    (β′) x είναι περιττός

    (γ′) x διαιρεί το y

    (δ′) x δεν είναι πρώτος αριθμός

    (ε′) x είναι πρώτος αριθμός

    (ϛ′) x είναι ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των y, z

    (ζ′) x είναι μέγιστος κοινός διαιρέτης των y, z

    (η′) για κάθε δύο αριθμούς υπάρχει ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους

    (ϑ′) κάθε αριθμός διαιρούμενος με το 2 δίνει υπόλοιπο 0 ή 1

    (ι′) δεν υπάρχει ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός

58. Δώστε παράδειγμα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας με ερμηνεία

$$\mathfrak{A} =< \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, f, 0 >$$

    όπου f μια πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

    Βρείτε τύπους αυτής της γλώσσας, των οποίων η σημασία στην $\mathfrak{A}$ είναι:

    (α′) δεν υπάρχει αριθμός με αρνητικό τετράγωνο,

    (β′) η f έχει ρίζα,

    (γ′) η f έχει ακριβώς μια ρίζα,

    (δ′) μεταξύ δύο αριθμών υπάρχει τρίτος,

    (ε′) δεν υπάρχει ελάχιστος αριθμός,

    (ϛ′) η f είναι φθίνουσα,

    (ζ′) η f είναι μονότονη

59. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Σε κατάλληλη πρωτοβάθμια γλώσσα, γράψτε τύπους, των οποίων η σημασία στη δομή $< \mathbb{R}, A, \leq_{\mathbb{R}} >$ είναι:

    (α′) το A δεν είναι κενό,

    (β′) x είναι άνω φράγμα του A,

    (γ′) το A είναι άνω φραγμένο,

    (δ′) x είναι άνω πέρας (supremum) του A.

60. Βρείτε προτάσεις φ_1, φ_2 γλώσσας χωρίς μη λογικά σύμβολα, τέτοιες ώστε για κάθε δομή $\mathfrak{A}$ με σύμπαν A.

    (α′) $\mathfrak{A} \models \varphi_1$ εάν και μόνον εάν A έχει ακριβώς ένα στοιχείο,

(β′) $\mathfrak{A} \models \varphi_2$ εάν και μόνον εάν A έχει ακριβώς δύο στοιχεία.
Βρείτε ανάλογες προτάσεις φ_k για κάθε φυσικό k ($k \neq 0$).

61*. Έστω φ και y μια μεταβλητή που δεν εμφανίζεται στο φ.

Δείξτε ότι ο τύπος $\exists x\,(\varphi \wedge \forall y \varphi(x/y) \to y = x))$ (σημ.2, σελ. 46) ικανοποιείται σε μια δομή $\mathfrak{A}$ για μια αποτίμηση V, εάν και μόνον εάν υπάρχει ακριβώς ένα a στο σύμπαν της δομής $\mathfrak{A}$, ώστε $\mathfrak{A} \models \varphi[V(x/a)]$. Αποδείξτε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τον τύπο

$$\exists x \varphi \wedge \forall y \forall z (\varphi(x/y) \wedge \varphi(x/z) \to y = z),$$

όπου y, z μεταβλητές, που δεν εμφανίζονται στον τύπο φ.

62. Εκφράστε τα κλασσικά κατηγορήματα: ‘‘Κάθε S είναι P’’, ‘‘Κάποια S είναι P’’, ‘‘Κανένα S δεν είναι P’’, ‘‘ Κάποια S δεν είναι P’’ ως τύπους πρωτοβάθμιας γλώσσας με δυο μονοθέσια σύμβολα κατηγορημάτων S, P.

63*. Έστω Φ τύπος του Προτασιακού Λογισμού με προτασιακές μεταβλητές μεταξύ των $p_1, \ldots, p_n$. Έστω $\psi_1, \ldots, \psi_n$ τύποι μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας $\mathcal{L}$. Συμβολίζουμε με $\Phi(p_1/\psi_1, \ldots, p_n/\psi_n)$ τον τύπο της $\mathcal{L}$ που προκύπτει από την αντικατάσταση στον Φ των p_1 με $\psi_i (i = 1, \ldots, n)$ αντίστοιχα.

(α′) Έστω $\mathfrak{A}$ δομή για την $\mathcal{L}$ και V αποτίμηση των μεταβλητών στην $\mathfrak{A}$. Ορίζουμε την αποτίμηση $\widetilde{V}$ των προτασιακών μεταβλητών ως εξής.
$\widetilde{V}(p_i) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{αν } \mathfrak{A} \models \psi_i[V] \\ \mathbf{0}, & \text{αν } \mathfrak{A} \not\models \psi_i[V] \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n)$
Αποδείξτε ότι $\widetilde{V}^*(\Phi) = \mathbf{1}$ εάν και μόνον εάν $\mathfrak{A} \models \Phi(p_1/\psi_1, \ldots, p_n/\psi_n)[V]$

(β′) Αποδείξτε ότι αν Φ είναι ταυτολογία του Προτασιακού Λογισμού, τότε ο τύπος $\Phi(p_1/\psi_1, \ldots, p_n/\psi_n)$ είναι λογικά αληθινός τύπος του Κατηγορηματικού Λογισμού.

64. Εξετάστε αν είναι λογικά αληθινοί οι τύποι:

(α′) $x + \mathbb{I} = \mathbb{O}$,

(β′) $x + \mathbb{I} \neq \mathbb{O}$,

(γ′) $\neg\,(x < y) \to (y < x \vee x = y)$,

(δ′) $\forall x\ (x \neq \mathbb{I}) \to x \neq \mathbb{I}$,

(ε′) $x \neq \mathbb{I} \to \forall x\ (x \neq \mathbb{I})$,

(ϛ′) $\forall x\, R(x_1\, x)$,

(ζ′) $R(x_1\, x)$,

(η′) $R(x,\, y) \to R(y,\, x)$,

(ϑ′) $\exists x \exists y R(x,\, y) \to \exists y \exists x R(x,\, y)$,

(ι′) $\exists x \exists y R(x,\, y) \to \exists y \exists x R(y,\, x)$,

(ια′) $\exists x \exists y R(x,\, y) \to \exists x \exists y R(y,\, x)$,

(ιβ′) $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg\, P(x)$, (ιγ′) $\forall x P(x) \lor \forall x \neg P(x)$,

(ιδ′) $\exists x\,(x \cdot y < x + y) \to (\forall x(x \cdot y = 0) \to \exists x(x \cdot y < x + y))$,

(ιε′) $f(x, y) = \mathbb{I} \to (f(x, y) \neq \mathbb{I} \to x < \mathbb{O})$,

όπου P, R σύμβολα κατηγορημάτων (μονοθέσιο και 2-θέσιο αντίστοιχα), f σύμβολο συνάρτησης (2-θέσιο) και $\mathbb{O}$, $\mathbb{I}$ σύμβολα σταθερών.

Για καθέναν από τους παραπάνω τύπους βρείτε, αν υπάρχουν παραδείγματα δομών στις οποίες είναι έγκυροι.

65. Δείξτε ότι *δεν* είναι λογικά αληθινοί οι τύποι:

(α′) $\forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \to \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$,

(β′) $\exists x\,P(x) \land \exists x Q(x) \to \exists x\,(P(x) \land Q(x))$,

(γ′) $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

(δ′) $(\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$,

(ε′) $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$,

(ϛ′) $\forall x \exists y R(x, y) \to \exists y \forall x R(x, y)$,

(ζ′) $P(x) \to \forall x P(x)$.

66. Δείξτε ότι αν η μεταβλητή y δεν είναι ελεύθερη στον τύπο φ τότε $\forall y \varphi \equiv \varphi$ και $\exists y \varphi \equiv \varphi$.

67. Αποδείξτε ότι:

(α′) αν $\varphi \equiv \psi$ και $\psi \equiv \vartheta$, τότε $\varphi \equiv \vartheta$,

(β′) αν $\varphi \equiv \psi$, τότε για κάθε τύπο $\vartheta : \vartheta \lor \varphi \equiv \vartheta \lor \psi,\ \ \vartheta \land \varphi \equiv \vartheta \land \psi$,

(γ′) αν $\varphi \equiv \psi$, τότε $\forall x \varphi \equiv \forall x \psi$ και $\exists x \varphi \equiv \exists x \psi$,

(δ′) $\forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi$ και $\exists x \varphi \equiv \neg \forall x \neg \varphi$.

68. Δείξτε ότι αν πάρουμε ως φ τον τύπο $\exists y\ y \neq x$, τότε ο τύπος $\forall x \varphi(x) \to \varphi(y)$ δεν είναι λογικά αληθινός. Συγκρίνετε με τον νόμο αντικατάστασης (2γ′) στη σελ. 49.

69. Βρείτε τύπους λογικά ισοδύναμους με τις αρνήσεις των παρακάτω τύπων και στους οποίους το σύμβολο $\neg$ της άρνησης αναφέρεται μόνο στα σύμβολα κατηγορημάτων.

(α′) $\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$,

(β′) $\exists x P(x) \land \exists x Q(x)$,

(γ′) $\forall x \exists y\ R(x, y)$,

(δ′) $\exists x \forall y \forall z\ S(x, y, z)$,

(ε′) $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$,

(ϛ′) $\exists x\ (P(x) \land Q(x))$.

70. Με τη χρήση των νόμων του de Morgan, δείξτε ότι η άρνηση του τύπου

$$\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists m\forall n\ (m < n \to |a(n) - g| < \varepsilon))$$

είναι λογικά ισοδύναμη με τον τύπο:

$$\exists\varepsilon\ (\varepsilon > 0 \land \forall m\exists n(m < n \land \neg(|a(n) - g| < \varepsilon))).$$

71. Βρείτε τύπους λογικά ισοδύναμους με τους παρακάτω, στους οποίους εμφανίζονται ως λογικά σύμβολα

    (α′) μόνον τα $\neg$, $\land$, $\forall$, (β′) μόνον τα $\neg$, $\lor$, $\exists$

    (i) $\exists x\ (x < y \leftrightarrow x|s \lor x|t)$,

    (ii) $\mathbb{O} < x \land \exists y(x < y) \lor \forall x(z < y \land z < x)$.

72. Αποδείξτε ότι για κάθε δομή $\mathfrak{A}$ και τύπους φ, ψ:

    (α′) Αν $\mathfrak{A} \models \varphi$ και $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$, τότε $\mathfrak{A} \models \psi$.

    (β′) Αν $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$ και η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη στον φ, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi \to \forall x\psi$.

73. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες της σημασιολογικής συνέπειας:

    (α′) Αν φ είναι στοιχείο του T, τότε $T \models \varphi$.

    (β′) Αν $T \models \varphi$ και $T \subseteq T'$ (T υποσύνολο του T'), τότε $T' \models \varphi$.

    (γ′) T είναι αντιφατικό εάν και μόνον εάν για κάθε τύπο φ ισχύει $T \models \varphi$.

74. Αποδείξτε ότι

    (α′) $\varphi, \varphi \to \psi \models \psi$,

    (β′) $\varphi, \neg\varphi \models \psi$,

    (γ′) $\varphi, \psi \models \varphi \land \psi$,

    (δ′) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n$,

    (ε′) $\varphi \land \psi \models \varphi,\ \varphi \land \psi \models \psi$,

    (ϛ′) $\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n \models \varphi_i\ (i = 1, \ldots, n)$,

    (ζ′) $\varphi \models \forall x\varphi$,

    (η′) $\forall x\varphi \models \varphi$

75. Δείξτε ότι αν $\mathfrak{A} \models T$ και $T \models \varphi$, τότε $\mathfrak{A} \models \varphi$.

76. Δείξτε ότι ένα σύνολο τύπων T είναι σημασιολογικά αντιφατικό εάν και μόνον εάν δεν έχει πρότυπο.

77. Δείξτε ότι αν $\models \varphi \to \psi$, τότε $\varphi \models \psi$. Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει αν πάρουμε ως φ, ψ τους τύπους $x \neq \mathbb{O}$ και $\forall x(x \neq \mathbb{O})$ αντίστοιχα.

78. Δείξτε ότι αν T είναι σύνολο τύπων και ϑ πρόταση, τότε:

$$T \cup \{\neg\vartheta\} \text{ είναι αντιφατικό εάν και μόνον εάν } T \models \vartheta$$

Δείξτε ότι το παραπάνω δεν ισχύει αν στη θέση της πρότασης ϑ πάρουμε τον τύπο $x = \mathbb{O}$ και ως T το σύνολο $\{\exists x\ x = \mathbb{O}\}$ (ή το κενό σύνολο).

79. Ο συλλογισμός

$$\begin{array}{ll} \Upsilon\pi 1: & \text{Κάποιοι φοιτητές είναι έξυπνοι} \\ \Upsilon\pi 2: & \text{Ο Γιάννης είναι φοιτητής} \\ \hline \Sigma: & \text{Ο Γιάννης είναι έξυπνος} \end{array}$$

περιγράφει συμβολικά ως εξής: "$\{\exists x(P(x) \wedge Q(x)),\ P(c)\} \models Q(c)$.".

Είναι ορθός ο παραπάνω συλλογισμός; (δηλαδή ισχύει το

$\{\exists(P(x) \wedge Q(x)),\ P(c)\} \models Q(c);$).

Εξετάστε όμοια αν είναι ορθοί οι συλογισμοί:

(α′) $\begin{array}{l} \text{Όλοι οι ακέραιοι είναι ρητοί} \\ \text{Μερικοί πραγματικοί είναι ρητοί} \\ \hline \text{Όλοι οι ακέραιοι είναι πραγματικοί} \end{array}$

(β′) $\begin{array}{l} \text{Όλοι οι ακέραιοι είναι ρητοί} \\ \text{Μερικοί πραγματικοί είναι ακέραιοι} \\ \hline \text{Μερικοί πραγματικοί είναι ρητοί} \end{array}$

(γ′) $\begin{array}{l} \text{Κανένας φιλόσοφος δεν ξέρει Μαθηματικά} \\ \text{Κάποιοι ξέρουν Μαθηματικά} \\ \hline \text{Δεν είναι όλοι φιλόσοφοι} \end{array}$

(δ′) $\begin{array}{l} \text{Κάθε Λογικός είναι φορμαλιστής ή ιδεαλιστής} \\ \text{Δεν είναι όλοι οι Λογικοί φορμαλιστές} \\ \hline \text{Μερικοί Λογικοί είναι ιδεαλιστές.} \end{array}$

80. Αποδείξτε ότι

(α′) $\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \forall x(Q(x) \to R(x) \models \forall x(P(x) \to R(x)),$

(β′) $\forall x(P(x) \to Q(x))),\ \exists x\neg Q(x) \models \exists x\neg P(x),$

(γ′) $\forall x(P(x) \to Q(x),\ \forall x(P(x) \models \forall x Q(x)$

81. Έστω T σύνολο τύπων της γλώσσας $\mathcal{L}$, τέτοιο ώστε για κάθε πρόταση ϑ της $\mathcal{L}$: $T \models \vartheta$ ή $T \models \neg\vartheta$. Αποδείξτε ότι σε κάθε πρότυπο $\mathfrak{A}$ του T ισχύει:

Για κάθε πρόταση φ της $\mathcal{L}$

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ εάν και μόνον εάν } T \models \varphi.$$

82. Δείξτε ότι αν ϑ είναι πρόταση, ψ τύπος, T σύνολο τύπων, τότε

$$T,\, \vartheta \models \psi \text{ και } T,\, \neg\, \vartheta \models \psi \text{ εάν και μόνον εάν } T \models \psi.$$

83. Δείξτε ότι η συντακτική συνέπεια έχει τις ιδιότητες:

    (α′) Αν $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \varphi \to \psi$, τότε $T \vdash \psi$.
    (β′) Αν $T \vdash \varphi$, τότε $T \vdash \forall x \varphi$.
    (γ′) Αν $T \vdash \forall x \varphi$ και x αντικαταστάσιμη από τον όρο t στον φ, τότε $T \vdash \varphi(x/t)$.
    (δ′) $T \vdash \varphi$ εάν και μόνον εάν $T \vdash \overline{\varphi}$, όπου $\overline{\varphi}$ καθολική κλειστότητα του φ
    (ε′) Αν $T \vdash \varphi \to \psi$ και x δεν είναι ελεύθερη στον ψ, τότε $T \vdash \varphi \to \forall x \psi$.

84. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες ταυτολογίες του Προτασιακού Λογισμού και την ιδιότητα απόσπασης (83. (α′)) δείξτε ότι:

    (α′) Αν $T \vdash \varphi \to \chi$ και $T \vdash \chi \to \psi$, τότε $T \vdash \varphi \to \psi$.
    (β′) $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $T \vdash \varphi \to \psi$ και $T \vdash \psi \to \varphi$.
    (γ′) $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$
    (δ′) $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \psi$ τότε και μόνον τότε, όταν $T \vdash \varphi \wedge \psi$
    (ε′) $T \vdash \varphi \to \psi$ τότε και μόνον τότε όταν $T \vdash \neg\psi \to \neg\,\varphi$
    (ϛ′) Αν $T \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$ και $T \vdash \chi \leftrightarrow \psi$, τότε $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$
    (ζ′) Αν $T \vdash \varphi$, τότε για οποιονδήποτε τύπο ψ ισχύει $T \vdash \psi \to \varphi$
    (η′) $T \vdash \varphi$ εάν και μόνον εάν $T \vdash \neg\,\neg\,\varphi$

85. Δείξτε ότι αν $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, τότε $T \vdash \forall x \varphi \leftrightarrow \forall x \psi$.

86. Δείξτε ότι είναι τυπικά θεωρήματα οι νόμοι του Κατηγορηματικού Λογισμού.

87. Δείξτε ότι:

    (α′) Αν $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, τότε $T \vdash \exists x \varphi \leftrightarrow \exists x \psi$.
    (β′) Αν $T \vdash \varphi(x/t)$ και x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t στον τύπο φ, τότε $T \vdash \exists x \varphi$.

88. Δείξτε ότι $T, \varphi \vdash \psi$ εάν και μόνον εάν $T, \overline{\varphi} \vdash \psi$, όπου $\overline{\varphi}$ είναι η καθολική κλειστότητα του φ.

89. Δείξτε ότι αν $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ και $T \vdash \varphi_1, T \vdash \varphi_2, \ldots, T \vdash \varphi_n$, τότε $T \vdash \psi$ (Υποδ: Χρησιμοποιήστε την άσκηση 88 και το Θεώρημα Απαγωγής).

90. Δείξτε ότι κάθε μια από τις παρακάτω συνθήκες είναι ικανή και αναγκαία για να είναι συντακτικά αντιφατική μια θεωρία T:

    (α′) Για κάθε τύπο φ της γλώσσας $T \vdash \varphi$
    (β′) $T \vdash x_1 \neq x_1$
    (γ′) Υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ που είναι συντακτικά αντιφατικό.

91. Δείξτε ότι αν ϑ είναι πρόταση, τότε

$$T \vdash \vartheta \text{ εάν και μόνον εάν } T \cup \{\neg \vartheta\} \text{ είναι συντακτικά αντιφατικό }.$$

92. Δείξτε ότι αν ϑ είναι πρόταση, τότε

$$T, \vartheta \vdash \psi \text{ και } T, \neg\vartheta \vdash \psi \text{ εάν και μόνον εάν } T \vdash \psi.$$

93. Δείξτε ότι για οποιοσδήποτε όρους t, s, u ισχύει

    (α′) $\vdash t = t$

    (β′) $t = s \rightarrow s = t$

    (γ′) $\vdash t = s \wedge s = u \rightarrow t = u$

94. Δείξτε ότι τα λογικά αξιώματα (Α1)-(Α22) είναι λογικά αληθινοί τύποι του Κατηγορηματικού Λογισμού.

95. Αποδείξτε το Θεώρημα Συμπάγειας του Κατηγορηματικού Λογισμού (σελ. 56), χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Πληρότητας του Κατηγορηματικού Λογισμού.

96. Αποδείξτε το β′ Θεώρημα Πληρότητας με βάση το α′ Θεώρημα Πληρότητας και το Θεώρημα Συμπάγειας

    (Υποδ. Δείξτε πρώτα ότι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ εάν και μόνον εάν $\overline{\varphi_1} \wedge \overline{\varphi_2} \wedge \ldots \wedge \overline{\varphi_n} \models \psi$. Δείξτε το ίδιο για τη συντακτική συνέπεια. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Απαγωγής).