1.12 ΠΡΟΒΟΛΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Εξέχουσα θέση εντός τής κλάσεως των παραδειγμάτων συνεκτικών συμπαγών τοπολογικών πολυπτυγμάτων *οιασδήποτε διαστάσεως* κατέχουν οι λεγόμενοι *προβολικοί χώροι*. Έστω $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ή το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Θέτουμε

$$d := \begin{cases} 1, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ 2, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \end{cases} \tag{1.8}$$

θεωρούμε το (υποκείμενο σύνολο τού $\mathbb{K}$) ως το $\mathbb{R}^d$ και το εφοδιάζουμε με τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία. Ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος

$$\mathbb{K}^{n+1} = \underbrace{\mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}}_{n+1 \text{ φορές}} \ (n \in \mathbb{N}_0)$$

είναι ωσαύτως τοπολογικός χώρος (ταυτιζόμενος με τον $\mathbb{R}^{d(n+1)}$). Εδώ εξυπονοείται ότι εργαζόμαστε με τη μετρική τοπολογία την επαγομένη από τις συνήθεις στάθμες («νόρμες»):

- Για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ και για κάθε $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$||\mathbf{x}|| := \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

- Για $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ και για κάθε $\mathbf{z} = (z_0, z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$,

$$||\mathbf{z}|| := \sqrt{|z_0|^2 + |z_1|^2 + ... + |z_n|^2}.$$

1.12.1 Ορισμός. Ως **n-διάστατος προβολικός χώρος υπεράνω τού** $\mathbb{K}$ ορίζεται ο πηλικόχωρος

$$\boxed{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} := (\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0_{\mathbb{K}^{n+1}}\}) / \underset{\text{προβ.}}{\sim}}$$

ο δημιουργούμενος μέσω τής σχέσεως ισοδυναμίας

$$(x_0, x_1, ..., x_n) \underset{\text{προβ.}}{\sim} (x'_0, x'_1, ..., x'_n) \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\exists \lambda \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0_{\mathbb{K}}\} : x_j = \lambda x'_j, \ \forall j \in \{0, 1, ..., n\}]$$

<u>Συμβολισμός.</u> $[x_0 : x_1 : ... : x_n] :=$ κλάση ισοδυναμίας τού $(x_0, x_1, ..., x_n)$ ως προς την “ $\underset{\text{προβ.}}{\sim}$ ” (: **ομογενείς συντεταγμένες**).

1.12.2 Πρόταση. *Ο n-διάστατος προβολικός χώρος $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ αποτελεί ένα συνεκτικό, συμπαγές, dn-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα (υπό την έννοια τού ορισμού* 1.11.1).

1.12.3 Σημείωση. (i) Παρότι η πρόταση 1.12.2 αποτελεί μια άμεση εφαρμογή ενός γενικότερου αποτελέσματος που θα παρατεθεί στην επόμενη ενότητα, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι ο *συνήθης άτλας* τού $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ απαρτίζεται από $n+1$ χάρτες (U_j, f_j), $0 \leq j \leq n$, όπου

$$U_j := \{[x_0 : x_1 : ... : x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \,|\, x_j \neq 0_{\mathbb{K}}\}$$

και

$$\mathbb{K}^n \ni (y_1, ..., y_n) \overset{\approx}{\longmapsto} f_j(y_1, ..., y_n) := [y_1 : ... : y_{j-1} : 1_{\mathbb{K}} : y_{j+1} : ... : y_n] \in U_j.$$

Εξ αυτού έπεται άμεσα ότι ο $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ είναι *και* διαφορίσιμο πολύπτυγμα.
(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^0_{\mathbb{K}} &= \{\text{ένα σημείο}\}, \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} &= \{[x : 1_{\mathbb{K}}] \,|\, x \in \mathbb{K}\} \cup \underbrace{\{[1_{\mathbb{K}} : 0_{\mathbb{K}}]\}}_{\text{κατ' εκδοχήν σημείο}}, \\ \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} &= \{[x : y : 1_{\mathbb{K}}] \,|\, (x, y) \in \mathbb{K}^2\} \cup \underbrace{\{[x : y : 0_{\mathbb{K}}] \,|[x : y] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\}}_{\text{κατ' εκδοχήν ευθεία}}. \end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε εμφυτεύσεις:

$$\mathbb{P}^0_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \subsetneqq ... \subsetneqq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{K}} \subsetneqq ...,$$

ταυτίζοντας τον $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$ με το σύνολο των σημείων $[x_0 : x_1 : ... : x_{n-1} : 0] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.
(iii) Ο χώρος $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ καλείται **πραγματικό προβολικό επίπεδο** και ο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ **μιγαδικό προβολικό επίπεδο**. Το πρώτο εξ αυτών των «προβολικών επιπέδων» είναι ένα σταυρωτό διαπέτασμα (βλ. σχήμα 1.17), διότι η

$$f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \;\; \mathbf{x} = (x_1, x_2) \longmapsto f(\mathbf{x}) := [x_1 : x_2 : \sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2}],$$

είναι ταυτισμική απεικόνιση (βλ. εδ. 1.10.7) με την

$$\mathbb{B}^2/\mathcal{R}_f \ni [\mathbf{x}]_{\mathcal{R}_f} \overset{\bar{f}}{\longmapsto} f(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

ομοιομορφισμό και με $\mathcal{R}_f = \mathcal{R}_{\mathfrak{Z}}$, όπου

$$\mathfrak{Z} := \big\{ \big\{ \{\mathbf{x}\} | \, \mathbf{x} \in \mathbb{B}^2 \smallsetminus \mathbb{S}^1 \big\}, \big\{ \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\} | \, \mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 \big\} \big\}$$

ο διαμελισμός τού $\mathbb{B}^2$ τού εδ.[55] 1.10.11 (i).

[55] Πράγματι· εάν υποθέσουμε ότι ισχύει $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathcal{R}_f \underset{\text{ορσ.}}{\iff} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')$, τότε έχουμε προφανώς $x_1 = \lambda x_1'$, $x_2 = \lambda x_2'$ και $\sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2} = \lambda \sqrt{1 - ||\mathbf{x}'||^2}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Εξ αυτών συμπεραίνουμε ότι $\lambda \in \{\pm 1\}$, ήτοι ότι $\mathbf{x} = \pm\, \mathbf{x}'$. Άρα $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathcal{R}_{\mathfrak{Z}}$ και, ως εκ τούτου, $\mathcal{R}_f \subseteq \mathcal{R}_{\mathfrak{Z}}$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathcal{R}_{\mathfrak{Z}} \subseteq \mathcal{R}_f$ είναι προφανής.

1.13 ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ ΤΡΟΧΙΑΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Οι *προβολικοί χώροι* τής §1.12 μπορούν (μέχρις ομοιομορφισμού) να θεωρηθούν ως ειδικοί *τροχιακοί χώροι* (προκύπτοντες από τη δράση *τοπολογικών ομάδων* επί τοπολογικών χώρων).

1.13.1 Ορισμός. Ένα μη κενό σύνολο G, το οποίο είναι *ταυτοχρόνως* εφοδιασμένο με τη δομή μιας ομάδας $(G, \cdot)$ *και* με μια τοπολογία, καλείται **τοπολογική ομάδα** όταν αμφότερες οι απεικονίσεις

$$G \times G \ni (x,y) \longmapsto xy \in G \text{ και } G \ni x \longmapsto x^{-1} \in G$$

είναι συνεχείς (με το $G \times G$ φέρον τη συνήθη τοπολογία γινομένου).

1.13.2 Παραδείγματα. (i) Η προσθετική ομάδα των πραγματικών αριθμών $(\mathbb{R}, +)$ είναι τοπολογική ομάδα (ως προς τη συνήθη τοπολογία).
(ii) Ο κύκλος $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ είναι τοπολογική (πολλαπλασιαστική) ομάδα, καθότι οι

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \longmapsto e^{i(\theta_1+\theta_2)} \in \mathbb{S}^1 \text{ και } \mathbb{S}^1 \ni e^{i\theta} \longmapsto e^{-i\theta} \in \mathbb{S}^1$$

είναι συνεχείς.
(iii) Ο διδιάστατος τόρος $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ και, γενικότερα, το γινόμενο δύο τοπολογικών ομάδων, είναι μια τοπολογική ομάδα.
(iv) Τοπολογικές ομάδες είναι η **γενική γραμμική ομάδα**[56]

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, \det(\mathbf{A}) \neq 0\} \; (n \in \mathbb{N})$$

και η **ορθογώνια** (και αντιστοίχως, η **ειδική ορθογώνια**) **ομάδα**

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,|\, \mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}^{-1}\}$$
$$(\text{και αντιστοίχως, } \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \,|\, \det(\mathbf{A}) = 1\})$$

με τη σχετική τοπολογία εντός τού ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^{n^2}$ (όταν κανείς εκλαμβάνει κάθε πίνακα $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ως σημείο τού $\mathbb{R}^{n^2}$). Κατ' αναλογίαν, τοπολογικές ομάδες είναι η **(μιγαδική) γενική γραμμική ομάδα**

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \,|\, \det(\mathbf{A}) \neq 0\}$$

[56] Συνήθεις συμβολισμοί: Ως $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (και αντιστοίχως, ως $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$) συμβολίζεται το σύνολο των $(n \times n)$-πινάκων με συντελεστές ειλημμένους από το $\mathbb{R}$ (και αντιστοίχως, από το $\mathbb{C}$), ως $\mathbf{A}^\intercal$ ο *ανάστροφος* ενός πίνακα $\mathbf{A}$, ως $\mathbf{A}^{-1}$ ο *αντίστροφος* και ως $\det(\mathbf{A})$ η *ορίζουσα* ενός αντιστρέψιμου $(n \times n)$-πίνακα $\mathbf{A}$, και ως $\overline{\mathbf{A}}$ (και αντιστοίχως, $\overline{\mathbf{A}^\intercal}$) ο *συζυγής* (και αντιστοίχως, ο *αναστροφοσυζυγής*) ενός $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

και η **μοναδιακή** (και αντιστοίχως, η **ειδική μοναδιακή**) **ομάδα**

$$\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \,|\, \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}\}$$
$$(\text{και αντιστοίχως, } \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \,|\, \det(\mathbf{A}) = 1\}).$$

Σημειωτέον ότι η $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (και αντιστοίχως, η $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$), ως ανοικτός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^{n^2}$ (και αντιστοίχως, τού $\mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$), είναι ένα μη συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα διαστάσεως n^2 (και αντιστοίχως, $2n^2$) και ότι

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{S}^0 \approx \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{S}^1 \approx \mathrm{U}_n(\mathbb{C}).$$

Οι $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$,$\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ και $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ είναι δρομοσυνεκτικές, ενώ η $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ διαθέτει ακριβώς δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες (καθεμία των οποίων είναι $\approx \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Η $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (και αντιστοίχως, η $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$) είναι ένα συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα διαστάσεως $\frac{1}{2}n(n-1)$ (και αντιστοίχως, n^2-1). Για μικρά n έχουμε:

$$\mathrm{SO}_1(\mathbb{R}) = \mathrm{SU}_1(\mathbb{C}) = \{\text{ένα σημείο}\},\ \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \underset{\text{τ.ο.}}{\cong} \mathrm{U}_1(\mathbb{C}) \underset{\text{τ.ο.}}{\cong} \mathbb{S}^1,\ \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \underset{\text{τ.ο.}}{\cong} \mathbb{S}^3$$

και $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \underset{\text{τ.ο.}}{\cong} \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, όπου το "$\underset{\text{τ.ο.}}{\cong}$" δηλοί *ισομορφισμό τοπολογικών ομάδων* (= ισομορφισμό ομάδων που είναι -ταυτοχρόνως- και ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων).

1.13.3 Ορισμός. Έστω $(G,\cdot)$ μια τοπολογική ομάδα και έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Μια **δράση τής** G **επί τού** X είναι μια συνεχής απεικόνιση

$$G \times X \ni (g,x) \longmapsto g \bullet x \in X,$$

τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες[57]:
(i) $g \bullet (g' \bullet x) = (gg') \bullet x$, $\forall (g,g') \in G \times G$ και $\forall x \in X$,
(ii) $1_G \bullet x = x$, $\forall x \in X$.
Για $x \in X$ το σύνολο $\mathrm{orb}_G(x) := \{g \bullet x \,|\, g \in G\}$ καλείται **τροχιά τού** x. Επί τού X ορίζεται η σχέση ισοδυναμίας "$\sim_G$" ως εξής:

$$x \sim_G x' \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{orb}_G(x) = \mathrm{orb}_G(x') \Longleftrightarrow [\exists g \in G : \ g \bullet x = x'].$$

(Προφανώς, $[x]_{\sim_G} := \{y \in X | \, x \sim_G y\} = \mathrm{orb}_G(x),\ \forall x \in X$.) Ο πηλικόχωρος

$$\boxed{X/G := X/\sim_G}$$

καλείται **τροχιακός χώρος** (orbit space) τού X ως προς τη δράση τής G επ' αυτού.

[57] Προσοχή! Με το ένα (αχνό) "dot" σημειώνεται η (*εσωτερική*) πράξη τής ομάδας G και με το άλλο (έντονο) "dot" (ή "bullet") η δράση στοιχείων τής G επί τού X.

1.13.4 Σημείωση. Για παγιωμένο $g \in G$ η $X \ni x \longmapsto g \bullet x \in X$ είναι ένας ομοιομορφισμός (έχων εμφανώς την $X \ni x \longmapsto g^{-1} \bullet x \in X$ ως αντίστροφό του).

1.13.5 Παραδείγματα. (i) Ο τροχιακός χώρος $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ που κατασκευάζεται μέσω τής δράσεως $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \ni (n, x) \longmapsto x + n \in \mathbb{Z}$ είναι $\approx \mathbb{S}^1$.
(ii) Η $(\mathbb{Z}, +)$ δρα επί τού $\mathbb{R}^2$ ως εξής:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \ni (n, (x_1, x_2)) \longmapsto (x_1 + n, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

και δίδει $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (μέσω τού $[(x_1, x_2)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \overset{\approx}{\longmapsto} (\exp(2\pi i x_1), x_2)$).
(iii) Η δράση

$$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni ((m, n), (x_1, x_2)) \longmapsto (x_1 + m, x_2 + m) \in \mathbb{R}^2$$

δίδει τον πηλικόχωρο $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 =: \mathbb{T}^2$.
(iv) Η $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ (όπου $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$) δρα επί τού $\mathbb{C}$ ως εξής:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \ni (\lambda, z) \longmapsto \lambda z \in \mathbb{C}.$$

Η τροχιά $\mathrm{orb}_{\mathbb{S}^1}(z)$, για $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, είναι ο κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας $|z|$, ενώ $\mathrm{orb}_{\mathbb{S}^1}(0) = \{0\}$. Άρα $\mathbb{C}/\mathbb{S}^1 \approx [0, +\infty)$.
(v) Εάν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, d όπως στην (1.8) και

$$p : \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}},\ \mathbf{x} \longmapsto \mathbb{K}\mathbf{x} = \{\lambda \mathbf{x} \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{K}^{n+1},$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_0, x_1, ..., x_n) \overset{p}{\longmapsto} [x_0 : x_1 : ... : x_n], && \text{για } d = 1, \\ \mathbf{x} &= (x_0, y_0, x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \overset{p}{\longmapsto} [x_0 : y_0 : ... : x_n : y_n], && \text{για } d = 2, \end{aligned}$$

η p είναι μια ταυτισμική απεικόνιση και μάλιστα ισχύει

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}') \iff [\exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ με } |\lambda| = 1 : \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}].$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ταυτίσεις $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ και $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ και το ότι οι εν λόγω σφαίρες φέρουν τη δομή πολλαπλασιαστικής ομάδας, καθώς και τις ταυτίσεις

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{S}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, ||\mathbf{x}|| = 1\} \\ \mathbb{S}^{2n+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \,:\, ||\mathbf{z}|| = 1\} \, (\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}) \end{array} \right\},$$

έχουμε τη δυνατότητα ορισμού δράσεων

$$\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{d(n+1)-1},\ (\mu, \xi_0, ..., \xi_n) \longmapsto (\mu \xi_0, ..., \mu \xi_n),$$

(μέσω πολλαπλασιασμού *κατά συντεταγμένες*) και τη δημιουργία τού τροχιακού χώρου $\mathbb{S}^{d(n+1)-1}/\mathbb{S}^{d-1}$, ο οποίος είναι εκ κατασκευής *ομοιομορφικός τού* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ (πρβλ. εδ. 1.10.7):

$$\overline{p} : \mathbb{S}^{d(n+1)-1}/\mathbb{S}^{d-1} \xrightarrow{\approx} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

Επειδή $p(\mathbb{S}^{d(n+1)-1}) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, όπου η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^{d(n+1)-1}$ είναι συμπαγής, συνεκτική, Hausdorff και 2η αριθμήσιμη (ως προς τη συνήθη τοπολογία), ο $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ είναι ωσαύτως συμπαγής, συνεκτικός, Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος. (Βλ. 1.6.2, 1.8.6 και 1.9.7.) Και επειδή $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^{dn}$, ο $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ αποτελεί ένα συμπαγές, συνεκτικό, dn-διάστατο *τοπολογικό πολύπτυγμα*, διότι καλύπτεται από τους χάρτες

$$\mathbb{R}^{dn} = \mathbb{K}^n \ni (y_1, ..., y_n) \overset{\approx}{\longmapsto} f_j(y_1, ..., y_n) := [y_1 : ... : y_{j-1} : 1_{\mathbb{K}} : y_{j+1} : ... : y_n] \in U_j,$$

$j \in \{0, 1, ..., n\}$, τους προαναφερθέντες στο εδ. 1.12.3 (i).

(vi) Θεωρώντας τήν $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ως υποομάδα τής $\mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ και την

$$\mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R}) \ni \mathbf{A} \overset{p}{\longmapsto} \mathbf{A}(0, 0, ..., 1)^{\intercal} \in \mathbb{S}^{n-1}$$

διαπιστώνουμε (με παρόμοιο τρόπο) ότι

$$\mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})/\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^n$$

και ότι $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^n$ (κατόπιν περιορισμού επί τής $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$). Κατ' αναλογίαν, αποδεικνύονται και οι ομοιομορφισμοί

$$\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})/\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \approx \mathbb{S}^{2n+1}, \qquad \mathrm{SU}_{n+1}(\mathbb{C})/\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) \approx \mathbb{S}^{2n+1},$$

$$\mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})/(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_1(\mathbb{R})) \approx \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \qquad \mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})/(\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{U}_1(\mathbb{C})) \approx \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}.$$

Για περαιτέρω παραδείγματα αυτού τού είδους οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παραπέμπονται στα βιβλία των Baker [8], Curtis [23], Porteous [92] και Tapp [115].

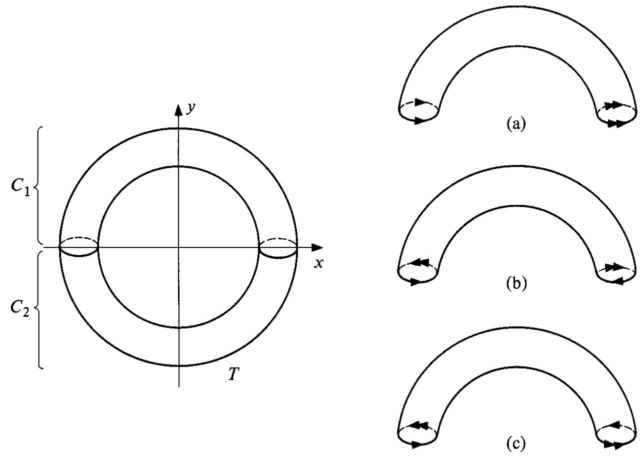
(vii) Μια δεδομένη τοπολογική ομάδα ενδέχεται να δρα κατά πολλούς διαφορετικούς τρόπους επί τού ιδίου τοπολογικού χώρου. Εδώ παρατίθενται τρεις διαφορετικές δράσεις τής $\mathbb{Z}_2$ επί τού τόρου $T \approx \mathbb{T}^2$ εντός τού $\mathbb{R}^3$, ο οποίος σχηματίζεται ύστερα από στροφή τού κύκλου $(x-3)^2 + z^2 = 1$ περί τον άξονα των z. Εάν ως g συμβολισθεί ο γεννήτορας τής $\mathbb{Z}_2$ και ορισθούν (μέσω αυτού) οι δράσεις:

(a) $g \bullet (x, y, z) = (x, -y, -z)$, ήτοι η στροφή τού T κατά π περί τον άξονα των x,

(b) $g \bullet (x, y, z) = (-x, -y, z)$, ήτοι η στροφή τού T κατά π περί τον άξονα των z,

(c) $g \bullet (x, y, z) = (-x, -y, -z)$, ήτοι ο κατοπτρισμός τού T ως προς την αρχή των αξόνων,

τότε οι προκύπτοντες τροχιακοί χώροι είναι μια σφαίρα, ένας τόρος και μια φιάλη τού Klein, αντιστοίχως, και το σχ. ?? επεξηγεί το γιατί. Σε όλες τις περιπτώσεις ο g εναλλάσσει τους κυλίνδρους C_1 και C_2. Επομένως, για να σχηματισθεί ο εκάστοτε τροχιακός χώρος, μπορεί κανείς να αγνοήσει τον κύλινδρο C_2 και απλώς να εκτελέσει τις κατάλληλες ταυτίσεις επί των συνοριακών κύκλων τού C_1.



Σχήμα ??

1.13.6 Πρόταση. *Εάν μια τοπολογική ομάδα G δρα επί ενός τοπολογικού χώρου X και αμφότεροι οι G και X/G είναι συνεκτικοί, τότε και ο X είναι συνεκτικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι ο X γράφεται ως ένωση δύο ξένων μεταξύ τους, μη κενών, ανοικτών υποσυνόλων U και V. Επειδή η αντίστοιχη ταυτισμική απεικόνιση $p : X \longrightarrow X/G$ είναι πάντοτε ανοικτή (βλ. 1.10.7 (ii)) και επειδή ο X/G είναι συνεκτικός, έχουμε $p(U) \cap p(V) \neq \varnothing$. Και για οιοδήποτε $x \in X$ με $p(x) \in p(U) \cap p(V)$ ισχύει $U \cap \operatorname{orb}_G(x) \neq \varnothing$ και $V \cap \operatorname{orb}_G(x) \neq \varnothing$. Αυτά τα δύο σύνολα αποσυνθέτουν την τροχιά $\operatorname{orb}_G(x)$ τού x και την εμφανίζουν ως αποσυνδετή ένωση δύο μη κενών, ανοικτών συνόλων. Από την άλλη μεριά, η $\operatorname{orb}_G(x)$ αποτελεί την εικόνα τής G μέσω τής συνεχούς απεικονίσεως

$$f : G \longrightarrow X, \ g \longmapsto f(g) := g \bullet x,$$

Άρα η τροχιά $\operatorname{orb}_G(x)$ τού x είναι (σύμφωνα με την πρόταση 1.9.6) συνεκτική, απ' όπου έπεται και η επιθυμητή αντίφαση. □

1.13.7 Ορισμός. Έστω G μια τοπολογική ομάδα, η οποία δρα επί ενός τοπολογικού χώρου X. Λέμε ότι η G **δρα ελευθέρως** (ή ότι **στερείται σταθερών σημείων**) **επί τού** X όταν $g \bullet x \neq x$, $\forall g \in G \setminus \{1_G\}$ (δηλαδή όταν η $X \ni x \longmapsto g \bullet x \in X$ στερείται σταθερών σημείων, $\forall g \in G \setminus \{1_G\}$).

1.13.8 Λήμμα. *Εάν μια πεπερασμένη (διακριτή) ομάδα G δρα επί ενός χώρου Hausdorff X, τότε ο τροχιακός χώρος X/G είναι χώρος Hausdorff.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $p : X \longrightarrow X/G$, $x \longmapsto p(x) := [x]_{\sim_G}$, η φυσική επίρριψη. Εάν $[x_1]_{\sim_G}, [x_2]_{\sim_G} \in X/G$ και $x_1 \not\sim_G x_2$, τότε $g_1 \bullet x_1 \neq g_2 \bullet x_2$, για οιοδήποτε ζεύγος

$g_1, g_2 \in G$, οπότε

$$p^{-1}([x_1]_{\sim_G}) \cap p^{-1}([x_2]_{\sim_G}) = \{gx_1 \mid g \in G\} \cap \{gx_2 \mid g \in G\} = \varnothing.$$

Επειδή αυτά τα σύνολα είναι πεπερασμένα, είναι δυνατόν (κατόπιν επαναλαμβανόμενης εφαρμογής τής ιδιότητας τού Hausdorff) να κατασκευασθούν ανοικτά υποσύνολα U_1, U_2 τού X, τέτοια ώστε να ισχύει

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing, \quad p^{-1}([x_1]_{\sim_G}) \subseteq U_1, \quad p^{-1}([x_2]_{\sim_G}) \subseteq U_2.$$

Επειδή $p^{-1}(p(X \smallsetminus U_j)) = \bigcup_{g \in G} g \bullet (X \smallsetminus U_j)$, για $j \in \{1,2\}$, το $p^{-1}(p(X \smallsetminus U_j))$ είναι κλειστό υποσύνολο τού X. Άρα το $p(X \smallsetminus U_j)$, $j \in \{1,2\}$, είναι κλειστό υποσύνολο τού X/G και, κατ' επέκταση, το $W_j := X/G \smallsetminus p(X \smallsetminus U_j)$, $j \in \{1,2\}$, είναι ανοικτό υποσύνολο τού X/G. Τέλος, επειδή

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= X/G \smallsetminus (p(X \smallsetminus U_1) \cup p(X \smallsetminus U_2)) \\ &= X/G \smallsetminus p((X \smallsetminus U_1) \cup (X \smallsetminus U_2)) \\ &= X/G \smallsetminus p(X \smallsetminus \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{=\varnothing}) = X/G \smallsetminus p(X) = \varnothing, \end{aligned}$$

ο τροχιακός χώρος X/G είναι όντως χώρος Hausdorff. □

1.13.9 Πρόταση. *Εάν μια πεπερασμένη (διακριτή) ομάδα G δρα ελευθέρως επί ενός συμπαγούς n-διάστατου τοπολογικού πολυπτύγματος X, τότε και ο τροχιακός χώρος X/G είναι ένα n-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατά το λήμμα 1.13.8 ο X/G είναι χώρος Hausdorff. Εξάλλου, επειδή ο X είναι 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και η $p : X \longrightarrow X/G$ ανοικτή (καθώς το $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού X/G για κάθε ανοικτό υποσύνολο U), ο τροχιακός χώρος X/G είναι ωσαύτως 2ος αριθμήσιμος[58]. Επιπροσθέτως, ο $X/G\, (= p(X))$ είναι συμπαγής ως εικόνα τού συμπαγούς X μέσω τής συνεχούς απεικονίσεως p. (Βλ. 1.8.5 και 1.10.2 (i).) Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι κάθε σημείο $[x]_{\sim_G} \in X/G$ (όπου $x \in X$) *διαθέτει μια περιοχή ομοιομορφική τού* $\mathbb{R}^n$. (Βλ. 1.11.1.)

Έστω[59] ότι $G = \{g_0 = 1_G, g_1, g_2, ..., g_m\}$. Επειδή η ομάδα G δρα ελευθέρως επί τού X, εάν $g_j \bullet x = x$, για κάποιον $j \in \{0, 1, ..., m\}$, θα έχουμε κατ' ανάγκην $j = 0$. Ως εκ τούτου, μέσω επαναλαμβανόμενης εφαρμογής τής ιδιότητας Hausdorff είναι δυνατή η κατασκευή ανοικτών περιοχών $U_0, U_1, ..., U_m$ των

$$x = g_0 \bullet x, g_1 \bullet x, ..., g_m \bullet x,$$

[58] Βλ. [28], Thm. 6.2(1), σελ. 174.

[59] Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η G δεν είναι τετριμμένη και έχει τάξη ίση με $m+1$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$.

αντιστοίχως, με $U_0 \cap U_j = \varnothing$, $\forall j \in \{1,2,...,m\}$. Η τομή $U := \bigcap_{j=0}^{m} g_j^{-1} U_j$ είναι προφανώς μια ανοικτή περιοχή τού x.

Εξ υποθέσεως, για το σημείο x υπάρχει κάποια ανοικτή περιοχή W_x εντός τού X με $W_x \approx \mathbb{R}^n$. Δοθέντος ενός ομοιομορφισμού $h : W_x \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$, το $W_x \cap U$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού W_x, οπότε το $h(W_x \cap U)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$. Επειδή $h(x) \in h(W_x \cap U)$, υπάρχει $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ με $\mathring{\mathbb{B}}_{d_{\text{συν.}}}(h(x);\varepsilon) \subseteq h(W_x \cap U)$. Το

$$V_x := h^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}_{d_{\text{συν.}}}(h(x);\varepsilon)) \approx \mathring{\mathbb{B}}_{d_{\text{συν.}}}(h(x);\varepsilon) \approx \mathbb{R}^n$$

είναι μια ανοικτή περιοχή τού x εντός τού U. Θα δειχθεί ότι η $p|_{V_x} : V_x \twoheadrightarrow p(V_x)$ είναι αμφιρριπτική. Προς τούτο αρκεί να δειχθεί ότι είναι ενριπτική. Πράγματι· εάν $p|_{V_x}(x_1) = (p|_{V_x})(x_2)$, τότε $x_1 = g_j \bullet x_2$, για κάποιο $g_j \in G$. Επειδή

$$x_1, x_2 \in V_x \Longrightarrow x_1, x_2 \in U, \text{ έχουμε } x_1 \in g_0^{-1} \bullet U_0 = U_0 \text{ και } x_2 \in g_j^{1} \bullet U_j,$$

οπότε $x_1 = g_j \bullet x_2 \in U_0 \cap U_j$. Κατά συνέπειαν,

$$U_0 \cap U_j \neq \varnothing \Longrightarrow j = 0 \text{ και } g_j = g_0 = 1_G \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Επειδή η απεικόνιση p είναι ανοικτή, η $p|_{V_x}$ είναι ανοικτή (και συνεχής), οπότε από την πρόταση 1.5.2 συμπεραίνουμε ότι η $p|_{V_x}$ είναι ομοιομορφισμός. Επομένως, $p(V_x) \approx V_x \approx \mathbb{R}^n$, όπου $p(V_x)$ μια ανοικτή περιοχή τού $[x]_{\sim_G}$. □

1.14 ΧΩΡΟΙ ΦΑΚΟΥ

Έχουν ήδη δοθεί διάφοροι χαρακτηρισμοί για το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Αυτό είναι αφ' ενός μεν ένα *σταυρωτό διαπέτασμα*, αφ' ετέρου δε ένας *τροχιακός χώρος*. (Βλ. 1.12.3 (iii) και 1.13.5 (v).) Υψώνοντας κατά ένα τη διάσταση, ο *τριδιάστατος* πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ μπορεί να ιδωθεί ως ένας «χώρος φακού» (συγκεκριμένα, είναι $\approx \mathbb{L}(2,1)$). Οι *χώροι φακού* $\mathbb{L}(p,q)$ εισήχθησαν από τον H. Tietze[60] στο άρθρο [118] το έτος 1908 και έκτοτε έγιναν αντικείμενο μελέτης πληθώρας ερευνητών. Η ταξινόμησή τους *μέχρις ομοιομορφισμού* (μέσω μιας απλούστατης αριθμοθεωρητικής συνθήκης ικανοποιούμενης από τις παραμέτρους τους p και q) επετεύχθη το 1935 από τον K. Reidemeister[61] [98] κάνοντας χρήση

[60]Tietze, *Heinrich Franz Friedrich* (31/8/1880-17/2/1964). Γερμανός μαθηματικός. Υπήρξε καθηγητής των Πανεπιστημίων τού Erlangen (1919-1924) και τού Μονάχου (1925-1950). Αφιέρωσε το μεγαλύτερο τμήμα τής ζωής του στη μελέτη τοπολογικών προβλημάτων. Επιπροσθέτως, για την επίτευξη τοπολογικής διάκρισης μεταξύ δυο κόμπων, εφάρμοσε με ιδιαίτερη επιτυχία μεθόδους προερχόμενες από τη Θεωρία Ομάδων και την Αριθμοθεωρία.

[61]Reidemeister, *Kurt Werner Friedrich* (13/10/1893-8/7/1971). Γερμανός μαθηματικός. Εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό την επίβλεψη τού E. Hecke (1887-1947). Ωστόσο, η έρευνά του μεταπήδησε σε σύντομο χρονικό διάστημα από την Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών στη Γεωμετρία, υπό την επίδραση τής συνεργασίας του με τον W. Blaschke (1885-1962). Εν συνεχεία, εστράφη στη μελέτη προβλημάτων προερχομένων από τη Συνδυαστική και την Αλγεβρική Τοπολογία, και από τη Θεωρία Κόμβων. Διετέλεσε καθηγητής στα Πανεπιστήμια τής Βιένης (1922-1924), τού Königsberg (1925-1933), τού Marburg (1934-1954) και τού Göttingen (από το 1955). Συνέγραψε 17 βιβλία (ορισμένα εξ αυτών επί τής Ιστορίας των Μαθηματικών) και άνω των 70 ερευνητικών εργασιών.

μιας ειδικής συνδυαστικής αναλλοιώτου που την ονόμαζε *στρέψη*. (Βλ. θεώρημα 1.14.4.) Μέσω των χώρων φακού κατασκευάζονται παραδείγματα τριδιαστάτων συμπαγών τοπολογικών πολυπτυγμάτων που ναι μεν *είναι* ομοτοπικώς ισοδύναμα αλλά *δεν είναι* ομοιομορφικά. (Βλ. εδ. 1.17.23.) Σημειωτέον ότι, συν τοις άλλοις, είναι εφικτή και μια άμεση γενίκευση των χώρων φακού *σε οιαδήποτε περιττή διάσταση*. (Βλ. εδ. 1.14.5.)

H. Tietze

K. Reidemeister

1.14.1 Ορισμός. Ταυτίζοντας την $\mathbb{S}^3$ με το σύνολο $\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ και θεωρώντας δυο ακεραίους p, q με $0 \leq q < p$ και μκδ$(p,q) = 1$, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}_p = \{[0]_p, [1]_p, ..., [p-1]_p\}$ δρα επ' αυτής ως εξής[62]:

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{S}^3 \ni ([k]_p, (z_0, z_1)) \longmapsto (\exp(\tfrac{2\pi i k}{p}) z_0, \exp(\tfrac{2\pi i q k}{p}) z_1) \in \mathbb{S}^3.$$

Η ομάδα $\mathbb{Z}_p$ δρα (κατ' αυτόν τον τρόπο) ελευθέρως επί τής μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^2$. Πράγματι· εάν έχουμε $[k]_p \bullet (z_0, z_1) = (z_0, z_1)$, τότε

$$\exp(\tfrac{2\pi i k}{p}) z_0 = z_0 \;\; \text{και} \;\; \exp(\tfrac{2\pi i q k}{p}) z_1 = z_1.$$

Από την πρώτη εξίσωση έπεται ότι είτε $\exp(\frac{2\pi i k}{p}) = 1$ είτε $z_0 = 0$. Στην πρώτη περίπτωση, $\frac{k}{p} \in \mathbb{Z} \Rightarrow p|k \Rightarrow k = 0$. Στην δεύτερη περίπτωση, $z_0 = 0$, οπότε

$$|z_1| = 1 \Rightarrow z_1 \neq 0 \Rightarrow \exp(\tfrac{2\pi i q k}{p}) = 1 \Rightarrow \tfrac{kq}{p} \in \mathbb{Z} \underset{\text{μκδ}(p,q)=1}{\Longrightarrow} p|k \Rightarrow k = 0.$$

Ο τροχιακός χώρος

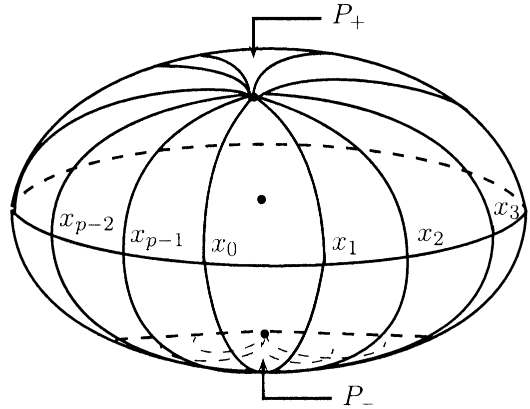
$$\boxed{\mathbb{L}(p,q) := \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p}$$

καλείται **χώρος φακού (με παραμέτρους τα p και q)**. Κατά την πρόταση 1.13.9 ο $\mathbb{L}(p,q)$ είναι ένα τριδιάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα[63].

[62]Εδώ με το i σημειώνεται η *φανταστική μονάδα*.

[63]Τούτο είναι και *συνεκτικό*, καθώς ισούται με την εικόνα τής (συνεκτικής) μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^3$ μέσω τής (συνεχούς) φυσικής επιρρίψεως $\mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{L}(p,q)$. (Βλ. 1.9.11 (ii) και πρόταση 1.9.6.)

Ο κλασικός *γεωμετρικός ορισμός* τού χώρου τού φακού είναι κάπως διαφορετικός. Γι' αυτόν τον λόγο, η παρούσα ενότητα θα περιλάβει την απόδειξη τής ισοδυναμίας των δύο ορισμών. Ας θεωρήσουμε (εντός τού $\mathbb{R}^3$) το στερεό (εν είδει «φακού») τού σχήματος ?? (που είναι $\approx \mathbb{B}^3$), το σύνορο τού οποίου αποτελείται από δύο συμμετρικά πώματα συναντώμενα σε ένα κυκλικό στεφάνι.



Σχήμα 1.??

Συμβολίζουμε τον βόρειο (αντιστοίχως, τον νότιο) πόλο αυτού ως P_+ (και αντιστοίχως, ως P_-) και διαμερίζουμε το κυκλικό στεφάνι σε p ίσα τόξα

$$\overset{\frown}{x_0 x_1},\ \overset{\frown}{x_1 x_2}, ...,\ \overset{\frown}{x_{p-1} x_0}\ .$$

Κατόπιν τούτου συνδέουμε καθένα εκ των x_j, $0 \leq j \leq p-1$, με τα P_+ και P_- (μέσω μεγάκυκλων) χωρίζοντας καθένα των δύο πωμάτων σε p τριγωνικούς τομείς.

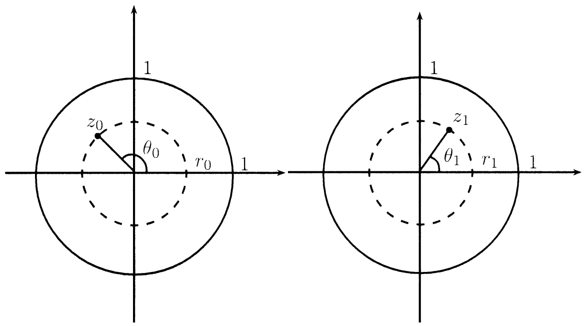
1.14.2 Ορισμός. Ορίζουμε τον τοπολογικό χώρο $\widetilde{\mathbb{L}}(p,q)$ ως τον ταυτισμικό χώρο τον δημιουργούμενο από το στερεό τού σχήματος ?? κατόπιν ταυτίσεως των τριγώνων με κορυφές τις x_j, x_{j+1}, P_+ και x_{j+q}, x_{j+q+1}, P_-, $\forall j \in \{0,1,...,p-1\}$, και μάλιστα έτσι, ώστε το x_j να ταυτίζεται με το x_{j+q}, το x_{j+1} με το x_{j+q+1}, και το P_+ με το P_-. (Οι υποδείκτες $j+1, j+q, j+q+1$ οφείλουν να διαβάζονται «mod p».)

1.14.3 Θεώρημα. $\mathbb{L}(p,q) \approx \widetilde{\mathbb{L}}(p,q)$.

Για την απόδειξη τού Θεωρήματος 1.14.3 θα προτάξουμε ορισμένες προπαρασκευαστικές παρατηρήσεις:

• Επειδή ταυτίσαμε την $\mathbb{S}^3$ με το $\{(z_0,z_1) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, γράφοντας ένα τυχόν $(z_0,z_1) \in \mathbb{S}^3$ μέσω των πολικών συντεταγμένων $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ έχουμε $r_0^2 + r_1^2 = 1$. Μάλιστα, εάν παγιώσουμε το r_1, παγιώνεται και το

$r_0 = \sqrt{1 - r_1^2})$. Επομένως σε κάθε $(z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια τριάδα $(r_1, \theta_0, \theta_1)$, όπου $0 \leq r_1 \leq 1$ και $0 \leq \theta_0, \theta_1 < 2\pi$. (Βλ. σχήμα ??.)



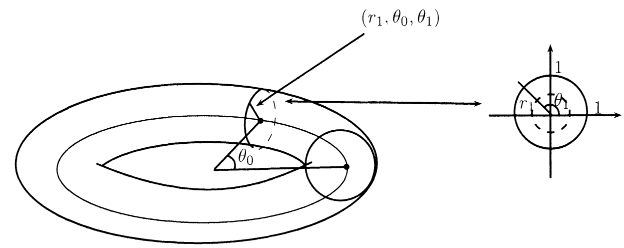
Σχήμα 1.??

Για $r_1 \in \{0, 1\}$, η αντιστοιχία $(z_0, z_1) \longleftrightarrow (r_1, \theta_0, \theta_1)$ παύει να είναι αμφίρριψη:

(i) Εάν $r_1 = 0$, τότε $r_0 = 1$ και το $(z_0, z_1) = (\exp(i\theta_0), 0)$ είναι ανεξάρτητο τού θ_1. Επομένως, για τη θέσπιση μιας αμφιρρίψεως χρειαζόμαστε την επιπρόσθετη συνθήκη: $(0, \theta_0, \theta_1) = (0, \theta_0, \theta_1')$ για όλα τα $\theta_1, \theta_1' \in [0, 2\pi)$.

(ii) Εάν $r_1 = 1$, τότε $r_0 = 0$ και το $(z_0, z_1) = (0, \exp(i\theta_1))$ είναι ανεξάρτητο τού θ_0. Επομένως, για τη θέσπιση μιας αμφιρρίψεως χρειαζόμαστε την επιπρόσθετη συνθήκη: $(1, \theta_0, \theta_1) = (1, \theta_0', \theta_1)$ για όλα τα $\theta_0, \theta_0' \in [0, 2\pi)$.

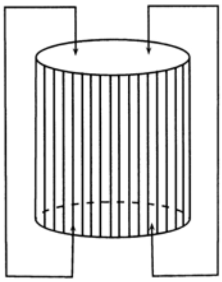
• Τα ανωτέρω μας οδηγούν στη θεώρηση **τού στερεού τόρου** $\Xi\,(\approx \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)$ με «μεσημβρινή» ακτίνα ίση με 1. (Βλ. σχήμα ??.)



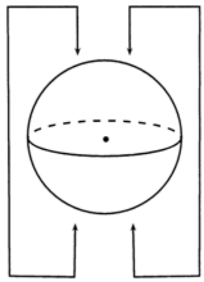
Σχήμα 1.??

Επ' αυτού η επιπρόσθετη συνθήκη (i) πληρούται αυτομάτως, καθότι τα σημεία επί τού «κεντρικού κύκλου του» (όπου $r_1 = 0$) είναι ανεξάρτητα τού θ_1. Προκειμένου να διασφαλίσουμε την επαλήθευση *και* τής συνθήκης (ii) είμαστε υποχρεωμένοι να ταυτίσουμε καταλλήλως σημεία με $r_1 = 1$, ήτοι ευρισκόμενα επί τού (συνήθους, μοναδιαίου) τόρου $\partial\Xi \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Εξετάζοντας προσεκτικά την (ii), διαπιστώνουμε ότι για κάθε $c \in [0, 2\pi)$ θα πρέπει να ταυτίσουμε μεταξύ τους όλα τα σημεία τού $\{(r_1, \theta_0, \theta_1) \,|\, \theta_1 = c, r_1 = 1\}$ (που απαρτίζουν έναν οριζόντιο κύκλο επί τού $\partial\Xi$).

Επομένως, κάθε τέτοιος «οριζόντιος κύκλος» καθίσταται (κατόπιν ταυτίσεως) ένα και μόνον σημείο, ενώ το σύνορο $\partial\Xi$ καθίσταται ένας και μόνον διαμεσημβρινός κύκλος τού Ξ. Εάν κανείς κόψει τον Ξ κατά μήκος ενός (καταλλήλως επιλεγμένου) ημιεπιπέδου, τότε λαμβάνει τον στερεό κύλινδρο τού σχήματος ?? με ταυτιζόμενες απολήξεις (και καθένα εκ των κατακορύφων ευθυγράμμων τμημάτων τού συνόρου του καθιστάμενο *ένα και μόνον σημείο*). Ο προκύπτων χώρος τού σχ. ?? είναι ομοιομορφικός τής μπάλας $\mathbb{B}^3$ στην οποία έχουμε ταυτίσει το άνω και κάτω ημισφαίριο (μέσω ορθογωνίου προβολής, βλ. 1.5.3 (iv)), ήτοι ένας χώρος $\approx \mathbb{S}^3$.



Σχήμα 1.??



Σχήμα 1.??

• Η προηγηθείσα ανάλυση χρησιμεύει στην «οπτικοποίηση» των τροχιών τής δράσεως τής $\mathbb{Z}_p$ επί τής $\mathbb{S}^3$.

• Κατ' αρχάς είναι αναγκαίο να προσδιορισθούν οι κλάσεις ισοδυναμίας τού Ξ (και, κατ' επέκταση, τής $\mathbb{S}^3$) υπό τη δράση τής $\mathbb{Z}_p$:

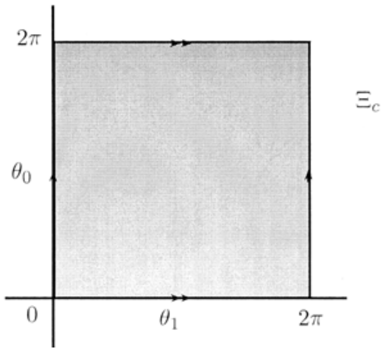
$$([k]_p,(z_0,z_1)) \mapsto (\exp(\tfrac{2\pi i k}{p})z_0, \exp(\tfrac{2\pi i q k}{p})z_1) = (r_0 e^{i(\theta_0+\frac{2\pi k}{p})}, r_1 e^{i(\theta_1+\frac{2\pi q k}{p})}).$$

Στη γλώσσα των εισηχθεισών συντεταγμένων τού στερεού τόρου αυτή η δράση έχει ως εξής:

$$([k]_p,(r_1,\theta_0,\theta_1)) \longmapsto \left(r_1, \theta_0+\tfrac{2\pi k}{p}, \theta_1+\tfrac{2\pi k q}{p}\right).$$

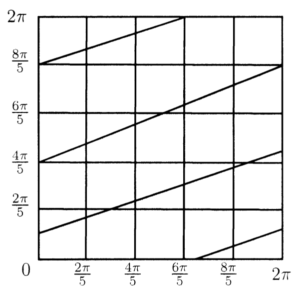
Σημειωτέον ότι η τιμή τού r_1 δεν επηρεάζεται από αυτήν τη δράση. Ως εκ τούτου, αρκεί να εστιάσουμε την προσοχή μας σε καθέναν εκ των τόρων με $r_1 = c, c \in [0,1]$, τους οποίους θα συμβολίζουμε ως Ξ_c. Προφανώς, $\Xi = \bigcup_{c\in[0,1]} \Xi_c$.

• Περίπτωση πρώτη: $c \in (0,1)$. Ο Ξ_c μπορεί να εκληφθεί ως ένα τετράγωνο με ταυτισμένες ακμές όπως στο σχήμα ??. Ο οριζόντιος άξονας είναι αυτός που παραμετρά τα θ_1 και ο κατακόρυφος αυτός που παραμετρά τα θ_0.

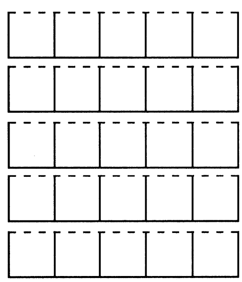


Σχήμα 1.??

Η δράση ενός $[k]_p \in \mathbb{Z}_p$ επί ενός σημείου (θ_0, θ_1) δίδει το $(\theta_0 + \frac{2\pi k}{p}, \theta_1 + \frac{2\pi kq}{p})$, οπότε οι δράσεις όλων των στοιχείων τής $\mathbb{Z}_p$ είναι μεταφορές κατά μήκος ευθειών κλίσεως ίσης με $\frac{2\pi k}{p} / \frac{2\pi kq}{p} = \frac{1}{q}$. Θεωρώντας, επί παραδείγματι, την περίπτωση κατά την οποία $p = 5$ και $q = 3$, διαπιστώνουμε ότι για κάθε ευθεία κλίσεως $\frac{1}{3}$ που διέρχεται από κάποιο σημείο τού Ξ_c, η αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας τού εν λόγω σημείου περιέχει $p = 5$ σημεία. (Βλ. σχήμα ??.)



Σχήμα 1.??

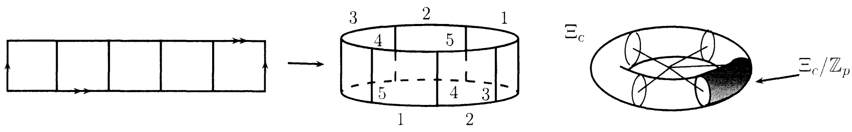


Σχήμα 1.??

Μάλιστα, η κλάση ισοδυναμίας περιέχει ακριβώς ένα σημείο σε καθεμία εκ των οριζοντίων λωριδών τής υποδιαιρέσεως τού σχήματος ??. Το ανάλογο αποτέλεσμα παραμένει εν ισχύ ακόμη και για οιαδήποτε p, q με μκδ$(p, q) = 1$: Κάθε οριζόντια λωρίδα πλάτους $\frac{2\pi}{p}$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε σχέση ισοδυναμίας τού $\Xi_c/\mathbb{Z}_p$. Κατά συνέπειαν, μπορούμε να γράψουμε τον $\Xi_c/\mathbb{Z}_p$ ως εξής:

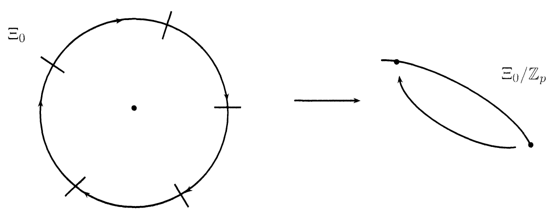
$$\Xi_c/\mathbb{Z}_p = \{(r_1, \theta_0, \theta_1) \,|\, r_1 = c,\, 0 \leq \theta_0 < \frac{2\pi}{p},\, 0 \leq \theta_0 < 2\pi\}.$$

Πρόκειται για ένα είδος σωλήνα με τις απολήξεις του ταυτιζόμενες ύστερα από συστροφή κατά $\frac{2\pi q}{p}$. (Βλ. σχήμα ??.)



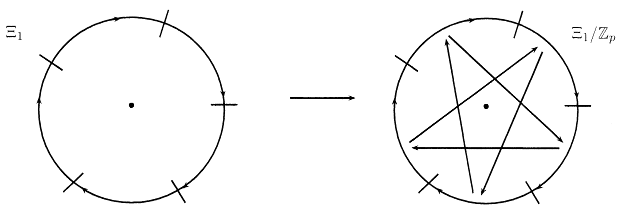
Σχήμα 1.??

• Περίπτωση δεύτερη: $c = 0$. Ο Ξ_0 είναι ο κύκλος με $r_1 = 0$. Η δράση ενός στοιχείου $[k]_p \in \mathbb{Z}_p$ επί τού Ξ_0 στέλνει το θ_0 να απεικονισθεί στο $\theta_0 + \frac{2\pi k}{p}$, εισάγοντας μια στροφή κατά $\frac{2\pi k}{p}$, οπότε κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει ακριβώς ένα σημείο σε κάθε ακτινικό τόξο μήκους $\frac{2\pi}{p}$. Ιδιαιτέρως, το τόξο $\theta_0 \in [0, \frac{2\pi}{p})$ έχει μόνον ένα σημείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας και ο $\Xi_0/\mathbb{Z}_p$ μπορεί να εκλειφθεί ως ένα τόξο με ταυτιζόμενα ληκτικά σημεία. (Βλ. σχήμα ??.)



Σχήμα 1.??

• Περίπτωση τρίτη: $c = 1$. Ο Ξ_1 (σύμφωνα με όσα προείπαμε) είναι το σύνορο $\partial\Xi$ με καθέναν εκ των οριζοντίων κύκλων τού Ξ ταυτισμένον με ένα σημείο. Η δράση ενός $[k]_p \in \mathbb{Z}_p$ επί ενός (τέτοιου) σημείου τού Ξ_1 στέλνει το θ_1 να απεικονισθεί στο $\theta_1 + \frac{2\pi kq}{p}$, εισάγοντας μια στροφή κατά $\frac{2\pi kq}{p}$. Επειδή μκδ$(p, q) = 1$, διαμερίζοντας τον $\Xi_1 \approx \mathbb{S}^1$ σε p ίσα τόξα: $0 \leq \theta_1 < \frac{2\pi}{q}, ..., \frac{2(p-1)\pi}{p} \leq \theta_1 < 2\pi$, διαπιστώνουμε ότι όλα αυτά ταυτίζονται μέσω τής $\mathbb{Z}_p$-δράσεως. (Βλ. σχήμα ??).

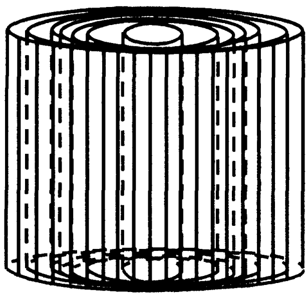


Σχήμα 1.??

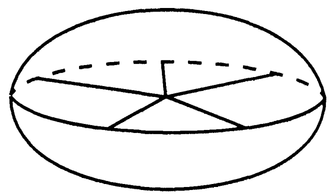
ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 1.14.3: Επειδή τα σημεία καθενός Ξ_c, $0 \leq c \leq 1$, στέλνονται να απεικονισθούν μέσω τής $\mathbb{Z}_p$-δράσεως σε σημεία τού Ξ_c, έχουμε

$$\mathbb{L}(p,q) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p \approx \bigcup_{c\in[0,1]} (\Xi_c/\mathbb{Z}_p).$$

Αυτή είναι μια συλλογή εγκιβωτισμένων σωλήνων με ακτίνες $r_1 \in [0,1)$, οι απολήξεις των οποίων είναι ταυτιζόμενες ύστερα από μια συστροφή κατά $\frac{2\pi q}{p}$, και σύνορο τους απαρτιζόμενο από ευθύγραμμα τμήματα, καθένα των οποίων ταυτίζεται με ένα και μόνον σημείο. (Βλ. σχήματα ?? και ??.)



Σχήμα 1.??



Σχήμα 1.??

Εκτελώντας αυτές τις ταυτίσεις των ευθυγράμμων τμημάτων λαμβάνουμε ένα στερεό (εν είδει φακού, όπως στο σχήμα ??), το κυκλικό στεφάνι τού οποίου υποδιαιρείται σε p ίσα τόξα. Τα άνω και κάτω πώματα (τού φακού) αντιστοιχούν στις απολήξεις τού στερεού κυλίνδρου τού σχήματος ?? και είναι, ως εκ τούτου, ταυτιζόμενα ύστερα από μια συστροφή κατά $\frac{2\pi q}{p}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\widetilde{\mathbb{L}}(p,q) \approx \bigcup_{c\in[0,1]} (\Xi_c/\mathbb{Z}_p),$$

οπότε $\mathbb{L}(p,q) \approx \widetilde{\mathbb{L}}(p,q)$. □

1.14.4 Θεώρημα. (Ταξινόμηση χώρων φακού μέχρις “ $\approx$ ”, Reidemeister [98], 1935.) *Δυο χώροι φακού $\mathbb{L}(p,q)$ και $\mathbb{L}(p',q')$ είναι μεταξύ τους ομοιομορφικοί εάν και μόνον εάν $p = p'$ και είτε $q \equiv \pm q' (\mathrm{mod}\, p)$ είτε $qq' \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, p)$.*

Μια γενίκευση τού ορισμού 1.14.1 είναι η ακόλουθη:

1.14.5 Ορισμός. Εκλαμβάνοντας την $\mathbb{S}^{2n-1}$ ως το σύνολο

$$\left\{ (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 1 \right\} \ (n \geq 2)$$

και θεωρώντας φυσικούς αριθμούς $q_1, ..., q_n, p$ με $1 \leq q_1, ..., q_n < p$, μκδ$(q_j, p) = 1$, $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$, η $\mathbb{Z}_p = \{[0]_p, [1]_p, ..., [p-1]_p\}$ δρα επί τής $\mathbb{S}^{2n-1}$ ως εξής:

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{S}^{2n-1} \ni ([k]_p, (z_1, ..., z_n)) \longmapsto (\exp(\tfrac{2\pi i q_1 k}{p}) z_1, ..., (\exp(\tfrac{2\pi i q_n k}{p}) z_n) \in \mathbb{S}^{2n-1}.$$

Ο τροχιακός χώρος

$$\boxed{\mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ..., q_n) := \mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{Z}_p}$$

καλείται **γενικευμένος χώρος φακού (με τα** $p, q_1, ..., q_n$ **ως παραμέτρους)**.

1.14.6 Σημείωση. (i) Κατά την πρόταση 1.13.9 ο χώρος $\mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ..., q_n)$ είναι ένα $(2n-1)$-διάστατο, συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα[64], καθότι η $\mathbb{Z}_p$ δρα ελευθέρως επί τής $\mathbb{S}^{2n-1}$.
(ii) $\mathbb{L}_3(p; 1, q) = \mathbb{L}(p, q)$ και $\mathbb{L}_{2n-1}(2; \underbrace{1, ..., 1}_{n \text{ φορές}}) \approx \mathbb{P}^{2n-1}_{\mathbb{R}}$. (Πρβλ. 1.13.5 (v).)

Το αντίστοιχο τού θεωρήματος ταξινομήσεως 1.14.4 έχει ως εξής:

1.14.7 Θεώρημα. (Ταξινόμηση γεν. χώρων φακού μέχρις "$\approx$", Brody [13], 1960.) *Για δυο γενικευμένους χώρους φακού*

$$\mathbb{L} := \mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ...q_n) \text{ και } \mathbb{L}' := \mathbb{L}_{2n-1}(p'; q'_1, ..., q'_n)$$

ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή[65]

$$\boxed{\mathbb{L} \approx \mathbb{L}' \Longleftrightarrow \left[p = p' \text{ και } \left\{ \begin{array}{c} \exists k \in \mathbb{Z} : q_j \equiv \pm k \, q'_{\sigma(j)} (\text{mod}\, p), \\ \text{για κάποια } \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ και } \forall j \in \{1, ..., n\} \end{array} \right\} \right].}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για μια *διεξοδική* αλγεβροτοπολογική απόδειξη βλ. Cohen [18], Ch. V, §31, σελ. 100-101. □

1.15 ΑΣΘΕΝΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Ενίοτε, κατά την κατασκευή τοπολογικών χώρων, τίθεται το εξής ερώτημα: Δοθέντος ενός μη κενού συνόλου X που ισούται με την ένωση υποσυνόλων $A_j \subseteq X$, καθένα των οποίων είναι εφοδιασμένο με τη δομή ενός τοπολογικού χώρου, πώς είναι δυνατόν να ορισθεί *κατά τρόπο φυσικό* μια τοπολογία επί τού X;

[64] Τούτο είναι και *συνεκτικό*, καθώς ισούται με την εικόνα τής (συνεκτικής) μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^{2n-1}$ μέσω τής (συνεχούς) φυσικής επιρρίψεως $\mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ..., q_n)$. (Βλ. 1.9.11 (ii) και πρόταση 1.9.6.)

[65] Το $\mathfrak{S}_n$ συμβολίζει το σύνολο των αμφιρρίψεων $\sigma : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$.

1.15.1 Ορισμός. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $(A_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του, ούτως ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Το A_j φέρει τη δομή ενός τοπολογικού χώρου, $\forall j \in J$.

(ii) Εάν $i, j \in J$, τότε μέσω των A_i και A_j επάγεται η ίδια τοπολογία επί τού $A_i \cap A_j$ και το $A_i \cap A_j$ αποτελεί έναν κλειστό υπόχωρο τόσον τού A_i όσον και τού A_j.

(iii) $X = \bigcup\limits_{j\in J} A_j$.

Τότε το X εφοδιάζεται με μια τοπολογία $\mathcal{T}_{\text{ασθ.}}$ ως εξής:

$$\boxed{U \in \mathcal{T}_{\text{ασθ.}} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\text{το } U \cap A_j \text{ είναι ανοικτό υποσύνολο τού } A_j, \forall j \in J].}$$

Η $\mathcal{T}_{\text{ασθ.}}$ καλείται **ασθενής τοπολογία** επί τού X.

1.15.2 Σημείωση. Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_{\text{ασθ.}})$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες[66]:

(i) Η σχετική τοπολογία $\mathcal{T}_{A_j} := \{U \cap A_j \,|\, U \in \mathcal{T}_{\text{ασθ.}}\}$ συμπίπτει με την αρχικώς δοθείσα τοπολογία επί τού A_j και (ως προς αυτήν) ο A_j αποτελεί έναν κλειστό υπόχωρο τού $(X, \mathcal{T}_{\text{ασθ.}})$ για κάθε $j \in J$.

(ii) Έστω $\sum_{j\in J} A_j$ το τοπολογικό άθροισμα των δοθέντων $A_j, j \in J$, και έστω $p : \sum_{j\in J} A_j \longrightarrow X$ η απεικόνιση έχουσα ως περιορισμό $p|_{A_j}$ τη (συνήθη) ένθεση $A_j \hookrightarrow X$ για κάθε $j \in J$. Τότε η p είναι μια ταυτισμική απεικόνιση. (Ως εκ τούτου, η $\mathcal{T}_{\text{ασθ.}}$ είναι μια *ειδικής φύσεως* πηλικοτοπολογία.)

(iii) Ένα υποσύνολο $C \subseteq X$ είναι κλειστό εάν και μόνον εάν το $C \cap A_j$ είναι κλειστό υποσύνολο τού A_j, $\forall j \in J$.

(iv) Μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ [η $f|_{A_j}$ είναι συνεχής, $\forall j \in J$].

(v) Ο $(X, \mathcal{T}_{\text{ασθ.}})$ δεν είναι κατ' ανάγκην 2ος αριθμήσιμος.

1.15.3 Πρόταση. *Έστω $(A_j)_{j\in J}$ ένα τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα*[67] *ενός τοπολογικού χώρου X. Τότε η τοπολογία επί τού X είναι κατ' ανάγκην η ασθενής τοπολογία ως προς την $(A_j)_{j\in J}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. [28], Ch. III, Thm. 9.3, σελ. 83, και Ch. VI, §8, Ex. 2, σελ. 131. □

1.15.4 Παράδειγμα. Εάν ο τοπολογικός χώρος $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών υποσυνόλων του, τότε ο X φέρει τη δομή τής ασθενούς τοπολογίας ως προς το $\{A_1, ..., A_n\}$. Επομένως μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ [η $f|_{A_j}$ είναι συνεχής, $\forall j \in \{1, ..., n\}$].

[66] Πρβλ. Dugundji [28], Ch. VI, section 8, σελ. 131-132.

[67] **Τοπικά πεπερασμένο** σημαίνει ότι κάθε σημείο τού X διαθέτει μια περιοχή, η οποία έχει μη κενή τομή με μόνον *πεπερασμένου πλήθους* A_j.

1.15.5 Ορισμός. Έστω $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$ μια (ως προς τον συνολοθεωρητικό εγκλεισμό *αύξουσα*) ακολουθία τοπολογικών χώρων, όπου ο A_j είναι κλειστός υπόχωρος τού A_{j+1} για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τότε η ένωση $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, εφοδιασμένη με την ασθενή τοπολογία ως προς την $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, αποτελεί έναν τοπολογικό χώρο που ονομάζεται **το όριο των** $A_n, n \in \mathbb{N}$, και συμβολίζεται ως $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} A_n$. Σημειωτέον ότι στην ακολουθία

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq A = \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n$$

κάθε A_n είναι κλειστός υπόχωρος τού A.

1.15.6 Παραδείγματα. (i) Για $n \in \mathbb{N}_0$, ταυτίζοντας τον $\mathbb{R}^n$ με τον κλειστό υπόχωρο $\left\{ (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \, x_{n+1} = 0 \right\}$ τού $\mathbb{R}^{n+1}$ (ως προς τη συνήθη, ευκλείδεια τοπολογία), έχουμε τη δυνατότητα δομήσεως μιας γνησίως αύξουσας ακολουθίας

$$\mathbb{R}^0 \subsetneqq \mathbb{R}^1 \subsetneqq \mathbb{R}^2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathbb{R}^n \subsetneqq \mathbb{R}^{n+1} \subsetneqq \cdots$$

και τού σχηματισμού τού ορίου

$$\boxed{\mathbb{R}^\infty := \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{R}^n.}$$

Τα στοιχεία τού $\mathbb{R}^\infty$ είναι ακολουθίες $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...)$ πραγματικών αριθμών, οι οποίες, πέραν κάποιου δείκτη, έχουν μηδενικούς όρους. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k, 0, 0, ...)$ ένα παγιωμένο στοιχείο τού $\mathbb{R}^\infty$ (ιδωθέν ως εικόνα τού στοιχείου $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ μέσω τής ενθέσεως $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$). Εάν U είναι μια ανοικτή περιοχή τού $\mathbf{x}$ εντός τού $\mathbb{R}^\infty$, τότε για $n \geq k$ η τομή $U \cap \mathbb{R}^n$ αποτελεί μια ανοικτή περιοχή τού (αντιστοίχου εκπροσώπου τού) $\mathbf{x}$ εντός τού $\mathbb{R}^n$. Επομένως,

$$\exists \varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0} : \overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d_{\text{συν.}}}(\mathbf{x}; \varepsilon_n) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon_n\} \subseteq U \cap \mathbb{R}^n$$

και $V := \overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d_{\text{συν.}}}(\mathbf{x}; \varepsilon_k) \cup \overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d_{\text{συν.}}}(\mathbf{x}; \varepsilon_{k+1}) \cup \cdots \subseteq U$. Και αντιστρόφως· αυτό το σύνολο V είναι για οιαδήποτε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, ...$ μια ανοικτή περιοχή τού $\mathbf{x}$, ενώ το σύνολο όλων αυτών των V αποτελεί μια βάση περιοχών τού $\mathbf{x}$. Τούτο σημαίνει ότι το $\mathbf{x}$ δεν διαθέτει καμιά αριθμήσιμη βάση περιοχών. Ως εκ τούτου, ο $\mathbb{R}^\infty$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και, κατ' επέκταση[68], *δεν είναι μετρικοποιήσιμος*[69]. Μάλιστα, επειδή το $\overline{V}$ δεν είναι συμπαγές, ο $\mathbb{R}^\infty$ *δεν είναι ούτε τοπικά συμπαγής*.

(ii) Ταυτίζοντας την $\mathbb{S}^n$ με τον ισημερινό τής $\mathbb{S}^{n+1}$έχουμε τη δυνατότητα δομήσεως μιας γνησίως αύξουσας ακολουθίας

$$\mathbb{S}^0 \subsetneqq \mathbb{S}^1 \subsetneqq \mathbb{S}^2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathbb{S}^n \subsetneqq \mathbb{S}^{n+1} \subsetneqq \cdots$$

[68]Βλ. εδάφια 1.1.11 και 1.1.12 (i).

[69]Προσοχή! Επειδή η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$ μπορεί να εφοδιασθεί με τη μετρική την επαγομένη από τη στάθμη (νόρμα) $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{n\geq 1} x_n^2}$, από τα ανωτέρω συμπεραίνουμε ότι η ασθενής τοπολογία είναι *λεπτότερη* τής τοπολογίας τής οριζόμενης από αυτήν τη μετρική.

και τού σχηματισμού τής **απειροδιάστατης σφαίρας**

$$\boxed{\mathbb{S}^\infty := \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{S}^n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty \,\middle|\, \sum_{n \geq 1} x_n^2 = 1 \right\}.}$$

(iii) Για $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, από τη γνησίως αύξουσα ακολουθία προβολικών χώρων

$$\mathbb{P}^0_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{K}} \subsetneqq \cdots$$

(βλ. εδ. 1.12.3 (ii)) κατασκευάζεται ο **απειροδιάστατος προβολικός χώρος υπεράνω τού** $\mathbb{K}$:

$$\boxed{\mathbb{P}^\infty_{\mathbb{K}} := \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.}$$

(iv) Ταυτίζοντας τον χώρο φακού $\mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ..., q_n)$ κατά τρόπο φυσικό με έναν κλειστό υπόχωρο τού $\mathbb{L}_{2n+1}(p; q_1, ..., q_n, q_{n+1})$ ορίζεται ο **απειροδιάστατος χώρος φακού**

$$\boxed{\mathbb{L}_\infty(p; q_1, q_2, ...) := \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ..., q_n)}$$

(που μπορεί να ιδωθεί και ως *τροχιακός χώρος* $\mathbb{S}^\infty / \mathbb{Z}_p$ ως προς τη γνωστή δράση).
(v) Κατ' αναλογίαν ορίζεται η **απειροδιάστατη ορθογώνια ομάδα**

$$\boxed{\mathrm{O}^\infty := \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathrm{O}_n(\mathbb{R})}$$

και οι απειροδιάστατες τοπολογικές ομάδες:

$$\boxed{\mathrm{SO}^\infty := \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{U}^\infty := \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathrm{U}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{SU}^\infty := \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}).}$$

1.16 ΠΡΟΣΑΡΤΗΣΗ ΚΥΤΤΑΡΩΝ

Σε αυτήν την ενότητα παρατίθεται μια ειδική (αλλά πολύ σημαντική, απο θεωρητικής πλευράς) κατασκευή πηλικόχωρων δημιουργούμενων μέσω συνεχών απεικονίσεων $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$ (που *προσαρτούν* ή *επικολλούν* τον X στον Y, βλ. εδάφιο 1.10.12).

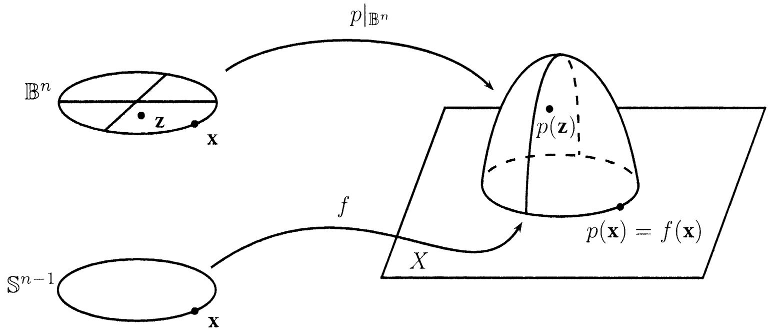
1.16.1 Ορισμός. Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και η $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τον χώρο $X \cup_f \mathbb{B}^n$ (όπως στον ορισμό 1.10.12). Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$\begin{cases} p : \mathbb{B}^n + X \longrightarrow X \cup_f \mathbb{B}^n & \text{για τη φυσική επίρριψη,} \\ \mathfrak{e}^n := p(\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n) \subseteq X \cup_f \mathbb{B}^n & \text{για το } n\text{-κύτταρο και} \\ i := p|_X : X \hookrightarrow X \cup_f \mathbb{B}^n & \text{για τη συνήθη ένθεση.} \end{cases}$$

Ο $X \cup_f \mathbb{B}^n$ είναι η ένωση τού X με το n-κύτταρο $\mathfrak{e}^n$. (Ενίοτε, αντί τού $X \cup_f \mathbb{B}^n$, γράφουμε απλώς $X \cup_f \mathfrak{e}^n$ ή $X \cup \mathfrak{e}^n$ και λέμε ότι **ο** $X \cup_f \mathfrak{e}^n$ **προκύπτει κατόπιν προσαρτήσεως τού** n**-κυττάρου** $\mathfrak{e}^n$ **μέσω τής απεικονίσεως** f, καθότι

$$\boxed{X \cup_f \mathfrak{e}^n = X \cup \{p(\mathbf{z}) \in \mathfrak{e}^n \mid \mathbf{z} \in \mathbb{B}^n \text{ και } p(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}),\ \forall \mathbf{z} \in \mathbb{S}^{n-1}\}.}$$

Προβλ. 1.10.13 (i).)



Σχήμα 1.??

(Σημειωτέον ότι για $n = 0$ η προσάρτηση ενός 0-κυττάρου στον X είναι η προσάρτηση ενός και μόνον σημείου στον X.)

1.16.2 Πρόταση. *Εάν η $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X$ είναι συνεχής και επιρριπτική, τότε ο περιορισμός $p|_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \longrightarrow X \cup_f \mathfrak{e}^n$ είναι μια ταυτισμική απεικόνιση. Κατά συνέπειαν, ο $X \cup_f \mathfrak{e}^n$ δημιουργείται από την μπάλα $\mathbb{B}^n$ ύστερα από την ταύτιση συνοριακών σημείων $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{S}^{n-1}$ εάν και μόνον εάν $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{z})$.*

1.16.3 Παραδείγματα. (i) Εάν $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X = \{\text{ένα σημείο}\}$, τότε

$$X \cup_f \mathfrak{e}^n \approx \mathbb{B}^n / \mathbb{S}^{n-1} \approx \mathbb{S}^n.$$

(ii) Εάν η $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X$ είναι σταθερή, τότε $X \cup_f \mathfrak{e}^n \approx X \vee (\mathbb{B}^n / \mathbb{S}^{n-1}) \approx X \vee \mathbb{S}^n$.

(iii) Εάν $f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, τότε $\mathbb{S}^{n-1} \cup_f \mathfrak{e}^n \approx \mathbb{B}^n$.

(iv) Εάν η $f : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{B}^n$ είναι η συνήθης ένθεση, τότε $\mathbb{B}^n \cup_f \mathfrak{e}^n \approx \mathbb{S}^n$.

1.16.4 Παράδειγμα. (Προβολικοί χώροι) Εάν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ και d όπως στην (1.8), τότε (όπως έχει επισημανθεί στο εδάφιο 1.13.5 (v)) $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \approx \mathbb{S}^{d(n+1)-1} / \mathbb{S}^{d-1}$. Η ένθεση $\mathbb{S}^{dn-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{d(n+1)-1}$ είναι συμβατή με τη δράση τής $\mathbb{S}^{d-1}$ επ' αυτών. Έτσι, προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{dn-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \arrow[d, "p_n"] \\
\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}} \arrow[r, "\iota_n"'] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}
\end{tikzcd}$$

όπου ι_n η συνήθης ένθεση και p_n η φυσική επίρριψη. Για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq 1$ ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση:

$$\sigma_k : \mathbb{B}^{dk} \longrightarrow \mathbb{S}^{d(k+1)-1},\ \sigma_k(\xi_0, ..., \xi_{k-1}) := (\xi_0, ..., \xi_{k-1}, \sqrt{1 - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} |\xi_j|^2}).$$

Κατόπιν τούτου ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\phi_k = p_k \circ \sigma_k : \mathbb{B}^{dk} \longrightarrow \mathbb{P}^k_{\mathbb{K}}.$$

► Η ϕ_k είναι επιρριπτική. Προς τούτο αρκεί να αποδειχθεί ότι για κάθε σημείο $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, ..., \xi_k) \in \mathbb{S}^{d(k+1)-1}$ υπάρχει ένα σημείο $\mathbf{u} \in \mathbb{B}^{dk}$ με $\phi_k(\mathbf{u}) = p_k(\boldsymbol{\xi})$. Εάν $\xi_k = 0$, τότε επιλέγουμε το $\mathbf{u} := (\xi_0, ..., \xi_{k-1})$. Εάν $\xi_k \neq 0$, τότε επιλέγουμε το $\mathbf{u} := (\xi_0 |\xi_k| \xi_k^{-1}, ..., \xi_{k-1} |\xi_k| \xi_k^{-1})$.

► Η $\phi_k|_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^{dk}}$ είναι ενριπτική. Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{B}^{dk}$ με $||\mathbf{u}|| < 1, ||\mathbf{v}|| < 1$ και $\phi_k(\mathbf{u}) = \phi_k(\mathbf{v})$. Τότε

$$p_k(u_0, ..., u_{k-1}, \sqrt{1 - ||\mathbf{u}||^2}) = p_k(v_0, ..., v_{k-1}, \sqrt{1 - ||\mathbf{v}||^2}).$$

Επειδή κάθε στοιχείο τού $\mathbb{P}^k_{\mathbb{K}}$ διαθέτει το πολύ έναν εκπρόσωπο, η τελευταία συντεταγμένη τού οποίου είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, έχουμε

$$(u_0, ..., u_{k-1}, \sqrt{1 - ||\mathbf{u}||^2}) = (v_0, ..., v_{k-1}, \sqrt{1 - ||\mathbf{v}||^2}),$$

οπότε $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

► Η $\phi_k|_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^{dk}}$ είναι ομοιομορφισμός. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{B}^{dk}$. Εάν $||\mathbf{u}|| < 1$, τότε η τελευταία συντεταγμένη τού $\sigma_k(\mathbf{u})$ είναι $\neq 0$ και $\phi_k(\mathbf{u}) \in \mathbb{P}^k_{\mathbb{K}} \smallsetminus \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{K}}$. Εάν $||\mathbf{u}|| = 1$, τότε η τελευταία συντεταγμένη τού $\sigma_k(\mathbf{u})$ είναι $= 0$ και $\phi_k(\mathbf{u}) \in \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{K}}$. Κατά συνέπειαν,

$$\phi_k(\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^{dk}) \subseteq \mathbb{P}^k_{\mathbb{K}} \smallsetminus \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{K}} \ \text{ και } \ \phi_k(\mathbb{S}^{dk-1}) \subseteq \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{K}}.$$

Επειδή ο $\mathbb{B}^{dk}$ είναι συμπαγής και ο $\mathbb{P}^k_{\mathbb{K}}$ χώρος Hausdorff, η ϕ_k είναι ταυτισμική απεικόνιση. Επειδή $\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^{dk} = \phi_k^{-1}(\phi_k(\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^{dk}))$, η $\phi_k|_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^{dk}} : \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^{dk} \longrightarrow \mathbb{P}^k_{\mathbb{K}} \smallsetminus \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{K}}$ είναι ωσαύτως ταυτισμική απεικόνιση και (ως αμφιρριπτική) ένας ομοιομορφισμός. Θέτοντας $\mathfrak{e}^{dk} := \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^{dk}$, λαμβάνουμε $\mathbb{P}^k_{\mathbb{K}} \smallsetminus \mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{K}} \approx \mathfrak{e}^{dk}$ και επομένως

$$\boxed{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \approx \mathfrak{e}^0 \cup \mathfrak{e}^d \cup \mathfrak{e}^{2d} \cup ... \cup \mathfrak{e}^{nd}.}$$

1.16.5 Παράδειγμα. (Γενικευμένοι χώροι φακού) Έστω

$$\mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ..., q_n) := \mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$$

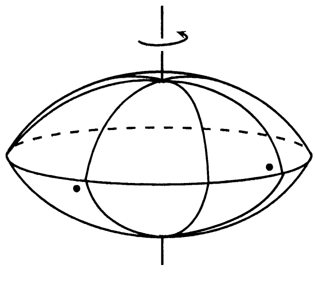
όπως στον ορισμό 1.14.5. Η $\mathbb{Z}_p$ δρα επί τής $\mathbb{S}^{2n-1} \subsetneqq \mathbb{C}^n$ ελευθέρως, έχουσα τη στροφή $\varrho(z_1, ..., z_n) := (\exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}q_1}{p})z_1, ..., \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}q_n}{p})z_n)$ ως γεννήτορά της.

(Αυτή στρέφει τον k-οστό παράγοντα $\mathbb{C}$ τού $\mathbb{C}^n$ κατά $\frac{2\pi q_k}{p}$, $\forall k \in \{1,...,n\}$.) Για τον χαρακτηρισμό τού $\mathbb{L}_{2n-1}(p;q_1,...,q_n) \smallsetminus \mathbb{L}_{2n-1}(p;q_1,...,q_{n-1})$ (που αναλογεί σε ό,τι προείπαμε για τους προβολικούς χώρους στο εδ. 1.16.4) θα καταφύγουμε στην περιγραφή των γενικευμένων χώρων φακού που δίδεται στο σύγγραμμα [46] τού Hatcher, σελ. 145. Διαιρώντας τόν μοναδιαίο κύκλο, ας τον πούμε $C(\approx \mathbb{S}^1)$, τον ενταγμένο στον n-οστό παράγοντα $\mathbb{C}$ τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{C}^n$, σε p ίσα τόξα με τα σημεία $\exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}j) \in C,\ j \in \{1,...,p\}$, ως αντίστοιχες κορυφές και συνδέοντας την j-οστή κορυφή με τη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^{2n-3} \subsetneqq \mathbb{C}^{n-1}$ μέσω τόξων μεγακύκλων επί τής $\mathbb{S}^{2n-1} \subsetneqq \mathbb{C}^n$, λαμβάνουμε μια $(2n-2)$-διάστατη μπάλα $\mathbb{B}_j^{2n-2}(\approx \mathbb{B}^{2n-2})$ με $\partial\mathbb{B}_j^{2n-2} = \mathbb{S}^{2n-3}$, $\forall j \in \{1,...,p\}$. Η $\mathbb{B}_j^{2n-2}$ συνίσταται από τα σημεία

$$\cos\theta(0,0,...,0,\exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}j)) + \sin\theta(z_1,...,z_{n-1},0),\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Κατ' αναλογίαν, συνδέοντας το j-οστό τόξο τού (υποδιαιρεθέντος) κύκλου C με τη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^{2n-3} \subsetneqq \mathbb{C}^{n-1}$ λαμβάνουμε μια μπάλα $\mathbb{B}_j^{2n-1}(\approx \mathbb{B}^{2n-1})$ με $\partial\mathbb{B}_j^{2n-1} = \mathbb{B}_j^{2n-2} \cup \mathbb{B}_{j+1}^{2n-2}$ (όπου οι υποδείκτες οφείλουν να διαβάζονται «mod p»). Η στροφή ϱ απεικονίζει την $\mathbb{S}^{2n-3} \subsetneqq \mathbb{C}^{n-1}$ στον εαυτό της και στρέφει τον C κατά $\frac{2\pi q_n}{p}$. Μια κατάλληλη δύναμη τής ϱ, ήτοι η ϱ^r, όπου r ο μοναδικός φυσικός αριθμός με $rq_n \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, στέλνει καθεμία των $\mathbb{B}_j^{2n-2}$ και $\mathbb{B}_j^{2n-1}$ να απεικονισθεί στην ακριβώς επόμενή της. Επειδή η ϱ^r είναι τάξεως p, έχουμε $\mathbb{Z}_p \cong <\varrho^r>$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον $\mathbb{L}_{2n-1}(p;q_1,...,q_n)$ ως τον πηλικόχωρο τον δημιουργούμενο από μια $\mathbb{B}_j^{2n-1}$ ύστερα από ταύτιση των δύο μπαλών $\mathbb{B}_j^{2n-2}, \mathbb{B}_{j+1}^{2n-2}$ τού συνόρου του μέσω τής ϱ^r.

1.16.6 Παρατήρηση. Όταν $n=2$, η $\mathbb{B}_j^3$ είναι ομοιομορφική μιας «φακοειδούς» 3-διάστατης μπάλας και ο $\mathbb{L}_3(p;q_1,q_2)$ είναι ο πηλικόχωρος ο δημιουργούμενος από αυτήν ύστερα από την ταύτιση των δύο ημισφαιρίων της μέσω τής ϱ^r. Η εν λόγω ταύτιση ισοδυναμεί με τη σύνθεση ενός κατοπτρισμού ως προς το επίπεδο τού κυκλικού στεφανιού τού φακού, ο οποίος στέλνει το ένα ημισφαίριο στο άλλο, και μιας στροφής τού ενός ημισφαιρίου κατά $\frac{2\pi r q_1}{p}$. Το κάτωθι σχήμα δείχνει τον φακό όταν $p=7, rq_1=2$, με τα δύο μαρκαρισμένα σημεία υποδηλούντα την περιγραφείσα ταύτιση.



Σχήμα 1.??

Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n-1} \supsetneqq \mathbb{S}^{2n-3} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{S}^{2n-1} \subsetneqq \mathbb{C}^{n} \arrow[d, two heads] \\
\mathbb{L}_{2n-3}(p; q_1, ..., q_{n-1}) \arrow[r, hook] & \mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ..., q_n)
\end{tikzcd}$$

συνάγεται (όπως στο εδάφιο 1.16.4) ότι

$$\mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ..., q_n) \approx \mathbb{L}_{2n-3}(p; q_1, ..., q_{n-1}) \cup \mathfrak{e}^{2n-2} \cup \mathfrak{e}^{2n-1}$$

όπου $\mathfrak{e}^{2n-1} := \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^{2n-1}$ και

$$\mathfrak{e}^{2n-2} := \left\{ \begin{array}{c} \text{το εσωτερικό οιασδήποτε} \\ \text{των ταυτιζομένων μπαλών } \mathbb{B}_j^{2n-2}, \mathbb{B}_{j+1}^{2n-2} \end{array} \right\},$$

οπότε

$$\boxed{\mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ..., q_n) \approx \mathfrak{e}^0 \cup \mathfrak{e}^1 \cup \mathfrak{e}^2 \cup ... \cup \mathfrak{e}^{2n-1}.}$$

1.16.7 Παράδειγμα. (Οι επιφάνειες $\mathcal{F}_g$ και $\mathcal{N}_g$.) Οι $\mathcal{F}_g$ και $\mathcal{N}_g$ μπορούν να αποκτηθούν από τη μονοσημειακή ένωση (πεπερασμένου πλήθους) μοναδιαίων κύκλων ύστερα από προσάρτηση ενός και μόνον 2-κυττάρου μέσω καταλλήλων απεικονίσεων, τις οποίες και θα περιγράψουμε διεξοδικώς.

• Έστω $r \in \mathbb{N}$. Ο «j-οστός άξονας συντεταγμένων» Λ_j εντός τού χώρου γινομένου $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1}_{r \text{ φορές}}$, $1 \leq j \leq r$, ύπο την έννοια τού εδ. 1.10.11, (iii) (c), είναι ένας κύκλος $\Lambda_j = \mathbb{S}_j^1$ $(\approx \mathbb{S}^1)$ και

$\Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_r \approx \mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_r^1 \subseteq \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{r \text{ φορές}}$ (με σημείο αναφοράς καθενός $\mathbb{S}^1$ το 1).

• Για $j \in \{1, 2, ..., r\}$ και $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\boxed{\begin{array}{c} \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} = \mathbb{S}^1 \xrightarrow{i_j^n} \mathbb{S}_1^1 \vee ... \vee \mathbb{S}_r^1, \\ z \longmapsto i_j^n(z) := (1, 1, ..., 1, z^n, 1, ..., 1). \end{array}}$$

(Για $n = 1$, η $i_j^1 = i_j$ είναι η συνήθης ένθεση.)

• Για παγιωμένον $m \in \mathbb{N}$ και $k \in \{1, ..., m\}$ ορίζουμε το

$$B_k := \{\exp(\tfrac{2\pi\sqrt{-1}t}{m}) \,|\, k - 1 \leq t \leq k\}$$

και την απεικόνιση

$$f_k : B_k \longrightarrow \mathbb{S}^1, \; \exp(\tfrac{2\pi\sqrt{-1}t}{m}) \longmapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}(t - k + 1)).$$

Το B_k είναι ένα τόξο μήκους $2\pi/m$, ενώ η f_k περιελίσσει αυτό το τόξο περί τον $\mathbb{S}^1$. Εν συνεχεία, για τυχόντες $1 \leq j_1, ..., j_m \leq r$ και $n_1, ..., n_m \in \mathbb{Z}$, συμβολίζουμε ως

$$\boxed{i_{j_1}^{n_1} \cdot i_{j_2}^{n_2} \cdots i_{j_m}^{n_m} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^1 \vee ... \vee \mathbb{S}_r^1} \tag{1.9}$$

εκείνη την απεικόνιση, η οποία ταυτίζεται με την $i_{j_k}^{n_k} \circ f_k$ επί τού B_k για κάθε $k \in \{1, ..., m\}$, και είναι συνεχής. Η εν λόγω απεικόνιση διαθέτει μια απλή *γεωμετρική ερμηνεία*: Εάν ένα σημείο $x \in \mathbb{S}^1$, ξεκινώντας από το $1 \in \mathbb{S}^1$ διατρέχει τον κύκλο $\mathbb{S}^1$, τότε η εικόνα του μέσω τής (1.9) διατρέχει $|n_1|$ φορές τον $\mathbb{S}_{j_1}^1$, κατόπιν $|n_2|$ φορές τον $\mathbb{S}_{j_2}^1$ κ.ο.κ. (και μάλιστα κατά την ίδια ή την αντίθετη φορά, αναλόγως με το κατά πόσον ο εκάστοτε n_k είναι θετικός ή αρνητικός). Μέσω τής (1.9) μπορεί κανείς να επικολλήσει στον $\mathbb{S}_1^1 \vee ... \vee \mathbb{S}_r^1$ ένα 2-κύτταρο. (Βλ. 1.16.1.)

• Επί παραδείγματι, για $r = 1$ και $g_n := i_1^n : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^1 \approx \mathbb{S}^1$, $z \longmapsto g_n(z) := z^n$, προσαρτώντας στον $\mathbb{S}^1$ ένα 2-κύτταρο μέσω τής g_n λαμβάνουμε

$$\mathbb{S}^1 \cup_{g_0} \mathfrak{e}^2 \approx \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1,\ \mathbb{S}^1 \cup_{g_1} \mathfrak{e}^2 \approx \mathbb{B}^2,\ \mathbb{S}^1 \cup_{g_n} \mathfrak{e}^2 \approx \mathbb{S}^1 \cup_{g_{-n}} \mathfrak{e}^2.$$

Κατά την πρόταση 1.16.2, ο $\mathbb{S}^1 \cup_{g_n} \mathfrak{e}^n$ δημιουργείται από την μπάλα $\mathbb{B}^2$ ύστερα από την ταύτιση δυο σημείων $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{B}^2$ εάν και μόνον εάν $\mathbf{x}^n = \mathbf{y}^n$. Όταν $n = 2$, τούτο σημαίνει ότι εκτελείται ταύτιση των αντιποδικών σημείων τού $\mathbb{S}^1$, οπότε $\mathbb{S}^1 \cup_{g_2} \mathfrak{e}^2 \approx \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Αυτός ο ομοιομορφισμός δίδει το έναυσμα για το ακόλουθο γενικό θεώρημα:

1.16.8 Θεώρημα. *Έστω g ένας φυσικός αριθμός ≥ 1. Εάν προσαρτήσουμε στη μονοσημειακή ένωση $\mathbb{S}_1^1 \vee ... \vee \mathbb{S}_{2g}^1$ (και αντιστοίχως, στην $\mathbb{S}_1^1 \vee ... \vee \mathbb{S}_g^1$) ένα 2-κύτταρο μέσω τής απεικονίσεως*

$$i_1 i_2 i_1^{-1} i_2^{-1} \cdots i_{2g-1} i_{2g} i_{2g-1}^{-1} i_{2g}^{-1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^1 \vee ... \vee \mathbb{S}_{2g}^1$$

(και αντιστοίχως, μέσω τής $i_1^2 i_2^2 \cdots i_g^2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^1 \vee ... \vee \mathbb{S}_g^1$), τότε αποκτούμε την $\mathcal{F}_g$ (βλ. ???) *(και αντιστοίχως, την $\mathcal{N}_g$, βλ. ???).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $h := i_1 i_2 i_1^{-1} i_2^{-1} \cdots i_{2g-1} i_{2g} i_{2g-1}^{-1} i_{2g}^{-1}$ η εν λόγω απεικόνιση και έστω $X_g := \mathbb{S}_1^1 \vee ... \vee \mathbb{S}_{2g}^1 \cup_h \mathfrak{e}^2$. Κατά την πρόταση 1.16.2 έχουμε $X_g \approx \mathbb{B}^2/\mathcal{S}$, όπου

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{S} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{B}^2 \ \text{ και } \ h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{y})].$$

Από τον ορισμό τής h διαβλέπουμε ότι ο κύκλος $\mathbb{S}^1$ διαιρείται σε $4g$ ίσα τόξα $B_1, B_2, ..., B_{4g}$ και η $\mathcal{S}$ ταυτίζει το B_j με το B_{j+2}, $\forall j \in \{1, 2, ..., 4g-2\}$, και μάλιστα κατά την αντίθετη φορά. Από την άλλη μεριά,

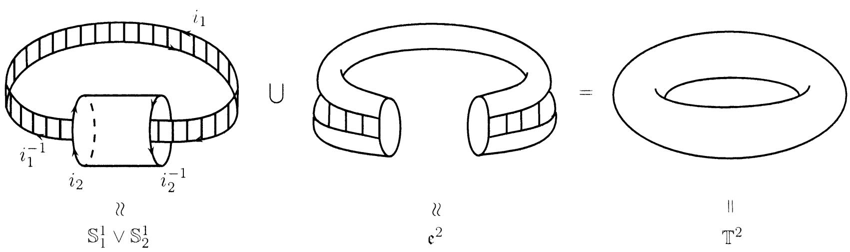
$$\mathcal{F}_g := \mathfrak{E}_{4g}/\mathcal{R} \ \text{(όπως στο ???)}.$$

Ο ομοιομορφισμός

$$\mathfrak{E}_{4g} \xrightarrow{\approx} \mathbb{B}^2,\ t\mathbf{x} \longmapsto \frac{t\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||},\ \forall \mathbf{x} \in \partial\mathfrak{E}_{4g},\ \forall t \in \mathbf{I},$$

καθώς και ο αντίστροφος του είναι συμβατοί προς τις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$. Κατά συνέπειαν, $\mathcal{F}_g \approx X_g$. (Βλ. πρόταση 1.10.5.) Η απόδειξη για την $\mathcal{N}_g$ είναι ανάλογη. $\square$

1.16.9 Σημείωση. Κατά το θεώρημα 1.16.8 η μονοσημειακή ένωση $\mathbb{S}^1_1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1_{2g}$ μπορεί να εμφυτευθεί κατά τέτοιον τρόπο εντός τής $\mathcal{F}_g$, ώστε το συμπλήρωμά της να είναι ένα 2-κύτταρο. Ως εκ τούτου, κατόπιν αποκοπής $2g$ (πεπλατυσμένων) περιγραμμάτων κύκλων από την $\mathcal{F}_g$ αποκτούμε ένα 2-κύτταρο. (Το ίδιο συμβαίνει και για την $\mathcal{N}_g$ κάνοντας χρήση g περιγραμμάτων κύκλων.) Το κάτωθι σχήμα εξηγεί εποπτικώς αυτή τη διαδικασία για τον τόρο $\mathbb{T}^2 = \mathcal{F}_1$:



Σχήμα 1.??

$\boxed{1.17}$ ΟΜΟΤΟΠΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΕΧΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΜΟΤΟΠΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ

Η «ομοτοπία» αποτελεί μία από τις πλέον θεμελιώδεις έννοιες τής Τοπολογίας.

1.17.1 Ορισμός. Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και $f, g : X \longrightarrow Y$ δυο συνεχείς απεικονίσεις. Μια συνεχής απεικόνιση

$$H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y \tag{1.10}$$

καλείται **ομοτοπία από την f στην g** (και οι f, g **ομότοπες**) όταν

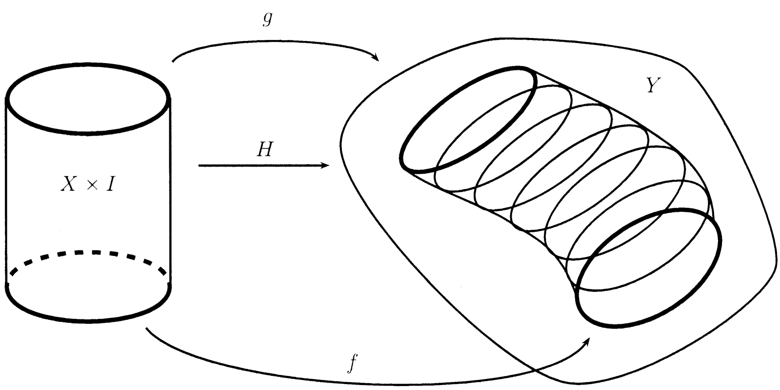
$$H(x,0) = f(x) \ \text{ και } \ H(x,1) = g(x), \ \forall x \in X.$$

Κάθε ομοτοπία (1.10) από την f στην g ορίζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια απεικονίσεων

$$H_t(x) := H(x,t), \ \forall t \in \mathbf{I}, \ \text{ με } \ H_0 = f \ \text{ και } \ H_1 = g.$$

Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός:

$$\boxed{f \simeq g \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} [\text{οι } f \text{ και } g \text{ είναι ομότοπες}].}$$



Σχήμα 1.??

1.17.2 Πρόταση. *Η "$\simeq$" αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τής κλάσεως όλων των συνεχών απεικονίσεων $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X και Y.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. *Αυτοπάθεια.* Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, τότε $f \simeq f$ μέσω τής ομοτοπίας

$$X \times \mathbf{I} \ni (x,t) \longmapsto H(x,t) := f(x) \in Y.$$

Συμμετρικότητα. Εάν $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι μια ομοτοπία από την f στην g, τότε η ακόλουθη είναι μια ομοτοπία από την g στην f:

$$X \times \mathbf{I} \ni (x,t) \longmapsto H^{-}(x,t) := H(x, 1-t) \in Y.$$

Μεταβατικότητα. Εάν $H_1 : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ και $H_2 : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπίες από την f στην g και από την g στην h, αντιστοίχως, τότε ορίζουμε την $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ μέσω τού τύπου

$$H(x,t) := \begin{cases} H_1(x, 2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(x, 2t-1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Αυτή η H είναι *καλώς ορισμένη*, διότι $H_1(x,1) = g(x) = H_2(x,0)$. Επιπροσθέτως, είναι *συνεχής* (λόγω τής προτάσεως 1.4.6) και ισχύει $H(x,0) = H_1(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = H_2(x,1) = h(x)$. Άρα η H είναι ομοτοπία από την f στην h. □

1.17.3 Συμβολισμός. Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ θα σημειώνουμε με το σύμβολο $[f]^{\text{ομ.}}_{X,Y}$ την κλάση ισοδυναμίας της ως προς την "$\simeq$", ήτοι[70]

$$[f]^{\text{ομ.}}_{X,Y} := \{ h : X \longrightarrow Y \text{ συνεχής} \mid f \simeq h \}$$

(που καλείται, ιδιαιτέρως, και **κλάση ομοτοπίας τής** f).

[70]Προφανώς, $[f]^{\text{ομ.}}_{X,Y} = [g]^{\text{ομ.}}_{X,Y} \Leftrightarrow f \simeq g$.

1.17.4 Πρόταση. *Η "$\simeq$" είναι συμβατή με τη σύνθεση συνεχών απεικονίσεων, δηλαδή εάν οι $f, g : X \longrightarrow Y$ και $f', g' : Y \longrightarrow Z$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, τότε ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:* $[f \simeq g \text{ και } f' \simeq g'] \Longrightarrow f' \circ f \simeq g' \circ g$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $H_1 : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ και $H_2 : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπίες από την f στην g και από την f' στην g', αντιστοίχως, τότε ορίζουμε την

$$H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y,\ (x,t) \longmapsto H(x,t) := H_2(f(x),t).$$

Αυτή είναι προδήλως *συνεχής*, $H(x,0) = H_2(f(x),0) = f'(f(x)) = (f' \circ f)(x)$ και

$$H(x,1) = H_2(f(x),1) = g'(f(x)) = (g' \circ f)(x).$$

Εν συνεχεία, παρατηρούμε ότι για τη σύνθεση $H' := g' \circ H_1$ (που είναι προδήλως *συνεχής*) ισχύει $H'(x,0) = (g' \circ H_1)(x,0) = g'(f(x)) = (g' \circ f)(x)$ και

$$H'(x,1) = (g' \circ H_1)(x,1) = g'(g(x)) = (g' \circ g)(x).$$

Εξ αυτών έπεται ότι

$$\left.\begin{array}{l} f' \circ f \simeq g' \circ f \\ g' \circ f \simeq g' \circ g \end{array}\right\} \underset{1.17.2}{\Longrightarrow} f' \circ f \simeq g' \circ g,$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

1.17.5 Σημείωση. Λόγω των προτάσεων 1.17.2 και 1.17.4, θέτοντας για οιουσδήποτε $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top})$

$$[X,Y]_{\text{ομ.}} := \{[f]^{\text{ομ.}}_{X,Y} \,|\, f : X \longrightarrow Y \ \text{ συνεχής}\},$$

δημιουργείται η λεγομένη *κατηγορία ομοτοπίας* $\mathfrak{Htp}$ με $\mathrm{Ob}(\mathfrak{Htp}) = \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top})$ και $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Htp}}(X,Y) := [X,Y]_{\text{ομ.}}$ καθώς ορίζεται καλώς η σύνθεση

$$[X,Y]_{\text{ομ.}} \times [Y,Z]_{\text{ομ.}} \longrightarrow [X,Z]_{\text{ομ.}},\ \ (f,f') \longmapsto [f']^{\text{ομ.}}_{Y,Z} \circ [f]^{\text{ομ.}}_{X,Y} := [f' \circ f]^{\text{ομ.}}_{X,Z},$$

η οποία πληροί τις ιδιότητες (i) και (ii) τού εδ. F.1.1.

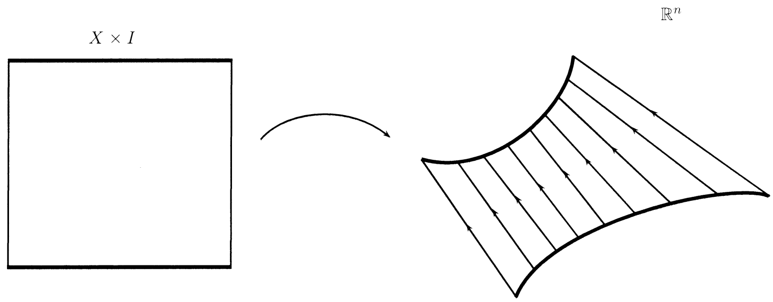
1.17.6 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων καλείται **μηδενοομοτοπική** όταν $f \simeq \mathrm{const}_{y_0}$, για κάποιο $y_0 \in Y$, όπου $\mathrm{const}_{y_0}(x) := y_0$ για κάθε $x \in X$. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται **συσταλτός** (contractible) όταν η ταυτοτική απεικόνιση id_X είναι μηδενοομοτοπική.

1.17.7 Παραδείγματα. (i) Εάν οι $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι οι απεικονίσεις οι οριζόμενες από τους τύπους $f(x) := (x, x^2)$ και $g(x) := (x, x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η $H(x,t) := (x, x^2 - tx^2 + tx)$ είναι μια ομοτοπία από την f στην g.

(ii) Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος. Τότε οιεσδήποτε συνεχείς απεικονίσεις

$f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ομότοπες. Μια συγκεκριμένη ομοτοπία από την f στην g είναι η λεγομένη **ομοτοπία των ευθυγράμμων τμήματων**:

$$H(x,t) := (1-t)f(x) + tg(x),\ \forall (x,t) \in X \times \mathbf{I}.$$



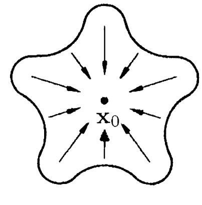
Σχήμα 1.??

(iii) Εάν Y είναι ένας τοπολογικός χώρος και $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση, τότε η f είναι μηδενοομοτοπική. (Αρκεί προς τούτο να θεωρηθεί η ομοτοπία $H(\mathbf{x},t) := f((1-t)\mathbf{x})$, $\forall (\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbf{I}$.)

(iv) Η σύνθεση μιας μηδενοομοτοπικής απεικονίσεως με μια τυχούσα συνεχή απεικόνιση είναι μηδενοομοτοπική. (Βλ. πρόταση 1.17.4.)

(v) Οι συσταλτοί τοπολογικοί χώροι είναι δρομοσυνεκτικοί (και, κατ' επέκταση, συνεκτικοί). Το να είναι ένας χώρος συσταλτός αποτελεί μια *τοπολογική ιδιότητα*. (Εάν ο X είναι συσταλτός, τότε και κάθε τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός τού X είναι συσταλτός). Επί παραδείγματι, μέσω τής ομοτοπίας $H(\mathbf{x},t) := (1-t)\mathbf{x}$ διαπιστώνουμε ότι οι χώροι $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{B}^n$ είναι συσταλτοί. Ως εκ τούτου, *όλα τα κύτταρα* και *όλες οι μπάλες* είναι χώροι *συσταλτοί*.

(vi) Ένας υπόχωρος X τού $\mathbb{R}^n$ καλείται **αστρόμορφος** όταν υπάρχει ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in X$, τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα το οριζόμενο από το $\mathbf{x}_0$ και το $\mathbf{x}$ ανήκει στον X, $\forall \mathbf{x} \in X$. Η ομοτοπία $H(\mathbf{x},t) := (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{x}_0$, $\forall (\mathbf{x},t) \in X \times \mathbf{I}$, δείχνει ότι οι αστρόμορφοι (και, ιδιαιτέρως, οι κυρτοί[71]) υπόχωροι τού $\mathbb{R}^n$ είναι συσταλτοί.



Σχήμα 1.??

[71] Ένας υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ καλείται, ως γνωστόν, **κυρτός** (convex) όταν το ευθύγραμμο τμήμα το οριζόμενο από δύο *τυχόντα* σημεία του $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ανήκει πάντοτε σε αυτόν. Προφανώς, *κάθε* κυρτός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ *είναι* αστρόμορφος (star shaped). Ωστόσο, το αντίστροφο δεν είναι πάντοτε αληθές. (Επί παραδείγματι, το υποσύνολο τού $\mathbb{R}^2$ που δείχνεται στο σχήμα ?? είναι αστρόμορφο και *μη κυρτό*.)

(vii) Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος. Κάθε συνεχής, μη επιρριπτική απεικόνιση $f : X \longrightarrow \mathbb{S}^n$ είναι μηδενοομοτοπική. Έστω $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{S}^n \smallsetminus f(X)$.
Πρώτη απόδειξη: Κάθε f αυτού τού είδους είναι η σύνθεση τής

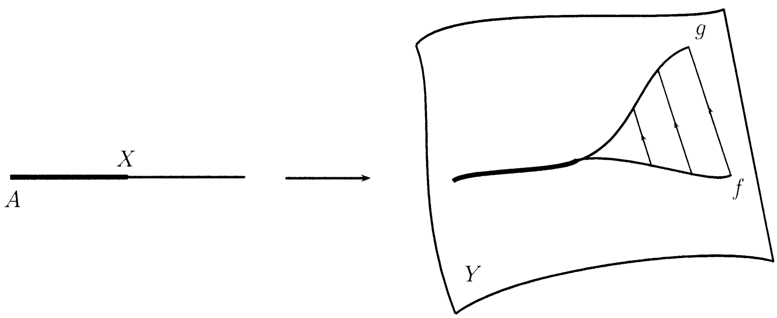
$$X \longrightarrow \mathbb{S}^n \smallsetminus \{\mathbf{y}_0\}, \ \ x \longmapsto f(x),$$

με την ένθεση $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{\mathbf{y}_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$. Επειδή το κύτταρο $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{\mathbf{y}_0\}$ είναι συσταλτό, η f είναι μηδενοομοτοπική.
Δεύτερη απόδειξη: Το ευθύγραμμο τμήμα το συνδέον τα $f(x)$ και $-\mathbf{y}_0$ εντός τού $\mathbb{R}^{n+1}$ δεν περιέχει το $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (διότι αλλιώς θα είχαμε $\mathbf{y}_0 = f(x) \in f(X)$). Επομένως η

$$X \times \mathbf{I} \ni (x,t) \longmapsto H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) - t\mathbf{y}_0}{||(1-t)f(x) - t\mathbf{y}_0||} \in \mathbb{S}^n$$

είναι μια ομοτοπία από την f στη σταθερή απεικόνιση $x \longmapsto -\mathbf{y}_0$, $\forall x \in X$.

1.17.8 Ορισμός. Εάν $f, g : X \longrightarrow Y$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων και ο A υπόχωρος τού X, τέτοιος ώστε να ισχύει $f|_A \simeq g|_A$, τότε οι f και g ονομάζονται **ομότοπες σχετικώς προς τον** A (συμβολικώς: $f \simeq g$ ΣΧ. A) όταν υπάρχει μια ομοτοπία $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ από την f στην g *σχετικώς προς το* A, ήτοι με $H(a,t) = f(a) = g(a)$ για κάθε $a \in A$. (Τα σημεία $f(a) = g(a)$, $a \in A$, δεν επηρεάζονται κατά την εφαρμογή τής H.)



Σχήμα 1.??

1.17.9 Πρόταση. *Η "$\simeq$ ΣΧ. A" αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τής κλάσεως όλων των συνεχών απεικονίσεων $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X και Y, όπου A οιοσδήποτε παγιωμένος υπόχωρος τού X.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πανομοιότυπη εκείνης τής προτάσεως 1.17.2. $\square$

1.17.10 Συμβολισμός. Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ θα σημειώνουμε με το σύμβολο $[f]^{\text{ομ.}}_{(X,A),Y}$ την κλάση ισοδυναμίας της ως προς την "$\simeq$ ΣΧ. A", όπου

A κάποιος παγιωμένος υπόχωρος τού X, ήτοι

$$[f]^{\text{ομ.}}_{(X,A),Y} := \{\, h : X \longrightarrow Y \;\text{ συνεχής}|\, f \simeq h \;\Sigma\text{Χ}.A\}$$

(που καλείται, ιδιαιτέρως, και **κλάση ομοτοπίας τής** f **σχετικώς προς τον** A).

1.17.11 Πρόταση. *Έστω $p : X \longrightarrow Y$ μια ταυτισμική απεικόνιση (υπό την έννοια τού ορισμού 1.10.7) και έστω $H : Y \times \mathbf{I} \longrightarrow Z$ μια απεικόνιση, τέτοια ώστε η σύνθεση $H \circ (p\times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}) : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Z$ να είναι μια ομοτοπία. Τότε και η H είναι μια ομοτοπία.*

Απόδειξη. Εξ υποθέσεως, η $H \circ (p\times \mathrm{id}_{\mathbf{I}})$ είναι συνεχής. Επειδή το $\mathbf{I}$ είναι συμπαγές, είναι εύκολο να δειχθεί ότι η $p\times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}$ είναι ταυτισμική, οπότε η H οφείλει να είναι συνεχής (επί τη βάσει τού 1.10.7 (iii)). □

1.17.12 Πόρισμα. *Εάν οι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, επί των οποίων έχουν ορισθεί σχέσεις ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$, αντιστοίχως, και η $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ μια ομοτοπία συμβατή με αυτές* (*δηλ.* $x \sim_{\mathcal{R}} x' \Longrightarrow H(x,t) \sim_{\mathcal{S}} H(x',t),\ \forall t \in \mathbf{I}$), *τότε μέσω τής H επάγεται μια ομοτοπία*

$$\overline{H} : X/\mathcal{R} \times \mathbf{I} \longrightarrow Y/\mathcal{S},\ \ ([x]_{\sim_{\mathcal{R}}}, t) \longmapsto [H([x]_{\sim_{\mathcal{R}}}, t)]_{\sim_{\mathcal{S}}}.$$

1.17.13 Παράδειγμα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω

$$\mathrm{cone}(X) := X \times \mathbf{I}/X \times \{1\}$$

ο κώνος υπεράνω τού X (ο ορισθείς στο εδ. 1.10.11 (ii)). Η απεικόνιση

$$H : (X \times \mathbf{I}) \times \mathbf{I} \longrightarrow X \times \mathbf{I},\ \ ((x,s),t) \longmapsto (x, (1-t)s + t),$$

είναι μια ομοτοπία με $H(X \times \mathbf{I}, t) = X \times \{1\}$, $\forall t \in \mathbf{I}$. Κατά συνέπειαν, επάγεται μια ομοτοπία

$$\overline{H} : \mathrm{cone}(X) \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathrm{cone}(X).$$

Επειδή $\overline{H}_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{cone}(X)}$ και $\overline{H}_1(\mathrm{cone}(X)) = [X \times \{1\}]_{\sim}$, ο κώνος $\mathrm{cone}(X)$ είναι χώρος συσταλτός.

Ένα πλήθος προβλημάτων τής Τοπολογίας αποτελούν ειδικές περιπτώσεις τού λεγομένου *προβλήματος τής επεκτάσεως*: Εάν δοθεί ένας τοπολογικός χώρος X, ένας υπόχωρος $A \subseteq X$, καθώς και μια συνεχής απεικόνιση $f : A \longrightarrow Y$, υφίσταται κάποια συνεχής απεικόνιση $g : X \longrightarrow Y$, ούτως ώστε $f = g|_A$;

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, dashed, "\exists g;"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
A \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Επί παραδείγματι, δυο συνεχείς απεικονίσεις $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικές εάν και μόνον εάν η απεικόνιση

$$(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \longrightarrow Y,\ (x, 0) \longmapsto f_0(x),\ (x, 1) \longmapsto f_1(x)$$

είναι (συνεχώς) επεκτάσιμη επί τού κυλίνδρου $X \times \mathbf{I}$. (Ως εκ τούτου, το πρόβλημα (υπάρξεως) ομοτοπίας αποτελεί ειδική περίπτωση τού *προβλήματος τής επεκτάσεως*, το οποίο είναι επιλύσιμο μόνον *υπό συγκεκριμένους περιορισμούς*.)

1.17.14 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένας υπόχωρος $A \subseteq X$ καλείται **σύμπτυξη τού** X (retract of X) όταν υπάρχει μια **απεικόνιση συμπτύξεως** (retraction map) $r : X \longrightarrow A$, ήτοι μια συνεχής απεικόνιση με $r|_A = \mathrm{id}_A$.

1.17.15 Παραδείγματα. (i) Κάθε τοπολογικός X είναι σύμπτυξη τού εαυτού του. Επίσης, κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ αποτελούμενο από ένα σημείο x ενός τοπολογικού X είναι σύμπτυξη τού X.

(ii) Εάν B είναι σύμπτυξη τού A και A σύμπτυξη τού X, τότε και ο B είναι σύμπτυξη τού X.

(iii) Εάν δοθούν δυο τοπολογικοί χώροι X, Y, τότε ο υπόχωρος X (ή ο υπόχωρος Y) τής μονοσημειακής ενώσεως $X \vee Y$ είναι σύμπτυξη τής $X \vee Y$. Επίσης, εάν $y_0 \in Y$, τότε ο $X \times \{y_0\}$ είναι σύμπτυξη τού $X \times Y$.

(iv) Οι συμπτύξεις χώρων Hausdorff είναι πάντοτε κλειστοί υπόχωροι.

1.17.16 Σημείωση. Οι όροι *σύμπτυξη* και *ομοτοπία* εισήχθησαν περί το έτος 1931 από τον K. Borsuk[72]. Για μια πρώτη επαφή με τη γενική θεωρία των συμπτύξεων βλ. Hu [49].

K. Borsuk

[72]Borsuk, *Karol* (8/5/1905-24/1/1982). Πολωνός μαθηματικός. Καθηγητής τού Πανεπιστημίου τής Βαρσοβίας από το 1938. Έγραψε αξιόλογες εργασίες επί τής Τοπολογίας και των θεμελίων τής πολυδιάστατης Αναλυτικής Γεωμετρίας. Είναι αυτός που εισήγαγε τις έννοιες «σύμπτυξη», «απόλυτη σύμπτυξη» και «ομοτοπία», όπως τις γνωρίζουμε σήμερα. Ο Borsuk διακρίθηκε ιδιαιτέρως για τα άρθρα του επί τής θεωρίας των σταθερών σημείων.

1.17.17 Πρόταση. *Δοθέντων δυο τοπολογικών χώρων X, Y και ενός κλειστού υπόχωρου $A \subseteq X$, μια συνεχής απεικόνιση $f : A \longrightarrow Y$ είναι (συνεχώς) επεκτάσιμη επί τού X εάν και μόνον εάν ο Y είναι σύμπτυξη τού $Y \cup_f X$.* (Βλ. ορισμό 1.10.12.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $p : X + Y \longrightarrow Y \cup_f X$ η φυσική επίρριψη. Εάν $g : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής επέκταση τής f, τότε η σύνθεση $(g+ \mathrm{id}_Y) \circ p^{-1} : Y \cup_f X \longrightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση συμπτύξεως. (Πρβλ. πρόταση 1.10.5.) Και αντιστρόφως· εάν η $r : Y \cup_f X \longrightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση συμπτύξεως, τότε η σύνθεση $g := r \circ (p|_X)$ είναι μια συνεχής επέκταση τής f. □

1.17.18 Πρόταση. *Έστω Y τυχών τοπολογικός χώρος. Τότε μια συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow Y$ είναι μηδενοομοτοπική εάν και μόνον εάν είναι (συνεχώς) επεκτάσιμη επί τής μπάλας $\mathbb{B}^{n+1}$ (δηλαδή εάν και μόνον εάν ο Y είναι σύμπτυξη τού $Y \cup_f e^{n+1}$).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $g : \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow Y$ μια συνεχής επέκταση τής f. Τότε η

$$H : \mathbb{S}^n \times \mathbf{I} \longrightarrow Y,\ (\mathbf{x}, t) \longmapsto H(\mathbf{x}, t) := g(t\mathbf{x}),$$

είναι ομοτοπία με $H_0 =$ σταθερά και $H_1 = f$. Εάν η $H : \mathbb{S}^n \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι, αντιστρόφως, μια ομοτοπία με $H(\mathbb{S}^n \times \{0\}) = y_0 \in Y$ και $H(\mathbf{x}, 1) = f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}^n$, τότε η απεικόνιση

$$p : \mathbb{S}^n \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{B}^{n+1},\ p(\mathbf{x}, t) := t\mathbf{x},\ \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{S}^n \times \mathbf{I},$$

είναι ταυτισμική, οπότε η $g := H \circ p^{-1}$ είναι συνεχής (βλ. 1.10.5) και $g|_{\mathbb{S}^n} = f$. □

Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι ομοιομορφισμός όταν υπάρχει συνεχής $g : Y \longrightarrow X$ με $g \circ f = \mathrm{id}_X$ και $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Εάν κανείς αντικαταστήσει τις ισότητες με "$\simeq$", τότε προκύπτει η ακόλουθη σημαντική έννοια (τής *ομοτοπικής ισοδυναμίας*):

1.17.19 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X και Y καλείται **ομοτοπική ισοδυναμία** όταν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $g : Y \longrightarrow X$ με $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ και $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός:

$$\boxed{X \simeq Y \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\exists \text{ κάποια ομοτοπική ισοδυναμία } f : X \longrightarrow Y].}$$

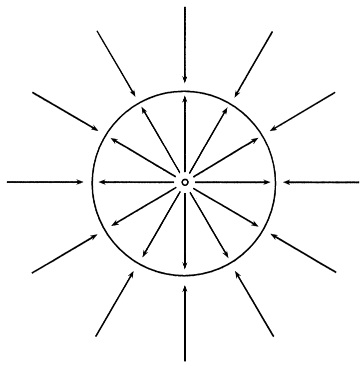
(Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι οι X και Y είναι **ομοτοπικώς ισοδύναμοι** ή ότι **διαθέτουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο**[73].)

[73]Κατ' αναλογίαν, ο συμβολισμός $X \not\simeq Y$ θα δηλοί ότι οι X και Y δεν είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι.

1.17.20 Παράδειγμα. Ο $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ έχει τον ομοτοπικό τύπο τής $\mathbb{S}^{n-1}$. Πράγματι, εάν $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ είναι η συνήθης ένθεση και

$$g : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \ \mathbf{x} \longmapsto g(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||},$$

τότε $g \circ i \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ και $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ μέσω τής $H(\mathbf{x}, t) := (1-t)\mathbf{x} + tg(\mathbf{x})$. Η περίπτωση, κατά την οποία $n = 2$, εικογραφείται στο σχήμα ??. Τα βέλη υποδεικνύουν το πώς τα σημεία κινούνται κατά τη σταδιακή εφαρμογή τής ομοτοπίας H.



Σχήμα 1.??

Φυσικά, ομοιομορφικοί χώροι διαθέτουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο. Για τις συνεκτικές, συμπαγείς επιφάνειες ισχύει κάτι ακόμη πιο ισχυρό:

1.17.21 Θεώρημα. *Δυο συνεκτικές συμπαγείς επιφάνειες είναι ομοιομορφικές εάν και μόνον εάν είναι ομοτοπικώς ισοδύναμες.*

Ωστόσο, υπάρχουν πάμπολλα συνεκτικά, συμπαγή τοπολογικά πολυπτύγματα διαστάσεως ≥ 3, τα οποία είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα αλλά όχι ομοιομορφικά. Κάποια απλά παραδείγματα πολυπτυγμάτων αυτού τού είδους προκύπτουν άμεσα εάν κανείς ανακαλέσει το θεώρημα τής ταξινομήσεως των χώρων φακού *μέχρις ομοτοπικής ισοδυναμίας*.

1.17.22 Θεώρημα. (Ταξινόμηση χώρων φακού μέχρις “ $\simeq$ ”, Whitehead [127], 1941.)

Δυο χώροι φακού $\mathbb{L}(p, q)$ *και* $\mathbb{L}(p', q')$ *είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι εάν και μόνον εάν*[74] $p = p'$ *και* $q \equiv \pm k^2 q' (\mathrm{mod}\, p)$ *για κάποιον* $k \in \{1, ..., p-1\}$.

[74] Εάν υποτεθεί ότι $\mathbb{L}(p, q) \simeq \mathbb{L}(p', q')$, για μια απλή απόδειξη τού ότι ικανοποιούνται κατ' ανάγκην αυτές οι αριθμητικές συνθήκες, βλ. Hilton & Wylie [48], σελ. 223-225.

1.17.23 Παράδειγμα. Για τα τριδιάστατα (συνεκτικά, συμπαγή) τοπολογικά πολυπτύγματα $\mathbb{L}(7,1)$ και $\mathbb{L}(7,2)$ έχουμε

$$\mathbb{L}(7,1) \simeq \mathbb{L}(7,2) \ \text{ αλλά } \ \mathbb{L}(7,1) \not\approx \mathbb{L}(7,2),$$

διότι $2 \equiv 3^2 (\bmod 7)$ & $2 \not\equiv \pm 1 (\bmod 7)$ (βάσει των θεωρημάτων 1.17.22 και 1.14.4).

Το αντίστοιχο τού θεωρήματος ταξινομήσεως 1.17.22 για *γενικευμένους* χώρους φακού έχει ως εξής:

1.17.24 Θεώρημα. **(Ταξινόμηση γεν. χώρων φακού μέχρις " $\simeq$ ", Olum [88], 1953.)** *Για δυο γενικευμένους χώρους φακού*

$$\mathbb{L} := \mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, ...q_n) \ \text{ και } \ \mathbb{L}' := \mathbb{L}_{2n-1}(p'; q_1', ..., q_n')$$

ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$\boxed{\mathbb{L} \simeq \mathbb{L}' \Longleftrightarrow \left[p = p' \ \text{ και } \left\{ \begin{array}{l} \prod\limits_{j=1}^{n} q_j \equiv \pm k^n \prod\limits_{j=1}^{n} q_j' (\bmod p), \\ \text{για κάποιον } k \in \{1, ..., p-1\} \end{array} \right\} \right].}$$

Αποδειξη. Για μια *διεξοδική* αλγεβροτοπολογική απόδειξη βλ. Cohen [18], §29, σελ. 91-97, και -ειδικότερα- Thm. (29.1), σελ. 96. □

1.17.25 Πρόταση. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός εάν και μόνον εάν έχει τον ομοτοπικό τύπο ενός σημείου.*

Αποδειξη. Δοθέντος ενός σημείου $x_0 \in X$, σημειώνουμε ως $c_{x_0} : X \longrightarrow \{x_0\}$ τη σταθερή απεικόνιση και ως $i : \{x_0\} \hookrightarrow X$ τη συνήθη ένθεση. Εάν $\mathrm{id}_X \simeq c_{x_0}$, τότε οι προηγούμενες απεικονίσεις δείχνουν ότι $X \simeq \{x_0\}$. Και αντιστρόφως· εάν μας δοθούν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \longrightarrow \{x_0\}$ και $g : \{x_0\} \hookrightarrow X$, με $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ και $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\{x_0\}}$, τότε η id_X είναι ομότοπη τής $x \longmapsto g(x_0)$. □

1.17.26 Ορισμός. Έστω A ένας υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X και έστω $i : A \hookrightarrow X$ η συνήθης ένθεση. Τότε ο A καλείται **παραμορφωτική σύμπτυξη τού** X (deformation retract of X) όταν υπάρχει μια απεικόνιση συμπτύξεως[75] $r : X \longrightarrow A$ (βλ. 1.17.14) για την οποία ισχύει $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$. Εάν, επιπροσθέτως, $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ ΣΧ. A (βλ. εδ. 1.17.8), τότε ο A καλείται **ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού** X (strong deformation retract of X).

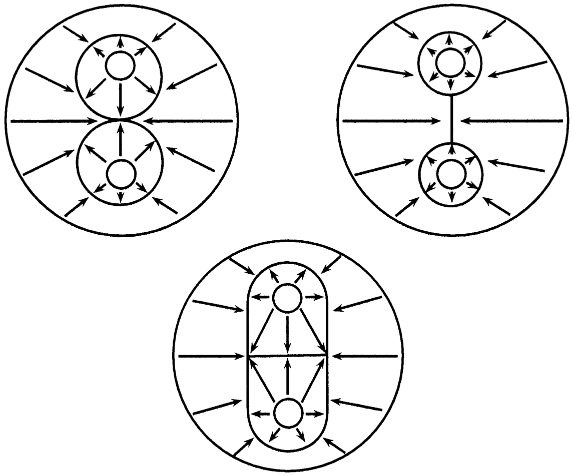
1.17.27 Σημείωση. Εάν ο A είναι παραμορφωτική σύμπτυξη τού X, τότε $A \simeq X$.

[75] Προφανώς, $r \circ i = \mathrm{id}_A$.

1.17.28 Παραδείγματα. (i) Η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη των $\mathbb{B}^n \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ (ή ακόμα και τού $\mathbb{B}^n \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\}$, όπου $\mathbf{x}_0 \in \mathring{\mathbb{B}}^n$). Η απόδειξη κάνει χρήση τής ομοτοπίας τής ορισθείσας στο παράδειγμα 1.17.20.

(ii) Εάν B είναι παραμορφωτική (και αντιστοίχως, ισχυρή παραμορφωτική) σύμπτυξη τού A και A παραμορφωτική (και αντιστοίχως, ισχυρή παραμορφωτική) σύμπτυξη τού X, τότε και ο B είναι παραμορφωτική (και αντιστοίχως, ισχυρή παραμορφωτική) σύμπτυξη τού X.

(iii) Το κάτωθι σημα δείχνει (κατά σειράν) τις ακόλουθες παραμορφωτικές συμπτύξεις ενός δίσκου ($\approx \mathbb{B}^2$) που φέρει δύο τρύπες: τη μονοσημειακή ένωση δύο κύκλων (γνωστή και ως *περίγραμμα τού αριθμού* 8), δύο κύκλους συνδεδεμένους μέσω ενός ευθυγράμμου τμήματος και έναν χώρο που ομοιάζει με το γράμμα Θ.



Σχήμα 1.??

(iv) Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε τόσον το «δάπεδο» $X \times \{0\}$ όσον και η «οροφή» $X \times \{1\}$ τού (μοναδιαίου) κυλίνδρου $X \times \mathbf{I}$ (βλ. 1.10.11 (ii)) είναι ισχυρές παραμορφωτικές συμπτύξεις τού $X \times \mathbf{I}$. Επίσης, η κορυφή τού $\mathrm{cone}(X)$ είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη αυτού.

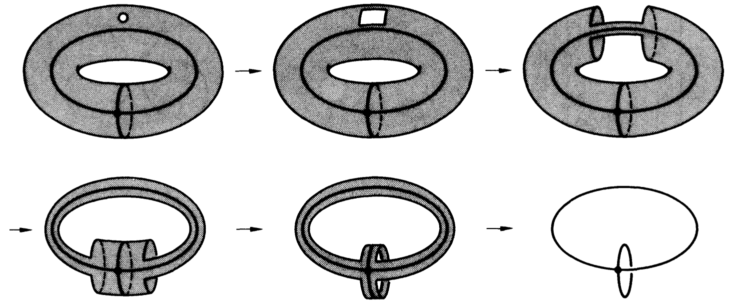
(v) Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και $\{y_0\}$ ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού Y (όπου $y_0 \in Y$), τότε ο $X \times \{y_0\}$ είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $X \times Y$ και ο X ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $X \vee Y$.

1.17.29 Πρόταση. *Έστω A ένας κλειστός υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X και έστω $f : A \longrightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Εάν ο A είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού X, τότε ο Y είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $Y \cup_f X$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ μια ομοτοπία σχετική προς το A (βλ. 1.17.8) με $H_0 = \mathrm{id}_X$ και $H_1(X) = A$. Τότε η επαγομένη ομοτοπία: $(X \times Y) \times \mathbf{I} \longrightarrow X + Y$

είναι συμβατή με τη σχέση ισοδυναμίας $a \sim f(a)$, $a \in A$, και (λόγω τού 1.17.12) η ομοτοπία $\overline{H} : (Y \cup_f X) \times \mathbf{I} \longrightarrow Y \cup_f X$ με $\overline{H}_0 = \mathrm{id}_{Y \cup_f X}$ και $\overline{H}_1(Y \cup_f X) = Y$ μας οδηγεί στην επαλήθευση τού ισχυρισμού. □

1.17.30 Παράδειγμα. Εάν κανείς απομακρύνει ένα σημείο από την $\mathcal{F}_g$ (και αντιστοίχως, από την $\mathcal{N}_g$), τότε αποκτά έναν χώρο ο οποίος έχει τη μονοσημειακή ένωση $\mathbb{S}^1_1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1_k$ με $k = 2g$ (και αντιστοίχως, με $k = g$) ως ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξή του. (Πρβλ. θεώρημα 1.16.8.) Το κάτωθι σχήμα εικονογραφεί αυτήν την ιδιότητα για τον τόρο $\mathcal{F}_1 = \mathbb{T}^2$.



Σχήμα 1.??

1.18 ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΑ ΖΕΥΓΗ

1.18.1 Ορισμός. Ένα **τοπολογικό ζεύγος** (X, A) είναι ένα (διατεταγμένο) ζεύγος αποτελούμενο από έναν τοπολογικό χώρο X και έναν υπόχωρό του A. (Σύμβαση: Όταν $A = \varnothing$, τότε το $(X, \varnothing)$ ταυτίζεται με τον ίδιον τον X.) Λέμε ότι ένα τοπολογικό ζεύγος (X, A) είναι **υποζεύγος** ενός τοπολογικού ζεύγους (X', A') όταν ο X είναι υπόχωρος τού X' και ο A υπόχωρος τού A' (Συμβολισμός: $(X, A) \subseteq (X', A')$.)

1.18.2 Ορισμός. Μια **συνεχής απεικόνιση** $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ μεταξύ τοπολογικών ζευγών είναι μια συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ για την οποία ισχύει ο εγκλεισμός $f(A) \subseteq B$. Όταν μια τέτοια απεικόνιση f συμβαίνει να είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των X και Y, και $f(A) = B$, τότε η f καλείται **ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών** (και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $(X, A) \approx (Y, B)$).

1.18.3 Σημείωση. Η *κατηγορία* $\mathfrak{Top}$ *των τοπολογικών χώρων* (με τις συνεχείς απεικονίσεις ως μορφισμούς της και τους ομοιομορφισμούς ως τους $\mathfrak{Top}$-ισομορφισμούς) μπορεί να ιδωθεί ως πλήρης υποκατηγορία τής *κατηγορίας* $\mathfrak{Top}^{[2]}$ *των τοπολογικών ζευγών* (η οποία έχει ως αντικείμενά της τα τοπολογικά ζεύγη, ως μορφισμούς της τις συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών ζευγών και ως $\mathfrak{Top}^{[2]}$-ισομορφισμούς της τους ομοιομορφισμούς τοπολογικών ζευγών). Πρβλ. (v) και (vi) τού εδαφίου F.1.5.

1.18.4 Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι X είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$ (όπου $n \geq 1$) με $\mathrm{int}(X) \neq \varnothing$. Τότε υπάρχει ένας ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών $(X, \mathrm{Fr}(X)) \approx (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$. Πράγματι· θεωρώντας ένα $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{int}(X)$, οιοδήποτε $\mathbf{x} \in \mathrm{Fr}(X)$ αποτελεί το μοναδικό μεθοριακό σημείο τού X, το οποίο ανήκει στην ημιευθεία με αφετηρία το $\mathbf{x}_0$ και διέρχεται από το $\mathbf{x}$. (Αλλιώς είτε το X δεν θα ήταν κυρτό είτε το $\mathbf{x}_0$ δεν θα ήταν εσωτερικό σημείο τού X.) Κατά συνέπειαν, ορίζεται καλώς η $\mathrm{Fr}(X) \ni \mathbf{x} \overset{\approx}{\longmapsto} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||} \in \mathbb{S}^{n-1}$ και, κατ' επέκταση, ο ομοιομορφισμός

$$f : X \overset{\approx}{\longrightarrow} \mathbb{B}^n,\ \ f((1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}) := t\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||},\ \forall t \in \mathbf{I},$$

με $f(\mathrm{Fr}(X)) = \mathbb{S}^{n-1}$. Π.χ., $(I^n, \mathrm{Fr}(I^n)) \approx (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$.

1.18.5 Πρόταση. *Μέσω οιασδήποτε απεικονίσεως μεταξύ τοπολογικών ζευγών*

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B),$$

όπου το A κλειστό $\subsetneq X$ και το B κλειστό $\subsetneq Y$, επάγεται μια συνεχής απεικόνιση $\overline{f} : X/A \longrightarrow Y/B$. Εάν, μάλιστα, η f είναι ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών, τότε η $\overline{f}$ είναι ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από την πρόταση 1.10.5 και τον ορισμό 1.10.10. □

1.18.6 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών ζευγών

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

καλείται **σχετικός ομοιομορφισμός** όταν ο περιορισμός $f|_{X \smallsetminus A}$ απεικονίζει το $X \smallsetminus A$ ομοιομορφικώς επί τού $Y \smallsetminus B$.

Από την 1.10.2 (ii) έπεται η ακόλουθη:

1.18.7 Πρόταση. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω A ένας κλειστός υπόχωρός του. Εάν ως $p : X \longrightarrow X/A$ συμβολίσουμε τη φυσική επίρριψη επί τού X/A* (βλ. 1.10.10), *τότε η $p : (X, A) \longrightarrow (X/A, p(A))$ είναι σχετικός ομοιομορφισμός.*

1.18.8 Πόρισμα. *Εάν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, ο A ένας κλειστός υπόχωρος του, $f : A \longrightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση με πεδίο τιμών του έναν τοπολογικό χώρο Y, $Y \cup_f X$ ο πηλικόχωρος ο δημιουργούμενος μέσω τής f* (βλ. 1.10.12), *$p : X + Y \longrightarrow Y \cup_f X$ η φυσική επίρριψη και $p|_X : X \longrightarrow Y \cup_f X$ ο περιορισμός της επί τού X, τότε η $p|_X : (X, A) \longrightarrow (Y \cup_f X, Y)$ είναι σχετικός ομοιομορφισμός.*

1.18.9 Παράδειγμα. Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση και $p : \mathbb{B}^n + X \longrightarrow X \cup_f \mathbb{B}^n$, $\mathfrak{e}^n := p(\mathring{\mathbb{B}}^n) \subseteq X \cup_f \mathbb{B}^n$ (συμβολισμοί όπως στο εδάφιο 1.16.1), τότε η $p|_{\mathbb{B}^n} : (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (X \cup_f e^n, X)$ είναι σχετικός ομοιομορφισμός.

1.18.10 Παράδειγμα. Εάν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, d όπως στην (1.8) και

$$p_n : \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}, \quad \boldsymbol{\phi}_k : \mathbb{B}^{dn} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

όπως στο εδάφιο 1.16.4, τότε η $\boldsymbol{\phi}_k : (\mathbb{B}^{dn}, \mathbb{S}^{dn-1}) \longrightarrow (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}, \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}})$ (ιδιωμένη ως συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών) είναι σχετικός ομοιομορφισμός.

Κατ' αναλογίαν ορίζεται και η έννοια τής *ομοτοπίας* σε «επίπεδο τοπολογικών ζευγών».

1.18.11 Ορισμός. Το **καρτεσιανό γινόμενο** δυο τοπολογικών ζευγών (X, A) και (Y, B) ορίζεται ως εξής: $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$. Ως εκ τούτου, ο (μοναδιαίος) **κύλινδρος** $(X, A) \times \mathbf{I}$ υπεράνω ενός τοπολογικού ζεύγους (X, A) είναι το τοπολογικό ζεύγος $(X \times \mathbf{I}, A \times \mathbf{I})$ (ταυτίζοντας το $\mathbf{I}$ με το $(\mathbf{I}, \varnothing)$).

1.18.12 Ορισμός. Εάν $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών ζευγών, τότε μια **ομοτοπία από την f στην** g είναι μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών $H : (X, A) \times \mathbf{I} \longrightarrow (Y, B)$, όπου η $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι (συνήθης) ομοτοπία από την f στην g (υπό την έννοια τού ορισμού 1.17.1) για την οποία ισχύει $H(A \times \mathbf{I}) \subseteq B$. (Σε αυτήν την περίπτωση οι f, g λέγονται **ομότοπες** και σημειώνονται ως $f \simeq g$. Η "$\simeq$" αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.)

Μια σημαντική, ειδική περίπτωση τού 1.18.12 είναι αυτή κατά την οποία καθένας εκ των A, B αποτελείται από ένα και μόνον σημείο.

1.18.13 Ορισμός. Ένα τοπολογικό ζεύγος τής μορφής $(X, \{x_0\})$, όπου $x_0 \in X$, ονομάζεται **τοπολογικός χώρος με σημείο αναφοράς** (ή **βασικό σημείο του**) **το** x_0. (Ενίοτε, ένας τέτοιος τοπολογικός χώρος καλείται **εστιγμένος χώρος** (pointed space)). Λέμε ότι μια συνεχής απεικόνιση τής μορφής $f : (X, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\})$ (ή μια ομοτοπία τής μορφής $H : (X, \{x_0\}) \times \mathbf{I} \longrightarrow (Y, \{y_0\})$) διατηρεί το σημείο αναφοράς. Επίσης, για δυο συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών ζευγών $f, g : (X, \{\mathrm{x}_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\})$ έχουμε

$$f \simeq g : (X, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\}) \Longleftrightarrow f \simeq g \;\; \Sigma\mathrm{X}.\; \{x_0\}.$$

1.18.14 Σημείωση. Η *κατηγορία των εστιγμένων τοπολογικών χώρων* $\mathfrak{Top}^{\text{εστ.}}$ (έχουσα τις συνεχείς απεικονίσεις $f : (X, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\})$ με $f(x_0) = y_0$ ως μορφισμούς της) αποτελεί μια πλήρη υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$. (Βλ. F.1.5 (vii).)

1.18.15 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών ζευγών

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

καλείται **ομοτοπική ισοδυναμία τοπολογικών ζευγών** όταν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών ζευγών $g : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ με

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,A)} : (X, A) \longrightarrow (X, A) \;\text{ και }\; f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,B)} : (Y, B) \longrightarrow (Y, B)$$

(υπό την έννοια τού ορισμού 1.18.12). Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι τα τοπολογικά ζεύγη (X, A) και (Y, B) είναι **ομοτοπικώς ισοδύναμα**. (Συνήθης συμβολισμός: $f : (X, A) \xrightarrow{\simeq} (Y, B)$ ή απλώς $(X, A) \simeq (Y, B)$.)

1.18.16 Σημείωση. Εάν $f : (X, A) \xrightarrow{\simeq} (Y, B)$, τότε προφανώς $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ και $f|_A : A \xrightarrow{\simeq} B$. Ωστόσο, το αντίστροφο δεν είναι πάντοτε αληθές!

1.18.17 Παράδειγμα. Έστω $X := \mathbf{I} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbf{I} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times \mathbf{I}) \subseteq \mathbb{R}^2$ ο λεγόμενος **χώρος τής χτένας** και έστω $P := (0, 1)$. Το $\{P\}$ είναι παραμορφωτική σύμπτυξη τού X. (Αρκεί κανείς να παραμορφώσει συνεχώς τον X αρχικώς επί τού $\mathbf{I} \times \{0\}$, κατόπιν το $\mathbf{I} \times \{0\}$ επί τού $\{Q\}$, όπου $Q := (0, 0)$, και τέλος το $\{Q\}$ κατά μήκος τού $\{0\} \times \mathbf{I}$ επί τού $\{P\}$.) Το $\{P\}$ *δεν είναι ισχυρή* παραμορφωτική σύμπτυξη τού X. (Τούτο έγκειται στο ότι τα σημεία τού X, τα οποία είναι γειτονικά τού P, οφείλουν σε κάθε παραμόρφωση τού X επί τού $\{P\}$ να διανύουν τον δρόμο τον διερχόμενον από το Q, οπότε το P δεν είναι δυνατόν (μέσω μια τέτοιας διαδικασίας) να παραμείνει σταθερό.) Έστω $\mathrm{const}_P : X \longrightarrow X$ η σταθερή απεικόνιση $\mathrm{const}_P(\mathbf{x}) := P$, $\forall \mathbf{x} \in X$. Τότε αμφότερες οι const_P και $\mathrm{const}_P|_{\{P\}}$ είναι ομοτοπικές ισοδυναμίες, ενώ η $\mathrm{const}_P : (X, \{P\}) \longrightarrow (X, \{P\})$ δεν είναι ομοτοπική ισοδυναία τοπολογικών ζευγών (υπό την έννοια τού ορισμού 1.18.15).

1.19 ΜΟΝΟΠΛΕΚΤΙΚΑ ΣΥΜΠΛΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΙΣΙΜΟΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Στην παρούσα ενότητα εισάγεται η έννοια τού *μονοπλεκτικού συμπλέγματος*, με τη βοήθεια τού οποίου ορίζονται οι λεγόμενοι *τριγωνίσιμοι τοπολογικοί χώροι.*

1.19.1 Ορισμός. (i) Ένα υποσύνολο A ενός ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ καλείται **συσχετικό** (affine) (και αντιστοίχως, **κυρτό** (convex)) όταν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, η ευθεία η οποία προσδιορίζεται από τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ (και αντιστοίχως, το ευθύγραμμο τμήμα[76] το οποίο καθορίζεται από τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$) περιέχεται στο A.

(ii) Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε ορίζεται ως **συσχετική θήκη** (affine hull) **τού** A το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{aff}(A) := \cap\{B \subseteq \mathbb{R}^n \mid B \text{ συσχετικό και } A \subseteq B\}}$$

και ως **κυρτή θήκη** (convex hull) **τού** A το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{conv}(A) := \bigcap\{B \subseteq \mathbb{R}^n \mid B \text{ κυρτό και } A \subseteq B\}.}$$

[76]Προφανώς, κάθε συσχετικό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$ είναι κυρτό.

(iii) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται **συσχετικός συνδυασμός** των σημείων $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ όταν μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

$$\mathbf{x} = t_0\mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{x}_1 + ... + t_m\mathbf{x}_m, \text{ όπου } t_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \{0, ..., m\}, \text{ και } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1. \tag{1.11}$$

(iv) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται **κυρτός συνδυασμός** των σημείων $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ όταν μπορεί να γραφεί ως συσχετικός συνδυασμός (1.11) αυτών, όπου το t_j είναι *μη αρνητικός* πραγματικός αριθμός για κάθε $j \in \{0, 1, ..., m\}$.

1.19.2 Πρόταση. *Εάν $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$, τότε η $\mathrm{conv}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ ισούται με το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών τους.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω Ξ το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών τους.

► $\underline{\mathrm{conv}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}) \subseteq \Xi}$: Προς τούτο αρκεί να δειχθεί ότι το Ξ είναι ένα κυρτό σύνολο περιέχον το $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}$. Προφανώς,

$$\mathbf{x}_j = 0 \cdot \mathbf{x}_0 + ... + 0 \cdot \mathbf{x}_{j-1} + 1 \cdot \mathbf{x}_j + 0 \cdot \mathbf{x}_{j+1} + ... + 0 \cdot \mathbf{x}_m,$$

οπότε $\mathbf{x}_j \in \Xi$, $\forall j \in \{0, ..., m\}$. Επιπροσθέτως, εάν $\mathbf{x} = \sum\limits_{j=0}^{m} t_j\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}' = \sum\limits_{j=0}^{m} t'_j\mathbf{x}_j \in \Xi$, όπου $t_j, t'_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\forall j \in \{0, ..., m\}$ και $\sum\limits_{j=0}^{m} t_j = \sum\limits_{j=0}^{m} t'_j = 1$, τότε για κάθε $s \in [0, 1]$ έχουμε

$$s\mathbf{x} + (1-s)\mathbf{x}' = \sum_{j=0}^{m} (st_j + (1-s)t'_j)\mathbf{x}_j$$

με

$$\sum_{j=0}^{m} (st_j + (1-s)t'_j) = s(\sum_{j=0}^{m} t_j) + (1-s)(\sum_{j=0}^{m} t'_j) = s + (1-s) = 1$$

και $st_j + (1-s)t'_j \geq 0$, διότι καθένας εκ των προσθετέων είναι μη αρνητικός. Κάθε συνέπειαν, το $s\mathbf{x} + (1-s)\mathbf{x}'$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$ ανήκων στο Ξ.

► $\underline{\mathrm{conv}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}) \supseteq \Xi}$: Εάν X είναι οιοδήποτε κυρτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$ περιέχον το $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n\}$, τότε αρκεί να αποδειχθεί ότι $\Xi \subseteq X$. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή επί τού $m \geq 0$. Για $m = 0$ έχουμε $\Xi = \{\mathbf{x}_0\}$, οπότε $\Xi \subseteq X$. Έστω $m > 0$. Θεωρώντας $m + 1$ μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς $t_0, t_1, ..., t_m$, για τους οποίους ισχύει $\sum_{j=0}^{m} t_j = 1$, θα αποδείξουμε ότι το $\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j\mathbf{x}_j$ ανήκει στο X. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_0 \neq 1$ (διότι εν εναντία περιπτώσει θα ήταν $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in X$). Επειδή το

$$\mathbf{y} := 0 \cdot \mathbf{x}_0 + \left(\tfrac{t_1}{1-t_0}\right)\mathbf{x}_1 + ... + \left(\tfrac{t_m}{1-t_0}\right)\mathbf{x}_m$$

είναι ένα κυρτός συνδυασμός των $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{y} \in X$, οπότε και το $\mathbf{x} = t_0\mathbf{x}_0 + (1 - t_0)\mathbf{y}$ ανήκει στο X (καθότι το X υπετέθη κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^n$). $\square$

Η απόδειξη τής κατωτέρω προτάσεως είναι παρόμοια εκείνης τής 1.19.2.

1.19.3 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$, *τότε η* $\mathrm{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ *ισούται με το σύνολο όλων των συσχετικών συνδυασμών τους. (* Βλ. 1.19.1 (iii)).

1.19.4 Ορισμός. Ένα (διατεταγμένο) σύνολο σημείων $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **συσχετικώς ανεξάρτητο** όταν το $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο[77] υποσύνολο τού (διανυσματικού χώρου) $\mathbb{R}^n$.

1.19.5 Πρόταση. *Για ένα (διατεταγμένο) σύνολο σημείων* $\{x_0, ..., x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

(i) *Το* $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}$ *είναι συσχετικώς ανεξάρτητο.*

(ii) *Εάν* $s_0, ..., s_m \in \mathbb{R}$ *με* $\sum_{j=0}^{m} s_j\mathbf{x}_j = 0$ *και* $\sum_{j=0}^{m} s_j = 0$, *τότε* $s_0 = \cdots = s_m = 0$.

(iii) *Κάθε σημείο* $\mathbf{x} \in \mathrm{aff}(\{x_0, ..., x_m\})$ *γράφεται* ***μονοσημάντως*** *ως συσχετικός συνδυασμός* $\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j\mathbf{x}_j$ (με $\sum_{j=0}^{m} t_j = 1$) *των* $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Υποθέτοντας ότι $\sum_{j=0}^{m} s_j\mathbf{x}_j = 0$ και $\sum_{j=0}^{m} s_j = 0$ λαμβάνουμε

$$\sum_{j=0}^{m} s_j\mathbf{x}_j = \sum_{j=0}^{m} s_j\mathbf{x}_j - \left(\sum_{j=0}^{m} s_j\right)\mathbf{x}_j = \sum_{j=0}^{m} s_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} s_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0).$$

Επειδή το $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\}$ είναι (εξ υποθέσεως) $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο, $s_1 = ... = s_m = 0$. Επιπροσθέτως, $s_0 = 0$, καθόσον $\sum_{j=0}^{m} s_j = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{x} \in \mathrm{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$. Κατά την πρόταση 1.19.3 το $\mathbf{x}$ γράφεται ως εξής: $\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j\mathbf{x}_j$, όπου $t_0, ..., t_m \in \mathbb{R}$ και $\sum_{j=0}^{m} t_j = 1$. Εάν το $\mathbf{x}$ εγράφετο υπό τη μορφή $\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{m} t'_j\mathbf{x}_j$, για κάποια $t'_0, ..., t'_m \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $\sum_{j=0}^{m} t'_j = 1$, τότε $0 = \sum_{j=0}^{m}(t_j - t'_j)\mathbf{x}_j$ και $\sum_{j=0}^{m}(t_j - t'_j) = 1 - 1 = 0$, οπότε $t_j - t'_j = 0 \Rightarrow t_j = t'_j$, $\forall j \in \{0, ..., m\}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Ας υποθέσουμε ότι κάθε $\mathbf{x} \in \mathrm{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ γράφεται μονοσημάντως ως συσχετικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$ και ότι το $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένο. Τότε υπάρχουν $r_0, ..., r_m \in \mathbb{R}$, με τουλάχιστον ένα εξ αυτών διαφορετικό τού μηδενός, τέτοιο ώστε να ισχύει $0 = \sum_{j=0}^{m} r_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0)$. Έστω $b \in \{0, ..., m\}$ με $r_k \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας -εν ανάγκη- την ανωτέρω ισότητα με r_k^{-1} μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r_k = 1$. Το $\mathbf{x}_k$ γράφεται ως εξής

$$\mathbf{x}_k = 1 \cdot \mathbf{x}_k = -\sum_{j \in \{0,...,m\} \setminus \{k\}} r_j\mathbf{x}_j + (1 + \sum_{j \in \{0,...,m\} \setminus \{k\}} r_j)\mathbf{x}_0,$$

[77] Εν τοιαύτη περιπτώσει, λέμε ότι τα σημεία $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m$ είναι τοποθετημένα **σε γενική θέση** εντός τού $\mathbb{R}^n$.

δηλαδή κατά δύο διαφορετικούς τρόπους. Άτοπο! □

1.19.6 Πόρισμα. *Η συσχετική ανεξαρτησία είναι μια ιδιότητα τού συνόλου* $\{\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m\}$ *που δεν εξαρτάται από την (όποια δοθείσα) διάταξη των* $\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m$.

1.19.7 Ορισμός. Εάν το $\{\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο, τότε, σύμφωνα με την πρόταση 1.19.5, για κάθε $\mathrm{x} \in \mathrm{aff}(\{\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m\})$ υπάρχουν μονοσημάντως ορισμένα $t_0, ..., t_m \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν οι ισότητες $\sum_{j=0}^{m} t_j = 1$ και $\mathrm{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j \mathrm{x}_j$. Αυτά τα $t_0, ..., t_m$ καλούνται **βαρυκεντρικές συντεταγμένες τού** x **(ως προς το διατεταγμένο σύνολο** $\{\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m\}$**)**.

1.19.8 Ορισμός. Εάν το $\{\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο, τότε το

$$\boxed{[\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m] := \mathrm{conv}(\{\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m\})}$$

καλείται m**-διάστατο (κλειστό) μονόπλοκο** (ή -συντομότερα- m**-μονόπλοκο**) **με κορυφές τα σημεία** $\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m$.

1.19.9 Πρόταση. *Κάθε σημείο* x *ενός (κλειστού)* m*-μονοπλόκου (με κορυφές του τα* $\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m$*) γράφεται μονοσημάντως υπό την μορφή*

$$\mathrm{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j \mathrm{x}_j, \text{ όπου } t_j \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \forall j \in \{0, ..., m\}, \text{ και } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βάσει τής προτάσεως 1.19.2 κάθε σημείο $\mathrm{x} \in \mathrm{conv}(\{\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m\})$ είναι κυρτός συνδυασμός αυτής τής μορφής. Εάν ένα $\mathrm{x} \in \mathrm{conv}(\{\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m\})$ εγράφετο κατά δύο διαφορετικούς τρόπους ως κυρτός συνδυασμός των $\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m$, τότε οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του δεν θα ήταν μονοσημάντως ορισμένες, κάτι το οποίο θα αντέκειτο σε ό,τι απεδείχθη μέσω τής προτάσεως 1.19.5. □

1.19.10 Σημείωση. Εάν το $\{\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο και ως

$$\boxed{\mathfrak{s} := \mathfrak{s}_m := [\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m] := \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathrm{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j \mathrm{x}_j \text{ με } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1 \text{ και } t_0, .., t_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}},$$

και -αντιστοίχως- ως

$$\boxed{\overset{\circ}{\mathfrak{s}} := \overset{\circ}{\mathfrak{s}}_m := \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathrm{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j \mathrm{x}_j \text{ με } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1 \text{ και } t_0, ..., t_m \in \mathbb{R}_{>0} \right\}},$$

συμβολίσουμε το m-μονόπλοκο και -αντιστοίχως- το λεγόμενο **ανοικτό** m**-μονόπλοκο** με κορυφές τα $\mathrm{x}_0, ..., \mathrm{x}_m$, τότε το $\mathfrak{s}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο τού

$\mathbb{R}^n$, ενώ το $\mathring{\mathfrak{s}}$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$, με μόνη εξαίρεση την περίπτωση κατά την οποία $m = n$. Εάν αντί τού $\mathbb{R}^n$ χρησιμοποιήσουμε τον υπόχωρό του aff$(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$, τότε το $\mathfrak{s}$ είναι ένα συμπαγές, κυρτό υποσύνολο τού aff$(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ έχον το $\mathring{\mathfrak{s}}$ ως εσωτερικό του (βλ. 1.19.5) και το $\partial\mathfrak{s} := \mathfrak{s} \smallsetminus \mathring{\mathfrak{s}}$ ως μεθόριο του (βλ. 1.2.15 (ii)). Επειδή το aff$(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$, ως συσχετικός χώρος, είναι ισόμορφος τού $\mathbb{R}^m$, μπορεί κανείς να εφαρμόσει το 1.18.4 προκειμένου να αποδείξει την ύπαρξη ενός ομοιομορφισμού τοπολογικών ζευγών:

$$\boxed{(\mathfrak{s}, \partial\mathfrak{s}) \approx (\mathbb{B}^m, \mathbb{S}^{m-1}).}$$

1.19.11 Ορισμός. Εάν το $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ είναι συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο και $\mathfrak{s} := [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]$, τότε το σημείο

$$\boxed{\mathrm{bar}(\mathfrak{s}) := \tfrac{1}{m+1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + ... + \mathbf{x}_m).}$$

καλείται **βαρύκεντρο τού** $\mathfrak{s}$.

Η πρόταση που ακολουθεί θα χρησιμοποιηθεί κατά τρόπο ουσιαστικό για την απόδειξη ενός θεμελιώδους θεωρήματος (που αφορά στις ιδιότητες τής ιδιάζουσας ομολογίας).

1.19.12 Πρόταση. *Εάν το* $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subsetneqq \mathbb{R}^n$ *είναι συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο και* $\mathfrak{s} = [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]$, *τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) *Εάν* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{s}$, *τότε*

$$||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| \leq \max\{||\mathbf{u} - \mathbf{x}_j|| : 0 \leq j \leq m\}.$$

(ii) *Η διάμετρος τού* $\mathfrak{s}$ (βλ. εδ. 1.8.17) *δίδεται από τον τύπο*

$$\boxed{\mathrm{diam}(\mathfrak{s}) = \max\{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|| : 0 \leq i, j \leq m\}.}$$

(iii) *Για το βαρύκεντρο* $\mathrm{bar}(\mathfrak{s})$ *τού* $\mathfrak{s}$ *ισχύει η εξής ανισοϊσότητα:*

$$\boxed{||\mathrm{bar}(\mathfrak{s}) - \mathbf{x}_j|| \leq \tfrac{m}{m+1}\mathrm{diam}(\mathfrak{s}),\ \forall j \in \{0, 1, ..., m\}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Το $\mathbf{v}$ γράφεται μονοσημάντως υπό την μορφή

$$\mathbf{v} = \sum_{j=0}^{m} t_j \mathbf{x}_j, \text{ για κάποια } t_0, ..., t_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ με } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1.$$

(Βλ. πρόταση 1.19.9.) Επομένως,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &= ||\mathbf{u} - \sum_{j=0}^{m} t_j \mathbf{x}_j|| = ||(\sum_{j=0}^{m} t_j)\mathbf{u} - \sum_{j=0}^{m} t_j \mathbf{x}_j|| = ||\sum_{j=0}^{m} t_j(\mathbf{u} - \mathbf{x}_j)|| \\ &\leq \sum_{j=0}^{m} |t_j| \cdot ||\mathbf{u} - \mathbf{x}_j|| \leq \underbrace{(\sum_{j=0}^{m} t_j)}_{=1} \max\{||\mathbf{u} - \mathbf{x}_j|| : 0 \leq j \leq m\}. \end{aligned}$$

(ii) Εφαρμόζοντας το (i), αλλά αυτήν την φορά θέτοντας το $\mathbf{x}_i$ στη θέση τού $\mathbf{u}$, λαμβάνουμε $||\mathbf{x}_i - \mathbf{v}|| \leq \max\{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|| : 0 \leq i, j \leq m\}$, οπότε

$$\text{diam}(\mathfrak{s}) = \max\{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|| : 0 \leq i, j \leq m\}.$$

(iii) Προφανώς,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{x}_j - \text{bar}(\mathfrak{s})|| &= ||\mathbf{x}_j - \tfrac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\mathbf{x}_k|| = ||\tfrac{1}{m+1}\sum_{k\in\{0,\ldots,m\}\smallsetminus\{j\}}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)|| \\ &\leq \tfrac{1}{m+1}\sum_{k\in\{0,\ldots,m\}\smallsetminus\{j\}}||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|| \leq \tfrac{m}{m+1}\max\{||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|| : 0 \leq j, k \leq m\} \\ &= \tfrac{m}{m+1}\text{diam}(\mathfrak{s}), \end{aligned}$$

οπότε και ο τελευταίος ισχυρισμός είναι αληθής. □

1.19.13 Ορισμός. Έστω $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subsetneqq \mathbb{R}^n$ ένα συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο. Κάθε απεικόνιση $\Theta : \text{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $(k \neq 1)$ που πληροί τη συνθήκη

$$\Theta(\sum_{j=0}^{m} t_j\mathbf{x}_j) = \sum_{j=0}^{m} t_j\Theta(\mathbf{x}_j), \text{ για οιαδήποτε } t_0, ..., t_m \in \mathbb{R} \text{ με } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1,$$

καλείται **συσχετική απεικόνιση**. (Ο περιορισμός $\Theta|_{[t_0,\ldots,t_m]}$ μιας τέτοιας Θ καλείται ωσαύτως **συσχετική απεικόνιση**.)

Οι συσχετικές απεικονίσεις στέλνουν συσχετικούς (και αντιστοίχως, κυρτούς) συνδυασμούς να απεικονισθούν σε συσχετικούς (και αντιστοίχως, κυρτούς) συνδυασμούς· είναι, μάλιστα, προφανές ότι κάθε συσχετική απεικόνιση προσδιορίζεται πλήρως όταν είναι γνωστές οι τιμές της σε καθένα των στοιχείων ενός συσχετικώς ανεξαρτήτου συνόλου. Επιπροσθέτως, από τη μοναδικότητα των βαρυκεντρικών συντεταγμένων (βλ. 1.19.5 και 1.19.7) ως προς ένα (συσχετικώς ανεξάρτητο) σύνολο $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ έπεται άμεσα η ύπαρξη μιας συσχετικής απεικονίσεως Θ όπως στον ορισμό 1.19.13.

1.19.14 Πρόταση. *Εάν το $[\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]$ είναι ένα m-μονόπλοκο, το $[y_0, ..., y_k]$ ένα k-μονόπλοκο και η $f : [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] \longrightarrow [y_0, ..., y_k]$ οιαδήποτε απεικόνιση, τότε υπάρχει μια μονοσημάντως ορισμένη συσχετική απεικόνιση $\Theta : [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] \longrightarrow [y_0, ..., y_k]$ η οποία πληροί τη συνθήκη*

$$\Theta(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_j), \ \forall j \in \{0, 1, ..., m\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάθε $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]$ γράφεται, σύμφωνα με την πρόταση 1.19.9, μονοσημάντως υπό τη μορφή

$$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j\mathbf{x}_j, \text{ όπου } t_0, ..., t_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ και } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1.$$

Μέσω τού τύπου $\Theta(\mathbf{x}) = \Theta(\sum_{j=0}^{m} t_j \mathbf{x}_j) := \sum_{j=0}^{m} t_j f(\mathbf{x}_j)$ ορίζεται η ζητουμένη συσχετική απεικόνιση Θ. $\square$

1.19.15 Ορισμός. Έστω $\mathfrak{s} = [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]$ ένα m-μονόπλοκο. Συμβολίζουμε ως $\mathrm{Vert}(\mathfrak{s}) := \{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}$ **το σύνολο των κορυφών του**. Ονομάζουμε **πλευρά** τού $\mathfrak{s}$ κάθε μονόπλοκο $\mathfrak{s}'$ με $\mathrm{Vert}(\mathfrak{s}') \subseteq \mathrm{Vert}(\mathfrak{s})$. Συμβολισμός:

$$\mathfrak{s}' \preceq \mathfrak{s} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\text{το } \mathfrak{s}' \text{ είναι μια πλευρά τού } \mathfrak{s}]$$

$$\mathfrak{s}' \prec \mathfrak{s} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\mathfrak{s}' \preceq \mathfrak{s} \text{ και } \mathfrak{s}' \neq \mathfrak{s}].$$

(Όταν $\mathfrak{s}' \prec \mathfrak{s}$, τότε λέμε ότι το $\mathfrak{s}'$ είναι μια **γνήσια πλευρά** τού $\mathfrak{s}$.)

1.19.16 Σημείωση. (i) Εάν το $\mathfrak{s}$ είναι ένα m-μονόπλοκο, τότε το πλήθος των k-μονοπλόκων, τα οποία αποτελούν πλευρές τού $\mathfrak{s}$, ισούται με $\binom{m+1}{k+1}$.

(ii) Εάν $\mathfrak{s}' \preceq \mathfrak{s}$ και $\mathfrak{s}'' \preceq \mathfrak{s}'$, τότε $\mathfrak{s}'' \preceq \mathfrak{s}$.

(iii) Το $\partial\mathfrak{s}$ ενός μονοπλόκου $\mathfrak{s}$ ισούται με την αποσυνδετή ένωση $\coprod_{\mathfrak{s}' \prec \mathfrak{s}} (\mathfrak{s}')^{\circ}$.

1.19.17 Ορισμός. Ένα **(ευκλείδειο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα** (simplicial complex) K είναι μια συλλογή μονοπλόκων εντός ενός ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ με τις ακόλουθες ιδιότητες[78]:

(i) Εάν $\mathfrak{s} \in K$, τότε και κάθε πλευρά τού $\mathfrak{s}$ ανήκει στο K.

(ii) Εάν $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \in K$, τότε η τομή $\mathfrak{s}_1 \cap \mathfrak{s}_2$ είναι είτε κενή είτε κοινή πλευρά των $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$.

(iii) Κάθε σημείο ενός μονοπλόκου ανήκοντος στο K διαθέτει μια ανοικτή περιοχή η οποία έχει μη κενή τομή με *το πολύ πεπερασμένου πλήθους* μονόπλοκα τού K.

1.19.18 Παράδειγμα. Εάν K είναι ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα εντός τού $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \mathbb{R}^n$, τότε ο **κώνος** $\mathrm{cone}_{\mathbf{v}}(K)$ **υπεράνω τού** K (έχων ως κορυφή του το $\mathbf{v}$) είναι εκείνο το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (εντός τού $\mathbb{R}^{n+1}$) το οποίο αποτελείται από το 0-μονόπλοκο $\{\mathbf{v}\}$ και τα μονόπλοκα $[\mathbf{v}, \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]$ για κάθε $[\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] \in K$.

1.19.19 Ορισμός. Έστω K ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Τα στοιχεία τού $\mathrm{Vert}(K) := \bigcup_{\mathfrak{s} \in K} \mathrm{Vert}(\mathfrak{s})$ καλούνται **κορυφές τού** K, ενώ η **διάσταση** $\dim(K)$ **τού** K ορίζεται ως εξής[79]: $\dim(K) := \max\{\dim(\mathfrak{s}) : \mathfrak{s} \in K\}$.

[78] Προσοχή! Εδώ υιοθετείται ο ορισμός που δίδεται, π.χ., στους Lee [63], σελ. 149 (τής δεύτερης εκδόσεως), και Moise [81], σελ. 3. Σε ορισμένα βιβλία απαιτείται από το K να απαρτίζεται από *πεπερασμένου πλήθους* μονόπλοκα (οπότε η (iii) ικανοποιείται αυτομάτως, αλλά ο εν λόγω περιορισμός αποκλείει πολλά χρήσιμα παραδείγματα). Από την άλλη μεριά, υπάρχουν και βιβλία (όπως εκείνο τού Munkres [83], σελ. 13-14) στα οποία η (iii) *παραλείπεται* στον αρχικό ορισμό και τα K που την πληρούν καλούνται, ιδιαιτέρως, *τοπικώς πεπερασμένα*.

[79] Επειδή τα μονόπλοκα τού K ανήκουν σε κάποιον $\mathbb{R}^n$, η διάσταση καθενός εξ αυτών είναι προφανώς $\leq n$.

1.19.20 Ορισμός. Λέμε ότι ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα είναι **πεπερασμένο** όταν διαθέτει πεπερασμένου πλήθους μονόπλοκα.

1.19.21 Ορισμός. Έστω K ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (εντός τού $\mathbb{R}^n$). Λέμε ότι το

$$\boxed{|K| := \bigcup_{\mathfrak{s} \in K} \mathfrak{s} \subseteq \mathbb{R}^n,}$$

εφοδιαζόμενο με την ασθενή τοπολογία 1.15.1:

$$[\text{το } A \text{ είναι ανοικτό} \subseteq |K|] \underset{\text{ορσ.}}{\iff} \left[\begin{array}{c} \text{το } A \cap \mathfrak{s} \text{ είναι ανοικτό} \\ \text{υποσύνολο τού } \mathfrak{s},\ \forall \mathfrak{s} \in K \end{array}\right],$$

είναι **ο τοπολογικός χώρος ο υποκείμενος στο** K. Όταν το K είναι *πεπερασμένο*, αυτή η τοπολογία ταυτίζεται[80] με τη *σχετική* τοπολογία τού $|K|$ εντός τού $\mathbb{R}^n$.

1.19.22 Σημείωση. (i) Προσοχή! Το K είναι σύνολο, ενώ το $|K|$ είναι τοπολογικός χώρος.

(ii) Ο $|K|$ είναι χώρος Hausdorff.

(iii) Ο $|K|$ είναι τοπικά συμπαγής· επίσης, είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν το K είναι πεπερασμένο.

(iv) Ο $|K|$ είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός[81]. Επομένως, βάσει τού (ii) τής προτάσεως 1.9.30, ο $|K|$ είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν είναι δρομοσυνεκτικός.

(v) Εάν τα K, L είναι μονοπλεκτικά συμπλέγματα και $|K| \approx |L|$, τότε από το θεώρημα 1.5.5 έπεται ότι $\dim(K) = \dim(L)$. (Βλ. [102], σελ. 136.)

1.19.23 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται **τριγωνίσιμος χώρος** (ή **τοπολογικό πολύεδρο**) όταν υπάρχει κάποιο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K και ένας ομοιομορφισμός

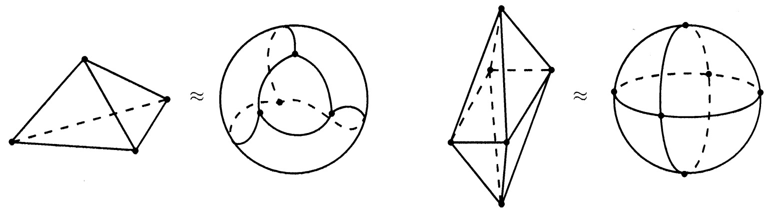
$$h : |K| \xrightarrow{\approx} X.$$

(Άρα οι «δομικοί λίθοι», από τους οποίους κατασκευάζονται τα τοπολογικά πολύεδρα, είναι εικόνες μονοπλόκων μέσω ομοιομορφισμών.) Ένα τέτοιο ζεύγος (K, h) καλείται **τριγωνισμός** (triangulation) τού X. (Μάλιστα, όταν το K είναι *πεπερασμένο*, αυτός λέγεται **πεπερασμένος τριγωνισμός** και ο X **τοπολογικό πολύτοπο**.)

[80] Εάν το K δεν είναι πεπερασμένο, τότε αυτή η τοπολογία ενδέχεται να είναι λεπτότερη τής σχετικής τοπολογίας. Για δυο απτά παραδείγματα βλ. [83], Ex. 2 & 3, σελ. 9.

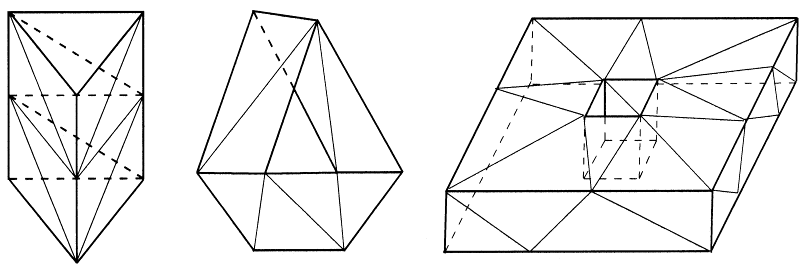
[81] Πρβλ. 1.20.6 (ii) και θεώρημα 1.20.27.

1.19.24 Παραδείγματα. (i) Οι κορυφές, οι ακμές και οι έδρες ενός τετραέδρου ή ενός οκταέδρου αποτελούν ένα πεπερασμένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα, ο υποκείμενος χώρος τού οποίου είναι ομοιομορφικός τής σφαίρας $\mathbb{S}^2$. Ως εκ τούτου, η $\mathbb{S}^2$ είναι ένα τοπολογικό πολύτοπο. Επιπροσθέτως, τριγωνίσιμοι τοπολογικοί χώροι μπορούν να διαθέτουν διαφορετικούς τριγωνισμούς.



Σχήμα 1.??

(ii) Στο κάτωθι σχήμα δίδονται (κατά σειράν) τριγωνισμοί τού (μοναδιαίου) κυλίνδρου τού οριζόμενου υπεράνω τού κύκλου $\mathbb{S}^1$, τής ταινίας τού Mobius (βλ. εδάφιο 1.10.4 (iv)) και τού τόρου $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.



Σχήμα 1.??

(iii) Το σύνολο $K(\mathfrak{s}_m)$ όλων των πλευρών ενός m-μονοπλόκου $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_m$ είναι αφ' εαυτού ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με $|K(\mathfrak{s}_m)| = \mathfrak{s}_m \approx \mathbb{B}^m$. Ως εκ τούτου, *όλες οι μπάλες* (οιασδήποτε διαστάσεως) *είναι τριγωνίσιμες*.

(iv) Το σύνολο $K(\partial\mathfrak{s}_m)$ όλων των γνήσιων πλευρών ενός m-μονοπλόκου $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_m$ είναι ωσαύτως ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με την ιδιότητα: $|K(\partial\mathfrak{s}_m)| = \partial\mathfrak{s}_m \approx \mathbb{S}^{m-1}$. Κατά συνέπειαν, *και όλες οι σφαίρες* (οιασδήποτε διαστάσεως) *είναι τριγωνίσιμες*.

(v) Ένας (κατ' ανάγκην *μη πεπερασμένος*) τριγωνισμός ολόκληρης τής πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$ δημιουργείται εάν κανείς θεωρήσει το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα το αποτελούμενο από όλα τα κλειστά διαστήματα $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$ (με τους ακεραίους ως 0-μονόπλοκά του). Κατ' αναλογίαν, ένας τριγωνισμός τού διαστήματος $[0, \infty)$ δημιουργείται μέσω τού μονοπλεκτικού συμπλέγματος τού αποτελούμενου από τα κλειστά διαστήματα $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$.

1.19.25 Σημείωση. Ενίοτε, μια *συγκεκριμένη κατασκευή* τριγωνισμών ορισμένων χώρων (με κάποια επιπρόσθετα χαρακτηριστικά) είναι πολύ δυσκολότερη από την απόδειξη τής υπάρξεώς τους. Ιδιαίτερα ενδιαφέρων είναι ο τρόπος προσδιορισμού (κατ' ανάγκην πεπερασμένων) τριγωνισμών *συμπαγών* επιφανειών με το *μικρότερο δυνατό πλήθος* τριγώνων[82] (ή, ισοδυνάμως, με το *μικρότερο δυνατό πλήθος* κορυφών).

(i) Εάν F είναι μια συμπαγής επιφάνεια, $|K| \approx F$ ένας τριγωνισμός[83],

$$a_j := \text{card}(\{j\text{-μονόπλοκα τού } K\}), \;\; j \in \{0,1,2\},$$

και $\chi(K) := a_0 - a_1 + a_2$, τότε

$$\begin{cases} 3a_2 = 2a_1, \\ a_1 = 3(a_0 - \chi(K)), \\ a_0 \geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi(K)}). \end{cases}$$

Επί παραδείγματι, επειδή

F	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$	$\mathbb{T}^2$	Φιάλη τού Klein
$\chi(K)$	2	1	0	0

έχουμε

$$\begin{cases} a_0 \geq 4, \; a_1 \geq 6, a_2 \geq 4 & \text{για } F = \mathbb{S}^2, \\ a_0 \geq 6, \; a_1 \geq 15, a_2 \geq 10 & \text{για } F = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \\ a_0 \geq 7, \; a_1 \geq 21, a_2 \geq 14 & \text{για } F = \mathbb{T}^2 \text{ ή τη φιάλη τού Klein.} \end{cases}$$

(Βλ. Croom [22], σελ. 32-33, και Giblin [41], σελ. 61-62.)

(ii) Ο *ελαχιστικός* τριγωνισμός τής $\mathbb{S}^2$ επιτυγχάνεται ύστερα από τη θεώρηση τού συνοριακού συμπλέγματος ενός τετραέδρου (βλ. 1.19.24 (i)).

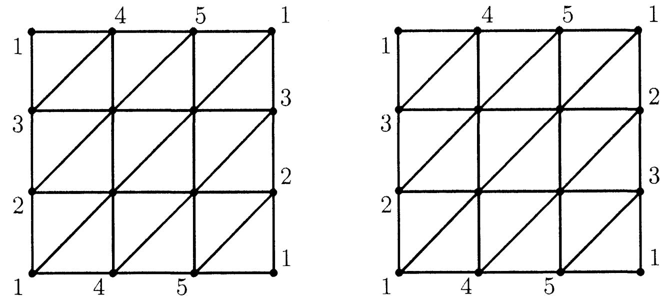
(iii) Ένας *ελαχιστικός* τριγωνισμός για το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ δίδεται στο εδάφιο 1.19.30.

(iv) Στο κάτωθι σχήμα δίδονται (οι συνήθεις αλλά *μη ελαχιστικοί*) τριγωνισμοί τού τόρου $\mathbb{T}^2$ και τής φιάλης τού Klein, αντιστοίχως, ιδωμένων ως *ταυτισμικών χώρων*,

[82] Τέτοιοι τριγωνισμοί ονομάζονται **ελαχιστικοί τριγωνισμοί.**

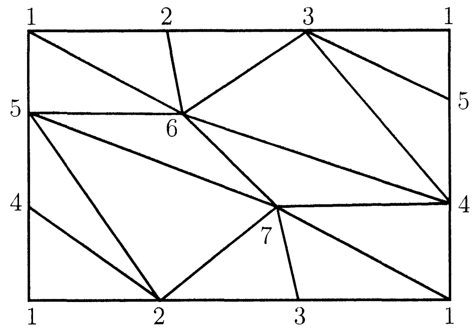
[83] Η *ύπαρξη* ενός τέτοιου K έπεται από το γενικό θεώρημα 1.19.43.

με[84] $a_0 = 9$.



Σχήμα 1.??

Αντίθετως, το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα τού σχήματος 1.?? οδηγεί σε *ελαχιστικό* τριγωνισμό τού $\mathbb{T}^2$ με $a_0 = 7$, $a_1 = 21$ και $a_2 = 14$. Τέτοιου είδους τριγωνισμοί (με 7 κορυφές) δεν υφίστανται για τη φιάλη τού Klein! (Στην πραγματικότητα, *κάθε* ελαχιστικός τριγωνισμός τής φιάλης τού Klein οφείλει να έχει 8 κορυφές. Πρβλ. Ringel [100] και Giblin [41], σελ. 62.)



Σχήμα 1.??

Για την περιγραφή μιας κατηγορίας έχουσας τα μονοπλεκτικά συμπλέγματα ως αντικείμενα απαιτείται η εισαγωγή τής έννοιας που θα παίξει τον ρόλο τού μορφισμού.

1.19.26 Ορισμός. Έστω ότι K, L είναι δυο μονοπλεκτικά συμπλέγματα. Μια **μονοπλεκτική απεικόνιση** $\varphi : K \longrightarrow L$ είναι μια απεικόνιση που στέλνει κάθε κορυφή (ήτοι κάθε 0-μονόπλοκο) τού K να απεικονισθεί σε μια κορυφή (ήτοι σε ένα 0-μονόπλοκο) τού L και έχει την εξής ιδιότητα: Για κάθε $\mathfrak{s} = [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] \in K$, η εικόνα $\varphi(\mathfrak{s}) \in L$ τού $\mathfrak{s}$ μέσω τής φ ισούται με $\varphi(\mathfrak{s}) = [\varphi(\mathbf{x}_0), ..., \varphi(\mathbf{x}_m)]$.

[84]Προφανώς, $3 \cdot 18 = 3a_2 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 27$ και $a_0 = \frac{a_1}{3} = 9$.

1.19.27 Σημείωση. (i) Μέσω οιασδήποτε μονοπλεκτικής απεικονίσεως $\varphi : K \to L$ επάγεται μια συνεχής απεικόνιση $|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|$ η οποία ορίζεται ως ακολούθως: Για κάθε $\mathfrak{s} \in K$ έστω $f_{\mathfrak{s}} : \mathfrak{s} \longrightarrow |L|$ η συσχετική απεικόνιση η προσδιοριζόμενη μέσω τής $\varphi|_{\mathrm{Vert}(\mathfrak{s})}$. (Βλ. πρόταση 1.19.14.) Βάσει τής συνθήκης 1.19.17 (ii) οι απεικονίσεις $f_{\mathfrak{s}}$ ταυτίζονται στο κοινό τμήμα τού πεδίου ορισμού τους, οπότε μπορούν να συγκολληθούν παρέχοντάς μας την $|\varphi|$.

(ii) Για κάθε μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K έχουμε $|\mathrm{id}_K| = \mathrm{id}_{|K|}$. Επιπροσθέτως, εάν $\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$ και $\psi : K_2 \longrightarrow K_3$ είναι μονοπλεκτικές απεικονίσεις, τότε $|\psi \circ \varphi| = |\psi| \circ |\varphi|$.

(iii) Εάν υπάρχει μια μονοπλεκτική και αμφιρριπτική απεικόνιση $\varphi : K \longrightarrow L$, τότε τα K και L καλούνται **γραμμικώς ισόμορφα**. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η αντίστροφός της $\varphi^{-1} : L \longrightarrow K$ είναι ωσαύτως μονοπλεκτική και η επαγόμενη συνεχής απεικόνιση $|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|$ ομοιομορφισμός.

(iv) Εάν συμβολίσουμε ως $\mathfrak{SComp}$ την κατηγορία των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων (με τις μονοπλεκτικές απεικονίσεις ως μορφισμούς της), τότε με τη βοήθεια των (i), (ii) και (iii) ορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$| \ | : \mathfrak{SComp} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}, \quad K \longmapsto |K|,$$
$$(\varphi : K \longrightarrow L) \longmapsto (|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|).$$

Η έννοια τού *τοπολογικού πολυέδρου* γενικεύεται για τοπολογικά ζεύγη ως εξής:

1.19.28 Ορισμός. Έστω K ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Ένα $K' \subseteq K$ καλείται **υποσύμπλεγμα τού** K όταν ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\mathfrak{s} \in K' \text{ και } \mathfrak{s}' \preceq \mathfrak{s} \Longrightarrow \mathfrak{s}' \in K').$$

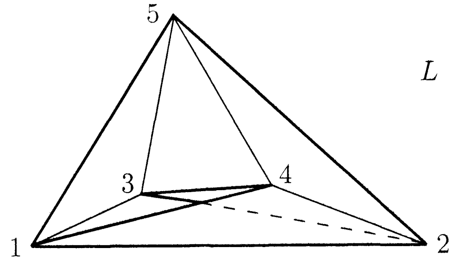
Ένας υπόχωρος X' ένος τοπολογικού πολυέδρου X καλείται **τοπολογικό υποπολύεδρο τού** X όταν υπάρχει ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K, καθώς και ένα υποσύμπλεγμα τού K', ούτως ώστε να ισχύει $(|K|, |K'|) \approx (X, X')$ (υπό την έννοια τού ορισμού 1.18.2). Εν τοιαύτη περιπτώσει το (X, X') καλείται **πολυεδρικό τοπολογικό ζεύγος**.

1.19.29 Σημείωση. Αναλόγως προς το 1.19.27 (iv) μπορεί κανείς να ορίσει έναν συναλλοίωτο συναρτητή

$$| \ | : \mathfrak{SComp}^{[2]} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}^{[2]}, \quad (K, K') \longmapsto (|K|, |K'|),$$
$$(\varphi : (K, K') \longrightarrow (L, L')) \longmapsto (|\varphi| : (|K|, |K'|) \longrightarrow (|L|, |L'|))$$

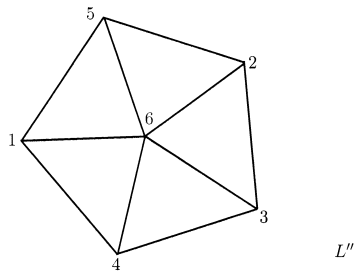
από την κατηγορία των ζευγών μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων στην κατηγορία των τοπολογικών ζευγών.

1.19.30 Παράδειγμα. Έστω $L \subsetneqq \mathbb{R}^3$ το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα που εικονογραφείται στο σχήμα 1.??.



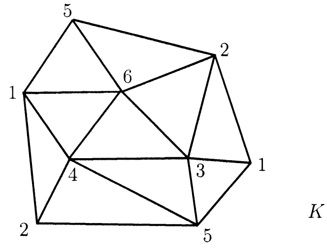
Σχήμα 1.??

Το L απαρτίζεται από 5 κορυφές, 10 ακμές και τα 5 τρίγωνα (:έδρες) $123, 124, 135, 245$ και 345. Έστω $L' \subsetneqq L$ το υποσύμπλεγμα τού L το αποτελούμενο από τις 5 κορυφές και τις ακμές $15, 52, 23, 34$ και 41. Προφανώς, ο $|L|$ είναι μια ταινία τού Möbius και ο $|L'|$ το σύνορό της. Θεωρούμε ένα $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^4 \smallsetminus \mathbb{R}^3$ και τον κώνο $\mathrm{cone}_{\mathbf{x}_0}(L') = \{$μονόπλοκα $\mathfrak{s}$ με $\mathrm{Vert}(\mathfrak{s}) = \{\mathbf{x}_0\} \cup \mathrm{Vert}(L')\}$. Ο $\mathrm{cone}_{\mathbf{x}_0}(L')$ διαθέτει έναν τριγωνισμό L'' (βλ. σχήμα 1.??), με το $\mathbf{x}_0$ να αντιστοιχεί στην κορυφή 6. Τα L, L'' έχουν το υποσύμπλεγμα L' κοινό (εντός τού $\mathbb{R}^4$).



Σχήμα 1.??

Έστω $K := L \cup L''$. (Βλ. σχήμα 1.??.) Το K είναι μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (εντός τού $\mathbb{R}^4$) με 6 κορυφές, 15 ακμές και 10 τρίγωνα, και $|K| \approx \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Βάσει των όσων προαναφέρθησαν στη σημείωση 1.19.25, αυτός ο τριγωνισμός είναι ελαχιστικός.



Σχήμα 1.??

► **Αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα**. Για την τήρηση ενός απαραίτητου βαθμού γενικότητας αλλά και σε διάφορες εφαρμογές είναι προτιμότερο από τεχνικής πλευράς να εργαζόμαστε με *αφηρημένα* μονοπλεκτικά συμπλέγματα (παρά να εμμένουμε σε κατατριβή με τις αρκούντως περιοριστικές γεωμετρικές ιδιότητες των ευκλειδείων μονοπλόκων).

1.19.31 Ορισμός. Ένα **αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα** $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ αποτελείται από ένα σύνολο $\mathcal{V}$ και ένα σύνολο $\mathcal{S}$ πεπερασμένων υποσυνόλων τού $\mathcal{V}$, ούτως ώστε να ισχύουν τα εξής:

(i) $\{v\} \in \mathcal{S},\ \forall v \in \mathcal{V}$.

(ii) Εάν $s \in \mathcal{S}$ και $\varnothing \neq s' \subseteq s$, τότε $s' \in \mathcal{S}$.

Τα στοιχεία τού $\mathcal{V}$ καλούνται **κορυφές** τού $\mathcal{K}$ και τα στοιχεία τού $\mathcal{S}$ **αφηρημένα μονόπλοκα** τού $\mathcal{K}$. Ένα $s \in \mathcal{S}$ περιέχον ακριβώς $m+1$ κορυφές (όπου $m \in \mathbb{N}_0$) καλείται m-**διάστατο αφηρημένο μονόπλοκο** (ή απλώς **αφηρημένο** m-**μονόπλοκο**). Εάν $s \in \mathcal{S}$ και $\varnothing \neq s' \subseteq s$, τότε το s' είναι ένα αφηρημένο μονόπλοκο (λόγω τού (ii)) και καλείται **πλευρά** τού s. (Όταν $s' \subsetneqq s$, το s' καλείται **γνήσια πλευρά** τού s.) Η διάσταση ενός τέτοιου $\mathcal{K}$ ορίζεται ως εξής: $\dim(\mathcal{K}) := \sup\{\dim(s) : s \in \mathcal{S}\}$. Λέμε ότι ένα τέτοιο $\mathcal{K}$ είναι **πεπερασμένο** (και αντιστοίχως, **αριθμήσιμο**) όταν το $\mathcal{V}$ είναι πεπερασμένο (και αντιστοίχως, αριθμήσιμο) και **τοπικά πεπερασμένο** (και αντιστοίχως, **τοπικά αριθμήσιμο**) όταν κάθε $v \in \mathcal{V}$ ανήκει σε πεπερασμένου πλήθους (αριθμησίμου πλήθους) στοιχεία τού $\mathcal{S}$. (Όταν το $\mathcal{K}$ είναι πεπερασμένο ή τοπικά πεπερασμένο, τότε $\dim(\mathcal{K}) < \infty$. Ωστόσο, όταν $\dim(\mathcal{K}) < \infty$, το $\mathcal{K}$ ενδέχεται να μην είναι πεπερασμένο. Βλ. 1.19.32 (v).)

1.19.32 Παραδείγματα. (i) Εάν $\mathcal{V} \neq \varnothing$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τότε το $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathfrak{P}(\mathcal{V}) \smallsetminus \varnothing)$ είναι ένα πεπερασμένο αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα.

(ii) Εάν $\mathcal{K}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{S}_1), \mathcal{K}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{S}_2)$ είναι δυο αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα, τότε η **συναρμογή** (join) αυτών $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 = (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2, \mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2)$, όπου

$$\{v_0, ..., v_{m_1}, u_0, ..., u_{m_2}\} \in \mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2 \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} \{v_0, ..., v_{m_1}\} \in \mathcal{S}_1 \cup \{\varnothing\} \\ \text{και } \{u_0, ..., u_{m_2}\} \in \{\varnothing\} \cup \mathcal{S}_2 \end{array} \right],$$

αποτελεί ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα έχον ως σύνολο κορυφών του την ένωση των συνόλων κορυφών των $\mathcal{K}_1$ και $\mathcal{K}_2$. (Εάν το $\mathcal{V}_1$ είναι ένα *μονοσύνολο*, ας πούμε το $\{v_0\}$, τότε το $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$ είναι ο **αφηρημένος κώνος** υπεράνω τού $\mathcal{K}_2$ έχων ως κορυφή του το v_0.)

(iii) Έστω $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Οιοδήποτε αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\mathcal{K}' = (\mathcal{V}', \mathcal{S}')$ με $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ καλείται **(αφηρημένο) υποσύμπλεγμα τού** $\mathcal{K}$. Εάν τα $\mathcal{K}' = (\mathcal{V}', \mathcal{S}')$ και $\mathcal{K}'' = (\mathcal{V}'', \mathcal{S}'')$ είναι υποσυμπλέγματα τού $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$, τότε *και* τα

$$\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'' = (\mathcal{V}' \cup \mathcal{V}'', \mathcal{S}' \cup \mathcal{S}'') \text{ και } \mathcal{K}' \cap \mathcal{K}'' = (\mathcal{V}' \cap \mathcal{V}'', \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'')$$

είναι υποσυμπλέγματα τού $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$.

(iv) Δοθέντος ενός (ευκλειδείου) μονοπλεκτικού συμπλέγματος K (εντός ενός ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$), συμβολίζουμε ως $\mathcal{K}_{\mathrm{Vert}(K)} = (\mathrm{Vert}(K), \mathcal{S}_K)$ το αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα που έχει ως σύνολο κορυφών του το σύνολο κορυφών τού K και

$$\mathcal{S}_K := \left\{ \{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \,\middle|\, \begin{array}{c} m \in \mathbb{N}_0,\ m \leq n,\ \text{και } [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] = \mathfrak{s} \\ \text{για κάποιο } m\text{-μονόπλοκο } \mathfrak{s} \text{ τού } K \end{array} \right\}.$$

Τούτο καλείται, ιδιαιτέρως, **διάσχημα κορυφών** (vertex scheme) **τού** K.

(v) Το (μη πεπερασμένο, αριθμήσιμο) αφηρημένο *μονοδιάστατο* μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$, όπου $\mathcal{V} = \mathbb{Z}$ και $\mathcal{S} = \{\{n\} | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{n, n+1\} | n \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι τίποτα άλλο παρά το διάσχημα κορυφών τού ευκλειδείου μονοπλεκτικού συμπλέγματος, μέσω τού οποίου είχαμε τριγωνίσει ολόκληρη την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ στο εδάφιο 1.19.24 (v).

1.19.33 Ορισμός. Έστω $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ τυχόν αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα και έστω $\mathbf{I}^{(\mathcal{V})} := \left\{ f \in \mathbf{I}^{\mathcal{V}} \middle| \operatorname{card}(\operatorname{supp}(f)) < \infty \right\}$ $(\mathbf{I} := [0,1])$, όπου $\mathbf{I}^{\mathcal{V}}$ το σύνολο των απεικονίσεων $f : \mathcal{V} \to \mathbf{I}$ και $\operatorname{supp}(f) := \{v \in \mathcal{V} | f(v) \neq 0\}$. Εάν για κάθε $v \in \mathcal{V}$ ορίσουμε την $\widetilde{v} \in \mathbf{I}^{(\mathcal{V})}$ μέσω τού τύπου

$$\mathcal{V} \ni u \longmapsto \widetilde{v}(u) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } u = v, \\ 0, & \text{όταν } u \neq v, \end{cases}$$

και για κάθε αφηρημένο m-μονόπλοκο $s = \{v_0, ..., v_m\} \in \mathcal{S}$ ορίσουμε το (ευκλείδειο) m-μονόπλοκο[85] $\mathfrak{s} := |s| := [\widetilde{v}_0, ..., \widetilde{v}_m] \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, τότε λέμε ότι το $\mathfrak{s} := |s|$ είναι η **γεωμετρική υλοποίηση** (geometric realization) **τού** s. Η ένωση

$$\boxed{|\mathcal{K}| := \bigcup_{s \in \mathcal{S}} |s|,}$$

εφοδιαζόμενη με την ασθενή τοπολογία 1.15.1:

$$[\text{το } A \text{ είναι ανοικτό} \subseteq |\mathcal{K}|] \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} \text{το } A \cap |s| \text{ είναι ανοικτό} \\ \text{υποσύνολο τού } |s|,\ \forall s \in \mathcal{S} \end{array} \right],$$

καλείται **γεωμετρική υλοποίηση**[86] **τού** $\mathcal{K}$.

1.19.34 Σημείωση. (i) Ο $|\mathcal{K}|$ είναι χώρος Hausdorff.

(ii) Ο $|\mathcal{K}|$ είναι τοπικά συμπαγής· επίσης, είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν το $\mathcal{K}$

[85] Εν προκειμένω, ταυτίζουμε τον διανυσματικό υπόχωρο τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbf{I}^{(\mathcal{V})}$ τον παραγόμενο από το $\{v_0, ..., v_m\}$ με τον $\mathbb{R}^{m+1}$.

[86] Εν γένει, το $|\mathcal{K}|$ ενδέχεται να μην μπορεί να θεωρηθεί ως ο υποκείμενος χώρος ενός *ευκλειδείου* μονοπλεκτικού συμπλέγματος, καθώς «ζει» στον αφηρημένο $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbf{I}^{(\mathcal{V})}$ και όταν το $\mathcal{V}$ είναι άπειρο δεν είναι *τοπολογικός υπόχωρος* τού $\mathbf{I}^{(\mathcal{V})}$. (Πρβλ. [36], §3.3, Example 3, σελ. 114.)

είναι πεπερασμένο.

(iii) Ο $|\mathcal{K}|$ είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός. Επομένως, βάσει τού (ii) τής προτάσεως 1.9.30, ο $|\mathcal{K}|$ είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν είναι δρομοσυνεκτικός.

1.19.35 Λήμμα. *Έστω K ένα (ευκλείδειο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K (εντός ενός ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$) και έστω $\mathcal{K}_{\mathrm{Vert}(K)} = (\mathrm{Vert}(K), \mathcal{S}_K)$ το διάσχημα κορυφών του το ορισθέν στο εδάφιο* 1.19.32 (iv). *Τότε $|\mathcal{K}_{\mathrm{Vert}(K)}| \approx |K|$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. Lee [63], Lemma 5.6, σελ. 99-100 (τής πρώτης εκδόσεως). □

1.19.36 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{K}$ ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν υπάρχει (ευκλείδειο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K εντός ενός ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε να ισχύει $|\mathcal{K}| \approx |K|$, τότε το $\mathcal{K}$ είναι κατ' ανάγκην αριθμήσιμο, τοπικά πεπερασμένο και διαστάσεως* $\dim(\mathcal{K}) \leq n$.

(ii) *Αντιστρόφως τώρα· εάν το $\mathcal{K}$ είναι αριθμήσιμο, τοπικά πεπερασμένο και διαστάσεως* $\dim(\mathcal{K}) \leq n$, *τότε υφίσταται πάντοτε κάποιο (ευκλείδειο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K εντός τού ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^{2n+1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $|\mathcal{K}| \approx |K|$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. Spanier [111], Ch. 3, §2, Theorem 9, σελ. 120, Moise [81], Ch. 7, Theorem 1, σελ. 53-54, και Ferrario & Piccinini [32], Theorem II.2.14, σελ. 57. □

1.19.37 Ορισμός. Έστω ότι $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ και $\mathcal{L} = (\mathcal{W}, \mathcal{U})$ είναι δυο αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα. Μια **αφηρημένη μονοπλεκτική απεικόνιση** $\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ από το $\mathcal{K}$ στο $\mathcal{L}$ είναι μια απεικόνιση $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, τέτοια ώστε[87] $\{\varphi(v_0), ..., \varphi(v_m)\} \in \mathcal{U}$ για κάθε $\{v_0, ..., v_m\} \in \mathcal{S}$. Λέμε ότι τα $\mathcal{K}$ και $\mathcal{L}$ είναι **ισόμορφα** (ως αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα) όταν υπάρχει μια *αμφιρριπτική* μονοπλεκτική απεικόνιση από το $\mathcal{K}$ στο $\mathcal{L}$, τέτοια ώστε η αντίστροφός της (από το $\mathcal{L}$ στο $\mathcal{K}$) να είναι ωσαύτως αφηρημένη μονοπλεκτική.

1.19.38 Σημείωση. (i) Μέσω οιασδήποτε αφηρημένης μονοπλεκτικής απεικονίσεως $\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ επάγεται μια συνεχής απεικόνιση $|\varphi| : |\mathcal{K}| \longrightarrow |\mathcal{L}|$ η οποία ορίζεται ως ακολούθως: Για κάθε $s \in \mathcal{S}$ έστω $|f_s| : |s| \longrightarrow |\mathcal{L}|$ η συσχετική απεικόνιση η προσδιοριζόμενη μέσω τής φ επί τού συνόλου των κορυφών τού s. Βάσει τής συνθήκης 1.19.31 (ii) οι απεικονίσεις $|f_s|$ ταυτίζονται στο κοινό τμήμα τού πεδίου ορισμού τους, οπότε μπορούν να συγκολληθούν παρέχοντάς μας την $|\varphi|$.

(ii) Για κάθε αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\mathcal{K}$ έχουμε $|\mathrm{id}_{\mathcal{K}}| = \mathrm{id}_{|\mathcal{K}|}$. Επιπροσθέτως, εάν $\varphi : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ και $\psi : \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_3$ είναι αφηρημένες μονοπλεκτικές απρεικονίσεις, τότε $|\psi \circ \varphi| = |\psi| \circ |\varphi|$.

(iii) Εάν συμβολίσουμε ως $\mathfrak{SComp}^{\text{abs.}}$ την *κατηγορία των αφηρημένων μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων* (με τις αφηρημένες μονοπλεκτικές απεικονίσεις ως μορφισμούς της), τότε με τη βοήθεια τού ορισμού 1.19.37 και των (i) και (ii) ορίζεται ένας

[87] Φυσικά, δεν αποκλείεται a priori μεταξύ των $\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_m)$ να υφίστανται *επαναλήψεις*.

συναλλοίωτος συναρτητής

$$| \ | : \mathfrak{SComp}^{\text{abs.}} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}, \quad \mathcal{K} \longmapsto |\mathcal{K}|,$$
$$(\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}) \longmapsto (|\varphi| : |\mathcal{K}| \longrightarrow |\mathcal{L}|).$$

Κατ' αναλογίαν ορίζεται συναλλοίωτος συναρτητής

$$| \ | : \mathfrak{SComp}^{[2], \text{abs.}} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}^{[2]}, \quad (\mathcal{K}, \mathcal{K}') \longmapsto (|\mathcal{K}|, |\mathcal{K}'|),$$
$$(\varphi : (\mathcal{K}, \mathcal{K}') \longrightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{L}')) \longmapsto (|\varphi| : (|\mathcal{K}|, |\mathcal{K}'|) \longrightarrow (|\mathcal{L}|, |\mathcal{L}'|))$$

από την κατηγορία των ζευγών αφηρημένων μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων στην κατηγορία των τοπολογικών ζευγών.

(iv) Μέσω τού λήμματος 1.19.35 καθορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής $\mathfrak{SComp} \rightsquigarrow \mathfrak{SComp}^{\text{abs.}}$ (που στέλνει κάθε ευκλείδειο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα να απεικονισθεί στο διάσχημα κορυφών του). Ωστόσο, *δεν είναι όλα* τα *αφηρημένα* μονοπλεκτικά συμπλέγματα παραστάσιμα ως διασχήματα κορυφών *ευκλειδείων* μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων. Το θεώρημα 1.19.36 μας πληροφορεί ότι για την «αντιστροφή τού (ανωτέρω) βέλους» απαιτείται ο περιορισμός μας *στην υποκατηγορία των αριθμήσιμων, τοπικά πεπερασμένων αφηρημένων μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων πεπερασμένης διαστάσεως*. (Εν τοιαύτη περιπτώσει, προκύπτει μια ισοδυναμία[88], υπό την έννοια τού ορισμού F.3.2 (ii), τής κατηγορίας των αριθμήσιμων *ευκλειδείων* μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων πεπερασμένης διαστάσεως και τής κατηγορίας των αριθμήσιμων, τοπικά πεπερασμένων *αφηρημένων* μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων πεπερασμένης διαστάσεως.)

(v) Δυο ευκλείδεια μονοπλεκτικά συμπλέγματα είναι γραμμικώς ισόμορφα εάν και μόνον εάν τα διασχήματα των κορυφών τους είναι ισόμορφα (ως αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα). Βλ. εδάφια 1.19.27 (iii), 1.19.32 (iv) και 1.19.37.

1.19.39 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται **τριγωνίσιμος χώρος** (*υπό την ευρεία έννοια*[89]) όταν υπάρχει κάποιο *αφηρημένο* μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\mathcal{K}$ και ένας ομοιομορφισμός $h : |\mathcal{K}| \xrightarrow{\approx} X$. Ένα τέτοιο ζεύγος $(\mathcal{K}, h)$ καλείται **τριγωνισμός** τού X (*υπό την ευρεία έννοια*).

1.19.40 Παρατήρηση. Ενίοτε, πέραν ενός αφηρημένου μονοπλεκτικού συμπλέγματος (για την κατασκευή ενός τριγωνισμού ενός τοπολογικού χώρου) είναι απαραίτητη η γνώση τής φύσεως των δυνατών *υποδιαιρέσεων* αυτού. Μια **υποδιαίρεση** $\mathcal{K}' = (\mathcal{V}', \mathcal{S}')$ ενός αφηρημένου μονοπλεκτικού συμπλέγματος $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ είναι ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με τις εξής ιδιότητες:

(i) Για κάθε $s' \in \mathcal{S}'$ υπάρχει $s \in \mathcal{S}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $s' \subseteq s$.

[88] Για αυτήν την ισοδυναμία για τις υποκατηγορίες των *πεπερασμένων* (*ευκλειδείων* και, αντιστοίχως, *αφηρημένων*) μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων βλ. Rotman [102], Theorem 7.8, σελ. 142.

[89] Απλώς για να διαφοροποιούμεθα κατά τι εν σχέσει προς τον ορισμό 1.19.23, λαμβάνοντας υπ' όψιν το λήμμα 1.19 .35 και το θεώρημα 1.19.36.

(ii) Κάθε (αφηρημένο) μονόπλοκο τού $\mathcal{K}$ γράφεται ως ένωση *πεπερασμένου πλήθους* (αφηρημένων) μονοπλόκων τού $\mathcal{K}'$.

(iii) Κάθε $v \in \mathcal{V}'$ αποτελεί ένα σημείο τού $|\mathcal{K}|$, η δε επαγομένη (γραμμική) απεικόνιση $|\mathcal{K}'| \longrightarrow |\mathcal{K}|$ (που απεικονίζει κάθε κορυφή τού $\mathcal{K}'$ στο αντίστοιχο σημείο τού $|\mathcal{K}|$) είναι *ομοιομορφισμός*[90].

Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι: α) Μια υποδιαίρεση μιας υποδιαιρέσεως τού $\mathcal{K}$ αποτελεί υποδιαίρεση τού $\mathcal{K}$.

β) Εάν $\mathcal{K}'$ και $\mathcal{K}''$ είναι δυο υποδιαιρέσεις τού $\mathcal{K}$, τότε υπάρχει μια υποδιαίρεση $\mathcal{K}'''$ τού $\mathcal{K}$ που είναι υποδιαίρεση αμφοτέρων των $\mathcal{K}'$ και $\mathcal{K}''$.

1.19.41 Ορισμός. Λέμε ότι δυο αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα $\mathcal{K}$ *και* $\mathcal{L}$ είναι **συνδυαστικώς ισοδύναμα** όταν διαθέτουν υποδιαιρέσεις $\mathcal{K}'$ και $\mathcal{L}'$, αντιστοίχως, ούτως ώστε τα $\mathcal{K}'$ και $\mathcal{L}'$ να είναι ισόμορφα (ως αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα, υπό την έννοια τού ορισμού 1.19.37).

► **«Συνδυαστικές δυσχέρειες».** Η θεώρηση *μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων* αποσκοπούσε (ήδη από τις απαρχές τής Analysis Situs[91]) στη αναγωγή τής μελέτης *τοπολογικών* προβλημάτων στη μελέτη *συνδυαστικών* προβλημάτων. Τούτο όμως, όπως απεδείχθη, είναι εφικτό μόνον σε *πολύ ειδικές περιπτώσεις*, καθώς οι κάτωθι εικασίες (με την πάροδο *πολλών* ετών) «κατερρίφθησαν» στη γενικότητά τους[92]:

• **Εικασία Α**. (Εικασία υπάρξεως τριγωνισμού): *Κάθε τοπολογικό πολύπτυγμα είναι τριγωνίσιμο* (*υπό τη στενή ή υπό την ευρεία έννοια*).

• **Εικασία Β**. (Hauptvermutung, κύρια εικασία τής Συνδυαστικής Τοπολογίας): *Έστω ότι* X, Y *είναι δυο τριγωνίσιμοι τοπολογικοί χώροι με* $X \approx |\mathcal{K}|$ *και* $Y \approx |\mathcal{L}|$. *Εάν υφίσταται ομοιομορφισμός* $|\mathcal{K}| \xrightarrow{\approx} |\mathcal{L}|$, *τότε τα* $\mathcal{K}$ *και* $\mathcal{L}$ *είναι συνδυαστικώς ισοδύναμα.*

Περί τής εικασίας Α. Αυτή είναι *εν γένει* αληθής μόνον σε διαστάσεις ≤ 3.

1.19.42 Θεώρημα. (Τριγωνισιμότητα μονοδιάστατων τοπολογικών πολυπτυγμάτων) *Κάθε μονοδιάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα είναι τριγωνίσιμο. Συγκεκριμένα, κάθε μονοδιάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα διαθέτει κάποιον τριγωνισμό που αποτελεί τη γεωμετρική υλοποίηση ενός (αφηρημένου) μονοδιάστατου μονοπλεκτικού συμπλέγματος, κάθε κορυφή* (= 0-*μονόπλοκο*) *τού οποίου ανήκει σε ακριβώς δύο ακμές* (= 1-*μονόπλοκα*).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. Lee [63], σελ. 102-104 (τής πρώτης εκδόσεως). □

[90]Μέσω αυτού είθισται να «ταυτίζουμε» τους τοπολογικούς χώρους $|\mathcal{K}'|$ και $|\mathcal{K}|$.

[91]Προπομπός τής σύγχρονης Αλγεβρικής Τοπολογίας κατά τον 19ο αιώνα.

[92]Η εικασία **Α** είχε διατυπωθεί ήδη από τον 19ο αιώνα, ενώ η εικασία **Β** εμφανίζεται το έτος 1908 στην εργασία [112] τού Ernst Steinitz (13/6/1871-29/9/1928).

Ανερχομένης τής διαστάσεως συναντούμε τα θεωρήματα 1.19.43 και 1.19.45 των Radó[93] και Moise[94], αντιστοίχως.


T. Rado E. Moise

1.19.43 Θεώρημα. **(Τριγωνισιμότητα επιφανειών, Radó [96], 1925)** *Κάθε επιφάνεια (ήτοι κάθε διδιάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα) διαθέτει κάποιον τριγωνισμό που αποτελεί τη γεωμετρική υλοποίηση ενός (αφηρημένου) διδιάστατου μονοπλεκτικού συμπλέγματος, κάθε ακμή* (= 1-*μονόπλοκο*) *τού οποίου ανήκει σε ακριβώς δύο* 2-*μονόπλοκα.*

1.19.44 Σημείωση. Για μια επεξεργασμένη μορφή τής αποδείξεως τού θεωρήματος 1.19.43 (βασιζόμενη στην πρωτότυπη εργασία τού Radó) βλ. Coldeway, Vogt & Zieschang [19], Theorem 7.5.1, σελ. 304-306, Rinow [101], σελ. 414-421, Ahlfors & Sario [5], §8, σελ. 105-111, καθώς και τις σημειώσεις [17] τού Chen. Στο κεφάλαιο 8 τού [81] δίδεται μια απόδειξη που κάνει χρήση μόνον τού συνδυαστικού (και όχι τού «ισχυρού») θεωρήματος τού Schönflies. Για *συμπαγείς* επιφάνειες υπάρχει μια άλλη, κατά τι συντομότερη προσέγγισή της (οφειλόμενη στους Doyle & Moran [27]) η οποία -όμως- στηρίζεται σε προκεχωρημένα τεχνικά μέσα (standard decompositions κ.ά.). Για μια *αρκούντως στοιχειώδη* απόδειξη (και πάλι για *συμπαγείς* επιφάνειες) βλ. Thomassen [116].

1.19.45 Θεώρημα. **(Τριγωνισιμοί 3-διάστατων τοπ. πολυπτυγμάτων, Moise [79], 1952)** *Κάθε τριδιάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα είναι τριγωνίσιμος τοπολογικός χώρος.*

1.19.46 Σημείωση. Για μια λεπτομερή (και στοιχειωδέστερη τής αρχικής) απόδειξη τού θεωρήματος 1.19.45 βλ. κεφ. 35 τού συγγράμματος [81] τού Moise. Μια

[93]Radó, *Tibor* (2/6/1895-12/12/1965). Ούγγρος μαθηματικός. Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο τού Szeged και εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό τον F. Riesz (1880-1956). Ερευνητής στο Μόναχο και στο Harvard. Από το 1930 καθηγητής τού Ohio State University. Κύριοι ερευνητικοί του τομείς: Διαφορική Γεωμετρία, Λογισμός Μεταβολών, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις και Θεωρία Μέτρου.

[94]Moise, *Edwin Evariste* (22/12/1918-18/12/1998). Αμερικανός μαθηματικός. Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο τής Toulane στη Louisiana και εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό τον R.L. Moore (1882-1974) στο Πανεπιστήμιο τού Texas. Κατόπιν τούτου αφιερώθηκε αποκλειστικώς στη μελέτη δύσκολων προβλημάτων τής Γεωμετρικής Τοπολογίας, διδάσκοντας εκ παραλλήλου στα Πανεπιστήμια τού Michigan (1947-1960) και τού Harvard (1961-1971), και στο Queen's College τής Νέας Υόρκης (1972-1987).

εναλλακτική απόδειξη έχει δοθεί από τον Hamilton [44]. Το θεώρημα 1.19.45 εξακολουθεί να ισχύει και για τριδιάστατα τοπολογικά πολυπτύγματα *με σύνορο*. (Βλ. Moise [80] και Bing [10].)

1.19.47 Θεώρημα. **(Casson ∼1985)** *Υπάρχουν τετραδιάστατα συμπαγή πολυπτύγματα (όπως, π.χ., το λεγόμενο "E_8-πολύπτυγμα" τού Freedman) που δεν είναι τριγωνίσιμα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. Saveliev [106], Theorem 18.3, σελ. 167-168. □

1.19.48 Θεώρημα. **(Manolescu [70], 2016)** *Για κάθε $n \geq 5$ υφίσταται κάποιο n-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα το οποίο δεν είναι τριγωνίσιμο* [95].

Από την άλλη πλευρά, η ύπαρξη τριγωνισμού είναι διασφαλισμένη για την *ειδική κλάση* των *λείων* πολυπτυγμάτων.

1.19.49 Θεώρημα. **(Cairns [15], 1935, Whitehead [126] & Freudenthal [35], 1940)** *Κάθε λείο πολύπτυγμα (οιασδήποτε διαστάσεως) είναι τριγωνίσιμο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ. Για κάποιες κατά τι πιο προσβάσιμες αποδείξεις βλ. Munkres [82], Chapter II, και Thurston [117], Theorem 3.10.2, σελ. 194-195. □

Περί τής εικασίας B. *Και εδώ* οι περιπτώσεις όπου υπάρχει κατάφαση είναι περιορισμένες.

1.19.50 Θεώρημα. **(Παπακυριακόπουλος [91], 1943)** *Η εικασία **B** είναι αληθής για τριγωνίσιμους τοπολογικούς χώρους, για τους οποίους τα αντίστοιχα μονοπλεκτικά σύμπλοκα αναφοράς είναι διαστάσεως ≤ 2.*

1.19.51 Θεώρημα. **(Moise [79], 1952)** *Η εικασία **B** είναι αληθής για τοπολογικά πολυπτύγματα διαστάσεως ≤ 3.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. [81], σελ. 64 και 253. □

1.19.52 Σημείωση. (Διάψευση τής Hauptvermutung από τον Milnor, 1961)
(i) Εκκινώντας από τους χώρους φακού $\mathbb{L}(7, j)$, $j \in \{1, 2\}$, (βλ. εδ. 1.17.23) ο Milnor[96] [77] κατασκεύασε μέσω των $\mathbb{L}(7, j) \times \mathfrak{s}_m$ (όπου $\mathfrak{s}_m$ ένα m-μονόπλοκο) τοπολογικούς χώρους X_j προσαρτώντας κώνους υπεράνω των $\mathbb{L}(7, j) \times \partial\mathfrak{s}_m$, ούτως ώστε για $m + 3 \geq 6$ οι X_1 και X_2 να είναι τριγωνίσιμοι και ομοιομορφικοί,

[95] Βλ. [70], Corollary 1.3., σελ. 148.

[96] Milnor, *John Willard* (γεν. 20/2/1931). Αμερικανός μαθηματικός. Ένας εκ των επιφανέστερων τοπολόγων των τελευταίων 50 χρόνων. Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο τού Princeton, όπου και εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή το 1954 υπό τον R. Fox (1913-1973). Διετέλεσε καθηγητής στο Institute for Advanced Study από το 1970 εως το 1990. Μεταξύ άλλων έχει τιμηθεί με τα βραβεία Fields (1962), Wolf (1989), Steele (2004) και Abel (2011).

χωρίς, ωστόσο, τα αντίστοιχα μονοπλεκτικά συμπλέγματα να είναι και συνδυαστικώς ισοδύναμα. Ως εκ τούτου, το θεώρημα 1.19.50 τού Παπακυριακόπουλου[97] δεν είναι επεκτάσιμο (τουλάχιστον, χωρίς περαιτέρω περιορισμούς).

Χ. Παπακυριακόπουλος

J. Milnor

(ii) Επειδή τα ανωτέρω αντιπαραδείγματα τού Milnor δεν ήταν τοπολογικά πολυπτύγματα, είχε κατά τα μέσα τής δεκαετίας τού 1960 σχηματισθεί η εντύπωση σε ορισμένους τοπολόγους ότι η εικασία **B** θα μπορούσε να περισωθεί εάν στη διατύπωσή της κανείς αντικαθιστούσε τους *τριγωνίσιμους τοπολογικούς χώρους* με *τριγωνίσιμα τοπολογικά πολυπτύγματα* (δεδομένων, μάλιστα, των θεωρημάτων 1.19.45 και 1.19.51 τού Moise στη διάσταση 3). Ωστόσο, *και* αυτή η προσμονή έπεσε στο κενό, καθώς διαψεύσθηκε από τους Kirby & Siebenmann για διαστάσεις ≥ 5 (βλ. [58], [59]) και από τους Freedman & Quinn για τη διάσταση 4 (βλ. [34]).

(iii) Παρά τα προαναφερθέντα, υπάρχουν *περαιτέρω τροποποιήσεις* τής Hauptvermutung που εξακολουθούν να περιέχουν αναπάντητα ερωτήματα και να προκαλούν το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών. (Πρβλ. Ranicki [97] και Rudyak [104].)

1.20 CW-ΧΩΡΟΙ

Η κλάση όλων των τοπολογικών χώρων παραείναι «αχανής» για να μπορεί κανείς να εργασθεί παραγωγικά με αυτήν σε μια σειρά σημαντικών θεωρητικών ερωτημάτων. Από την άλλη πλευρά, οι τριγωνίσιμοι χώροι είναι *πολύ ειδικοί* χώροι (και, ενίοτε, η κατασκευή συγκεκριμένων τριγωνισμών αρκούντως δύσκολη). Γι' αυτόν τον λόγο κρίνεται αναγκαία η εισαγωγή μια επιπρόσθετης, *ενδιάμεσης κλάσεως* τοπολογικών χώρων, των λεγόμενων *CW-χώρων*. Οι δομικοί λίθοι αυτών των χώρων δεν είναι κατ' ανάγκην μονόπλοκα αλλά *κύτταρα* (καταλλήλως συγκολλούμενα).

[97] Παπακυριακόπουλος, *Χρίστος* (16/7/1914-29/6/1976). Έλληνας μαθηματικός. Σπούδασε (μεταγραφείς από το Ε.Μ.Π.) στο Τμήμα Μαθηματικών τού Πανεπιστημίου Αθηνών (1933-1937), όπου και αποπεράτωσε τη διδακτορική του διατριβή (έχουσα ως ένα εκ των κύριων αποτελεσμάτων της το θεώρημα 1.19.50) το έτος 1943 στην κατοχική Αθήνα. Από το 1948 (οπότε και μετέβη στις Η.Π.Α.) έως τον θάνατό του αφιερώθηκε (με ελάχιστα διαλείμματα, στο Institute of Advanced Studies τού Princeton) στην έρευνα δυσεπίλυτων αλγεβροτοπολογικών προβλημάτων. Γνωστά του αποτελέσματα: το «θεώρημα τού βρόχου», η ορθή απόδειξη τού «λήμματος τού Dehn», «το θεώρημα τής σφαίρας» κ.ά. Για λεπτομερή βιογραφικά στοιχεία βλ. Ε. Σπανδάγου: *Χρίστος Παπακυριακόπουλος. Ο ερημίτης τού Πρίνστον*, εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα, 2008.

1.20.1 Ορισμός. Λέμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X **επιδέχεται μια κυτταρική διάσπαση** (ή **διάσπαση σε κύτταρα**) όταν υπάρχει ένα σύνολο $\mathfrak{X}$ υποχώρων τού X που πληροί την ακόλουθη συνθήκη: Κάθε στοιχείο $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$ είναι ένα κύτταρο και $X = \bigcup\{\mathfrak{e} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}\}$. Ως n-**διάστατο σκελετό** ορίζουμε τον υπόχωρο

$$\boxed{X^{(n)} := \bigcup\{\mathfrak{e} \in \mathfrak{X} \mid \dim(\mathfrak{e}) \leq n\}}$$

(ενός τέτοιου X). Κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε μια ακολουθία

$$\varnothing = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq X^{(n-1)} \subseteq X^{(n)} \subseteq \cdots \subseteq X$$

υποχώρων με $\bigcup_{n\geq 0} X^{(n)} = X$. Για κάθε $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$ συμβολίζουμε ως $\overline{\mathfrak{e}}$ την *κλειστή θήκη* τού $\mathfrak{e}$ εντός τού X και ως $\partial\mathfrak{e} := \overline{\mathfrak{e}} \smallsetminus \mathfrak{e}$ το *σύνορο* (ή *μεθόριο*) τού $\mathfrak{e}$. (Ενίοτε, για να δηλώσουμε μια κυτταρική διάσπαση, αντί τού X γράφουμε $(X, \mathfrak{X})$.)

1.20.2 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος που επιδέχεται μια κυτταρική διάσπαση και έστω $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}^n$ ένα n-κύτταρο $\subseteq X$. Μια συνεχής απεικόνιση

$$\boxed{\phi = \phi_{\mathfrak{e}} : \mathbb{B}^n \longrightarrow X,}$$

για την οποία ισχύει $\phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{(n-1)}$, με την $\phi|_{\mathring{\mathbb{B}}^n} : \mathring{\mathbb{B}}^n \longrightarrow X$ απεικονίζουσα το $\mathring{\mathbb{B}}^n$ ομοιομορφικώς επί τού $\mathfrak{e}$, καλείται **χαρακτηριστική απεικόνιση τού** $\mathfrak{e}$. Ο περιορισμός $\phi|_{\mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{(n-1)}$ καλείται[98] **απεικόνιση επικολλήσεως** (ή **προσαρτήσεως) τού** $\mathfrak{e}$.

1.20.3 Πρόταση. *Εάν ο* X (όπως στο εδ. 1.20.2) *είναι χώρος Hausdorff, τότε* $\overline{\mathfrak{e}} = \phi(\mathbb{B}^n) \subseteq X^{(n-1)} \cup \mathfrak{e}$ *και* $\partial\mathfrak{e} = \phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{(n-1)}$. *Ιδιαιτέρως, τα* $\overline{\mathfrak{e}}$ *και* $\partial\mathfrak{e}$ *είναι συμπαγή, η* $\phi : \mathbb{B}^n \longrightarrow \overline{\mathfrak{e}}$ *ταυτισμική απεικόνιση* (βλ. 1.10.7) *και η συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών* $\phi : (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\overline{\mathfrak{e}}, \partial\mathfrak{e})$ *σχετικός ομοιομορφισμός* (βλ. 1.18.6).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω τής συνεχείας τής ϕ έχουμε $\phi(\mathbb{B}^n) \subseteq \overline{\mathfrak{e}}$. Επειδή (σύμφωνα με την πρόταση 1.8.5) το $\phi(\mathbb{B}^n)$ είναι συμπαγές, εάν ο X είναι χώρος Hausdorff, το $\phi(\mathbb{B}^n)$ είναι κλειστό. (Βλ. 1.8.9 (i).) Συνεπώς,

$$\mathfrak{e} \subseteq \phi(\mathbb{B}^n) \underset{1.2.10\,(i),(ii)}{\Longrightarrow} \overline{\mathfrak{e}} \subseteq \phi(\mathbb{B}^n) \underset{1.2.7}{\Longrightarrow} \overline{\mathfrak{e}} = \phi(\mathbb{B}^n).$$

(Διεξοδικότερα, μπορούμε να γράψουμε $\phi(\mathring{\mathbb{B}}^n \cup \mathbb{S}^{n-1}) = \mathfrak{e} \cup \partial\mathfrak{e}$.) Επειδή $\phi(\mathring{\mathbb{B}}^n) = \mathfrak{e}$, έχουμε $\partial\mathfrak{e} \subseteq \phi(\mathbb{S}^{n-1})$. Επίσης, επειδή $\phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{(n-1)}$ και $\mathfrak{e} \cap X^{(n-1)} = \varnothing$, έχουμε $\phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq \partial\mathfrak{e}$. Άρα $\phi(\mathbb{S}^{n-1}) = \partial\mathfrak{e}$. $\square$

[98] Για την αιτιολόγηση αυτής τής ονοματοδοσίας βλ. πρόταση 1.20.16.

1.20.4 Ορισμός. Ένας **CW-χώρος** (ή ένα **CW-σύμπλεγμα**) είναι ένας τοπολογικός χώρος X επιδεχόμενος κυτταρική διάσπαση ($X = \bigcup\{\mathfrak{e} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}\}$) και εφοδιασμένος με μια οικογένεια $\{\phi_{\mathfrak{e}} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}\}$ χαρακτηριστικών απεικονίσεων (και, κατ' επέκταση, με σχετικούς ομοιομορφισμούς $\phi_{\mathfrak{e}} : (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\overline{\mathfrak{e}}, \partial\mathfrak{e})$ για κάθε n-κύτταρο $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$), ούτως ώστε να πληρούνται οι εξής συνθήκες:

(C) [= closure finiteness]: Για κάθε $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$, το $\overline{\mathfrak{e}}$ έχει μη κενή τομή με πεπερασμένου πλήθους κύτταρα τού $\mathfrak{X}$.

(W) [= weak topology]: Κάθε υπόχωρος A τού X, για τον οποίον η τομή $A \cap \overline{\mathfrak{e}}$ είναι κλειστή εντός τού $\overline{\mathfrak{e}}$, $\forall \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$, είναι κλειστός υπόχωρος τού X. (Τούτη η συνθήκη ισοδυναμεί με το ότι ο X είναι εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία ως προς την οικογένεια $\{\overline{\mathfrak{e}} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}\}$. Βλ. εδ. 1.15.1).

Ένας CW-χώρος X ονομάζεται

$$\begin{cases} n\text{-}\textbf{διάστατος} & \underset{\text{ορσ.}}{\iff} X^{(n-1)} \subsetneqq X^{(n)} = X, \\ \textbf{απειροδιάστατος} & \underset{\text{ορσ.}}{\iff} X^{(n)} \subsetneqq X,\ \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ \textbf{πεπερασμένος CW-χώρος} & \underset{\text{ορσ.}}{\iff} \operatorname{card}(\mathfrak{X}) < \infty, \\ \textbf{άπειρος CW-χώρος} & \underset{\text{ορσ.}}{\iff} \operatorname{card}(\mathfrak{X}) = \infty. \end{cases}$$

[Σημειωτέον ότι εάν ο τοπολογικός χώρος X επιδέχεται μια άλλη κυτταρική διάσπαση, ας πούμε $X = \bigcup\{\mathfrak{e} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}'\}$, τότε οι διαστάσεις των CW-χώρων $(X, \mathfrak{X})$ και $(X, \mathfrak{X}')$ είναι ίσες.]

1.20.5 Σημείωση. Η έννοια των «CW-χώρων» εισήχθη το 1949 από τον J.H.C Whitehead[99] στο περιώνυμο άρθρο του [128] και σύντομα καθιερώθηκε στη διεθνή βιβλιογραφία.

J.H.C Whitehead

[99]Whitehead, *John Henry Constantine* (11/11/1904-8/5/1960). Βρετανός μαθηματικός. Σπούδασε στην Οξφόρδη. Εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό τον Oswald Veblen (1880-1960) το 1930 στο Princeton και συνέγραψε μαζί του το βιβλίο *Foundation of Differential Geometry* (1932), στο οποίο (μεταξύ άλλων) περιλαμβάνεται και η αξιωματική θεμελίωση τής εννοίας τού *διαφορίσιμου πολυπτύγματος* (differentiable manifold) που παραμένει εν χρήσει μέχρι των ημερών μας. Κατόπιν τούτου η έρευνά του επικεντρώθηκε σε ποικίλα αλγεβροτοπολογικά προβλήματα. Θεωρείται δικαίως ως ένας εκ των κύριων διαμορφωτών τής σύγχρονης Θεωρίας Ομοτοπίας. (Υπήρξε συγγραφέας 90 πρωτότυπων ερευνητικών εργασιών.) Από το 1947 έως τον πρόωρο θάνατό του (το 1960) δίδαξε ως καθηγητής των Θεωρητικών Μαθηματικών στο Balliol College τής Οξφόρδης. Επίσης, κατά την τριετία 1953-1955 διετέλεσε πρόεδρος τής London Mathematical Society.

Ειδικά συγγράμματα αφιερωμένα στην ενδελεχή μελέτη των CW-χώρων είναι αυτά των Cooke & Finney [21], Lundell & Weingram [67] και Fritsch & Piccinini [36].

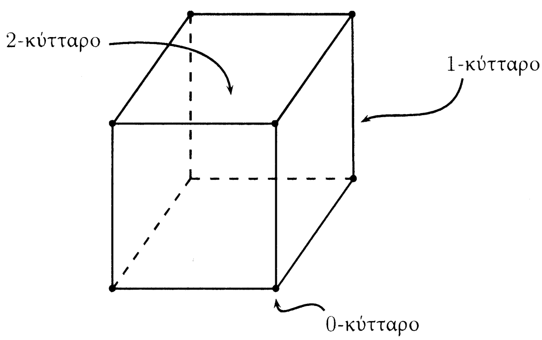
1.20.6 Παραδείγματα. (i) Όταν το πλήθος των διαθέσιμων κυττάρων είναι *πεπερασμένο*, τότε οι συνθήκες **(C)** και **(W)** πληρούνται *αυτομάτως*. Ως εκ τούτου, κάθε χώρος Hausdorff που επιδέχεται διάσπαση σε πεπερασμένου πλήθους κύτταρα, καθένα των οποίων είναι εφοδιασμένο με μια χαρακτηριστική απεικόνιση, είναι CW-χώρος.

(ii) *Κάθε τριγωνίσιμος τοπολογικός χώρος X είναι* CW-χώρος[100]. Εάν το ζεύγος (K,h) είναι ένας τριγωνισμός τού X (βλ. εδ. 1.19.23) και εάν ορίσουμε ως $\mathfrak{X}$ το σύνολο $\mathfrak{X} := \{h(\mathfrak{s}^{\circ}) \,|\, \mathfrak{s} \in K\}$, τότε ο X γράφεται προφανώς ως ένωση των στοιχείων τού $\mathfrak{X}$. Έστω $K^{(n)}$ το υποσύμπλεγμα τού K το απαρτιζόμενο από όλα τα μονόπλοκα $\mathfrak{s} \in K$ με $\dim(\mathfrak{s}) \leq n$. Έστω $\mathfrak{s}$ τυχόν n-μονόπλοκο τού K. Θέτοντας $\phi_{\mathfrak{s}} := (h|_{\mathfrak{s}}) \circ a_{\mathfrak{s}}$, όπου $a_{\mathfrak{s}} : (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\mathfrak{s}, \partial\mathfrak{s})$ οιοσδήποτε ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών, η $\phi_{\mathfrak{s}}$ είναι χαρακτηριστική απεικόνιση για το $\mathfrak{s}$ και (επειδή τα μονόπλοκα τού K είτε δεν τέμνονται είτε τέμνονται κατά μήκος κοινών τους πλευρών) μπορεί να θεωρηθεί ως σχετικός ομοιομορφισμός

$$\begin{tikzcd}(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "a_{\mathfrak{s}}"] \arrow[rr, bend right, "\phi_{\mathfrak{s}}"'] & (\mathfrak{s}, \partial\mathfrak{s}) \arrow[r, "h|_{\mathfrak{s}}"] & \left(h(\mathfrak{s}^{\circ}) \cup \left|K^{(n-1)}\right|, K^{(n-1)}\right)\end{tikzcd}$$

(καθότι η $\phi_{\mathfrak{s}} : \mathbb{B}^n \twoheadrightarrow \phi_{\mathfrak{s}}(\mathbb{B}^n)$ είναι ομοιομορφισμός). Άρα ο $X \approx |K|$ είναι όντως CW-χώρος.

(iii) Η επιφάνεια ενός κύβου (βλ. σχ. 1.??), ενός δωδεκάεδρου κ.λπ. είναι CW-χώροι. Αρκεί να θεωρήσουμε τις κορυφές ως τα 0-κύτταρα, τις ανοικτές ακμές ως τα 1-κύτταρα και τις ανοικτές έδρες ως τα 2-κύτταρα τού χώρου μας. Εν προκειμένω τα 2-κύτταρα δεν είναι (ανοικτά) μονόπλοκα!



Σχήμα 1.??

[100]Το αντίστροφο *δεν είναι εν γένει αληθές*. Για ένα απλό παράδειγμα ενός τριδιάστατου CW-χώρου (κατασκευαζόμενου μέσω κατάλληλης προσαρτήσεως ενός 3-κυττάρου στον δίσκο $\mathbb{B}^2$) που *δεν είναι τριγωνίσιμος* βλ. Shastri [107], Example 2.7.11, σελ. 105-106. Επίσης, για ένα παρόμοιο παράδειγμα, βλ. Fritsch & Piccinini [36], σελ. 128-130. Από την άλλη πλευρά, όταν ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος ενός CW-χώρου είναι *κανονικός* (regular), η ύπαρξη τριγωνισμού είναι διασφαλισμένη. (Βλ. [36], Theorem 3.4.1, σελ. 130.)

(iv) *Η μοναδιαία σφαίρα* $\mathbb{S}^n$ *είναι ένας* CW-χώρος.

(α) Έστω $\mathfrak{e}^0 := P_+$ ο βόρειος πόλος (δηλ. ένα 0-κύτταρο) τής $\mathbb{S}^n$. Το συμπλήρωμα $\mathfrak{e}^n := \mathbb{S}^n \smallsetminus \{\mathfrak{e}^0\}$ είναι ένα n-κύτταρο (πρβλ. 1.5.3 (iv)). Η $\mathbb{S}^n$ διασπάται σε δύο κύτταρα: $\mathbb{S}^n = \{\mathfrak{e}^0\} \cup \{\mathfrak{e}^n\}$. Θέτοντας

$$\begin{cases} \phi_{\mathfrak{e}^0} : \mathbb{B}^0 \longrightarrow \mathbb{S}^n,\ \mathbf{x} \longmapsto \phi_{\mathfrak{e}^0}(\mathbf{x}) := \mathfrak{e}^0, \text{ και για } \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \\ \phi_{\mathfrak{e}^n} : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n,\ \mathbf{x} \longmapsto \phi_{\mathfrak{e}^n}(\mathbf{x}) := (2||\mathbf{x}||^2 - 1, 2x_1\sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2}, ..., 2x_n\sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2}) \end{cases}$$

την καθιστούμε CW-χώρο με τις $\phi_{\mathfrak{e}^0}, \phi_{\mathfrak{e}^n}$ ως χαρακτηριστικές απεικονίσεις.

$$(\varnothing = (\mathbb{S}^n)^{-1} \subsetneqq (\mathbb{S}^n)^{(0)} = \{\mathfrak{e}^0\} = ... = (\mathbb{S}^n)^{(n-1)} \subsetneqq (\mathbb{S}^n)^{(n)} = (\mathbb{S}^n)^{(n+1)} = ...)$$

(β) Ένας δεύτερος τρόπος εφοδιασμού τής $\mathbb{S}^n$ με τη δομή ενός CW-χώρου είναι ο εξής: Θεωρούμε την ακολουθία σφαιρών

$$\mathbb{S}^0 \subsetneqq \mathbb{S}^1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathbb{S}^{n-1} \subsetneqq \mathbb{S}^n$$

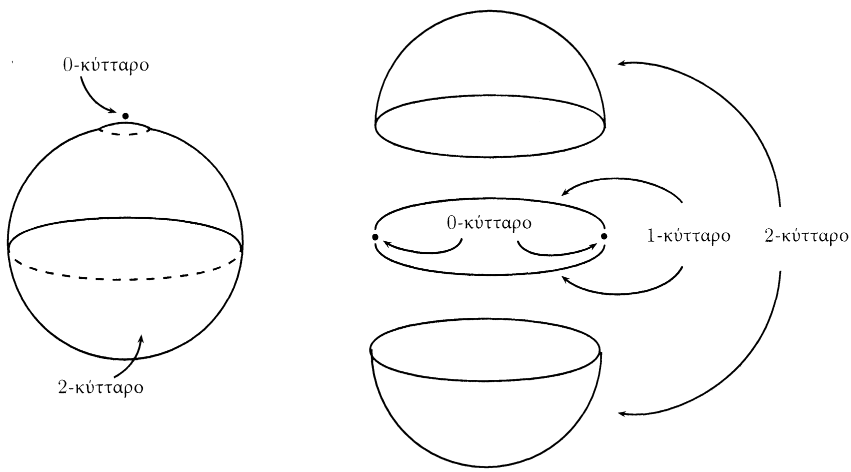
εκλαμβάνοντας καθεμία εξ αυτών ως τον «ισημερινό» τής επομένης (πρβλ. 1.5.3 (iv)) καθώς και τα κύτταρα (= ανοικτά ημισφαίρια)

$$\mathfrak{e}^j_+ := \overset{\circ}{\mathbb{S}}{}^j_+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^j \mid x_{j+1} > 0\},\ \ \mathfrak{e}^j_- := \overset{\circ}{\mathbb{S}}{}^j_- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^j \mid x_{j+1} < 0\}$$

για $j = 0, 1, ..., n$. Οι ορθογώνιες προβολές

$$\phi_{\mathfrak{e}^j_\pm} : \mathbb{B}^j \longrightarrow \mathbb{S}^n,\ (x_1, ..., x_j) = \mathbf{x} \longmapsto \phi_{\mathfrak{e}^j_\pm}(\mathbf{x}) := (x_1, ..., x_j, \pm\sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2}, 0, ..., 0),$$

με $\phi_{\mathfrak{e}^j_\pm}(\mathbb{B}^j) \approx \mathbb{S}^j_\pm \subseteq \mathbb{S}^n$, μπορούν να παίξουν τον ρόλο χαρακτηριστικών απεικονίσεων, ούτως ώστε η $\mathbb{S}^n$ να καταστεί εκ νέου CW-χώρος.



(α) (β)

Σχήμα 1.??

(γ) Βεβαίως, ένας άλλος τρόπος εφοδιασμού τής $\mathbb{S}^n$ με τη δομή ενός CW-χώρου είναι να θεωρήσουμε οιονδήποτε τριγωνισμό τής $\mathbb{S}^n$ και να εφαρμόσουμε γι' αυτόν ό,τι προείπαμε στο (ii). Ένας κλασικός, *όμορφος* τριγωνισμός τής $\mathbb{S}^n$ επιτυγχάνεται με τη χρήση τού λεγομένου $(n+1)$-διάστατου *σταυρωτού πολυτόπου* (cross polytope)

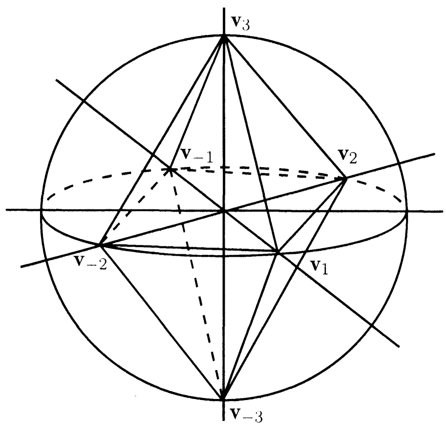
$$P_{n+1} := \left\{ (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n+1} |x_j| \leq 1 \right\},$$

το οποίο αποτελεί την άμεση γενίκευση τού γνωστού μας *στερεού κανονικού οκταέδρου* P_3. Σημειωτέον ότι το P_{n+1} αναπαριστάται ως διπλή πυραμίδα υπεράνω τού P_n. Επίσης, έχουμε $P_{n+1} = \mathrm{conv}(\{\mathbf{v}_{\pm j} \mid 1 \leq j \leq n+1\})$, όπου εξ ορισμού $\mathbf{v}_{\pm j} := (0, ..., \pm 1, 0, ..., 0)$ και

$$\partial P_{n+1} := \left\{ (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n+1} |x_j| = 1 \right\}.$$

(Πρβλ. Ziegler [130], σελ. 8.) Ο εν λόγω τριγωνισμός τής $\mathbb{S}^n$ (ο οποίος εικονογραφείται για $n = 2$ στο σχήμα 1.??) ορίζεται μέσω τής κλασικής *ακτινικής προβολής*:

$$|\partial P_{n+1}| \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}^n, \; \mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}.$$



Σχήμα 1.??

(v) Εάν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ και d όπως στην (1.8), τότε *οι προβολικοί χώροι* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ (βλ. 1. 12 και 1.13.5 (v)) *είναι* CW-χώροι. Όπως έχει ήδη δειχθεί στο εδάφιο 1.16.4, ο $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ γράφεται ως ένωση $n+1$ κυττάρων $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \approx \mathfrak{e}^0 \cup \mathfrak{e}^d \cup \mathfrak{e}^{2d} \cup \cdots \cup \mathfrak{e}^{nd}$, ενώ οι εκεί ορισθείσες απεικονίσεις $\phi_k = \phi_{\mathfrak{e}^{dk}} : \mathbb{B}^{dk} \longrightarrow \mathbb{P}^k_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ μπορούν να διαδραματίσουν τον ρόλο των απαιτουμένων χαρακτηριστικών απεικονίσεων για κάθε $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

(vi) *Οι γενικευμένοι χώροι φακού* $\mathbb{L}_{2n-1}(p;q_1,...,q_n) := \mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$ (όπως ορίσθηκαν στο εδάφιο 1.14.5) *είναι* CW-χώροι. Για την απόδειξη ταυτίζουμε (ως είθισται) την $\mathbb{S}^{2n-1}$ με το $\{(z_1,...,z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1\}$, συμβολίζουμε ως $\eta : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{L}_{2n-1}(p;q_1,...,q_n)$ τη φυσική επίρριψη και θεωρούμε την ακόλουθη διάσπαση τής $\mathbb{S}^{2n-1}$ σε $p(n+1)$ κύτταρα:

$$\begin{cases} \mathfrak{e}_\nu^{2j-2} := \{(z_1,...,z_n) \in \mathbb{S}^{2n-1} \mid z_k = 0 \text{ για } k > j \text{ και } \arg(z_i) = \frac{2\pi\nu}{p}\} \\ \mathfrak{e}_\nu^{2j-1} := \{(z_1,...,z_n) \in \mathbb{S}^{2n-1} \mid z_k = 0 \text{ για } k > j \text{ και } \frac{2\pi\nu}{p} < \arg(z_i) < \frac{2\pi(\nu+1)}{p}\} \end{cases}$$

για $\nu \in \{0,1,...,p-1\}$ και $j \in \{1,2,...,n\}$. Κατόπιν τούτου, εισάγοντας τον συμβολισμό

$$\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^{2s} := \left\{ (z_1,...,z_s) \in \mathbb{C}^s \;\middle|\; \sum_{j=1}^s |z_j|^2 \leq 1 \right\} \quad (s \in \mathbb{N}_0)$$

ορίζουμε την απεικόνιση

$$\phi_{\mathfrak{e}_\nu^{2j-2}} : \mathbb{B}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1} \;\; [\text{με } \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \overset{\phi_{\mathfrak{e}_\nu^{2j-1}}}{\longrightarrow} \mathfrak{e}_\nu^{2j-1}]$$

καθώς και την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \phi'_{\mathfrak{e}_\nu^{2j-1}} \quad &: \quad \mathbb{B}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{B}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}, \\ (z_1,...,z_{j-1},x) \quad &\longmapsto \quad (z_1,...,z_{j-1}, \left(\sqrt{1 - \sum_{l=1}^{j-1} |z_l|^2}\right) \exp(\tfrac{2\pi\sqrt{-1}(x+2\nu+1)}{p}), 0, ..., 0). \end{aligned}$$

Εν συνεχεία, θεωρώντας μια συνεχή απεικόνιση

$$h_{j-1} : \mathbb{B}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{B}^1 \longrightarrow \mathbb{B}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{B}^1$$

με την ιδιότητα $h_{j-1}(z_1,...z_{j-1},x) = (z_1,...,z_{j-1},1)$ όταν $|z_1|^2 + \cdots + |z_{j-1}|^2 = 1$, έχουμε προφανώς $h_{j-1}(\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \partial\mathbb{B}^1) = \partial(\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{B}^1)$, οπότε υπάρχει

$$\phi_{\mathfrak{e}_\nu^{2j-1}} : \mathbb{B}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{B}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$$

με $\phi'_{\mathfrak{e}_\nu^{2j-1}} = \phi_{\mathfrak{e}_\nu^{2j-1}} \circ h_{j-1}$ και $(\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{B}^1)^\circ \overset{\phi_{\mathfrak{e}_\nu^{2j-1}}}{\longrightarrow} \mathfrak{e}_\nu^{2j-1}$. Μέσω των ανωτέρω χαρακτηριστικών συναρτήσεων $\phi_{\mathfrak{e}_\nu^{2j-2}}, \phi_{\mathfrak{e}_\nu^{2j-1}}$ η $\mathbb{S}^{2n-1}$ καθίσταται CW-χώρος. Σημειωτέον ότι

$$\partial\mathfrak{e}_\nu^{2j-1} = \mathfrak{e}_\nu^{2j-2} \cup \mathfrak{e}_{\nu+1}^{2j-2}.$$

Κατόπιν εφαρμογής τής η διαπιστώνουμε ότι τα $\mathfrak{e}_\nu^{2j-2}$ (και αντιστοίχως, τα $\mathfrak{e}_\nu^{2j-1}$) ταυτίζονται μεταξύ τους για κάθε $\nu \in \{0,1,...,p-1\}$. Ως εκ τούτου, ο

$\mathbb{L}_{2n-1}(p;q_1,...,q_n)$ είναι CW-χώρος έχων ακριβώς ένα κύτταρο σε κάθε διάσταση $\leq 2n-1$, ήτοι

$$\mathbb{L}_{2n-1}(p;q_1,...,q_n) = \eta(\mathfrak{e}_0^0) \cup \eta(\mathfrak{e}_0^1) \cup \cdots \cup \eta(\mathfrak{e}_0^{2n-1})$$

(με τις $\psi^\mu := \eta \circ \phi_{\mathfrak{e}_0^\mu}$, $\mu \in \{0,1,...,2n-1\}$ ως χαρακτηριστικές απεικονίσεις.)

(vii) *Οι* (συνεκτικές, συμπαγείς) *επιφάνειες* $\mathcal{F}_g$, $g \geq 1$, *είναι* CW-χώροι. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό ?? για την $\mathcal{F}_g$ παρουσιάζοντάς την ως τον πηλικόχωρο $\mathfrak{E}_{4g}/\mathcal{R}$, καθώς και ό,τι αποδείξαμε στο θεώρημα 1.16.8. Έστω $p : \mathfrak{E}_{4g} \longrightarrow \mathcal{F}_g$ η φυσική επίρριψη και έστω

$$\boxed{h := i_1 i_2 i_1^{-1} i_2^{-1} ... i_{2g-1} i_{2g} i_{2g-1}^{-1} i_{2g}^{-1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_{2g}^1}$$

η απεικόνιση η ορισθείσα στο προαναφερθέν θεώρημα. Τότε η απεικόνιση $\overline{h}$ τού μεταθετικού διαγράμματος[101]:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "h"] & \mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_{2g}^1 \\
\partial\mathfrak{E}_{4g} \arrow[u, "\approx"] \arrow[r, "p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & p(\partial\mathfrak{E}_{4g}) \arrow[u, "\overline{h}"']
\end{tikzcd}$$

με $\overline{h}(p(\mathbf{x})) := h(\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||})$, $\forall \mathbf{x} \in \partial\mathfrak{E}_{4g}$, είναι ομοιομορφισμός. Έτσι, ταυτίζοντας το $\mathfrak{E}_{4g}$ με τον $\mathbb{B}^2$, μπορούμε να γράψουμε την $\mathcal{F}_g$ ως εξής:

$$\mathcal{F}_g \approx p(\partial\mathfrak{E}_{4g}) \cup_{p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}}} \mathfrak{E}_{4g}. \text{ (Βλ. 1.16.1).}$$

Η $\mathcal{F}_g$ επιδέχεται την ακόλουθη κυτταρική διάσπαση:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\blacktriangleright \text{ Ένα 0-κύτταρο:} & p(z_1)(= p(z_2) = \cdots = p(z_{4g})), \\
\blacktriangleright \;\; 2g \text{ 1-κύτταρα:} & \begin{cases} p(\overline{z_{4j-3}z_{4j-2}}) \smallsetminus p(z_{4j-3}) \\ p(\overline{z_{4j-2}z_{4j-1}}) \smallsetminus p(z_{4j-2}),\ 1 \leq j \leq g, \end{cases} \\
\blacktriangleright \text{ Ένα 2-κύτταρο:} & \mathcal{F}_g \smallsetminus p(\partial\mathfrak{E}_{4g})\ (= p(\overset{\circ}{\mathfrak{E}}_{4g})).
\end{array}} \qquad (1.12)$$

Η $\mathcal{F}_g$ καθίσταται CW-χώρος μέσω των ακολούθων χαρακτηριστικών απεικονίσεων:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\blacktriangleright\ \phi_{p(z_1)} = \text{η συνήθης ένθεση.} \\
\blacktriangleright\ \phi \text{ για το } p(\overline{z_{4j-3}z_{4j-2}}) \smallsetminus p(z_{4j-3}): \\
\phi : [-1,1] \longrightarrow \mathcal{F}_g,\ t \longmapsto \phi(t) := p(\frac{1}{2}(1-t)z_{4j-3} + \frac{1}{2}(1+t)z_{4j-2}). \\
\blacktriangleright\ \phi \text{ για το } p(\overline{z_{4j-2}z_{4j-1}}) \smallsetminus p(z_{4j-2}): \\
\phi : [-1,1] \longrightarrow \mathcal{F}_g,\ t \longmapsto \phi(t) := p(\frac{1}{2}(1-t)z_{4j-2} + \frac{1}{2}(1+t)z_{4j-1}). \\
\blacktriangleright\ \phi_{\mathcal{F}_g \smallsetminus p(\partial\mathfrak{E}_{4g})} := p.
\end{array}} \qquad (1.13)$$

[101] Το πρώτο κατακόρυφο βέλος συμβολίζει τον ομοιομορφισμό $\partial\mathfrak{E}_{4g} \ni \mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} \in \mathbb{S}^1$.

(viii) Κατ' αναλογίαν, *οι* (συνεκτικές, συμπαγείς) *επιφάνειες* $\mathcal{N}_g$, $g \geq 1$ *είναι* CW-χώροι. Για $g = 1$, $\mathcal{N}_1 := \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (που είναι CW-χώρος επί τη βάσει τού (v)). Έστω $g \geq 2$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό ?? για την $\mathcal{N}_g$, παρουσιάζοντάς την ως τον πηλικόχωρο $\mathfrak{E}_{2g}/\mathcal{S}$, καθώς και το θεώρημα 1.16.8. Έστω $p : \mathfrak{E}_{2g} \longrightarrow \mathcal{N}_g$ η φυσική επίρριψη και έστω

$$\boxed{h := i_1^2 i_2^2 ... i_g^2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1_1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1_g}$$

η απεικόνιση η ορισθείσα στο προαναφερθέν θεώρημα. Τότε η απεικόνιση τού μεταθετικού διαγράμματος[102]:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "h"] & \mathbb{S}^1_1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1_g \\
\partial\mathfrak{E}_{2g} \arrow[u, "\approx"] \arrow[r, "p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & p(\partial\mathfrak{E}_{2g}) \arrow[u, "\overline{h}"']
\end{tikzcd}$$

με $\overline{h}(p(\mathbf{x})) := h(\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||})$, $\forall \mathbf{x} \in \partial\mathfrak{E}_{2g}$, είναι ομοιομορφισμός. Έτσι, ταυτίζοντας το $\mathfrak{E}_{2g}$ με τον $\mathbb{B}^2$, μπορούμε να γράψουμε την $\mathcal{N}_g$ ως εξής:

$$\mathcal{N}_g \approx p(\mathfrak{E}_{2g}) \cup_{p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}}} \mathfrak{E}_{2g} \text{ (Βλ. 1.16.1).}$$

Η $\mathcal{N}_g$ επιδέχεται την ακόλουθη κυτταρική διάσπαση:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \blacktriangleright \text{ Ένα 0-κύτταρο:} & p(z_1)(= p(z_2) = \cdots = p(z_{2g})), \\ \blacktriangleright \ g \text{ 1-κύτταρα:} & p(\overline{z_{2j-1}z_{2j}}) \smallsetminus p(z_{2j-1}),\ 1 \leq j \leq g, \\ \blacktriangleright \text{ Ένα 2-κύτταρο:} & \mathcal{N}_g \smallsetminus p(\partial\mathfrak{E}_{2g})(= p(\overset{\circ}{\mathfrak{E}}_{2g})). \end{array}} \tag{1.14}$$

Η $\mathcal{N}_g$ καθίσταται CW-χώρος μέσω των ακολούθων χαρακτηριστικών απεικονίσεων:

$$\boxed{\begin{array}{l} \blacktriangleright\ \phi_{p(z_1)} = \text{η συνήθης ένθεση.} \\ \blacktriangleright\ \phi \text{ για το } p(\overline{z_{2j-1}z_{2j}}) \smallsetminus p(z_{2j-1}): \\ \phi : [-1,1] \longrightarrow \mathcal{N}_g,\ t \longmapsto \phi(t) := p(\frac{1}{2}(1-t)z_{2j-1} + \frac{1}{2}(1+t)z_{2j}). \\ \blacktriangleright\ \phi_{N_g \smallsetminus p(\partial\mathfrak{E}_{2g})} := p. \end{array}} \tag{1.15}$$

(ix) Υπάρχουν ευρείες κλάσεις τοπολογικών πολυπτυγμάτων τα οποία είναι CW-χώροι *μέχρις ομοτοπικής ισοδυναμίας*. Βλ. θεώρημα 1.20.8.

1.20.7 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος ονομάζεται **διαχωρίσιμος** όταν διαθέτει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

[102]Το πρώτο κατακόρυφο βέλος συμβολίζει τον ομοιομορφισμό $\partial\mathfrak{E}_{2g} \ni \mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} \in \mathbb{S}^1$.

1.20.8 Θεώρημα. (O. Hanner [45], 1951) *Κάθε διαχωρίσιμος τοπικά ευκλείδειος τοπολογικός χώρος*[103] *είναι ομοτοπικώς ισοδύναμος με κάποιον CW-χώρο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ., π.χ.[104], [67], Corollary 5.7, σελ. 135. □

1.20.9 Πρόταση. *Έστω X ένας CW-χώρος με το πολύ αριθμησίμου πλήθους κύτταρα. Εάν ο X είναι τοπικά ευκλείδειος, τότε ο X αποτελεί ένα τοπολογικό πολύπτυγμα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. Lee [63], Proposition 5.23, σελ. 142 (τής 2ης εκδόσεως). □

1.20.10 Πρόταση. *Έστω X ένας CW-χώρος ο οποίος τυγχάνει να είναι ταυτοχρόνως και n-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα. Τότε ο X είναι n-διάστατος (υπό την έννοια τού ορισμού* 1.20.4) *και ως CW-χώρος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. Lee [63], Proposition 5.24, σελ. 142-143 (τής 2ης εκδόσεως). □

1.20.11 Ορισμός. Έστω X ένας CW-χώρος και έστω A ένας υπόχωρός του, ο οποίος γράφεται ως ένωση κυττάρων τού X. Ο A ονομάζεται **CW-υπόχωρος** τού X (και το (X, A) **CW-ζεύγος**) όταν ισχύει μία (και, κατ' επέκταση, και οι τρεις) εκ των κάτωθι ισοδυνάμων συνθηκών:

(i) Ο A, με τα εντός αυτού ανήκοντα κύτταρα τού X, αποτελεί αφ' εαυτού έναν CW-χώρο.

(ii) Ο A είναι κλειστός υπόχωρος τού X.

(iii) Για κάθε κύτταρο $\mathfrak{e} \subseteq A$ έχουμε $\overline{\mathfrak{e}} \subseteq A$.

1.20.12 Σημείωση. (i) Τομές και ενώσεις CW-υποχώρων ενός CW-χώρου αποτελούν CW-υπόχωρους (λόγω των 1.20.11 (ii) και (iii), αντιστοίχως).

(ii) Οι σκελετοί CW-χώρων είναι CW-υπόχωροι αυτών λόγω τού 1.20.11 (iii) και τής προτάσεως 1.20.3. Γενικότερα, εάν η $(\mathfrak{e}_j^n)_{j \in J}$ είναι μια οικογένεια n-κυττάρων ανηκόντων σε έναν CW-χώρο X, τότε η ένωση $X^{(n-1)} \cup \bigcup_{j \in J} \mathfrak{e}_j^n$ αποτελεί έναν CW-υπόχωρο τού X. Για τον ίδιο λόγο, οι συνεκτικές συνιστώσες οιουδήποτε CW-χώρου X είναι CW-υπόχωροι αυτού και ο X γράφεται ως το τοπολογικό άθροισμα των συνεκτικών συνιστωσών του (με καθεμιά εξ αυτών να είναι το συμπλήρωμα των υπολοίπων ανοικτών). Εν προκειμένω, κάθε συνεκτική συιστώσα τού X είναι δρομοσυνεκτική του συνιστώσα, και αντιστρόφως!

Μια επιπρόσθετη διαφορά μεταξύ των CW-χώρων και των (τοπολογικών) πολυέδρων έγκειται στο ότι οι CW-χώροι *είναι δυνατόν* να διαθέτουν *απείρου πλήθους*

[103] Επειδή κάθε διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος είναι και 2ος αριθμήσιμος, μεταξύ αυτών συμπεριλαμβάνονται και τα *τοπολογικά πολυπτύγματα*.

[104] Πρβλ., επίσης, [36], Corollary 5.2.4, σελ. 228.

κύτταρα. Εν τοιαύτη περιπτώσει, οι συνθήκες (**C**) και (**W**) τού 1.20.4 είναι αποφασιστικής σημασίας για τη δομή των θεωρουμένων χώρων. Κατ' αρχάς, τα διαθέσιμα κύτταρα δεν μπορούν να «συσσωρεύονται», όπως δείχνει η ακόλουθη:

1.20.13 Πρόταση. *Έστω X ένας CW-χώρος και έστω $A \subseteq X$ ένας υπόχωρός του, η τομή τού οποίου με καθένα των κυττάρων τού X αποτελείται το πολύ από ένα σημείο. Τότε ο A είναι διακριτός υπόχωρος τού X.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $B \subseteq A$ και για κάθε κύτταρο $\mathfrak{e} \subseteq X$ η τομή $B \cap \mathfrak{e}$ είναι είτε κενή είτε ένα μονοσύνολο. Λόγω τής συνθήκης 1.20.4 (**C**) η τομή $B \cap \overline{\mathfrak{e}}$ απαρτίζεται το πολύ από πεπερασμένου πλήθους σημεία, οπότε είναι κλειστή εντός τού $\overline{\mathfrak{e}}$. Έτσι, λόγω τής συνθήκης 1.20.4 (**W**), το B είναι κλειστό εντός τού X. Επειδή, λοιπόν, κάθε υποσύνολο τού A είναι κλειστό εντός τού X, ο A είναι διακριτός υπόχωρος τού X. □

1.20.14 Παραδείγματα. (i) Όλοι οι μηδενοδιάστατοι CW-χώροι είναι διακριτοί.

(ii) Το *χαβανέζικο σκουλαρίκι*

$$\mathrm{HE} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \tfrac{1}{n})^2 + y^2 = \tfrac{1}{n^2}\}$$

που ορίσθηκε στο εδάφιο 1.10.11 (iii) (c) επιδέχεται κυτταρική διάσπαση (με ένα 0-κύτταρο και άπειρα-αριθμήσιμα 1-κύτταρα), αλλά *δεν είναι* CW-χώρος, καθότι τα 1-κύτταρά του συσσωρεύονται πλησίον τού 0-διάστατου κυττάρου του, κάτι που παραβιάζει τη συνθήκη 1.20.11 (**W**).

(iii) Η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$, διασπώμενη σε κύτταρα, και συγκεκριμένα στους ακεραίους αριθμούς (0-κύτταρα) και στα μεταξύ αυτών ευρισκόμενα (ανοικτά) διαστήματα (1-κύτταρα), είναι ένας CW-χώρος. (Η συνθήκη 1.20.4 (**W**) πληρούται βάσει τής προτάσεως 1.15.3.) Κατ' επέκταση, ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι CW-χώρος έχων ως κύτταρά του τα καρτεσιανά γινόμενα των ως άνω 0- και 1-κυττάρων. (Πρβλ. 1.20.25 (v).)

1.20.15 Πρόταση. *Έστω X ένας CW-χώρος. Τότε κάθε συμπαγές $A \subseteq X$ περιέχεται σε έναν πεπερασμένο CW-υπόχωρο τού X. Ιδιαιτέρως, ένας CW-χώρος είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν διαθέτει μια κυτταρική διάσπαση αποτελούμενη από πεπερασμένου πλήθους κύτταρα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από κάθε κύτταρο $\mathfrak{e} \subseteq X$, για το οποίο ισχύει $\mathfrak{e} \cap A \neq \varnothing$, επιλέγουμε ένα σημείο τού $\mathfrak{e} \cap A$. Κατά την πρόταση 1.20.13 το σύνολο αυτών των σημείων είναι διακριτό και, κατ' επέκταση, πεπερασμένο (αφού ανήκει στο A). Άρα το A διαθέτει μη κενή τομή με πεπερασμένου πλήθους κύτταρα τού X. Επειδή κάθε κύτταρο ανήκει σε έναν πεπερασμένο CW-υπόχωρο τού X (όπως κανείς μπορεί εύκολα να αποδείξει κάνοντας χρήση επαγωγής επί τής διαστάσεως τού κυττάρου μέσω τής προτάσεως 1.20.3 και τής συνθήκης 1.20.4 (**C**)), το ίδιο ισχύει και για το A. □

1.20.16 Πρόταση. (i) *Κάθε CW-χώρος X είναι εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία ως προς τους σκελετούς $\{X^{(n)} \mid n \geq 0\}$, δηλαδή $X = \lim_{n\to\infty} X^{(n)}$.*

(ii) *Έστω (X, A) ένα CW-ζεύγος. Εάν υποτεθεί ότι για κάθε n-κύτταρο εντός τού $X \setminus A$ έχει επιλεχθεί μια παγιωμένη απεικόνιση $f_j : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{(n-1)}$ ($j \in J_n$, όπου J_n το σύνολο δεικτών), τότε η ένωση $A \cup X^{(n)}$ δημιουργείται από το $A \cup X^{(n-1)}$ ύστερα από προσάρτηση n-κυττάρων μέσω αυτών των απεικονίσεων.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το (i) έπεται άμεσα από τη συνθήκη 1.20.4 **(W)**.

(ii) Εάν $(\mathfrak{e}_j)_{j\in J_n}$ είναι η συλλογή n-κυττάρων των ανηκόντων στο $X \setminus A$ και ϕ_j μια χαρακτηριστική απεικόνιση τού $\mathfrak{e}_j$ με $\phi_j|_{\mathbb{S}^{n-1}} = f_j$, τότε θεωρούμε τις ακόλουθες απεικονίσεις:

$$f : \mathbb{S}^{n-1} \times J_n \longrightarrow A \cup X^{(n-1)},\ f(x, j) := f_j(x),$$

$$\phi : \mathbb{B}^n \times J_n \longrightarrow A \cup X^{(n)},\ \phi(z, j) := \phi(z),$$

$$p : (A \cup X^{(n-1)}) + (\mathbb{B}^n \times J_n) \longrightarrow (A \cup X^{(n-1)} \cup_f (\mathbb{B}^n \times J_n) =: Y_n$$

(φυσική επίρριψη) και

$$h := (\mathrm{id}_{A\cup X^{(n-1)}} + \phi) \circ p^{-1} : Y_n \longrightarrow A \cup X^{(n)}.$$

Εν προκειμένω, το J_n είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία και η p είναι ταυτισμική απεικόνιση. Επίσης, η h είναι καλώς ορισμένη και συνεχής (βλ. πρόταση 1.10.15) και προδήλως αμφιρριπτική. Έστω $\mathfrak{e} \subseteq A \cup X^{(n)}$ ένα κύτταρο. Εάν $\mathfrak{e} \subset X^{(n-1)}$, τότε η $h^{-1}|_{\overline{\mathfrak{e}}}$ είναι η ταυτοτική. Εάν $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_j$, τότε η $h^{-1}|_{\overline{\mathfrak{e}}} = p \circ \phi^{-1}$ είναι συνεχής, διότι η ϕ_j είναι ταυτισμική. Κατά συνέπειαν, η $h^{-1}|_{\overline{\mathfrak{e}}}$ είναι συνεχής για κάθε κύτταρο $\mathfrak{e}$. Από τη συνθήκη 1.20.4 **(W)** έπεται η συνέχεια τής h^{-1}. Ως εκ τούτου, η h είναι ομοιομορφισμός. □

Στην περίπτωση κατά την οποία $A = \varnothing$ η ανωτέρω πρόταση μας δείχνει ότι κάθε CW-χώρος λαμβάνεται ως εξής: Κανείς εκκινεί από τον $X^{(0)}$ (έναν διακριτό χώρο), κατασκευάζει τον $X^{(1)}$ εξ αυτού ύστερα από προσάρτηση 1-κυττάρων, τον $X^{(2)}$ εξ αυτού ύστερα από προσάρτηση 2-κυττάρων κ.ο.κ. Ο X είναι το όριο τής ακολουθίας

$$X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq X^{(n)} \subseteq X^{(n+1)} \subseteq \cdots$$

Και αντιστρόφως· μια τέτοιου είδους κατασκευή παρέχει έναν CW-χώρο:

1.20.17 Πρόταση. *Έστω $X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \cdots$ μια αύξουσα ακολουθία τοπολογικών χώρων, ούτως ώστε ο $X^{(0)}$ να είναι διακριτός και ο $X^{(n)}$ να δημιουργείται από τον $X^{(n-1)}$ ύστερα από προσάρτηση n-κυττάρων ($n \geq 1$). Τότε ο $X := \lim_{n\to\infty} X^{(n)}$ (με τα 0-κύτταρα από τον $X^{(0)}$ και τα n-κύτταρα από τον $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$) είναι ένας CW-χώρος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο X είναι χώρος Hausdorff. (*Υπόδειξη*: Για $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $n \geq 0$ και ανοικτά υποσύνολα U_n, V_n τού $X^{(n)}$, για τα οποία ισχύει: $x \in U_n$, $y \in V_n$ και $U_n \cap V_n = \varnothing$. Το U_n μπορεί να επεκταθεί σε ένα ανοικτό υποσύνολο U_{n+1} τού $X^{(n+1)}$ ύστερα από προσάρτηση σε κάθε $(n+1)$-κύτταρο $\mathfrak{e}$ με $U_n \cap \partial\mathfrak{e} \neq \varnothing$ των σημειών τής μορφής $\phi_{\mathfrak{e}}(\lambda z)$, $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$, με $\phi_{\mathfrak{e}}(z) \in U_n \cap \partial\mathfrak{e}$ (όπου $\phi_{\mathfrak{e}}$ η χαρακτηριστική απεικόνιση τού $\mathfrak{e}$). Κατ' αναλογίαν, κατασκευάζει κανείς το V_{n+1}. Κατόπιν επαναλήψεως αυτής τής διαδικασίας προκύπτουν ανοικτά υποσύνολα $U = U_n \cup U_{n+1} \cup ...$, $V = V_n \cup V_{n+1} \cup ...$ τού X με $U \cap V = \varnothing$.)

Προφανώς, ο X διαθέτει κυτταρική διάσπαση και κάθε κύτταρο μια χαρακτηριστική απεικόνιση (ήτοι τον περιορισμό τής ταυτισμικής απεικονίσεως κατά την προσάρτηση των κυττάρων). Κάνοντας χρήση επαγωγής ως προς τον n αποδεικνύεται εύκολα ότι κάθε $X^{(n)}$ είναι ένας CW-χώρος. Τέλος, οι συνθήκες 1.20.11 **(C)** και **(W)** πληρούνται και για τον X, καθότι ο X είναι εξ υποθέσεως εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία ως προς το $\{X^{(n)} \mid n \geq 0\}$. □

1.20.18 Παραδείγματα. (i) *Οι απειροδιάστατοι προβολικοί χώροι* $\mathbb{P}^{\infty}_{\mathbb{K}}$ (όπου, όπως στο εδάφιο 1.15.6 (iii), $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) *είναι* CW-χώροι. Μάλιστα, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα 1.16.4 και 1.21.5 (v), συμπεραίνουμε ότι αυτοί μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}^{\infty}_{\mathbb{R}} &= \mathfrak{e}^0 \cup \mathfrak{e}^1 \cup \mathfrak{e}^2 \cup \cdots \\ \mathbb{P}^{\infty}_{\mathbb{C}} &= \mathfrak{e}^0 \cup \mathfrak{e}^2 \cup \mathfrak{e}^4 \cup \cdots \end{aligned}}$$

(ii) Βάσει τής κυτταρικής διασπάσεως 1.20.6 (iv) (β) τής μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^n$ συμπεραίνουμε ότι *και η* $\mathbb{S}^{\infty} = \lim_{n \to \infty} \mathbb{S}^n$ *είναι* CW-χώρος.

(iii) Το ίδιο συμβαίνει και με τους *απειροδιάστατους γενικευμένους χώρους φακού* $\mathbb{L}_{\infty}(p; q_1, q_2, ...)$, βλ. 1.15.6 (iv). Μάλιστα, κατά το 1.20.6 (vi), αυτοί γράφονται ως εξής:

$$\boxed{\mathbb{L}_{\infty}(p; q_1, q_2, ...) = \mathfrak{e}^0 \cup \mathfrak{e}^1 \cup \mathfrak{e}^2 \cup \cdots}$$

(με τις αντίστοιχες $\phi_{\mathfrak{e}}$).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, A ένας κλειστός υπόχωρος τού X και $f : A \longrightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση, όπου το (X, A) είναι ένα CW-ζεύγος και Y ένας CW-χώρος. Θα μελετήσουμε το κατά πόσον ο $Y \cup_f X$ είναι CW-χώρος. Η μόνη δυσκολία για να συμβαίνει αυτό καθίσταται σαφής μέσω τού ακολούθου παραδείγματος: Προσαρτώντας στην $\mathbb{S}^2$ ένα 2-κύτταρο μέσω μιας επιρριπτικής, συνεχούς απεικονίσεως $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, ο χώρος $\mathbb{S}^2 \cup \mathfrak{e}^2$ επιδέχεται κυτταρική διάσπαση αλλά (ασχέτως με το πώς διασπάται η $\mathbb{S}^2$) το $\partial\mathfrak{e}^2$ *δεν ανήκει* στον 1-σκελετό. Ως εκ τούτου, βλέπουμε ότι υπάρχει η ανάγκη εισαγωγής μιας επιπρόσθετης συνθήκης για τις απεικονίσεις προσαρτήσεως.

1.20.19 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ CW-χώρων καλείται **κυτταρική απεικόνιση** όταν $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

1.20.20 Παρατήρηση. Εάν η $\varphi : K \longrightarrow L$ είναι μια μονοπλεκτική απεικόνιση (βλ. εδ. 1.19.26), τότε η $|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|$ είναι κυτταρική. Ωστόσο, τούτο το παράδειγμα είναι πολύ ειδικό. Εν γένει, οι κυτταρικές απεικονίσεις δεν απεικονίζουν κατ' ανάγκην κύτταρα σε κύτταρα.

1.20.21 Σημείωση. Η κατηγορία $\mathfrak{Top}_{\mathrm{CW}}$ των CW-χώρων (με τις *κυτταρικές απεικονίσεις* ως μορφισμούς της) είναι μια υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}$ και η κατηγορία $\mathfrak{Top}_{\mathrm{CW}}^{[2]}$ των CW-ζευγών 1.20.11 (με τις *κυτταρικές απεικονίσεις* CW-*ζευγών* $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, ήτοι με κυτταρικές απεικονίσεις $f : X \longrightarrow Y$, όπου $f(A) \subseteq B$, ως μορφισμούς της) είναι μια υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2]}$.

1.20.22 Θεώρημα. *Έστω $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$ μια συνεχής απεικόνιση, όπου το (X, A) είναι ένα CW-ζεύγος και Y ένας CW-χώρος. Εάν η f είναι κυτταρική απεικόνιση και η $p : X + Y \longrightarrow Y \cup_f X$ η ταυτισμική απεικόνιση, τότε ο $Y \cup_f X$ είναι CW-χώρος με το $\{p(\mathfrak{e}) \mid \mathfrak{e}$ κύτταρο $\subseteq X \smallsetminus A\} \cup \{\mathfrak{e}' \mid \mathfrak{e}'$ κύτταρο $\subseteq Y\}$ ως το σύνολο των κυττάρων του. Επιπροσθέτως, ο Y είναι ένας CW-υπόχωρος τού $Y \cup_f X$.*

Αποδειξη. Επειδή η f είναι κυτταρική, ορίζεται η $f_n := f|_{A^{(n)}} : A^{(n)} \longrightarrow Y^{(n)}$ καθώς και ο χώρος $Z_n := Y^{(n)} \cup_{f_n} X^{(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Κανείς δείχνει εύκολα τα ακόλουθα:

(i) $Z_n = p(X^{(n)} + Y^{(n)}) \subseteq Y \cup_f X$ και η πηλικοτοπολογία και η σχετική τοπολογία επί τού Z_n ταυτίζονται. (Βλ. 1.10.2 (iv).)

(ii) Η πηλικοτοπολογία επί τού $Y \cup_f X$ είναι η ασθενής τοπολογία ως προς το $\{Z_n \mid n \geq 0\}$ (επί τη βάσει τού (i) και τού 1.20.16 (i)).

(iii) Ο Z_n δημιουργείται από τον Z_{n-1} ύστερα από προσάρτηση n-κυττάρων (επί τη βάσει τού (i) και τού 1.20.16 (ii)). Επειδή ο Z_0 είναι διακριτός τοπολογικός χώρος, αρκεί να εφαρμοσθεί η πρόταση 1.20.17. □

1.20.23 Πόρισμα. *Εάν το (X, A) είναι CW-ζεύγος με $A \neq \varnothing$, τότε ο X/A είναι CW-χώρος με το $\{p(A)\} \cup \{p(\mathfrak{e}) \mid \mathfrak{e}$ κύτταρο $\subseteq X \smallsetminus A\}$ ως το σύνολο των κυττάρων του, όπου $p : X \longrightarrow X/A$ η ταυτισμική απεικόνιση (και $p(A)$ ένα 0-κύτταρο).*

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από το θεώρημα 1.20.22 και το 1.10.14 (i). □

1.20.24 Πόρισμα. *Κάθε μονοσημειακή ένωση οσωνδήποτε CW-χώρων (δομούμενη με τη βοήθεια 0-κυττάρων) είναι CW-χώρος.*

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από το θεώρημα 1.20.22 και το 1.10.11 (iii). □

1.20.25 Πρόταση. *Εάν οι X, Y είναι CW-χώροι, τότε το καρτεσιανό γινόμενό τους $X \times Y$ επιδέχεται το $\mathfrak{X} = \{\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}' \mid \mathfrak{e}$ κύτταρο $\subseteq X$, $\mathfrak{e}'$ κύτταρο τού $Y\}$ ως κυτταρική διάσπασή του, για την οποία ισχύουν τα εξής:*

(i) $(X \times Y)^{(n)} = (X^{(0)} \times Y^{(n)}) \cup (X^{(1)} \times Y^{(n-1)}) \cup \ldots \cup (X^{(n)} \times Y^{(0)})$.

(ii) $\overline{\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}'} = \overline{\mathfrak{e}} \times \overline{\mathfrak{e}'}$, $\partial(\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}') = (\partial \mathfrak{e}) \times \overline{\mathfrak{e}'} \cup \overline{\mathfrak{e}} \times (\partial \mathfrak{e}')$, $\forall \mathfrak{e} \times \mathfrak{e}' \in \mathfrak{X}$.

(iii) *Τα κύτταρα τού $\mathfrak{X}$ πληρούν τη συνθήκη* 1.20.4 (**C**).

(iv) *Εάν το $\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}^m$ είναι ένα κύτταρο τού X και το $\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'^n$ ένα κύτταρο τού Y με τις $\phi_{\mathfrak{e}}, \phi_{\mathfrak{e}'}$ ως χαρακτηριστικές απεικονίσεις τους, τότε η*

$$(\phi_{\mathfrak{e}} \times \phi_{\mathfrak{e}'}) \circ h : \mathbb{B}^{m+n} \longrightarrow X \times Y$$

είναι χαρακτηριστική απεικόνιση για το $\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}' \in \mathfrak{X}$, όπου $h : \mathbb{B}^{m+n} \xrightarrow{\approx} \mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$ οιοσδήποτε ομοιομορφισμός.

(v) *Εάν είτε ο X είτε ο Y είναι τοπικά συμπαγής, τότε ο $(X \times Y, \mathfrak{X})$ είναι CW-χώρος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Τα (i)-(iv) είναι άμεσα διαπιστώσιμα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι για οιουσδήποτε τοπολογικούς X, X', Y ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\left.\begin{array}{l} f : X \longrightarrow X' \text{ ταυτισμική} \\ Y \text{ τοπικά συμπαγής} \end{array}\right\} \Rightarrow f \times \mathrm{id}_Y : X \times Y \longrightarrow X' \times Y \text{ (ταυτισμική)}, \qquad (1.16)$$

αποδεικνύουμε εύκολα *και* το (v). □

1.20.26 Σημείωση. Αξίζει να επισημανθεί ότι η κατηγορία $\mathfrak{Top}_{\mathrm{CW}}$ των CW-χώρων *δεν είναι* προσθετική. Εάν X, Y είναι δυο CW-χώροι, τότε είναι δυνατόν να εφοδιασθεί το καρτεσιανό τους γινόμενο με τη δομή ενός CW-χώρου, χωρίς ωστόσο ο προκύπτων τοπολογικός χώρος να είναι κατ' ανάγκην ομοιομορφικός τού *χώρου γινομένου* (όπως, π.χ., συμβαίνει όταν ένας εκ των X, Y είναι τοπικά συμπαγής ή όταν αμφότεροι οι X, Y διαθέτουν *το πολύ αριθμησίμου πλήθους* κύτταρα). Για το κλασικό *αντιπαράδειγμα* τού Dowker (1953) βλ. Hatcher [46], σελ. 524-525, και Fritsch & Piccinini [36], §2.2, Example 2, σελ. 59-60.

1.20.27 Θεώρημα. *Κάθε CW-χώρος είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός* (βλ. εδ. 1.9.29).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ., π.χ., Rotman [103], Theorem 8.25, σελ. 207-208. □

1.20.28 Πόρισμα. *Ένας CW-χώρος είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν είναι δρομοσυνεκτικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται από το θεώρημα 1.20.27 και το (ii) τής προτάσεως 1.9.30. □

Έστω $(X, \mathfrak{X})$ ένας CW-χώρος. Ας συμβολίσουμε ως

$$\boxed{\Xi_{\mathfrak{X}} := \bigcup_{\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}} (\mathbb{B}^{\dim(\mathfrak{e})} \times \{\mathfrak{e}\}) = \sum_{\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}} \mathbb{B}^{\dim(\mathfrak{e})}}$$

το τοπολογικό άθροισμα τής οικογενείας $(\mathbb{B}^{\dim(\mathfrak{e})})_{\mathfrak{e}\in\mathfrak{X}}$ και ως $\Phi : \Xi_{\mathfrak{X}} \longrightarrow X$ την απεικόνιση: $\Phi(\mathbf{x},\mathfrak{e}) := \phi_{\mathfrak{e}}(\mathbf{x})$, όπου $\phi_{\mathfrak{e}} : \mathbb{B}^{\dim(\mathfrak{e})} \longrightarrow X$ η χαρακτηριστική απεικόνιση οιουδήποτε $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$. Λόγω τού ορισμού τής τοπολογίας επί τού X, η Φ είναι ταυτισμική. Για την απόδειξη τού επομένου θεωρήματος θα χρειασθούμε κάποιους επιπρόσθετους συμβολισμούς: Για κάθε $p \in \mathbb{N}_0$ θέτουμε

$$\Xi_{\mathfrak{X}}^{(p)} := \bigcup_{\mathfrak{e}\in X^{(p)}} \mathbb{B}^{\dim(\mathfrak{e})} \times \{\mathfrak{e}\}$$

και

$$\Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}} := \Xi_{\mathfrak{X}}^{(p-1)} \cup \bigcup_{\mathfrak{e}\in\mathfrak{X},\dim(\mathfrak{e})=p} (\mathbb{B}^{\dim(\mathfrak{e})} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}) \times \{\mathfrak{e}\}.$$

Τότε προφανώς $\Phi(\Xi_{\mathfrak{X}}^{(p)}) = X^{(p)}$ και

$$\begin{aligned}\Phi(\Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}}) &= X^{(p-1)} \cup \bigcup_{\mathfrak{e}\in\mathfrak{X},\dim(\mathfrak{e})=p} (\mathfrak{e} \smallsetminus \{\phi_{\mathfrak{e}}(\mathbf{0})\})\\ &= X^{(p)} \smallsetminus \{\phi_{\mathfrak{e}}(\mathbf{0}) \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X} \text{ και } \dim(\mathfrak{e}) = p\}.\end{aligned}$$

1.20.29 Θεώρημα. *Έστω $(X,\mathfrak{X})$ ένας CW-χώρος, $p \in \mathbb{N}$, και για κάθε $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$ έστω $x_{\mathfrak{e}} := \phi_{\mathfrak{e}}(\mathbf{0})$. Τότε ο $(p-1)$-διάστατος σκελετός $X^{(p-1)}$ αποτελεί μια ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $Y^{(p)}$, όπου*

$$Y^{(p)} := X^{(p)} \smallsetminus \{x_{\mathfrak{e}} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X} \textit{ και } \dim(\mathfrak{e}) = p\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο χώρος $\Xi_{\mathfrak{X}}^{(p-k)} \cup \bigcup_{\mathfrak{e}\in\mathfrak{X},\dim(\mathfrak{e})=p} \mathbb{S}^{p-1} \times \{\mathfrak{e}\}$ αποτελεί μια ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $\Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}}$. (Βλ. ορισμό 1.17.26.) Τούτο έπεται από την ύπαρξη τής ομοτοπίας $\widetilde{H} : \Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}} \times \mathbf{I} \longrightarrow \Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}}$ με

$$\widetilde{H}((\mathbf{x},\mathfrak{e}),t) := \begin{cases} (\mathbf{x},\mathfrak{e}), & \text{όταν } \dim(\mathfrak{e}) \le p-1,\\ ((1-t)\mathbf{x} + t\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||},\mathfrak{e}), & \text{όταν } \dim(\mathfrak{e}) = p.\end{cases}$$

Ορίζουμε την $H : Y^{(p)} \times \mathbf{I} \longrightarrow Y^{(p)}$ μέσω τού τύπου: $H(y,t) := (\Phi \circ \widetilde{H})((\mathbf{x},\mathfrak{e}),t)$, για κάποιο ζεύγος $(\mathbf{x},\mathfrak{e}) \in \Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}}$ για το οποίο ισχύει $\Phi(\mathbf{x},\mathfrak{e}) = y$.

• Η H είναι *καλώς ορισμένη*. Πράγματι· εάν $(x_1,\mathfrak{e}_1),(x_2,\mathfrak{e}_2) \in \Phi^{-1}(y)$, τότε εξετάζουμε δύο περιπτώσεις: Εάν $y \in X^{(p-1)}$, τότε είτε $\dim(\mathfrak{e}_j) < p$ είτε $\dim(\mathfrak{e}_j) = p$ και $x_j \in \mathbb{S}^{p-1}$, $j = 1,2$. Εξ αυτού έπεται ότι $\widetilde{H}((x_j,\mathfrak{e}_j),t) = (x_j,\mathfrak{e}_j)$, $\forall j \in \{1,2\}$. Εάν $y \in Y^{(p)} \smallsetminus X^{(p-1)}$, τότε $\dim(\mathfrak{e}_1) = \dim(\mathfrak{e}_2) = p$ και $y \in \mathfrak{e}_1 \cap \mathfrak{e}_2$. Επειδή τα κύτταρα εντός τού $\mathfrak{X}$ είναι ξένα μεταξύ τους, έχουμε $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2$ και $x_1 = x_2$.

• Λόγω τού ορισμού τής H το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}} \times \mathbf{I} \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[d, "\Phi' \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}} \arrow[d, "\Phi'"] \\ Y^{(p)} \times \mathbf{I} \arrow[r, "H"'] & Y^{(p)} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, όπου $\Phi' := \Phi|_{\Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}}}$. Λόγω τού (i) τής προτάσεως 1.20.16 η απεικόνιση $\Phi|_{\Xi^{(p)}_{\mathfrak{X}}} : \Xi^{(p)}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow X^{(p)}$ είναι ταυτισμική. Επειδή το $\Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}}$ είναι ανοικτό εντός τού $\Xi^{(p)}_{\mathfrak{X}}$ και $\Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}} = (\Phi|_{\Xi^{(p)}_{\mathfrak{X}}})^{-1}(\Phi|_{\Xi^{(p)}_{\mathfrak{X}}}(\Xi'^{(p)}_{\mathfrak{X}}))$, αποδεικνύεται εύκολα ότι η ίδια η Φ' είναι ταυτισμική απεικόνιση. Μέσω τής συνεπαγωγής (1.16) διαπιστώνουμε ότι *και* η $\Phi' \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}$ είναι ταυτισμική. Άρα μέσω τού ανωτέρου μεταθετικού διαγράμματος συμπεραίνουμε τη συνέχεια τής H από τη συνέχεια τής $\widetilde{H}$. (Βλ. 1.10.7 (iii).)

• Προφανώς, θέτοντας $H_t := H(\cdot, t)$ έχουμε $H_0 = \mathrm{id}_{Y^{(p)}}$, $H_1 : Y^{(p)} \longrightarrow X^{(p-1)}$ μια απεικόνιση συμπτύξεως και $H_t|_{X^{(p-1)}} = \mathrm{id}_{X^{(p-1)}}$, $\forall t \in \mathbf{I}$. Άρα ο $X^{(p-1)}$ είναι όντως μια ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $Y^{(p)}$. $\square$