Ασκήσεις για το σπίτι 1

Παράδοση 30-11-2007.

Μετά από την αναφερόμενη μέρα δεν θα βαθμολογούνται οι ασκήσεις.

Άσκηση 1. Να εξετασθεί αν το σύνολο $W = \{(x, y, z) : x > y > z\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. (1 μον.)

Λύση. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ είναι το $(0, 0, 0)$. Κάθε διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα. Το W δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διότι $(0, 0, 0) \notin W$.

Άσκηση 2. Να εξετασθεί αν το σύνολο των λύσεων του συστήματος

$2x - 7y - 5z = 0$

$x - 2y - 3z = 1$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. (1 μον.)

Λύση. Εύκολα ελέγχουμε ότι το $(0, 0, 0)$ δεν είναι λύση του συστήματος. Άρα το σύνολο των λύσεων του δοσμένου συστήματος δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3. Για ποια τιμή του k το διάνυσμα $(1, -2, k)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $(1, 0, -2)$ και $(3, -1, -5)$;

(2 μον.)

Λύση. Ένας τρόπος είναι να βρούμε k ώστε η εξίσωση

$$\lambda_1(1, -2, k) + \lambda_2(1, 0, -2) + \lambda_3(3, -1, -5) = (0, 0, 0)$$

να έχει και μη μηδενική λύση. Αυτό συμβαίνει ανν η ορίζουσα του πίνακα συντελεστών του αντίστοιχου συστήματος είναι μηδέν:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} = -k = 0.$$

Επομένως, για $k = 0$ τα τρία διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, οπότε το $(1, -2, k)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $(1, 0, -2)$ και $(3, -1, -5)$.

Άλλος τρόπος είναι με τον ορισμό. Ψάχνουμε αν υπάρχουν λ_1, λ_2 τέτοια ώστε:

$$(1, -2, k) = \lambda_1(1, 0, -2) + \lambda_2(3, -1, -5)$$

Λύνοντας το σύστημα

$1 = \lambda_1 + 3\lambda_2$

$-2 = -\lambda_2$

$k = -2\lambda_1 - 5\lambda_2$,

παίρνουμε $k = 0$.

Άσκηση 4. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $(1,2,3)$, $(0,1,2)$ και $(0,0,1)$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. (4 μον.)

Λύση. Ξέρουμε ότι $dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Επομένως, για να είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ τα διανύσματα $(1,2,3), (0,1,2)$ και $(0,0,1)$, αρκεί να δείξουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, λύνοντας το σύστημα

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,1,2) + \lambda_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, βλέπουμε ότι η μόνη λύση είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Άσκηση 5. Το σύνολο $A = \{x+1, x^2+1, x^2+5\}$ παράγει το $\mathbb{R}_2[x]$; Υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του A που να είναι βάση του $\mathbb{R}_2[x]$;

(2 μον.)

Λύση. Ένας τρόπος για να δούμε αν το A παράγει το $\mathbb{R}_2[x]$ είναι μέσω του ορισμού, δηλ. για τυχαίο πολυώνυμο $\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{R}_2[x]$, θα ελέγξουμε αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τέτοια ώστε

$$\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = \lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2+1) + \lambda_3(x^2+5).$$

Ένας άλλος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι το A έχει τόσα στοιχεία όσο είναι η διάσταση του $\mathbb{R}_2[x]$. Άρα, στην ουσία το A παράγει το $\mathbb{R}_2[x]$ ανν τα στοιχεία του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν το A είχε περισσότερα στοιχεία, θα έπρεπε να πάμε με τον πρώτο τρόπο. Αν το A είχε λιγότερα στοιχεία, τότε η απάντηση είναι κατευθείαν όχι.

Λύνουμε λοιπόν ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ το σύστημα

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2+1) + \lambda_3(x^2+5) = 0x^2 + 0x + 0,$$

οπότε παίρνουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Βλέπουμε ότι το A είναι βάση του $\mathbb{R}_2[x]$, άρα παράγει το $\mathbb{R}_2[x]$.

Άσκηση 6. Δίνεται ο υπόχωρος $U = \{(x,y,z) : x = 3y\}$ του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί υπόχωρος W ώστε $U + W = \mathbb{R}^3$ και το άθροισμα να είναι ευθύ.
Λύση. Πρώτα βρίσκουμε τη βάση του U, η οποία είναι $\{(3,1,0),(0,0,1)\}$, δηλ. $dim(U) = 2$, οπότε $dim(W) = 1$. Οποιοδήποτε λοιπόν διάνυσμα που συμπληρώνει τη βάση του U σε βάση του $\mathbb{R}^3$, αποτελεί τη ζητούμενη βάση. Για παράδειγμα, το $(0,1,0)$ είναι ένα τέτοιο διάνυσμα. Άρα, ο $W =< (0,1,0) >$ είναι ένας υπόχωρος τέτοιος ώστε $U + W = \mathbb{R}^3$ και το άθροισμα να είναι ευθύ.
(2 μον.)

Άσκηση 7. Δίνεται η απεικόνιση $L(x, y, z) = (2x - 3y, y + 2z, z - y, x + y)$ από $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}^4$.

1) Να δείξετε πως είναι γραμμική.

2) Να βρεθούν $KerL$, ImL και οι βάσεις τους.

3) Εξετάστε αν η L είναι 1-1.

4) Εξετάστε αν η L είναι επί. (3 μον.)

Λύση.

1) Το δείχνουμε με τον ορισμό, δηλ. ότι για κάθε $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$L((x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)) = L(x_1, y_1, z_1) + \lambda L(x_2, y_2, z_2).$$

2) Για να βρούμε το $KerL$, λύνουμε το σύστημα

$2x - 3y = 0$
$y + 2z = 0$
$z - y = 0$
$x + y = 0$,

που δίνει μοναδική λύση $x = y = z = 0$. Άρα, $KerL = \{(0, 0, 0)\}$, δηλ. έχει διάσταση 0 και άρα η βάση του είναι το $\emptyset$. Έτσι, ξέρουμε ότι $dim(ImL) = dim(\mathbb{R}^3) - 0 = 3$. Για να βρούμε το ImL, αρκεί να προσδιορίσουμε τη βάση του. Έχουμε ότι

$$(2x - 3y, y + 2z, z - y, x + y) = x(2, 0, 0, 1) + y(-3, 1, -1, 1) + z(0, 2, 1, 0).$$

Άρα το (ImL) παράγεται από τα $(2, 0, 0, 1), (-3, 1, -1, 1), (0, 2, 1, 0)$. Δείξαμε πριν πως $dim(ImL) = 3$, οπότε αυτά τα τρία είναι και γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή αποτελούν μια βάση του (ImL).

3) L είναι 1-1 διότι $KerL = \{(0, 0, 0)\}$.

4) L δεν είναι επί διότι $dim(ImL) = 3 < dim(\mathbb{R}^3) = 4$.

Άσκηση 8. Να βρεθεί μια βάση του χώρου πηλίκου $\mathbb{R}_6[x]/\mathbb{R}_3[x]$. (2 μον.)

Λύση. Πρώτα βρίσκουμε μια βάση του $\mathbb{R}_3[x]$, για παράδειγμα τη κανονική: $\{1, x, x^2, x^3\}$. Επεκτείνουμε αυτή τη βάση σε μια του $\mathbb{R}_6[x]$. Για παράδειγμα σε $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$. Άρα η ζητούμενη βάση του χώρου πηλίκου είναι $\{x^4 + \mathbb{R}_3[x], x^5 + \mathbb{R}_3[x], x^6 + \mathbb{R}_3[x]\}$.

Άσκηση 9. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L(x, y) = (y + 2x, x + y, x - y)$ από $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^3$. Να βρείτε τον πίνακα $A_L(B_1, B_2)$, όπου B_1 κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και $B_2 = \{0, 1, 1), (2, 3, 0), (1, -1, 3)\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$. (1 μον.)

Λύση. Υπολογίζουμε τα διανύσματα $L(1,0)$ και $L(0,1)$ και τα γράφουμε ως γραμμικούς συνδυασμούς των $(0,1,1),(2,3,0)$ και $(1,-1,3)$. Ο ζητούμενος πίνακας είναι των συντελεστών που βρίσκουμε, δηλ.:

$$A_L(B_1,B_2) = \begin{pmatrix} \frac{-7}{11} & \frac{-8}{11} \\ \frac{8}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix}.$$