Εξετάσεις στο μάθημα
M113 Γραμμική Άλγεβρα I
28-01-2008

Ομάδα A

Θέμα 1.

Θεωρούμε τον εξής υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|2x_1 = x_3, x_2 = x_4\}$$

- Να βρείτε μια βάση του V.
- Να βρείτε έναν υπόχωρο W ώστε $V + W = \mathbb{R}^4$ και το άθροισμα να είναι ευθύ.

(2 μον.)

Απάντηση.

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|2x_1 = x_3, x_2 = x_4\} = \{(x_1, x_2, 2x_1, x_2)|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Οπότε $V =< (1, 0, 2, 0), (0, 1, 0, 1) >$, δηλαδή παράγεται από τα διανύσματα $(1, 0, 2, 0), (0, 1, 0, 1)$. Εξετάζουμε αν είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με

$$\lambda_1(1, 0, 2, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Τότε η πρώτη εξίσωση δίνει $\lambda_1 = 0$, και η δεύτερη $\lambda_2 = 0$. Άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του V. Αυτό μας λέει ότι η διάσταση του V είναι 2.

Αν πάρουμε τυχαίο W ώστε $dimW = 2$ και $V + W = \mathbb{R}^4$, τότε έχουμε ότι $dimV \cap W = dim(V + W) - dimV - dimW = 4 - 2 - 2 = 0$, που σημαίνει ότι $V \cap W = \{0\}$. Έτσι αρκεί να διαλέξουμε τυχαίο W που συμπληρώνει τον V και έχει διάσταση 2. Ας πάρουμε για παράδειγμα $W = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$. Ελέγχουμε αν είναι καλή η επιλογή μας. Από

$$\lambda_1(1, 0, 2, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, 1) + \lambda_3(1, 0, 0, 0) + \lambda_4(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

Παίρνουμε σύστημα $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_4 = 0$, $2\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 0$. Αυτό το σύστημα έχει μοναδική λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Δηλαδή η επιλογή του W είναι καλή.

□

Θέμα 2. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση

$$L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,$$

με $KerL = \{x_1, x_2, x_3, x_4 | x_1 = 2x_2 = 3x_3 = 4x_4\}$.

(1 μον.)

Απάντηση. Το μόνο που μας δένεται είναι η περιγραφή του $KerL$ και οι διαστάσεις των δύο χώρων. Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε τη διάσταση του $KerL$. Έχουμε ότι $KerL = \{x_1, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}x_1, \frac{1}{4}x_1 | x_1 \in \mathbb{R}\}$. Άρα $KerL = \langle(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})\rangle$. Και επειδή το διάνυσμα είναι μη μηδενικό, έπεται πως από $\lambda(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}) = 0$, συνεπάγεται $\lambda = 0$, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα βάση του $KerL$. Έτσι $dimKerL = 1$. Από το θεώρημα γνωρίζουμε ότι $dimKerL + dimImL = dim\mathbb{R}^4$. Άρα παίρνουμε ότι αναγκαστικά $dimImL = 3$. Όμως ImL είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, που σημαίνει η διάστασή του πρέπει να είναι το πολύ 2. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο! Άρα δεν υπάρχει τέτοια γραμμική απεικόνιση. □

Θέμα 3. Σωστό ή Λάθος και γιατί;

- Δίνεται το σύνολο $S = \{x^2 + 1, 2x, x^3 + 2x + 1\}$. Το S είναι βάση του $\mathbb{R}_3[x]$.
- Δίνεται πίνακας A διάστασης 3 με χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$$(x - 2)(x^2 + 2x + 3).$$
Ο A διαγωνοποιείται στο $\mathbb{R}$.
- Δίνεται πίνακας A διάστασης 4 με χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$$(x - 2)^2(x + 3)^2.$$
Τότε υπάρχουν ακριβώς τρία πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα για τον Α.
- Όλοι οι πίνακες τριγωνοποιούνται στο $\mathbb{C}$.

(3 μον.)

Απάντηση. Λάθος-Λάθος-Λάθος-Σωστό. Αναλυτικά,

- Το σύνολο $S = \{x^2 + 1, 2x, x^3 + 2x + 1\}$ έχει τρία στοιχεία. Εμείς γνωρίζουμε ότι η διάσταση του $\mathbb{R}_3[x]$ είναι 4, διότι μια βάση του για παράδειγμα είναι $\{1, x, x^2, x^3\}$ και ξέρουμε ότι όλες οι βάσεις έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Άρα το S δεν μπορεί να είναι μια βάση του $\mathbb{R}_3[x]$.

- Εξετάζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(x-2)(x^2+2x+3)$. Έχουμε ότι η διακρίνουσα του $x^2+2x+3=0$ είναι αρνητική, (Δ=-8), άρα το το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A δεν έχει όλες τις ρίζες στο $\mathbb{R}$, οπότε ο A δεν διαγωνοποιείται στο $\mathbb{R}$.

- Τα πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα για τον Α είναι τα εξής:

  $$(x-2)^2(x+3)^2, (x-2)^2(x+3), (x-2)(x+3)^2, (x-2)(x+3).$$

  Δηλαδή είναι τέσσερα και όχι τρία πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα για τον Α.

- Για να τριγωνοποιείται ένας πίνακας πρέπει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο να αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων, όχι κατάνάγκη διαφορετικών. Ή πιο απλά, πρέπει να υπάρχουν όλες οι ρίζες του. Από το Θεμελειώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, κάθε πολυώνυμο επί του $\mathbb{C}$ αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Άρα πράγματι, όλοι οι πίνακες τριγωνοποιούνται στο $\mathbb{C}$.

$\square$

Θέμα 4. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Να υπολογίσετε με χρήση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

- Τον πίνακα $B = A^4 - 2A + I$ και τις ιδιοτιμές του B.
- Τον πίνακα A^{-1} και τις ιδιοτιμές του A^{-1}.

(2 μον.)

Απάντηση. Οι ιδιοτιμές του A είναι 1 και 2. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι x^2-3x+2.

- Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα $B = A^4 - 2A + I$ είναι

  $$1^4 - 2 \cdot 1 + 1 = 0,$$

  $$2^4 - 2 \cdot 2 + 1 = 13.$$

Για να βρούμε τον B, μέσω του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A, θα διαιρέσουμε το $x^4 - 2x + 1$ με $x^2 - 3x + 2$, διότι ξέρουμε από το Θεώρημα $Caley - Hamilton$ ότι $A^2 - 3A + 2I = 0$. Δηλαδή έχουμε

$$x^4 - 2x + 1 = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 7) + 13x - 13.$$

Συνεπώς $B = 13A - 13I = \begin{pmatrix} 0 & -39 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$.

Αν κάποιος θέλει να κάνει **(μερική) επαλήθευση με μια ματιά**, κοιτάζει τις ιδιοτιμές που βρήκαμε στην αρχή και τον πίνακα B. Επειδή ο B είναι άνω τριγωνικός, οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία! Εάν δεν συμφωνούσαν, τότε κάπου θα είχαμε κάνει λάθος στις πράξεις. Επίσης εφόσον κάνουμε πράξεις με άνω τριγωνικους, το αποτέλεσμα είναι και αυτό άνω τριγωνικός! Δηλαδή αν βρίσκαμε τον B μη άνω τριγωνικό, πάλι θα είχαμε κάνει κάπου λάθος στις πράξεις!

- Ο πίνακας A έχει ορίζουσα 2, δηλαδή μη μηδενική, άρα είναι αντιστρέψιμος. Οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι

$$(1)^{-1} = 1,$$

$$(2)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Για να βρούμε τον πίνακα A^{-1} πολλαπλασιάζουμε το $A^2 - 3A + 2I = 0$ με A^{-1} και λύνουμε ως προς A^{-1}. Οπότε $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Η μερική επαλήθευση που ανέφερα πριν ισχύει και για τον A^{-1}.

□

Θέμα 5.

- Είναι τα διανύσματα $(i, 2+i)$ και $(3, 1-i)$ κάθετα στο $(\mathbb{C}^2, \langle , \rangle)$; Όπου το $\langle , \rangle$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{C}$.

- Ορίζει η συνάρτηση

$$(v, w) = 2v_1w_2 + 3v_2w_1$$

εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$; Όπου $v = (v_1, v_2)$ και $w = (w_1, w_2)$.

(2 μον.)

Απάντηση. Το κανονικό εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{C}$ παίρνει τα **συζυγή** του δεύτερου διανύσματος, αλλιώς δεν είναι καν εσωτερικό γινόμενο!

- $\langle (i, 2+i), (3, 1-i) \rangle = i \cdot \overline{3} + (2+i)(\overline{1-i}) = 6i + 1 \neq 0$. Άρα αυτά τα δύο διανύσματα δεν είναι κάθετα στο $(\mathbb{C}^2, \langle , \rangle)$.

- Για να δείξουμε πως τελικά η δοσμένη συνάρτηση δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο, **πρέπει** να δώσουμε ένα **αντιπαράδειγμα**, στο οποίο φαίνεται πως κάποια ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου δεν ισχύει. Ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα είναι

  $$((0,1),(0,1)) = (0,0), \ \text{ με } (0,1) \neq (0,0).$$

  Αυτό αντιβαίνει στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου που λέει πως $(v, v) = (0,0)$ αν και μόνο αν $v = (0,0)$.

  Συνεπώς η δοσμένη συνάρτηση δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$.

$\square$