Εξετάσεις Σεπτεμβρίου στη Θεωρία Συνόλων
15 Σεπτεμβρίου, 2009

Ομαδα Α

Θέμα 1 (1+0,5 Μον).

1. Να δείξετε ότι $(\mathbb{N} \to \{0,1\}) =_c (0,1)$.
2. Έστω A ένα μη αριθμήσιμο σύνολο και έστω ότι υπάρχει $f : A \to B$, επί. Είναι και το B μη αριθμήσιμο;

Θέμα 2 (1 Μον). Να δείξετε ότι για όλα τα τα σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ ισχύει

$$A \subseteq B \quad \to (\bigcap B \subseteq \bigcap A) \wedge (\bigcup A \subseteq \bigcup B).$$

Θέμα 3 (1,5 Μον). Να δείξετε ότι για όλους τος πληθάριθμους κ, λ, μ

1. $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$.
2. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

Θέμα 4 (1 Μον). Έστω A άπειρο κατά *Dedekind* και $A =_c B$. Να δείξετε και B είναι άπειρο κατά *Dedekind*.

Ομαδα Β

Θέμα 5 (1 Μον). Σωστό ή Σωστό μόνο με αξίωμα επιλογής ή λάθος και γιατί:

1. Έστω A, B δύο καλά διατεταγμένα σύνολα. Αν $A =_c B$, αν και μόνο αν $A =_o B$.
2. Έστω A ένα σύνολο και $h(A)$ το αντίστοιχο σύνολο *Hartogs*. Τότε $A <_c h(A)$.
3. Έστω A και B δύο καλά διατεταγμένα σύνολα. Αν $A \not<_o B$, τότε $B \leq_o A$
4. Το αξίωμα εξαρτημένων επιλογών συνεπάγεται την Αρχή απαριθμητής επιλογής.

5. Κάθε άπειρο δέντρο, καλά διατεταγμένο, έχει τουλάχιστον ένα άπειρο κλαδί.

6. Κάθε γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι καλά διατάξιμο.

Θέμα 6 (1 Μον). Εξετάστε αν για κάθε μεταβατικό σύνολο A ισχύει ότι $A \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Θέμα 7 (1 Μον). Έστω Α και Β δύο σύνολα. Έστω Μ το σύνολο των μερικών συναρτήσεων από το Α στο Β, που είναι 1-1. Θεωρήστε τη διάταξη στο Μ να είναι η κλασσική μερική διάταξη στις μερικές συναρτήσεις. Να δείξετε ότι το σύνολο Μ είναι επαγωγικό σύνολο.

Θέμα 8 (2 Μον). Δείξτε ότι η κλάση των διατακτικών αριθμών δεν είναι σύνολο.

Από την **ομάδα Β** πρέπει να συγκεντρώσετε **τουλάχιστον 3 μονάδες**.

Καλή επιτυχία!