Εξετάσεις Ιουνίου στη Τροπική Λογική
25 Ιουνίου, 2008

Θέμα 1 (1 Μον). Να βρείτε τον τελικό τύπο εφαρμόζοντας τους κανόνες δυϊσμού στον $((\mathbb{P}_0 \wedge \Box\mathbb{P}_1) \vee \neg\mathbb{P}_1^*$.

Λύση. $((\mathbb{P}_0 \wedge \Box\mathbb{P}_1) \vee \neg\mathbb{P}_1)^* = ((\mathbb{P}_0 \wedge \Box\mathbb{P}_1)^* \wedge (\neg\mathbb{P}_1)^* =$
$((\mathbb{P}_0)^* \vee (\Box\mathbb{P}_1)^*) \wedge (\neg\mathbb{P}_1)^* = (\neg\mathbb{P}_0 \vee \Diamond(\mathbb{P}_1)^*) \wedge (\neg\mathbb{P}_1)^* = (\neg\mathbb{P}_0 \vee \Diamond\neg\mathbb{P}_1) \wedge \neg\neg\mathbb{P}_1$

Θέμα 2 (1,5 Μον). Να δείξετε ότι

$$||A||^{\mathcal{M}} = ||B||^{\mathcal{M}} \text{ αν και μόνο αν } \models_{\mathcal{M}} A \leftrightarrow B,$$

όπου $||A||^{\mathcal{M}} = \{a \in \mathcal{M} : \models_a^{\mathcal{M}} A\}$.

Λύση. Έστω $||A||^{\mathcal{M}} = ||B||^{\mathcal{M}}$. Ας υποθέσουμε ότι $\models_a^{\mathcal{M}} A$, τότε λόγω της ισότητας, έπεται πως $\models_a^{\mathcal{M}} B$. Παρομοίως αν $\models_a^{\mathcal{M}} B$, τότε λόγω ισότητας $\models_a^{\mathcal{M}} A$. Άρα από τον ορισμό της διπλής συνεπαγωγής, έχουμε ότι $\models_{\mathcal{M}} A \leftrightarrow B$. Αντίστροφα, έστω $\models_{\mathcal{M}} A \leftrightarrow B$. Τότε $a \in ||A||^{\mathcal{M}}$ αν και μόνο αν $\models_a^{\mathcal{M}} A$ αν και μόνο αν (λόγω διπλής συνεπαγωγής) $\models_a^{\mathcal{M}} B$ αν και μόνο αν $a \in ||B||^{\mathcal{M}}$. Άρα $||A||^{\mathcal{M}} = ||B||^{\mathcal{M}}$.

Θέμα 3 (1,5 Μον). Δίνεται το εξής πλαίσιο $\mathcal{M}$:
$W = \{a_0, a_1, a_2\}$, $E = \{< a_2, a_1 >, < a_0, a_2 >, < a_1, a_1 >\}$, $P_0 = \{a_0\}$, $P_1 = \{a_0, a_1, a_2\}$. Εξετάστε αν ισχύουν

1. $\mathcal{M} \models_{a_0} \Box\mathbb{P}_0$
2. $\mathcal{M} \models_{a_1} \Diamond\mathbb{P}_0 \to \Diamond\mathbb{P}_1$
3. $\mathcal{M} \models_{a_2} \Box\mathbb{P}_1 \to \Diamond\mathbb{P}_1$
4. $\mathcal{M} \models_{a_1} \mathbb{P}_0 \leftrightarrow \Diamond\mathbb{P}_0$

Λύση.

1. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{M} \not\models_{a_2} \mathbb{P}_0$ και $< a_0, a_2 > \in E$, άρα $\mathcal{M} \not\models_{a_0} \Box\mathbb{P}_0$.
2. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{M} \not\models_{a_1} \Diamond\mathbb{P}_0$, οπότε $\mathcal{M} \models_{a_1} \Diamond\mathbb{P}_0 \to \Diamond\mathbb{P}_1$.

3. Έχουμε ότι $\mathcal{M} \models_{a_2} \Box\mathbb{P}_1$ και $\mathcal{M} \models_{a_2} \Diamond\mathbb{P}_1$, άρα $\mathcal{M} \models_{a_2} \Box\mathbb{P}_1 \to \Diamond\mathbb{P}_1$.

4. Έχουμε ότι $\mathcal{M} \not\models_{a_1} \mathbb{P}_0$ και $\mathcal{M} \not\models_{a_1} \Diamond\mathbb{P}_0$, άρα $\mathcal{M} \models_{a_1} \mathbb{P}_0 \leftrightarrow \Diamond\mathbb{P}_0$.

Θέμα 4 (0,5+1 Μον)**.**

1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της πληρότητας για το σύστημα $B + D$.

2. Σωστό ή λάθος και γιατί ‘ Για να δείξουμε ότι $\vdash_T \varphi$ αρκεί να δείξουμε ότι η πρόταση φ αληθεύει σε κάθε σειριακό πλαίσιο. ’

Λύση.

1. Μια πρόταση A είναι ένα τυπικό θεώρημα στο σύστημα $B + D$ (δηλαδή $\vdash^{B+D} A$) αν και μόνο αν A αληθεύει σε κάθε συμμετρικό, σειριακό πλαίσιο.

2. Είναι λάθος. Για παράδειγμα αν πάρουμε για και φ να είναι το στιγμιότυπο του αξιώματος T, τότε προφανώς $\vdash_T \Box\mathbb{P}_0 \to \mathbb{P}_0$, αλλά αυτό δεν αληθεύει στο ακόλουθο σειριακό πλαίσιο: $\mathcal{M}$:
$W = \{a_0, a_1\}$, $E = \{< a_0, a_1 >\}$, $P_0 = \{a_1\}$.

Θέμα 5 (2 Μον)**.** Σωστό ή λάθος και γιατί

1. $\Box A \to \Box\Box A$ ισχύει σε κάθε μεταβατικό πλαίσιο.

2. $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ ισχύει σε κάθε ευκλείδειο πλαίσιο.

3. $\Box(\Box A \to A)$ ισχύει σε κάθε σειριακό πλαίσιο.

Λύση.

1. $\Box A \to \Box\Box A$ πράγματι ισχύει σε κάθε μεταβατικό πλαίσιο, διότι αν $\mathcal{M} \models_{a_1} \Box A$, τότε $\mathcal{M} \models_{a_2} A$ για κάθε a_2 με $< a_1, a_2 \in E >$. Λόγω μεταβατικότητας, $\mathcal{M} \models_{a_3} A$ για κάθε a_3 με $< a_2, a_3 \in E >$. Άρα $\mathcal{M} \models_{a_1} \Box\Box A$.

2. Η πρόταση $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ δεν ισχύει σε κάθε πλαίσιο που ικανοποιεί τη σχέση που δόθηκε στο τυπολόγιο, δηλαδή τη

$$\forall a, b, c \in W \quad (b, a), (c, a) \in E \Rightarrow (b, c) \in E.$$

Για παράδειγμα $\Diamond\mathbb{P}_0 \to \Box\Diamond\mathbb{P}_0$ δεν ισχύει στο $\mathcal{M}$:
$W = \{a_0, a_1, a_2\}$, $E = \{< a_0, a_1 >, < a_0, a_2 >\}$, $P_0 = \{a_1\}$.

Όμως ισχύει σε κάθε ευκλείδειο πλαίσιο, διότι η ευκλείδεια σχέση είναι

$$\forall a, b, c \in W \quad (a, b), (a, c) \in E \Rightarrow (b, c) \in E.$$

Όποιος έγγραφε ένα από τα παραπάνω, θεωρήθηκε ως σωστή απάντηση.

3. Η πρόταση $\Box(\Box A \to A)$ δεν ισχύει σε κάθε σειριακό πλαίσιο. Για παράδειγμα $\Box(\Box\mathbb{P}_0 \to \mathbb{P}_0)$ δεν ισχύει στο $\mathcal{M}$:
$W = \{a_0, a_1\}$, $E = \{< a_0, a_1 >, < a_1, a_1 >\}$, $P_0 = \{a_1\}$.

Θέμα 6 (1 Μον)**.** Να δείξετε ότι το σύστημα $K+5$ είναι αποφασίσιμο γράφοντας με σαφήνεια τους ισχυρισμούς σας.

Λύση. Το σύστημα αυτό είναι πεπερασμένα αξιωματικοποίησιμο και έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων μοντέλων. Για λεπτομέρειες βλέπε τη σημειώσεις του μαθήματος.

Θέμα 7 (2,5 Μον)**.** Να δείξετε ότι το σύστημα $K + B$ είναι έγκυρο, δίνοντας πλήρης δικαιολόγηση.

Λύση. Ορίζομε μια συνάρτηση
$f : \{A : \text{A τύπος της τροπικής λογικής}\} \to \{A : \text{A τύπος της κλασσικής λογικής}\}$.
με $f(\mathbb{P}_n) = \mathbb{P}_n$, $f(\neg A) = \neg f(A)$, $f(A \vee B) = f(A) \vee f(B)$, $f(\Box A) = f(A)$.
Δείχνουμε ότι μια τυπική απόδειξη της αντίφασης στο σύστημα $K + B$ δίνει μια τυπική απόδειξη αντίφασης στη κλασσική λογική. Άτοπο, διότι το κλασσικό σύστημα της προτασιακής λογικής είναι έκγυρο. Άρα και το $K+B$ είναι έγκυρο. Για λεπτομέρειες βλέπε τη σημειώσεις του μαθήματος.