Ομάδα A

Άσκηση 1. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Να υπολογίσετε τον $B = A^6 + 2A^4 - A + I$ και τις ιδιοτιμές του B με χρήση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A και των ιδιοτιμών του A.

(1 μον.)

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι
$\varphi(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 1$. Άρα από το Θεώρημα $Cayley-Hamilton$ έχουμε ότι $\varphi(A) = 0$. Κάνουμε τη διαίρεση του B με το $A^2 - 5A + I$ και παίρνουμε

$$B = (A^2 - 5A + I)(A^4 + 5A^3 + 26A^2 + 125A + 559) + 2869A - 598I = 2869A - 598I.$$

Άρα
$$B = \begin{pmatrix} 5140 & -14345 \\ -2869 & 8009 \end{pmatrix}.$$
Υπενθύμιση: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$, δηλαδή είναι οι ακόλουθες: $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}, \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Άρα οι ιδιοτιμές του B είναι $\lambda_1^6 + 2\lambda_1^4 - \lambda_1 + 1, \lambda_2^6 + 2\lambda_2^4 - \lambda_2 + 1$. Και επειδή είναι και διαφορετικές, έπεται πως τις βρήκαμε όλες!

Άσκηση 2. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Να δείξετε ότι για κάθε $k \geq 3$ ισχύει $A^k = A^{k-2} + A^2 - I$.
- Να υπολογίσετε τον A^{2007}.

(2 μον.)

Λύση.

- Με επαγωγή στο $k \geq 3$ θα δείξουμε ότι ισχύει $A^k = A^{k-2} + A^2 - I$.

  Για $k = 3$ ισχύει διότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\varphi(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$.

Έστω ότι το δείξαμε για k. Θα το δείξουμε για $k+1$.

$A^{k+1} = A^k A = (A^{k-2} + A^2 - I)A = A^{k-1} + A^3 - A = A^{k-1} + (A^2 + A - I) - A = A^{k-1} + A^2 - I$.

Άρα ισχύει για κάθε $k \geq 3$.

- Για να υπολογίσουμε τον A^{2007}, θα χρησιμοποιήσουμε τη προηγούμενη αναδρομική σχέση.

  $A^{2007} = A^{2005} + A^2 - I$

  $A^{2005} = A^{2003} + A^2 - I$

  $\vdots$

  $A^3 = A + A^2 - I$

  Έτσι $A^{2007} = A^3 + \frac{2007-3}{2}(A^2 - I) = A^2 + A - I + 1002(A^2 - I) = 1003(A^2 - I) + A$,

  δηλαδή $A^{2007} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1004 & 0 & 1 \\ 1003 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  Ένας άλλος τρόπος ήταν να πάμε με διγωνοποιήση, αφού πρώτα ελέγξουμε ότι ο Α είναι διαγωνοποιήσιμος. Εδώ δυστυχώς **δεν είναι**, οπότε λύνεται μόνο με αναδρομή!!

Άσκηση 3. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Να εξετάσετε αν ο A τριγωνοποιείται. Αν ναι, να βρείτε τους αντίστοιχους πίνακες U, T, με T να είναι τριγωνικός και $A = UTU^{-1}$.

(1 μον.)

Λύση. Ο πίνακας Α γράφεται σε μορφή

$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix}$. Όπου οι πίνακες A_1, A_2 είναι 2 επί 2, οπότε εύκολα βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του καθενός. Δηλαδή έχουμε συνολικά τέσσερις ιδιοτιμές του Α:

$\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{21}}{2}, \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{21}}{2}, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2$. Βρήκαμε όλες τις ιδιοτιμές, άρα ο Α τριγωνοποιείται. Επειδή όμως Α είναι και 4 επί 4, και βρήκαμε τέσσερις ιδιοτιμές του, έπεται πως είναι και διαγωνοποιήσιμος. Άρα ο Τ στην ουσία εκτός από άνω τριγωνικός, είναι και διαγώνιος! Δηλαδή

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Ενώ ο πίνακας U αποτελείται από αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Άσκηση 4. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- Είναι ο A αντιστρέψιμος;
- Να εξετάσετε αν ο A διαγωνοποιείται. Αν ναι, να βρείτε τους αντίστοιχους πίνακες P, Δ, με Δ να είναι διαγώνιος και $A = P\Delta P^{-1}$.

Υπόδειξη: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού, οπότε έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα. Με μελέτη του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ως συνάρτηση, δηλαδή πόσες φορές αλλάζει πρόσημο, να εξετάσετε αν τελικά έχει τρεις ρίζες ή μόνο μία. Αν έχει τρεις τότε διαγωνοποιείται, αλλιώς δεν διαγωνοποιείται. (2 μον.)

Λύση.

- Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

  $\varphi(\lambda) = det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 79$. Άρα η ορίζουσα του A δεν είναι μηδέν, για την ακρίβεια είναι 79, συνεπώς είναι αντιστρέψιμος.

- Δοκιμάζοντας τους διαιρέτες του σταθερού όρου, βλέπουμε πως δεν έχουμε ακέραιες ρίζες. Ξέρουμε όμως έχει τουλάχιστον μια πραγματική. Για να βρούμε το πλήθος των ριζών έχουμε δύο τρόπους.

  Πρώτος τρόπος: βρίσκουμε τη παράγωγο $(-3\lambda^2 + 18\lambda - 23)$ και τις ρίζες της $(\frac{-18\pm\sqrt{48}}{-6})$. Αυτό σημαίνει πως έχει δύο ακρότατα. Αντικαθιστούμε αυτές τις δύο τιμές στο χαρακτηριστικό μας πολυώνυμο και διαπιστώνουμε ότι και οι δύο τιμές είναι θετικές. Άρα το χαρακτηριστικό μας πολυώνυμο έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Οπότε δεν διαγωνοποιείται ο A. (Ούτε καν τριγωνοποιείται!)

Δεύτερος τρόπος: Οι ρίζες του $-\lambda^3+9\lambda^2-23\lambda+79$ είναι ίδιες με τις ρίζες του $\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-79$. Μετατρέπουμε το τελευταίο πολυώνυμο σε μορφή χωρίς λ^2, σύμφωνα με το βοηθητικό αρχείο, δηλαδή σε $\lambda^3-4\lambda-202$. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $D=-4(-4)^3-27(-202)^2$ και έχουμε ότι $D<0$. Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Οπότε δεν διαγωνοποιείται ο A.

Άσκηση 5. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A, όπου

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -5\\ 3 & 7 & -15\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}. \qquad \text{(1 μον.)}$$

Λύση.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$\varphi(\lambda)=det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^2(3-\lambda)$. Τα πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα είναι δύο:

$(1-\lambda)^2(3-\lambda)$ και $(1-\lambda)(3-\lambda)$. Εξετάζουμε πρώτα αν $(I-A)(3I-A)=0$. Πράγματι κάνοντας τις πράξεις διαπιστώνουμε ότι $(I-A)(3I-A)=0$. Άρα το ελάχιστο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $(1-\lambda)(3-\lambda)$.

Άσκηση 6. Εξετάστε αν ορίζουν οι παρακάτω απεικονίσεις εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$

- $<(u_1,u_2),(v_1,v_2)>=u_1v_1+u_2v_1+u_1v_2-u_2v_2$
- $<(u_1,u_2),(v_1,v_2)>=u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2$

(2 μον.)

Λύση.

- Ξέρουμε ότι σε ένα εσωτερικό γινόμενο πρέπει να ισχύει

$$<(u_1,u_2),(u_1,u_2))>\geq 0.$$

Εδώ όμως $<(0,1),(0,1))>=-1<0$. Κατά συνέπεια δεν είναι εσωτερικό γινόμενο.

- Ξέρουμε ότι σε ένα εσωτερικό γινόμενο πρέπει να ισχύει

$$< a(u_1, u_2), (v_1, v_2) >= a < (u_1, u_2), (v_1, v_2) > .$$

  Εδώ όμως

  $< 2(u_1, u_2), (v_1, v_2) >= 4 < (u_1, u_2), (v_1, v_2) >\neq 2 < (u_1, u_2), (v_1, v_2) >$
  Κατά συνέπεια δεν είναι εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 7. Δίνεται η βάση $B = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, -1, 2)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Να μετατραπεί σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(1 μον.)

Λύση. Θέτουμε $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (1, -1, 2)$.

Υπολογίζουμε πρώτα τα e'_1, e'_2, e'_3 σύμφωνα με τον τύπο στις σημειώσεις. Δηλαδή

$e'_1 = v_1 = (1, 1, 0)$

$e'_2 = v_2 + \frac{1}{2}e'_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

$e'_3 = v_3 - \frac{1}{2}e'_1 - \frac{1}{2}e'_2 = (1, -1, 2) - 0(1, 1, 0) - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{3}(4, -4, 4)$.

Και τώρα μας μένει να κάνουμε τα e'_1, e'_2, e'_3 μέτρου 1, δηλαδή η ζητούμενη ορθοκανονική βάση είναι $\frac{e'_1}{||e'_1||}, \frac{e'_2}{||e'_2||}, \frac{e'_3}{||e'_3||}$.

Άσκηση 8. Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του $\mathbb{C}^2$ που να είναι κάθετα στο διάνυσμα $(1 - i, 1 + i)$ ως προς το κανονικό γινόμενο του $\mathbb{C}^2$.

(1 μον.)

Λύση.

Ζητάμε όλα τα $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$< (a_1 + a_2 i, b_1 + b_2 i), (1 - i, 1 + i) >= 0.$$

Μιας το εσωτερικό γινόμενο είναι το κανονικό, έπεται πως

$$(a_1 + a_2 i)\overline{(1 - i)} + (b_1 + b_2 i)\overline{(1 + i)} = 0$$

Αυτό μας δίνει το σύστημα

$a_1 + b_1 - a_2 + b_2 = 0$

$a_2 + a_1 + b_2 - b_1 = 0$

Και αυτό με τη σειρά δίνει πως πρέπει $b_1 = a_2$ και $b_2 = -a_1$. Έτσι τα ζητούμενα διανύσματα είναι $(a_1 + a_2 i, a_2 - a_1 i)$, με $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.