
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Πίνακες

Στο παρόν κεφάλαιο περιλαμβάνονται ορισμένα πρωταρχικά στοιχεία της Θεωρίας Πινάκων. (Θεμελιώδεις ορισμοί και ιδιότητες, πράξεις πινάκων, πίνακες ειδικής μορφής, περιγραφή ομομορφισμών μεταξύ μη τετριμμένων K -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως μέσω πινάκων, πίνακες αλλαγής βάσεων, στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών και στηλών πινάκων, αλγόριθμος απαλοιφής των Gauss και Jordan, βαθμίδα πινάκων, κριτήρια αντιστρεψιμότητας τετραγωνικών πινάκων, μέθοδος προσδιορισμού αντιστρόφου, ισοδύναμοι και όμοιοι πίνακες κ.ά.)

5.1 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

5.1.1 Ορισμός. (i) Έστω K τυχόν σώμα. Εάν τα I, J είναι δυο μη κενά πεπερασμένα υποσύνολα του \mathbb{N} , τότε κάθε απεικόνιση

$$f : I \times J \longrightarrow K \quad (5.1)$$

ονομάζεται $(\text{card}(I) \times \text{card}(J))$ -**πίνακας** (ή **μητρείο**) με τις «εγγραφές¹» του ειλημμένες από το K . Αντί τού (5.1) είθισται να γράφουμε

$$(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}, \text{ όπου } a_{ij} := f(i, j), \text{ για κάθε } (i, j) \in I \times J.$$

Ο ορισμός αυτός εφαρμόζεται ως επί το πλείστον στην ειδική περίπτωση όπου

$$I = \{1, \dots, m\} \text{ και } J = \{1, \dots, n\},$$

¹Οι **εγγραφές** (αγγλ. entries) ενός πίνακα (5.1) είναι τα στοιχεία της εικόνας του.

για κάποιους $m, n \in \mathbb{N}$. Κάθε απεικόνιση

$$f : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow K \quad (5.2)$$

είναι ένας $(m \times n)$ -πίνακας (ή $(m \times n)$ -μητρείο) με τις εγγραφές του ειλημμένες από το K . Και εδώ, αντί τού σχετικώς δύσχρηστου συμβολισμού (5.2) γράφουμε απλώς

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-11} & a_{m-12} & \cdots & a_{m-1n-1} & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn-1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ή $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, όπου

$$a_{ij} := a_{i,j} := f(i, j), \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}. \quad (5.3)$$

Το σύνολο όλων των $(m \times n)$ -πινάκων (με τις εγγραφές τους ειλημμένες από το K) θα συμβολίζεται ως εξής:

$$\boxed{\text{Mat}_{m \times n}(K) := K^{\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}}.} \quad (5.4)$$

Για οιοσδήποτε πίνακες

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(K), \quad \mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$$

ισχύει (προφανώς) η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \iff a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

(ii) Κάθε πίνακας

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(K), \quad (5.5)$$

διαθέτει m γραμμές

$$\Gamma_{\mathbf{A}}(i) := (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in-1} \ a_{in}) \in \text{Mat}_{1 \times n}(K), \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

και n στήλες

$$\Sigma_{\mathbf{A}}(j) := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times 1}(K), \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

(Η $\Gamma_{Q_i}(\mathbf{A})$ καλείται i -οστή γραμμή και η $\Sigma\tau_j(\mathbf{A})$ j -οστή στήλη του \mathbf{A} .) Προφανώς,

$$\mathbf{A} = (\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A})) = \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

(iii) Κάθε πίνακας (5.5) που έχει το ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών (ήτοι $m = n$) καλείται **τετραγωνικός πίνακας**. Η (κύρια) **διαγώνιος** ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ είναι το υποσύνολο εγγραφών του $\{a_{ii} \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$. Ως **μοναδιαίος** ($n \times n$)-πίνακας ορίζεται ο

$$\mathbf{I}_n := \begin{pmatrix} 1_K & 0_K & \cdots & 0_K & 0_K \\ 0_K & 1_K & \cdots & 0_K & 0_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_K & 0_K & \cdots & 1_K & 0_K \\ 0_K & 0_K & \cdots & 0_K & 1_K \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(K),$$

με όλες τις εγγραφές τις ανήκουσες στη διαγώνιό του ίσες με το 1_K και με τις λοιπές εγγραφές του ίσες με το 0_K . Προφανώς,

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ όπου } \delta_{ij} := \begin{cases} 1_K, & \text{όταν } i = j, \\ 0_K, & \text{όταν } i \neq j, \end{cases}$$

το λεγόμενο **σύμβολο του Kronecker**.

(iv) Κάθε $(\mu \times \nu)$ -πίνακας, ο οποίος προκύπτει ύστερα από διαγραφή $m - \mu$ γραμμών και $n - \nu$ στηλών ενός πίνακα (5.5), για κάποιους

$$\mu \in \{1, \dots, m\} \text{ και } \nu \in \{1, \dots, n\},$$

καλείται **υποπίνακας του \mathbf{A}** .

(v) Δοθέντων δύο παγιομένων δεικτών $i_\bullet \in \{1, \dots, m\}$ και $j_\bullet \in \{1, \dots, n\}$ και ενός πίνακα (5.5), κάθε υποπίνακας του \mathbf{A} τής μορφής

$$\mathbf{C} = (c_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq \mu \\ 1 \leq l \leq \nu}} \in \text{Mat}_{\mu \times \nu}(K),$$

όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\mu \leq m + 1 - i_\bullet$, $\nu \leq n + 1 - j_\bullet$, και

$$c_{kl} = a_{i_\bullet + (k-1), j_\bullet + (l-1)}, \quad \forall (k, l) \in \{1, \dots, \mu\} \times \{1, \dots, \nu\},$$

καλείται $(\mu \times \nu)$ -**τέμαχος**² (block) του \mathbf{A} .

²Το αρχαιοελληνικό ουσιαστικό *τέμαχος* (γεν. του *τεμάχους*, πληθ. τα *τεμάχη*) είναι η ελληνική λέξη που αποδίδει επακριβώς τον (μαθηματικό) όρο block. (Προέρχεται από το ρήμα *τέμνω*, συναντάται ήδη στο *Περί Παθών* του Ιπποκράτους [\sim 390-360 π.Χ.] και στο *Συμπόσιον* του Πλάτωνος [\sim 385 π.Χ.], και σημαίνει μέρος πράγματος κοπέντος, θραυσθέντος ή διαρεθέντος / απόσπασμα/ τμήμα όλου πινός. Ομόρριζα αυτού είναι τα ουσιαστικά *τομέας*, *τόμος*, *τομή*, *τμήση*, *τμήμα*, *τέμενος* κ.ά., και υποκοριστικό του το *τεμάχιο*.)

(vi) Κάθε $(\mu \times \nu)$ -πίνακας (που ενδέχεται να αποτελεί τέμαχος ή ακόμη και υποπίνακα ενός πίνακα (5.5)) με όλες τις εγγραφές του ίσες με το 0_K θα σημειώνεται με το σύμβολο $0_{\mu \times \nu}$ (και θα ονομάζεται **μηδενικός $(\mu \times \nu)$ -πίνακας**).

5.1.2 Σημείωση. (Διευκολυντικές ταυτίσεις) Από τούδε και στο εξής θα ταυτίζουμε το $\text{Mat}_{1 \times 1}(K)$ με το ίδιο το K και (γενικότερα) τα στοιχεία τού συνόλου $\text{Mat}_{1 \times n}(K)$ ($n \in \mathbb{N}$) με τις αντίστοιχες³ διατεταγμένες n -άδες:

$$\text{Mat}_{1 \times n}(K) \ni (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{n-1} \ a_n) \text{ " = " } (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in K^n.$$

5.1.3 Πρόταση. (Το $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ ως K -δ.χ.) Το σύνολο $\text{Mat}_{m \times n}(K)$, εφοδιασμένο με την πράξη τής προσθέσεως πινάκων

$$\text{Mat}_{m \times n}(K) \times \text{Mat}_{m \times n}(K) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \longmapsto \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad (5.6)$$

και τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού

$$K \times \text{Mat}_{m \times n}(K) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), (\lambda, \mathbf{A}) \longmapsto \lambda \mathbf{A}, \quad (5.7)$$

όπου

$$\Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) := \Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A}) + \Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{B}), \quad \Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\lambda \mathbf{A}) := \lambda \Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A}), \quad \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

καθίσταται K -διανυσματικός χώρος διαστάσεως mn έχων ως μια βάση του το σύνολο πινάκων⁴

$$\mathcal{E} := \left\{ \mathbf{E}_{ij}^{[m,n]} \mid (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \right\},$$

όπου

$$\mathbf{E}_{ij}^{[m,n]} := (\delta_{\mu i} \delta_{\nu j})_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 1 \leq \nu \leq n}}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

(Η εγγραφή τού $\mathbf{E}_{ij}^{[m,n]}$ η ευρισκόμενη στην i -οστή γραμμή και στην j -οστή στήλη του είναι το 1_K , ενώ οι λοιπές εγγραφές τού $\mathbf{E}_{ij}^{[m,n]}$ είναι ίσες με το 0_K .)

³ Στην πραγματικότητα, επειδή το $\text{Mat}_{1 \times n}(K)$ είναι n -διάστατος K -διανυσματικός χώρος (βλ. πρόταση 5.1.3), ταυτίζουμε κάθε πίνακα που διαθέτει μία και μόνον γραμμή και n στήλες με την εικόνα του μέσω τού ισομορφισμού

$$\text{Mat}_{1 \times n}(K) \ni (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{n-1} \ a_n) \longmapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in K^n.$$

(Σημειωτέον ότι ορισμένοι συγγραφείς προτιμούν να ταυτίζουν κάθε πίνακα που διαθέτει μία και μόνον στήλη και n γραμμές με την αντίστοιχη n -άδα.)

⁴ Ενίοτε, το \mathcal{E} καλείται **συνήθης βάση** τού $\text{Mat}_{m \times n}(K)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το σύνολο (5.4) είναι ένας K -διανυσματικός χώρος ως προς τις «κατά σημείο» πράξεις προσθέσεως και αριθμητικού πολλαπλασιασμού (βλ. 1.2.3 (iv)). Αυτές οι πράξεις ταυτίζονται με τις (5.6) και (5.7) (πρβλ. (5.3)). Η αβελιανή ομάδα $(\text{Mat}_{m \times n}, +)$ έχει ως ουδέτερο στοιχείο της τον μηδενικό πίνακα $\mathbf{0}_{m \times n}$. Επιπροσθέτως, σύμφωνα με το (v) τού εδαφίου 2.3.2, το σύνολο

$$\{\delta_{(i,j)} \mid (i,j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}\}$$

αποτελεί μια βάση τού (5.4), όπου

$$\delta_{(i,j)} : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow K$$

η απεικόνιση, η τιμή τής οποίας στο $(\mu, \nu) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ ορίζεται ως εξής:

$$\delta_{(i,j)}(\mu, \nu) := \begin{cases} 0_K, & \text{όταν } (\mu, \nu) \neq (i, j), \\ 1_K, & \text{όταν } (\mu, \nu) = (i, j). \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή $\delta_{(i,j)}(\mu, \nu)$ εκφράζεται συναρτήσει των (συνήθων) συμβόλων τού Kronecker ως ακολούθως:

$$\delta_{(i,j)}(\mu, \nu) = \delta_{\mu i} \delta_{\nu j}, \quad \forall (\mu, \nu) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $\mathbf{E}_{ij}^{[m,n]} := \delta_{(i,j)}$ για κάθε $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$. Προφανώς,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{E}_{ij}^{[m,n]},$$

για κάθε $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$. □

5.1.4 Σημείωση. Έστω ότι οι V, W είναι δυο K -διανυσματικοί χώροι έχοντες διαστάσεις

$$\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}, \quad \dim_K(W) = m \in \mathbb{N}.$$

Επειδή (σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.7 και την πρόταση 5.1.3) έχουμε

$$\dim_K(\text{Hom}_K(V, W)) = nm = mn = \dim_K(\text{Mat}_{m \times n}(K)),$$

το θεώρημα 3.2.12 μας πληροφορεί ότι $\text{Hom}_K(V, W) \cong \text{Mat}_{m \times n}(K)$. Όπως θα δούμε στην επομένη ενότητα (βλ. 5.2.16 και 5.2.17 (ii)), εκκινώντας από δύο διατεταγμένες βάσεις \mathcal{B}, \mathcal{C} των V και W , αντιστοίχως, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε έναν κανονιστικό ισομορφισμό

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} : \text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K)$$

ο οποίος (κατά το πρόγραμμα 3.2.6) είναι ο μόνος ομομορφισμός που απεικονίζει τη βάση

$$\mathfrak{B} := \{f_{ij} \mid (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}\}$$

την ορισθείσα στο θεώρημα 3.2.7 επί της βάσεως \mathfrak{E} με

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}}(f_{ij}) = \mathbf{E}_{ji}^{[m, n]}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}.$$

5.1.5 Ορισμός. (Ανάστροφος πίνακα) Ο *ανάστροφος* ενός $(m \times n)$ -πίνακα (5.5) είναι ο $(n \times m)$ -πίνακας

$$\mathbf{A}^{\top} = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \text{Mat}_{n \times m}(K),$$

όπου $a'_{ij} := a_{ji}$ για κάθε ζεύγος $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$. Σημειωτέον ότι

$$\Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A}^{\top}) = \Sigma_{\tau_i}(\mathbf{A})^{\top}, \Sigma_{\tau_j}(\mathbf{A}^{\top}) = \Gamma_{\mathcal{Q}_j}(\mathbf{A})^{\top}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}. \quad (5.8)$$

5.1.6 Πρόταση. *Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ (όπου $m, n \in \mathbb{N}$) και $\lambda \in K$, τότε ισχύουν τα εξής:*

- (i) $(\mathbf{A}^{\top})^{\top} = \mathbf{A}$.
- (ii) $(\lambda \mathbf{A})^{\top} = \lambda (\mathbf{A}^{\top})$.
- (iii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\top} = \mathbf{A}^{\top} + \mathbf{B}^{\top}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Τούτο έπεται άμεσα από τις ιδιότητες (5.8).

(ii)-(iii) Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ και

$$c_{ij} := \lambda a_{ij}, \quad d_{ij} := a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\},$$

τότε $(\lambda \mathbf{A})^{\top} = (c'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\top} = (d'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$, με

$$c'_{ji} = c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad d'_{ji} = d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Επομένως, $(\lambda \mathbf{A})^{\top} = \lambda (\mathbf{A}^{\top})$ και $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\top} = \mathbf{A}^{\top} + \mathbf{B}^{\top}$. □

5.1.7 Ορισμός. (Πολλαπλασιασμός πινάκων) Για οιοσδήποτε $m, n, p \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\text{Mat}_{m \times n}(K) \times \text{Mat}_{n \times p}(K) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times p}(K), \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \longmapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (5.9)$$

θέτοντας (για οιοσδήποτε $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} := (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}, \quad c_{ik} := \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Ο πίνακας⁵ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times p}(K)$ καλείται **γινόμενο των \mathbf{A} και \mathbf{B}** . Ο υπολογισμός των εγγραφών του διευκολύνεται μέσω του ακόλουθου σχήματος:

$$\begin{array}{c|c}
 (a_{ij}) \cdot (b_{jk}) & \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{j1} & \dots & b_{jk} & \dots & b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\
 \hline
 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & c_{ik} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mk} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Η οριζόντια διακεκομμένη γραμμή η διερχομένη από την i -οστή γραμμή του \mathbf{A} συναντά την κατακόρυφη διακεκομμένη γραμμή τη διερχομένη από την k -αστή στήλη του \mathbf{B} στην εγγραφή $c_{ik} = \Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\tau_k}(\mathbf{B})$ του $(m \times p)$ -πίνακα $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Επομένως,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathcal{Q}_1}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{B}) & \dots & \Gamma_{\mathcal{Q}_1}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\tau_p}(\mathbf{B}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_m}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{B}) & \dots & \Gamma_{\mathcal{Q}_m}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\tau_p}(\mathbf{B}) \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\
 \Sigma_{\tau_k}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_k}(\mathbf{B}), \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Σημειωτέον ότι, όταν $m = n = p$, η (5.9) αποτελεί μια (εσωτερική) πράξη επί του $\text{Mat}_{n \times n}(K)$.

5.1.8 Σημείωση. (i) Εάν $n \in \mathbb{N}$ και

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in K^n (= \text{Mat}_{1 \times n}(K)), \text{ βλ. 5.1.2),}$$

τότε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in K. \tag{5.11}$$

⁵Ο πίνακας $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ορίζεται μόνον όταν το πλήθος των στηλών \mathbf{A} τού ισούται με το πλήθος των γραμμών τού \mathbf{B} !

(ii) Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(K), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in K^n (= \text{Mat}_{1 \times n}(K)),$$

τότε

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^\top = \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathcal{Q}_1}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{y}^\top \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_m}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{y}^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} y_i \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times 1}(K). \quad (5.12)$$

5.1.9 Λήμμα. Για οιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$,

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in K^n,$$

ισχύουν τα ακόλουθα:

$$(i) (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x}^\top = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}^\top).$$

$$(ii) \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})^\top = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}^\top).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Η (5.11) δίδει

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x}^\top &= \sum_{i=1}^n (\lambda a_i + \mu b_i) x_i \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^n b_i x_i \right) = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}^\top). \end{aligned}$$

(ii) Κατ' αναλογία,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})^\top &= \sum_{i=1}^n a_i (\lambda x_i + \mu y_i) \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^n a_i y_i \right) = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}^\top), \end{aligned}$$

οπότε και η δεύτερη ισότητα είναι αληθής. □

5.1.10 Λήμμα. Για οιοσδήποτε $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ (όπου $m, n \in \mathbb{N}$) και οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$(i) (\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x}^\top = \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^\top).$$

$$(ii) \mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})^\top = \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^\top).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ το (i) τού λήμματος 5.1.9 και η (5.11) δίδουν

$$\begin{aligned} (\Gamma_{Q_i}(\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B})) \cdot \mathbf{x}^\top &= (\lambda \Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) + \mu \Gamma_{Q_i}(\mathbf{B})) \cdot \mathbf{x}^\top \\ &= \lambda (\Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\Gamma_{Q_i}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{x}^\top), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι η i -οστή γραμμή τού $(\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x}^\top$ συμπίπτει με την i -οστή γραμμή τού $\lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^\top)$. Άρα (λόγω τής (5.12))

$$(\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x}^\top = \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^\top).$$

(ii) Κατ' αναλογία, για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ το (ii) τού λήμματος 5.1.9 δίδει

$$\Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) \cdot (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})^\top = \lambda (\Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{y}^\top),$$

απ' όπου έπεται ότι η i -οστή γραμμή τού $\mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})^\top$ συμπίπτει με την i -οστή γραμμή τού $\lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^\top) + \mu (\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^\top)$. Άρα και η δεύτερη ισότητα είναι αληθής. \square

5.1.11 Λήμμα. Για οιοσδήποτε $m, n, p \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p) \in K^p$,

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(K), \quad \mathbf{B} = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in \text{Mat}_{n \times p}(K),$$

ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^\top) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x}^\top.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $\Gamma_{Q_j}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^\top) = \sum_{k=1}^p b_{jk} x_k$ για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$ (βλ. (5.12)), έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma_{Q_i}(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^\top)) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} x_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) x_k = \Gamma_{Q_i}((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x}^\top), \end{aligned}$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, οπότε $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^\top) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x}^\top$. \square

5.1.12 Πρόταση. Για οιοσδήποτε $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Εάν $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$, $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times p}(K)$ και $\mathbf{C} \in \text{Mat}_{p \times q}(K)$, τότε

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

(ii) Εάν $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$, $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times p}(K)$ και $\lambda \in K$, τότε

$$(\lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{B}) = \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

(iii) Εάν $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$, $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \text{Mat}_{m \times p}(K)$ και $\mathbf{D} \in \text{Mat}_{p \times q}(K)$, τότε

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}.$$

(iv) Για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ισχύουν οι ισότητες

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{A} = \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Από τη δεύτερη εκ των ισοτήτων (5.10) και το λήμμα 5.1.11 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot ((\mathbf{B} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{C})), \dots, (\mathbf{B} \cdot \Sigma_{\tau_q}(\mathbf{C}))) \\ &= (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{C})), \dots, \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \Sigma_{\tau_q}(\mathbf{C}))) \\ &= (((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{C})), \dots, ((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \Sigma_{\tau_q}(\mathbf{C}))) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}. \end{aligned}$$

(ii) Η πρώτη ισότητα έπεται άμεσα από το (i) και η δεύτερη ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \lambda((\mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{B})), \dots, (\mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_p}(\mathbf{B}))) \\ &= (\lambda(\mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{B})), \dots, \lambda(\mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_p}(\mathbf{B}))) \\ &= (\mathbf{A} \cdot (\lambda \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{B})), \dots, \mathbf{A} \cdot (\lambda \Sigma_{\tau_p}(\mathbf{B}))) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\lambda \mathbf{B}), \dots, \mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_p}(\lambda \mathbf{B})) \\ &= \mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{B}). \end{aligned}$$

(iii) Από τη δεύτερη εκ των ισοτήτων (5.10) και το λήμμα 5.1.10 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \cdot (\Sigma_{\tau_1}(\mathbf{B}) + \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{C})), \dots, \mathbf{A} \cdot (\Sigma_{\tau_p}(\mathbf{B}) + \Sigma_{\tau_p}(\mathbf{C}))) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{C}), \dots, \mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_p}(\mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_p}(\mathbf{C})) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{B}), \dots, \mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_p}(\mathbf{B})) + (\mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{C}), \dots, \mathbf{A} \cdot \Sigma_{\tau_p}(\mathbf{C})) \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \end{aligned}$$

και, αντιστοίχως,

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D} &= (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot (\Sigma_{\tau_1}(\mathbf{D}), \dots, \Sigma_{\tau_q}(\mathbf{D})) \\ &= (\mathbf{B} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{D}) + \mathbf{C} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{D}), \dots, \mathbf{B} \cdot \Sigma_{\tau_q}(\mathbf{D}) + \mathbf{C} \cdot \Sigma_{\tau_q}(\mathbf{D})) \\ &= (\mathbf{B} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{D}), \dots, \mathbf{B} \cdot \Sigma_{\tau_q}(\mathbf{D})) + (\mathbf{C} \cdot \Sigma_{\tau_1}(\mathbf{D}), \dots, \mathbf{C} \cdot \Sigma_{\tau_q}(\mathbf{D})) \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}. \end{aligned}$$

(iv) Τούτο έπεται άμεσα από τον ορισμό τού γινομένου πινάκων. \square

5.1.13 Πρόταση. Το σύνολο $\text{Mat}_{n \times n}(K)$ (όπου $n \in \mathbb{N}$), εφοδιαζόμενο με την πρόσθεση πινάκων (5.6) και τον πολλαπλασιασμό πινάκων (5.9), καθίσταται δακτύλιος έχων τον \mathbf{I}_n ως μοναδιαίο στοιχείο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται από τα (i), (iii) και (iv) τής προτάσεως 5.1.12, και από το ότι το ζεύγος $(\text{Mat}_{n \times n}(K), +)$ είναι αβελιανή ομάδα (βλ. 5.1.3 και 1.1.12). \square

5.1.14 Σημείωση. (i) Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ και $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}_{n \times n}$, τότε για $n \geq 2$ είναι δυνατόν να ισχύει $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}_{n \times n}$ και $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}_{n \times n}$. Επί παραδείγματι,

$$\mathbf{E}_{2,1}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{2,2}^{[n,n]} = \mathbf{0}_{n \times n}.$$

(ii) Ο δακτύλιος $\text{Mat}_{n \times n}(K)$ των τετραγωνικών πινάκων δεν είναι μεταθετικός όταν $n \geq 2$. Επί παραδείγματι,

$$\mathbf{E}_{2,1}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{2,2}^{[n,n]} = \mathbf{0}_{n \times n} \neq \mathbf{E}_{2,1}^{[n,n]} = \mathbf{E}_{2,2}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{2,1}^{[n,n]}.$$

Από την άλλη μεριά, για οιοσδήποτε αμοιβαίως μετατιθέμενους $(n \times n)$ -πίνακες, ήτοι για οιοσδήποτε πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ για τους οποίους τυγχάνει να έχουμε $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, ισχύει ο διωνυμικός τύπος⁶

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mathbf{A}^j \cdot \mathbf{B}^{k-j}$$

(βλ. 1.1.17 (i), καθώς και τον συμβολισμό 1.1.15 (v)).

5.1.15 Παραδείγματα. (Ειδικοί τετραγωνικοί πίνακες) (i) Ένας πίνακας

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$$

καλείται **διαγώνιος πίνακας** όταν υπάρχει κάποια n -άδα $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$a_{ij} := \delta_{ij} a_i = \begin{cases} a_i, & \text{όταν } i = j, \\ 0_K, & \text{όταν } i \neq j. \end{cases}$$

(Εν τοιαύτη περιπτώσει, σημειώνουμε τον \mathbf{A} εν συντομία ως $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$.) Προφανώς, $\mathbf{I}_n = \text{diag}(1_K, 1_K, \dots, 1_K, 1_K)$. Το σύνολο των διαγωνίων πινάκων

$$\text{Diag}_{n \times n}(K) := \{ \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n) \in K^n \}$$

είναι ένας γραμμικός υπόχωρος τού $\text{Mat}_{n \times n}(K)$, ισόμορφος με τον K^n .

(ii) Ένας πίνακας $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ καλείται **άνω τριγωνικός** (και αντιστοίχως, **κάτω τριγωνικός**) όταν ισχύει $a_{ij} = 0_K$ για $i > j$ (και αντιστοίχως,

⁶Για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ θέτουμε $\mathbf{A}^k := \underbrace{\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{k \text{ φορές}}, \forall k \in \mathbb{N}$, και $\mathbf{A}^0 := \mathbf{I}_n$ όταν $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}_{n \times n}$.

για $i < j$), και **αυστηρώς άνω τριγωνικός** (και αντιστοίχως, **αυστηρώς κάτω τριγωνικός**) όταν $a_{ij} = 0_K$ για $i \geq j$ (και αντιστοίχως, για $i \leq j$). Συμβολίζουμε ως⁷

$$\text{UT}_{n \times n}(K), \text{LT}_{n \times n}(K), \text{SUT}_{n \times n}(K), \text{SLT}_{n \times n}(K)$$

τα σύνολα των άνω, κάτω, αυστηρώς άνω και αυστηρώς κάτω πινάκων που ανήκουν στο $\text{Mat}_{n \times n}(K)$. Είναι εύκολος ο έλεγχος τού ότι αυτά τα σύνολα είναι γραμμικοί υπόχωροι τού $\text{Mat}_{n \times n}(K)$. Επίσης, αφήνεται ως άσκηση η απόδειξη τού ότι το $\left\{ \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} \mid 1 \leq i \leq j \leq n \right\}$ (και, αντιστοίχως, το $\left\{ \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} \mid 1 \leq j \leq i \leq n \right\}$) είναι μια βάση τού $\text{UT}_{n \times n}(K)$ (και, αντιστοίχως, τού $\text{LT}_{n \times n}(K)$). Είναι προόδηλο ότι

$$\dim_K(\text{UT}_{n \times n}(K)) = \dim_K(\text{LT}_{n \times n}(K)) = n + \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Από την άλλη μεριά, επειδή η απεικόνιση

$$\text{UT}_{n \times n}(K) \ni \mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \mapsto \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) \in \text{Diag}_{n \times n}(K)$$

είναι επιμορφισμός έχων ως πυρήνα του τον $\text{SUT}_{n \times n}(K)$, το 1ο θεώρημα ισομορφισμών 3.3.10 μας πληροφορεί ότι

$$\text{UT}_{n \times n}(K) / \text{SUT}_{n \times n}(K) \cong \text{Diag}_{n \times n}(K) \cong K^n. \quad (5.13)$$

Παρομοίως,

$$\text{LT}_{n \times n}(K) / \text{SLT}_{n \times n}(K) \cong \text{Diag}_{n \times n}(K) \cong K^n. \quad (5.14)$$

Το θεώρημα 3.2.12, σε συνδυασμό με τους (5.13), (5.14) και το (iii) τού πορίσματος 2.4.16, δίδει

$$\dim_K(\text{SUT}_{n \times n}(K)) = \dim_K(\text{SLT}_{n \times n}(K)) = \frac{1}{2}n(n+1) - n = \frac{1}{2}(n-1)n.$$

5.1.16 Ορισμός. Ένας πίνακας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ (όπου $n \in \mathbb{N}$) καλείται **συμμετρικός** (και αντιστοίχως, **αντισυμμετρικός** ή **στρεβλοσυμμετρικός**) όταν

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \quad (\text{και αντιστοίχως, όταν } \mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top).$$

Θέτουμε $\text{Sym}_{n \times n}(K) := \{ \mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) \mid \mathbf{A} \text{ συμμετρικός} \}$ και

$$\text{ASym}_{n \times n}(K) := \{ \mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) \mid \mathbf{A} \text{ αντισυμμετρικός} \}.$$

⁷Οι βραχυγραφίες Diag, UT, LT, SUT και SLT επελέγησαν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να θυμίζουν τα αρχικά των όρων diagonal, upper triangular, lower triangular, strictly upper triangular, strictly lower triangular.

5.1.17 Πρόταση. Τα σύνολα $\text{Sym}_{n \times n}(K)$ και $\text{ASym}_{n \times n}(K)$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του $\text{Mat}_{n \times n}(K)$. Επιπροσθέτως, εάν $1_K + 1_K \neq 0_K$, τότε

$$\text{Mat}_{n \times n}(K) = \text{Sym}_{n \times n}(K) \oplus \text{ASym}_{n \times n}(K)$$

και

$$\dim_K(\text{Sym}_{n \times n}(K)) = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \dim_K(\text{ASym}_{n \times n}(K)) = \frac{1}{2}(n-1)n.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $\mathbf{0}_{n \times n} \in \text{Sym}_{n \times n}(K) \cap \text{ASym}_{n \times n}(K)$, ισχύει

$$\text{Sym}_{n \times n}(K) \neq \emptyset \quad \text{και} \quad \text{ASym}_{n \times n}(K) \neq \emptyset.$$

Για οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$ και οιοσδήποτε $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Sym}_{n \times n}(K)$ έχουμε (λόγω των (ii) και (iii) τής προτάσεως 5.1.6)

$$(\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B})^\top = \lambda \mathbf{A}^\top + \mu \mathbf{B}^\top = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \Rightarrow \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \in \text{Sym}_{n \times n}(K),$$

οπότε το σύνολο $\text{Sym}_{n \times n}(K)$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\text{Mat}_{n \times n}(K)$ (δυνάμει τής προτάσεως 1.3.2). Κατ' αναλογία, για οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$ και οιοσδήποτε $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{ASym}_{n \times n}(K)$ έχουμε

$$(\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B})^\top = \lambda \mathbf{A}^\top + \mu \mathbf{B}^\top = -(\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}) \Rightarrow \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \in \text{ASym}_{n \times n}(K),$$

οπότε και το $\text{ASym}_{n \times n}(K)$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\text{Mat}_{n \times n}(K)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $1_K + 1_K \neq 0_K$. Κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ γράφεται ως άθροισμα $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ δυο πινάκων $\mathbf{B} := (1_K + 1_K)^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \in \text{Sym}_{n \times n}(K)$ και

$$\mathbf{C} := (1_K + 1_K)^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top) \in \text{ASym}_{n \times n}(K).$$

Επιπροσθέτως, για κάθε $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Sym}_{n \times n}(K) \cap \text{ASym}_{n \times n}(K)$ συνάγουμε ότι

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top = -\mathbf{A} \Rightarrow a_{ij} = -a_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\},$$

και, ως εκ τούτου,

$$\left. \begin{array}{l} (1_K + 1_K) a_{ij} = 0_K \\ 1_K + 1_K \neq 0_K \end{array} \right\} \Rightarrow a_{ij} = 0_K, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}_{n \times n},$$

οπότε $\text{Mat}_{n \times n}(K) = \text{Sym}_{n \times n}(K) \oplus \text{ASym}_{n \times n}(K)$ (βλ. 1.5.4 (iii) και 1.5.5). Τέλος, επειδή το σύνολο

$$\left\{ \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} \mid 1 \leq i \leq n \right\} \cup \left\{ \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} \mid 1 \leq i < j \leq n \right\}$$

αποτελεί μια βάση του $\text{Sym}_{n \times n}(K)$, συμπεραίνουμε αφενός μεν ότι

$$\dim_K(\text{Sym}_{n \times n}(K)) = n + \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n+1),$$

αφετέρου δε ότι

$$\begin{aligned} \dim_K(\text{ASym}_{n \times n}(K)) &= \dim_K(\text{Mat}_{n \times n}(K)) - \dim_K(\text{Sym}_{n \times n}(K)) \\ &= n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n-1)n \end{aligned}$$

μέσω τής προτάσεως 5.1.3 και τού τύπου (2.17). \square

5.1.18 Ορισμός. (Πίνακες, οι δυνάμεις των οποίων πληρούν ειδικές ιδιότητες)

Ένας πίνακας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ (όπου $n \in \mathbb{N}$) καλείται

• **ταυτοδύναμος**⁸ $\iff_{\text{ορσ}} \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

• **μηδενοδύναμος** $\iff_{\text{ορσ}} \exists \nu \in \mathbb{N} : \mathbf{A}^\nu = \mathbf{0}_{n \times n}$. (Ως **δείκτης** ενός μηδενοδύναμου πίνακα \mathbf{A} ορίζεται ο φυσικός αριθμός $\nu_0 := \min \{ \nu \in \mathbb{N} \mid \mathbf{A}^\nu = \mathbf{0}_{n \times n} \}$.)

• **ενελικτικός** $\iff_{\text{ορσ}} \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n$.

5.1.19 Παραδείγματα. (i) Οι ταυτοδύναμοι πίνακες οι ανήκοντες στον $\text{Mat}_{2 \times 2}(K)$ είναι οι $\mathbf{0}_{2 \times 2}$, \mathbf{I}_2 , $\mathbf{E}_{1,1}^{[2,2]}$, $\mathbf{E}_{2,2}^{[2,2]}$ και οι πίνακες τής μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a(1_K - a)b^{-1} & 1_K - a \end{pmatrix}, \quad a \in K, b \in K \setminus \{0_K\}.$$

(ii) Οι μηδενοδύναμοι πίνακες δείκτη 2 που ανήκουν στον $\text{Mat}_{2 \times 2}(K)$ είναι οι πίνακες τής μορφής

$$\begin{pmatrix} 0_K & a \\ 0_K & 0_K \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0_K & 0_K \\ a & 0_K \end{pmatrix}, \quad a \in K \setminus \{0_K\},$$

ή

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a^2b^{-1} & -a \end{pmatrix}, \quad a \in K, b \in K \setminus \{0_K\}.$$

(iii) Οι ενελικτικοί πίνακες οι ανήκοντες στον $\text{Mat}_{2 \times 2}(K)$ είναι οι \mathbf{I}_2 , $-\mathbf{I}_2$ και οι πίνακες τής μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in K : bc = 1_K - a^2.$$

(Οι αποδείξεις των (i), (ii) και (iii) αφήνονται ως άσκηση.)

⁸Εάν ο \mathbf{A} είναι ταυτοδύναμος, τότε (προφανώς) $\mathbf{A}^\nu = \mathbf{A}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

5.1.20 Ορισμός. (Αντιστρέψιμοι πίνακες) Έστω $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ (όπου $n \in \mathbb{N}$). Λέμε ότι ο πίνακας \mathbf{A} είναι **αντιστρέψιμος** (ή **μη ιδιάζων**) όταν υφίσταται κάποιος $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$, τέτοιος ώστε να ισχύει⁹

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n, \quad (5.15)$$

και συμβολίζουμε το σύνολο όλων των αντιστρεψίμων $(n \times n)$ -πινάκων ως

$$\text{GL}_n(K) := \{ \mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) \mid \mathbf{A} \text{ αντιστρέψιμος} \}.$$

Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ υπάρχει ακριβώς ένας πίνακας $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ με την ιδιότητα (5.15), καθότι υπάρχει ακριβώς ένα συμμετρικό στοιχείο τού \mathbf{A} ως προς την (εσωτερική, προσεταιριστική) πράξη “ \cdot ” την ορισθείσα επί τού $\text{Mat}_{n \times n}(K)$ (βλ. πρόταση 1.1.5). Το (εν λόγω) συμμετρικό στοιχείο ενός αντιστρεψίμου πίνακα $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ (ως προς την “ \cdot ”) καλείται **αντίστροφος (πίνακας) τού \mathbf{A}** και σημειώνεται με το σύμβολο \mathbf{A}^{-1} .

5.1.21 Λήμμα. *Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{GL}_n(K)$, τότε $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \text{GL}_n(K)$ και*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή (λόγω των ιδιοτήτων 5.1.12 (i) και (iv) τού πολλαπλασιασμού πινάκων)

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\ &= \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n, \end{aligned}$$

έχουμε $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \text{GL}_n(K)$ και $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. □

5.1.22 Πρόταση. *Το σύνολο $\text{GL}_n(K)$, εφοδιαζόμενο με τον πολλαπλασιασμό πινάκων (5.9), καθίσταται ομάδα με τον \mathbf{I}_n ως ουδέτερό της στοιχείο και καλείται, ιδιαιτέρως, γενική γραμμική ομάδα βαθμού n οριζόμενη υπεράνω τού K .*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται από το λήμμα 5.1.21, τα (i) και (iv) τής προτάσεως 5.1.12, και από το γεγονός ότι κάθε $\mathbf{A} \in \text{GL}_n(K)$ έχει τον \mathbf{A}^{-1} ως συμμετρικό (= αντίστροφό του). □

⁹Όπως θα δούμε αργότερα (στο πόρισμα 5.4.17), ο πίνακας \mathbf{A} είναι αντιστρέψιμος \iff είτε $\exists \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ είτε $\exists \mathbf{C} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. (Ως εκ τούτου, η (5.15) ισοδυναμεί με μια ασθενέστερη συνθήκη.)

5.1.23 Σημείωση. Η γενική γραμμική ομάδα $GL_n(K)$ δεν είναι αβελιανή στην περίπτωση όπου $n \geq 2$. Επί παραδείγματι, θεωρώντας τούς αντιστρέψιμους πίνακες

$$\mathbf{A} := \mathbf{E}_{1,2}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{2,1}^{[n,n]}, \quad \mathbf{B} := \mathbf{E}_{1,1}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{1,2}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{2,2}^{[n,n]},$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}_{1,2}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{2,1}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{2,2}^{[n,n]} \neq \mathbf{E}_{1,1}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{1,2}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{2,1}^{[n,n]} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

5.1.24 Παραδείγματα. (i) Ο πίνακας

$$\mathbf{A} := \mathbf{E}_{1,1}^{[2,2]} + \mathbf{E}_{1,2}^{[2,2]} = \begin{pmatrix} 1_K & 1_K \\ 0_K & 0_K \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(K)$$

είναι ιδιάζων, ήτοι μη αντιστρέψιμος, διότι εάν υποθέσουμε ότι

$$\exists \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(K) : \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2,$$

τότε καταλήγουμε σε άτοπο, αφού είναι αδύνατον να ισχύει $a = c = 1_K$ και (ταυτοχρόνως) $a = c = 0_K \neq 1_K$.

(ii) Το άθροισμα δυο αντιστρέψιμων πινάκων δεν είναι κατ' ανάγκην αντιστρέψιμος πίνακας. Π.χ.,

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})$$

έχοντες ως αντιστρόφους τους τούς

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

αλλά (λόγω τού (i))

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \text{GL}_2(\mathbb{Q}).$$

(iii) Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) \setminus \{\mathbf{0}_{n \times n}\}$ και $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}_{n \times n}$, τότε αμφότεροι οι \mathbf{A}, \mathbf{B} είναι ιδιάζοντες. Πράγματι: εάν υποθέσουμε ότι ο \mathbf{A} είναι αντιστρέψιμος, τότε καταλήγουμε σε άτοπο, αφού

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_{n \times n} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{0}_{n \times n} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}. \end{aligned}$$

(Παρομοίως αποδεικνύεται ότι ο \mathbf{B} είναι ωσαύτως μη αντιστρέψιμος.)

- (iv) Προφανώς, κάθε ταυτοδύναμος πίνακας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) \setminus \{\mathbf{I}_n\}$ είναι ιδιάζων.
 (v) Αφήνεται ως άσκηση η επαλήθευση της αμφίπλευρης συνεπαγωγής

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{UT}_{n \times n}(K) \cap \text{GL}_n(K) \iff a_{ii} \neq 0_K, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

5.1.25 Πρόταση. Εάν $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ και $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times p}(K)$ (όπου $m, n, p \in \mathbb{N}$), τότε

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$ και $\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}$, τότε

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \forall (i, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\},$$

και $\mathbf{A}^\top = (a'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}}$, $\mathbf{B}^\top = (b'_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $\mathbf{C}^\top = (c_{ki})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq i \leq p}}$ με

$$\begin{aligned} a'_{ji} &= a_{ij}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}, \\ b'_{kj} &= b_{jk}, \forall (j, k) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}, \\ c'_{ki} &= c_{ik}, \forall (i, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, για οιοδήποτε $(i, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}$,

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a'_{ji} b'_{kj} = \sum_{j=1}^n b'_{kj} a'_{ji},$$

οπότε $\mathbf{C}^\top = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top$. □

5.1.26 Πρόταση. Έστω $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ (όπου $n \in \mathbb{N}$). Εάν ο \mathbf{A} είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο ανάστροφός του \mathbf{A}^\top είναι αντιστρέψιμος, και

$$(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ και (προφανώς) $(\mathbf{I}_n)^\top = \mathbf{I}_n$, από την πρόταση 5.1.25 προκύπτει ότι

$$(\mathbf{A}^{-1})^\top \cdot \mathbf{A}^\top = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1})^\top = \mathbf{I}_n = (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A})^\top = \mathbf{A}^\top \cdot (\mathbf{A}^{-1})^\top,$$

οπότε ο \mathbf{A}^\top είναι αντιστρέψιμος και $(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top$. □

5.1.27 Ορισμός. Ένας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ($n \in \mathbb{N}$) καλείται **ορθογώνιος πίνακας** όταν $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}_n$.

5.1.28 Παράδειγμα. Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \vartheta \in [0, 2\pi),$$

είναι ορθογώνιος, διότι $\sin(\vartheta)^2 + \cos(\vartheta)^2 = 1$.

5.1.29 Πρόταση. (i) Εάν οι $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ($n \in \mathbb{N}$) είναι ορθογώνιοι, τότε και το γινόμενο τους $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ είναι ένας ορθογώνιος πίνακας.

(ii) Κάθε ορθογώνιος πίνακας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ($n \in \mathbb{N}$) είναι αντιστρέψιμος και $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\top$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Εάν οι $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ είναι ορθογώνιοι, τότε, λόγω τής προτάσεως 5.1.25,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^\top) \cdot \mathbf{A}^\top \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

(ii) Εάν ο $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ είναι ορθογώνιος, τότε από το (i) τής προτάσεως 5.1.6 και την πρόταση 5.1.25 λαμβάνουμε

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}_n \Rightarrow \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \cdot (\mathbf{A}^\top)^\top = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{I}_n^\top = \mathbf{I}_n,$$

οπότε ο \mathbf{A} είναι αντιστρέψιμος και $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\top$. □

5.1.30 Ορισμός. Σύμφωνα με την πρόταση 5.1.29, το σύνολο

$$\text{O}_n(K) := \{ \mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) \mid \mathbf{A} \text{ ορθογώνιος} \}$$

των ορθογώνιων $(n \times n)$ -πινάκων αποτελεί μια υποομάδα τής $\text{GL}_n(K)$. Αυτή καλείται, ιδιαιτέρως, **ορθογώνια ομάδα βαθμού n οριζόμενη υπεράνω τού K** .

5.1.31 Πρόταση. Έστω $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ($n \in \mathbb{N}$). Εάν ικανοποιούνται ταυτοχρόνως δύο εκ των κάτωθι συνθηκών, τότε ικανοποιείται και η τρίτη.

(i) Ο \mathbf{A} είναι συμμετρικός πίνακας.

(ii) Ο \mathbf{A} είναι ορθογώνιος πίνακας.

(iii) Ο \mathbf{A} είναι ενελκτικτός πίνακας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. [(i) και (ii)] \Rightarrow (iii) Εάν ο \mathbf{A} είναι συμμετρικός και ορθογώνιος, τότε

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}_n \end{array} \right\} \implies \mathbf{I}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2.$$

[(i) και (iii)] \Rightarrow (ii) Εάν ο \mathbf{A} είναι συμμετρικός και ενελκτικός, τότε

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n \end{array} \right\} \implies \mathbf{I}_n = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top.$$

[(ii) και (iii)] \Rightarrow (i) Εάν ο \mathbf{A} είναι ορθογώνιος και ενελκτικός, τότε

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}_n \\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n \end{array} \right\} \implies \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{A},$$

οπότε ο \mathbf{A} είναι συμμετρικός. □

5.2 ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

Οι ομομορφισμοί μεταξύ δυο μη τετριμμένων K -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως είναι δυνατόν να περιγραφούν με τη βοήθεια καταλλήλων πινάκων, υπό την προϋπόθεση ότι κανείς εργάζεται με παγωμένες διατεταγμένες βάσεις (αυτών των χώρων).

5.2.1 Ορισμός. Δοθέντος ενός πίνακα $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ (όπου K σώμα, $m, n \in \mathbb{N}$) ορίζουμε την απεικόνιση

$$f_{\mathbf{A}} : K^n \longrightarrow K^m, (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x} \longmapsto f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^\top = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^\top)^\top.$$

5.2.2 Παράδειγμα. Η απεικόνιση $f_{\mathbf{A}}$, όπου $K = \mathbb{R}$ και

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 - \sqrt[3]{5} & 4 \\ 1 & 7 \\ \frac{1}{3} & \sqrt{11} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 2}(\mathbb{R}),$$

ορίζεται από τον τύπο

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto f_{\mathbf{A}}(x, y) := ((2 - \sqrt[3]{5})x + 4y, x + 7y, \frac{1}{3}x + \sqrt{11}y) \in \mathbb{R}^3.$$

5.2.3 Λήμμα. (i) $f_{\mathbf{A}} \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$ για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$.

(ii) $f_{\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}} = \lambda f_{\mathbf{A}} + \mu f_{\mathbf{B}}$ για οιοσδήποτε $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ και $\lambda, \mu \in K$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Για οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$ και οιαδήποτε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K^n$ τα (ii) και (iii) της προτάσεως 5.1.12 δίδουν

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{A}}(\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2) &= (\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{A}^\top = (\lambda\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{A}^\top + (\mu\mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{A}^\top \\ &= \lambda(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{A}^\top) + \mu(\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{A}^\top) = \lambda f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_1) + \mu f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_2), \end{aligned}$$

οπότε η $f_{\mathbf{A}}$ είναι ομομορφισμός (δυνάμει τής προτάσεως 3.1.3).

(ii) Για οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$ και οιοσδήποτε $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ έχουμε (λόγω των (ii) και (iii) τής προτάσεως 5.1.6 και τού (iii) τής προτάσεως 5.1.12)

$$\begin{aligned} f_{\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B})^\top = \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{A}^\top + \mu \mathbf{B}^\top) \\ &= \lambda (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^\top) + \mu (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^\top) = \lambda f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \mu f_{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in K^n$. □

5.2.4 Λήμμα. Εάν $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ και $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times p}(K)$ (όπου $m, n, p \in \mathbb{N}$), τότε

$$f_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $\mathbf{x} \in K^p$ έχουμε (μέσω τής προτάσεως 5.1.25 και τού (i) τής προτάσεως 5.1.12)

$$f_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^\top) \cdot \mathbf{A}^\top = f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^\top) = (f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}})(\mathbf{x}),$$

οπότε $f_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}}$. □

5.2.5 Ορισμός. Για οιοσδήποτε $m, n \in \mathbb{N}$ και $f \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$ ορίζουμε τον πίνακα

$$\mathbf{A}_f := (f(\mathbf{e}_1^{[n]})^\top \ f(\mathbf{e}_2^{[n]})^\top \ \cdots \ f(\mathbf{e}_n^{[n]})^\top) \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$$

όπου $\mathbf{e}_1^{[n]}, \dots, \mathbf{e}_n^{[n]}$ είναι τα στοιχεία τής συνήθους βάσεως τού K^n (βλ. 2.3.2 (iii)).

5.2.6 Παραδείγματα. (i) Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η στροφή περί την αρχή των αξόνων κατά γωνία $\vartheta \in [0, 2\pi)$ (με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού) η οριζόμενη από τον τύπο

$$f(x, y) := (x \cos(\vartheta) - y \sin(\vartheta), x \sin(\vartheta) + y \cos(\vartheta)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(βλ. 3.1.5 (vii)). Τότε

$$\mathbf{A}_f = (f(1, 0)^\top \ f(0, 1)^\top) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

(ii) Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση προβολής

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := (x, y),$$

(των σημείων τού \mathbb{R}^3 επί τού επιπέδου τού καθοριζομένου από τους άξονες των x και y , βλ. 3.1.5 (viii)) είναι ο

$$\mathbf{A}_f = (f(1, 0, 0)^\top \ f(0, 1, 0)^\top \ f(0, 0, 1)^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R}).$$

5.2.7 Λήμμα. $\mathbf{A}_{\lambda f + \mu g} = \lambda \mathbf{A}_f + \mu \mathbf{A}_g$ για οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$ και οιονσδήποτε $f, g \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\lambda f + \mu g} &= \left((\lambda f + \mu g)(\mathbf{e}_1^{[n]}) \right)^\top \cdots \left((\lambda f + \mu g)(\mathbf{e}_n^{[n]}) \right)^\top \\ &= \left((\lambda f(\mathbf{e}_1^{[n]})^\top + \mu g(\mathbf{e}_1^{[n]})^\top) \right) \cdots \left(\lambda f(\mathbf{e}_n^{[n]})^\top + \mu g(\mathbf{e}_n^{[n]})^\top \right) \\ &= \left(\lambda f(\mathbf{e}_1^{[n]})^\top \cdots \lambda f(\mathbf{e}_n^{[n]})^\top \right) + \left(\mu g(\mathbf{e}_1^{[n]})^\top \cdots \mu g(\mathbf{e}_n^{[n]})^\top \right) \\ &= \lambda \left(f(\mathbf{e}_1^{[n]})^\top \cdots f(\mathbf{e}_n^{[n]})^\top \right) + \mu \left(g(\mathbf{e}_1^{[n]})^\top \cdots g(\mathbf{e}_n^{[n]})^\top \right) \\ &= \lambda \mathbf{A}_f + \mu \mathbf{A}_g \end{aligned}$$

λόγω των (ii) και (iii) τής προτάσεως 5.1.6. □

5.2.8 Λήμμα. Για κάθε $f \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$ και κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ισχύουν οι ισότητες

$$f_{\mathbf{A}_f} = f \quad \text{και} \quad \mathbf{A}_{f_{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{A}_f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}_f^\top = (x_1, \dots, x_n) \cdot (f(\mathbf{e}_1^{[n]})^\top \cdots f(\mathbf{e}_n^{[n]})^\top)^\top \\ &= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1^{[n]})^\top \\ \vdots \\ f(\mathbf{e}_n^{[n]})^\top \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{e}_i^{[n]}) \\ &= f \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i^{[n]} \right) = f(x_1, \dots, x_n) = f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

οπότε $f_{\mathbf{A}_f} = f$. Εξάλλου, μέσω τής προτάσεως 5.1.25 συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{f_{\mathbf{A}}} &= (f_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_1^{[n]})^\top)^\top (f_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_2^{[n]})^\top)^\top \cdots (f_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_n^{[n]})^\top)^\top \\ &= \left((\mathbf{e}_1^{[n]} \cdot \mathbf{A}^\top)^\top \right) \left(\mathbf{e}_2^{[n]} \cdot \mathbf{A}^\top \right)^\top \cdots \left(\mathbf{e}_n^{[n]} \cdot \mathbf{A}^\top \right)^\top \\ &= \left(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{e}_1^{[n]})^\top \right) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{e}_2^{[n]})^\top \cdots \mathbf{A} \cdot (\mathbf{e}_n^{[n]})^\top = \mathbf{A}, \end{aligned}$$

οπότε και η δεύτερη ισότητα είναι αληθής. □

5.2.9 Λήμμα. Εάν $f \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$ και $g \in \text{Hom}_K(K^m, K^p)$ ($m, n, p \in \mathbb{N}$), τότε

$$\mathbf{A}_{g \circ f} = \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{A}_f.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο $\mathbf{A}_{g \circ f}$ είναι $(p \times n)$ -πίνακας έχων τον $\left(g\left(f\left(\mathbf{e}_i^{[n]}\right)\right)\right)^\top$ ως i -οστή του στήλη. Επειδή (σύμφωνα με το λήμμα 5.2.8) $f_{\mathbf{A}_f} = f$ και $g_{\mathbf{A}_g} = g$, μέσω της προτάσεως 5.1.25 συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(g\left(f\left(\mathbf{e}_i^{[n]}\right)\right)\right)^\top &= \left(g\left(f_{\mathbf{A}_f}\left(\mathbf{e}_i^{[n]}\right)\right)\right)^\top = \left(g\left(\mathbf{e}_i^{[n]} \cdot \mathbf{A}_f^\top\right)\right)^\top \\ &= \left(g_{\mathbf{A}_g}\left(\mathbf{e}_i^{[n]} \cdot \mathbf{A}_f^\top\right)\right)^\top = \left(\mathbf{e}_i^{[n]} \cdot \mathbf{A}_f^\top \cdot \mathbf{A}_g^\top\right)^\top \\ &= \left(\mathbf{A}_g \cdot \mathbf{A}_f\right) \cdot \left(\mathbf{e}_i^{[n]}\right)^\top, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, οι n στήλες αμοτέρων των $\mathbf{A}_{g \circ f}$ και $\mathbf{A}_g \cdot \mathbf{A}_f$ συμπίπτουν. \square

5.2.10 Θεώρημα. Η απεικόνιση

$$\Phi : \text{Mat}_{m \times n}(K) \longrightarrow \text{Hom}_K(K^n, K^m), \quad \mathbf{A} \longmapsto \Phi(\mathbf{A}) := f_{\mathbf{A}}, \quad (5.16)$$

αποτελεί ισομορφισμό K -διανυσματικών χώρων με τον

$$\Psi : \text{Hom}_K(K^n, K^m) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), \quad f \longmapsto \Psi(f) := \mathbf{A}_f, \quad (5.17)$$

ως αντίστροφό του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το (ii) τού λήμματος 5.2.3,

$$\Phi(\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}) = f_{\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}} = \lambda f_{\mathbf{A}} + \mu f_{\mathbf{B}} = \lambda \Phi(\mathbf{A}) + \mu \Phi(\mathbf{B}),$$

για οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$ και οιοσδήποτε $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$. Σύμφωνα με το λήμμα 5.2.7,

$$\Psi(\lambda f + \mu g) = \mathbf{A}_{\lambda f + \mu g} = \lambda \mathbf{A}_f + \mu \mathbf{A}_g = \lambda \Psi(f) + \mu \Psi(g)$$

για οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$ και οιοσδήποτε $f, g \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$. Κατά συνέπεια, οι απεικονίσεις Φ, Ψ είναι ομομορφισμοί (δυνάμει τής προτάσεως 3.1.3). Εξάλλου, μέσω τού λήμματος 5.2.8, για κάθε $f \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$ έχουμε

$$(\Phi \circ \Psi)(f) = \Phi(\mathbf{A}_f) = f_{\mathbf{A}_f} = f$$

και για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$

$$(\Psi \circ \Phi)(\mathbf{A}) = \Psi(f_{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}_{f_{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}.$$

Κατά συνέπεια, $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\text{Hom}_K(K^n, K^m)}$ και $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\text{Mat}_{m \times n}(K)}$. \square

5.2.11 Πρόρισμα. Όταν $m = n$, τότε η απεικόνιση (5.16), εκτός από ισομορφισμό K -διανυσματικών χώρων μεταξύ των $\text{Mat}_{n \times n}(K)$ και $\text{End}_K(K^n)$, είναι και ισομορφισμός δακτυλίων. (Βλ. 3.1.24 (i) και 5.1.13.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το θεώρημα 5.2.10 και το λήμμα 5.2.4. □

5.2.12 Σημείωση. (i) Προτιθέμεθα να γενικεύσουμε το θεώρημα 5.2.10 με τον διανυσματικό χώρο $\text{Hom}_K(V, W)$ στη θέση του $\text{Hom}_K(K^n, K^m)$, όπου V, W είναι τυχόντες K -διανυσματικοί χώροι διαστάσεως n και m , αντιστοίχως. Προς τούτο είναι απαραίτητη η θεώρηση *διατεταγμένων* βάσεων τους, οι οποίες, σύμφωνα με την πρόταση 5.2.13 που ακολουθεί, καθορίζουν *μονοσημάντως* ισομορφισμούς $V \xrightarrow{\cong} K^n$ και $W \xrightarrow{\cong} K^m$.

(ii) Έστω V ένας K -διανυσματικός χώρος V διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$. Μια διατεταγμένη n -άδα $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ στοιχείων του V καλείται **διατεταγμένη βάση** του V όταν το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ αποτελεί μια βάση του V υπό τη συνήθη έννοια. (Από συνολοθεωρητική σκοπιά, το $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ισούται με το $\{\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}\}$ για οιαδήποτε αμφίρριψη $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Η επιλογή μιας συγκεκριμένης διατάξεως αυτών των n στοιχείων οδηγεί στην παγίωση ενός συγκεκριμένου συστήματος συντεταγμένων του V . Εφεξής θα γράφουμε $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ για να δηλούμε ότι το \mathcal{B} είναι μια διατεταγμένη βάση του V , εν αντιθέσει προς τον συμβολισμό $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, μέσω του οποίου δεν απαιτείται η παγίωση μιας συγκεκριμένης διατάξεως των στοιχείων του.)

(iii) Εάν η $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ είναι τυχούσα διατεταγμένη βάση ενός K -διανυσματικού χώρου V διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{E} := (\mathbf{e}_1^{[n]}, \dots, \mathbf{e}_n^{[n]})$, τότε, κατά το πρόρισμα 3.2.6, υφίσταται ένας και μόνον ομομορφισμός

$$\iota_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n \text{ με } \iota_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_i) := \mathbf{e}_i^{[n]}, \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

και ένας και μόνον ομομορφισμός

$$j_{\mathcal{B}} : K^n \longrightarrow V \text{ με } j_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_i^{[n]}) := \mathbf{v}_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Επειδή

$$(\iota_{\mathcal{B}} \circ j_{\mathcal{B}})|_{\mathcal{E}} = \text{id}_{K^n}|_{\mathcal{E}} \text{ και } (j_{\mathcal{B}} \circ \iota_{\mathcal{B}})|_{\mathcal{B}} = \text{id}_V|_{\mathcal{B}},$$

το πρόρισμα 3.2.5 μας πληροφορεί ότι

$$\iota_{\mathcal{B}} \circ j_{\mathcal{B}} = \text{id}_{K^n} \text{ και } j_{\mathcal{B}} \circ \iota_{\mathcal{B}} = \text{id}_V,$$

οπότε αμφότεροι οι $\iota_{\mathcal{B}}$ και $j_{\mathcal{B}}$ είναι *ισομορφισμοί* με $\iota_{\mathcal{B}}^{-1} = j_{\mathcal{B}}$ και $j_{\mathcal{B}}^{-1} = \iota_{\mathcal{B}}$. Λέμε ότι ο ισομορφισμός¹⁰ $\iota_{\mathcal{B}}$ είναι το **σύστημα συντεταγμένων** του V το καθοριζόμενο

¹⁰Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς εργάζονται με τον $j_{\mathcal{B}}$ στη θέση του $\iota_{\mathcal{B}}$ (αλλ' αυτό αποτελεί επουσιώδη σύμβαση).

μέσω της \mathcal{B} . Κάθε στοιχείο $\mathbf{v} \in V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i, \text{ όπου τα } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \text{ είναι μονοσημάντως ορισμένα}$$

(βλ. 2.3.3 (iv)) και απεικονίζεται μέσω του ισομορφισμού $\iota_{\mathcal{B}}$ στο

$$\iota_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \iota_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i^{[n]} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Το $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ καλείται **διάνυσμα συντεταγμένων** και το λ_i i -οστή **συντεταγμένη** τού \mathbf{v} ως προς την \mathcal{B} , για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$.

5.2.13 Πρόταση. Για κάθε K -διανυσματικό χώρο V διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{διατεταγμένες} \\ \text{βάσεις τού } V \end{array} \right\} \xrightarrow{\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \text{ισομορφισμοί} \\ f : V \longrightarrow K^n \end{array} \right\}$$

η οριζόμενη από τον τύπο

$$\boxed{\mathcal{B} \longmapsto \alpha(\mathcal{B}) := \iota_{\mathcal{B}}}$$

είναι μια αμφίρροφη έχουσα την απεικόνιση

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ισομορφισμοί} \\ f : V \longrightarrow K^n \end{array} \right\} \xrightarrow{\beta} \left\{ \begin{array}{l} \text{διατεταγμένες} \\ \text{βάσεις τού } V \end{array} \right\}$$

την οριζόμενη από τον τύπο

$$\boxed{f \longmapsto \beta(f) := (f^{-1}(\mathbf{e}_1^{[n]}), \dots, f^{-1}(\mathbf{e}_n^{[n]}))}$$

ως αντίστροφό της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ τού V έχουμε

$$(\beta \circ \alpha)(\mathcal{B}) = \beta(\iota_{\mathcal{B}}) = (\iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{e}_1^{[n]}), \dots, \iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{e}_n^{[n]})) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathcal{B}$$

και για κάθε ισομορφισμό $f : V \longrightarrow K^n$,

$$(\alpha \circ \beta)(f) = \alpha\left((f^{-1}(\mathbf{e}_1^{[n]}), \dots, f^{-1}(\mathbf{e}_n^{[n]}))\right) = \iota_{(f^{-1}(\mathbf{e}_1^{[n]}), \dots, f^{-1}(\mathbf{e}_n^{[n]}))} = f,$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το πόρισμα 3.2.5, καθόσον

$$\iota_{(f^{-1}(\mathbf{e}_1^{[n]}), \dots, f^{-1}(\mathbf{e}_n^{[n]}))}(f^{-1}(\mathbf{e}_i^{[n]})) = \mathbf{e}_i^{[n]} = f(f^{-1}(\mathbf{e}_i^{[n]})), \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Επομένως, αμφότερες οι α, β είναι αμφιρροίψεις με $\alpha^{-1} = \beta$ και $\beta^{-1} = \alpha$. \square

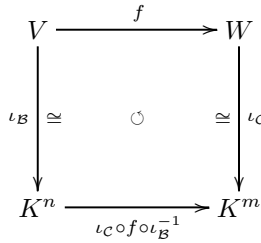
5.2.14 Ορισμός. (Πίνακας παραστάσεως ομομορφισμού) Έστω ότι οι V, W είναι K -διανυσματικοί χώροι διαστάσεως

$$\dim_K(V) = n \in \mathbb{N} \text{ και } \dim_K(W) = m \in \mathbb{N},$$

αντιστοίχως, και $f \in \text{Hom}_K(V, W)$. Εάν οι $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n), \mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ είναι διατεταγμένες βάσεις των V και W , αντιστοίχως, τότε η σύνθεση

$$\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1} \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$$

η καταχωριζόμενη στο μεταθετικό διάγραμμα



καλείται **παραστάση συντεταγμένων τού f ως προς τις \mathcal{B} και \mathcal{C}** , ενώ η εικόνα της

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) := \Psi(\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}) = \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} \in \text{Mat}_{m \times n}(K) \quad (5.18)$$

μέσω τής Ψ καλείται **πίνακας παραστάσεως τού f ως προς τις¹¹ \mathcal{B} και \mathcal{C}** .

5.2.15 Λήμμα. *Οι απεικονίσεις*

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} : \text{Hom}_K(K^n, K^m) \longrightarrow \text{Hom}_K(V, W), \quad f \longmapsto \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) := \iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}} \quad (5.19)$$

και

$$\Psi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} : \text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_K(K^n, K^m), \quad f \longmapsto \Psi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) := \iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1} \quad (5.20)$$

είναι ισομορφισμοί με τον έναν αντίστροφο τού άλλου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$ και οιοσδήποτε $f, g \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$ έχουμε (λόγω τής προτάσεως 3.1.8)

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\lambda f + \mu g) &= \iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ (\lambda f + \mu g) \circ \iota_{\mathcal{B}} = \iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ (\lambda (f \circ \iota_{\mathcal{B}}) + \mu (g \circ \iota_{\mathcal{B}})) \\ &= \lambda (\iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}) + \mu (\iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ g \circ \iota_{\mathcal{B}}) = \lambda \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) + \mu \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g). \end{aligned}$$

¹¹ Στην ειδική περίπτωση όπου $V = W$ και $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, ο $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ονομάζεται **πίνακας παραστάσεως τού ενδομορφισμού f ως προς τη \mathcal{B}** .

Κατ' αναλογία, για οιαδήποτε $\lambda, \mu \in K$ και οιοσδήποτε $f, g \in \text{Hom}_K(V, W)$,

$$\begin{aligned}\Psi_C^{\mathcal{B}}(\lambda f + \mu g) &= \iota_C \circ (\lambda f + \mu g) \circ \iota_B^{-1} = \iota_C \circ (\lambda (f \circ \iota_B^{-1}) + \mu (g \circ \iota_B^{-1})) \\ &= \lambda (\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1}) + \mu (\iota_C \circ g \circ \iota_B^{-1}) = \lambda \Psi_C^{\mathcal{B}}(f) + \mu \Psi_C^{\mathcal{B}}(g).\end{aligned}$$

Άρα οι $\Phi_C^{\mathcal{B}}$ και $\Psi_C^{\mathcal{B}}$ είναι ομομορφισμοί δυνάμει τής προτάσεως 3.1.3. Από την άλλη μεριά, για κάθε $f \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}(\Psi_C^{\mathcal{B}} \circ \Phi_C^{\mathcal{B}})(f) &= \Psi_C^{\mathcal{B}}(\iota_C^{-1} \circ f \circ \iota_B) = \iota_C \circ (\iota_C^{-1} \circ f \circ \iota_B) \circ \iota_B^{-1} \\ &= (\iota_C \circ \iota_C^{-1}) \circ f \circ (\iota_B \circ \iota_B^{-1}) \\ &= \text{id}_{K^m} \circ f \circ \text{id}_{K^n} = f\end{aligned}$$

και για κάθε $f \in \text{Hom}_K(V, W)$

$$\begin{aligned}(\Phi_C^{\mathcal{B}} \circ \Psi_C^{\mathcal{B}})(f) &= \Phi_C^{\mathcal{B}}(\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1}) = \iota_C^{-1} \circ (\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1}) \circ \iota_B \\ &= (\iota_C^{-1} \circ \iota_C) \circ f \circ (\iota_B^{-1} \circ \iota_B) \\ &= \text{id}_W \circ f \circ \text{id}_V = f,\end{aligned}$$

οπότε $\Psi_C^{\mathcal{B}} \circ \Phi_C^{\mathcal{B}} = \text{id}_{\text{Hom}_K(K^n, K^m)}$ και $\Phi_C^{\mathcal{B}} \circ \Psi_C^{\mathcal{B}} = \text{id}_{\text{Hom}_K(V, W)}$. □

5.2.16 Θεώρημα. *Εάν οι V, W είναι K -διανυσματικοί χώροι έχοντες διαστάσεις*

$$\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}, \quad \dim_K(W) = m \in \mathbb{N},$$

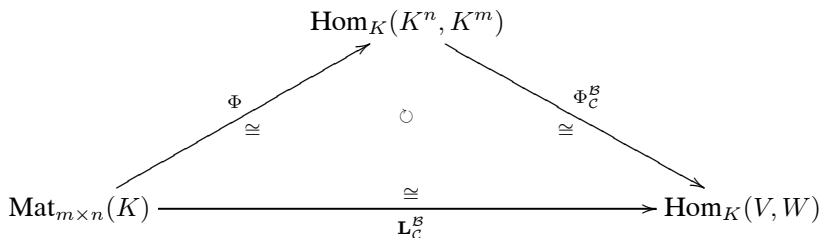
τότε για οιοδήποτε διατεταγμένες βάσεις \mathcal{B}, \mathcal{C} των V και W , αντιστοίχως, οι συνθέσεις

$$\boxed{\mathbf{M}_C^{\mathcal{B}} := \Psi \circ \Psi_C^{\mathcal{B}}} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{L}_C^{\mathcal{B}} := \Phi_C^{\mathcal{B}} \circ \Phi}$$

(βλ. (5.16), (5.17), (5.19) και (5.20)) *οι εντασσόμενες στα μεταθετικά διαγράμματα*

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_K(K^n, K^m) & \\ & \nearrow \Psi_C^{\mathcal{B}} & \searrow \Psi \\ & \circ & \\ \text{Hom}_K(V, W) & \xrightarrow{\mathbf{M}_C^{\mathcal{B}}} & \text{Mat}_{m \times n}(K) \end{array}$$

και



είναι ισομορφισμοί με τον έναν αντίστροφο τού άλλου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι απεικονίσεις \mathbf{M}_C^B και \mathbf{L}_C^B , ούσες συνθέσεις ισομορφισμών, είναι ισομορφισμοί. (Βλ. θεώρημα 5.2.10, λήμμα 5.2.15 και πρόταση 3.1.17 (iii).) Επιπροσθέτως,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_C^B \circ \mathbf{L}_C^B &= (\Psi \circ \Psi_C^B) \circ (\Phi_C^B \circ \Phi) = \Psi \circ (\Psi_C^B \circ \Phi_C^B) \circ \Phi \\
 &= \Psi \circ (\text{id}_{\text{Hom}_K(K^n, K^m)}) \circ \Phi = \Psi \circ \Phi = \text{id}_{\text{Mat}_{m \times n}(K)}
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_C^B \circ \mathbf{M}_C^B &= (\Phi_C^B \circ \Phi) \circ (\Psi \circ \Psi_C^B) = \Phi_C^B \circ (\Phi \circ \Psi) \circ \Psi_C^B \\
 &= \Phi_C^B \circ (\text{id}_{\text{Hom}_K(K^n, K^m)}) \circ \Psi_C^B = \Phi_C^B \circ \Psi_C^B = \text{id}_{\text{Hom}_K(V, W)}.
 \end{aligned}$$

Επομένως, $(\mathbf{M}_C^B)^{-1} = \mathbf{L}_C^B$ και $(\mathbf{L}_C^B)^{-1} = \mathbf{M}_C^B$. □

5.2.17 Σημείωση. (i) Η εικόνα $\mathbf{M}_C^B(f) := \mathbf{A}_{\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1}}$ οιοδήποτε $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ μέσω τού ισομορφισμού \mathbf{M}_C^B είναι ο πίνακας παραστάσεως (5.18) τού f ως προς τις \mathcal{B} και \mathcal{C} , ενώ η εικόνα οιοδήποτε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ μέσω τού ισομορφισμού \mathbf{L}_C^B είναι ο ομομορφισμός

$$\mathbf{L}_C^B(\mathbf{A}) := \iota_C^{-1} \circ f_{\mathbf{A}} \circ \iota_B \in \text{Hom}_K(V, W).$$

Εάν $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ και $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$, τότε για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$ η j -οστή στήλη τού $\mathbf{M}_C^B(f)$ είναι ο ανάστροφος τού διανύσματος συντεταγμένων τού $f(\mathbf{v}_j)$ ως προς τη βάση \mathcal{C} , όταν αυτό το εκλαμβάνουμε ως $(1 \times m)$ -πίνακα. Πράγματι

για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} (\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1})(x_1, \dots, x_n) &= (\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1}) \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j^{[n]} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j (\iota_C (f(\iota_B^{-1}(\mathbf{e}_j^{[n]})))) = \sum_{j=1}^n x_j (\iota_C (f(\mathbf{v}_j))) \\ &= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \iota_C (f(\mathbf{v}_1)) \\ \vdots \\ \iota_C (f(\mathbf{v}_n)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Εκφράζοντας το $f(\mathbf{v}_j)$ ως γραμμικό συνδυασμό $f(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} \mathbf{w}_i$, όπου τα στοιχεία $\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{mj} \in K$ είναι μονοσημάντως ορισμένα για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$, λαμβάνουμε

$$\iota_C (f(\mathbf{v}_j)) = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} \iota_C (\mathbf{w}_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} \mathbf{e}_i^{[m]} = (\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{mj}),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned} (\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1})(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \iota_C (f(\mathbf{v}_1)) \\ \vdots \\ \iota_C (f(\mathbf{v}_n)) \end{pmatrix} \\ &= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,

$$\boxed{\mathbf{M}_C^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}.} \quad (5.21)$$

Εκ παραλλήλου, για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$ το διάνυσμα συντεταγμένων του $\mathbf{L}_C^B(\mathbf{A})(\mathbf{v}_j) \in W$ μπορεί να ιδωθεί ως ο $(1 \times m)$ -πίνακας ο προκύπτων κατόπιν αναστροφής της j -οστής στήλης $\Sigma \tau_j(\mathbf{A}) \in \text{Mat}_{m \times 1}(K)$ τού πίνακα \mathbf{A} .

(ii) Ο ισομορφισμός

$$\mathbf{M}_C^B : \text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), \quad f \longmapsto \mathbf{M}_C^B(f) := \mathbf{A}_{\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1}},$$

είναι κανονιστικός ισομορφισμός, υπό την έννοια ότι αποτελεί (κατά το πόρισμα 3.2.6) τον μοναδικό ομομορφισμό που απεικονίζει τη βάση

$$\mathfrak{B} := \{f_{ij} \mid (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}\}$$

την ορισθείσα στο θεώρημα 3.2.7 επί τής βάσεως

$$\mathfrak{E} := \left\{ \mathbf{E}_{ij}^{[m,n]} \mid (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \right\}$$

τής ορισθείσας στην πρόταση 5.1.3, με

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f_{ij}) = \mathbf{E}_{ji}^{[m,n]}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}.$$

Πράγματι επειδή για κάθε $\nu \in \{1, \dots, n\}$ έχουμε (εξ ορισμού)

$$f_{ij}(\mathbf{v}_{\nu}) = \delta_{i\nu} \mathbf{w}_j = \delta_{\nu i} \mathbf{w}_j, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\},$$

συνάγουμε ότι

$$\iota_{\mathcal{C}}(f_{ij}(\mathbf{v}_{\nu})) = \delta_{\nu i} \iota_{\mathcal{C}}(\mathbf{w}_j) = \sum_{\mu=1}^m \delta_{\nu i} \delta_{\mu j} \mathbf{e}_{\mu}^{[m]} = (\delta_{1j} \delta_{\nu i}, \dots, \delta_{mj} \delta_{\nu i}),$$

οπότε (λόγω των προαναφερθέντων στο (i))

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f_{ij}) = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \delta_{1i} & \cdots & \delta_{1j} \delta_{ni} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{mj} \delta_{1i} & \cdots & \delta_{mj} \delta_{ni} \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{ji}^{[m,n]} \in \text{Mat}_{m \times n}(K),$$

για κάθε ζεύγος $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$.

5.2.18 Παράδειγμα. Εάν θεωρήσουμε τον ομομορφισμό \mathbb{Q} -διανυσματικών χώρων

$$f : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^3, (x, y) \longmapsto f(x, y) := \left(\frac{1}{2}x - y, y, x - \frac{5}{3}y\right),$$

και τις διατεταγμένες βάσεις $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ και $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ των \mathbb{Q}^2 και \mathbb{Q}^3 , αντιστοίχως, όπου

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{7}\right), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 5), \\ \mathbf{w}_1 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{w}_2 = (2, 1, 1), \quad \mathbf{w}_3 = (1, 1, 1),$$

τότε

$$(\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})(x, y) = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} (\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})(\mathbf{e}_1^{[2]}) \\ (\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})(\mathbf{e}_2^{[2]}) \end{pmatrix}$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ με

$$\begin{aligned} (\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1})(\mathbf{e}_1^{[2]}) &= (\iota_C \circ f)(\iota_B^{-1}(\mathbf{e}_1^{[2]})) = \iota_C(f(\mathbf{v}_1)) \\ &= \iota_C\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{7}\right), -\frac{2}{7}, \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7}\right) = \iota_C\left(\frac{19}{42}, -\frac{2}{7}, \frac{17}{21}\right) \\ &= \iota_C\left(\frac{23}{21}(1, 0, 1) - \frac{5}{14}(2, 1, 1) + \frac{1}{14}(1, 1, 1)\right) \\ &= \frac{23}{21}\iota_C(1, 0, 1) - \frac{5}{14}\iota_C(2, 1, 1) + \frac{1}{14}\iota_C(1, 1, 1) \\ &= \frac{23}{21}\mathbf{e}_1^{[3]} - \frac{5}{14}\mathbf{e}_2^{[3]} + \frac{1}{14}\mathbf{e}_3^{[3]} = \left(\frac{23}{21}, -\frac{5}{14}, \frac{1}{14}\right) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1})(\mathbf{e}_2^{[2]}) &= (\iota_C \circ f)(\iota_B^{-1}(\mathbf{e}_2^{[2]})) = \iota_C(f(\mathbf{v}_2)) \\ &= \iota_C\left(\frac{1}{2} \cdot 1 - 5, 5, 1 - \frac{5}{3} \cdot 5\right) = \iota_C\left(-\frac{9}{2}, 5, -\frac{22}{3}\right) \\ &= \iota_C\left(-\frac{37}{3}(1, 0, 1) + \frac{17}{6}(2, 1, 1) + \frac{13}{6}(1, 1, 1)\right) \\ &= -\frac{37}{3}\iota_C(1, 0, 1) + \frac{17}{6}\iota_C(2, 1, 1) + \frac{13}{6}\iota_C(1, 1, 1) \\ &= -\frac{37}{3}\mathbf{e}_1^{[3]} + \frac{17}{6}\mathbf{e}_2^{[3]} + \frac{13}{6}\mathbf{e}_3^{[3]} = \left(-\frac{37}{3}, \frac{17}{6}, \frac{13}{6}\right), \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C^B(f) &= \Psi(\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1}) = \mathbf{A}_{\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{23}{21} & -\frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{37}{3} & \frac{17}{6} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} \frac{23}{21} & -\frac{37}{3} \\ -\frac{5}{14} & \frac{17}{6} \\ \frac{1}{14} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.2.19 Λήμμα. *Εάν οι V, W είναι K -διανυσματικοί χώροι έχοντες διαστάσεις*

$$\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}, \quad \dim_K(W) = m \in \mathbb{N},$$

και $f \in \text{Hom}_K(V, W)$, τότε ο πίνακας παραστάσεως τού f ως προς δυο διατεταγμένες βάσεις

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n), \quad \mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$$

των V και W , αντιστοίχως, είναι ο

$$\mathbf{M}_C^B(f) = (\mathbf{w}_i^*(f(\mathbf{v}_j)))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

όπου $(\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_m^*)$ η (εκ κατασκευής¹² διατεταγμένη) δυϊκή βάση τού W^* .

¹²Απλώς και θεωρήσουμε μια διατεταγμένη βάση ενός μη τετριμμένου K -διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διαστάσεως, η δυϊκή βάση τού V^* καθίσταται (από τον τρόπο κατασκευής της) διατεταγμένη. (Βλ. θεώρημα 4.2.7.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εκφράζοντας το $f(\mathbf{v}_j)$ ως γραμμικό συνδυασμό $f(\mathbf{v}_j) = \sum_{k=1}^m \lambda_{kj} \mathbf{w}_k$, όπου τα στοιχεία $\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{mj} \in K$ είναι μονοσημάντως ορισμένα, λαμβάνουμε

$$\mathbf{w}_i^*(f(\mathbf{v}_j)) = \mathbf{w}_i^* \left(\sum_{k=1}^m \lambda_{kj} \mathbf{w}_k \right) = \sum_{k=1}^m \lambda_{kj} \mathbf{w}_i^*(\mathbf{w}_k) = \sum_{k=1}^m \lambda_{kj} \delta_{ik} = \lambda_{ij},$$

για κάθε $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής λόγω της (5.21). \square

5.2.20 Θεώρημα. *Εάν οι V, W είναι K -διανυσματικοί χώροι έχοντες διαστάσεις*

$$\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}, \quad \dim_K(W) = m \in \mathbb{N},$$

$f \in \text{Hom}_K(V, W)$ και

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n), \quad \mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$$

είναι διατεταγμένες βάσεις των V και W , αντιστοίχως, τότε ο πίνακας παραστάσεως τού αναστρέφου $f^\top \in \text{Hom}_K(W^, V^*)$ τού f ως προς τις (εκ κατασκευής διατεταγμένες) δυϊκές βάσεις*

$$\mathcal{C}^* = (\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_m^*), \quad \mathcal{B}^* = (\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_n^*)$$

των \mathcal{C} και \mathcal{B} , αντιστοίχως, είναι ο

$$\boxed{\mathbf{M}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(f^\top) = \mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)^\top,} \quad (5.22)$$

ήτοι ο ανάστροφος τού πίνακα παραστάσεως τού f ως προς τις \mathcal{B} και \mathcal{C} .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\mathbf{M}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(f^\top) = (\xi_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \text{Mat}_{n \times m}(K)$, τότε (σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στο εδάφιο 5.2.17 (i))

$$f^\top(\mathbf{w}_j^*) = \sum_{k=1}^n \xi_{kj} \mathbf{v}_k^*.$$

Από τον ορισμό της δυϊκής βάσεως και τού αναστρέφου f^\top τού ομομορφισμού f (βλ. 4.2.7 και 4.3.1) συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= \sum_{k=1}^n \xi_{kj} \delta_{ki} = \sum_{k=1}^n \xi_{kj} (\mathbf{v}_k^*(\mathbf{v}_i)) = \left(\sum_{k=1}^n \xi_{kj} \mathbf{v}_k^* \right) (\mathbf{v}_i) \\ &= f^\top(\mathbf{w}_j^*)(\mathbf{v}_i) = (\mathbf{w}_j^* \circ f)(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_j^*(f(\mathbf{v}_i)). \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η ισότητα (5.22) έπεται από τη μορφή των εγγραφών τού πίνακα $\mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ την περιγραφείσα στο λήμμα 5.2.19. \square

5.2.21 Θεώρημα. Έστω ότι οι U, V, W είναι K -διανυσματικοί χώροι έχοντες διαστάσεις

$$\dim_K(U) = n, \quad \dim_K(V) = m, \quad \dim_K(W) = p, \quad (n, m, p \in \mathbb{N})$$

και $f \in \text{Hom}_K(U, V), g \in \text{Hom}_K(V, W)$. Εάν οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ είναι διατεταγμένες βάσεις των U, V και W , αντιστοίχως, τότε

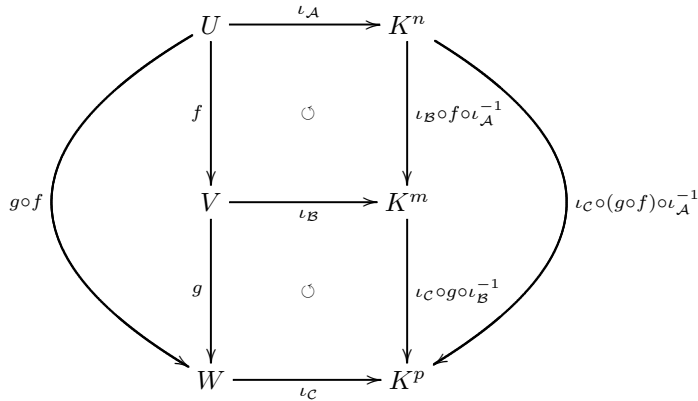
$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(g \circ f) = \mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$$

και

$$\mathbf{L}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{L}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathbf{A}) \circ \mathbf{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathbf{B})$$

για οιοσδήποτε πίνακες $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{p \times m}(K)$ και $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το διάγραμμα



είναι μεταθετικό, καθόσον

$$\begin{aligned} (\iota_C \circ g \circ \iota_B^{-1}) \circ (\iota_B \circ f \circ \iota_A^{-1}) &= \iota_C \circ g \circ (\iota_B^{-1} \circ \iota_B) \circ f \circ \iota_A^{-1} \\ &= \iota_C \circ g \circ \text{id}_V \circ f \circ \iota_A^{-1} \\ &= \iota_C \circ (g \circ f) \circ \iota_A^{-1}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(g \circ f) &= \Psi(\iota_C \circ (g \circ f) \circ \iota_A^{-1}) = \mathbf{A}_{\iota_C \circ (g \circ f) \circ \iota_A^{-1}} \\ &= \mathbf{A}_{(\iota_C \circ g \circ \iota_B^{-1}) \circ (\iota_B \circ f \circ \iota_A^{-1})} = \mathbf{A}_{\iota_C \circ g \circ \iota_B^{-1}} \cdot \mathbf{A}_{\iota_B \circ f \circ \iota_A^{-1}} \\ &= \Psi(\iota_C \circ g \circ \iota_B^{-1}) \cdot \Psi(\iota_B \circ f \circ \iota_A^{-1}) \\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \end{aligned}$$

δυνάμει τού λήμματος 5.2.9. Επιπροσθέτως, για οιοσδήποτε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{p \times m}(K)$ και $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_C^{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{L}_B^{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) &= (\iota_C^{-1} \circ f_{\mathbf{A}} \circ \iota_B) \circ (\iota_B^{-1} \circ f_{\mathbf{B}} \circ \iota_A) \\ &= \iota_C^{-1} \circ f_{\mathbf{A}} \circ (\iota_B \circ \iota_B^{-1}) \circ f_{\mathbf{B}} \circ \iota_A \\ &= \iota_C^{-1} \circ f_{\mathbf{A}} \circ \text{id}_{K^m} \circ f_{\mathbf{B}} \circ \iota_A = \iota_C^{-1} \circ f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}} \circ \iota_A \\ &= \iota_C^{-1} \circ f_{\mathbf{AB}} \circ \iota_A = \mathbf{L}_C^{\mathbf{A}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned}$$

δυνάμει τού λήμματος 5.2.4. □

5.2.22 Πρόρισμα. *Εάν το \mathcal{B} είναι μια διατεταγμένη βάση ενός K -διανυσματικού χώρου V διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$, τότε η απεικόνιση*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \text{End}_K(V) \longrightarrow \text{Mat}_{n \times n}(K), \quad f \longmapsto \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) := \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{B}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}},$$

εκτός από ισομορφισμός K -διανυσματικών χώρων, είναι και ισομορφισμός δακτυλίων έχων την

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \text{Mat}_{n \times n}(K) \longrightarrow \text{End}_K(V), \quad \mathbf{A} \longmapsto \mathbf{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathbf{A}),$$

ως αντίστροφό του. (Βλ. 3.1.24 (i) και 5.1.13.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από τα θεωρήματα 5.2.16 και 5.2.21. □

5.2.23 Πρόρισμα. *Εάν το \mathcal{B} είναι μια διατεταγμένη βάση ενός K -διανυσματικού χώρου V διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) $f \in \text{Aut}_K(V)$.

(ii) $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in \text{GL}_n(K)$.

Επιπροσθέτως, εάν ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες, τότε

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^{-1} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) \Rightarrow (ii) Εάν $f \in \text{Aut}_K(V)$, τότε

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{B}} \circ \text{id}_V \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} = \mathbf{A}_{\text{id}_{K^n}} = \mathbf{I}_n$$

και

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{B}} \circ \text{id}_V \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} = \mathbf{A}_{\text{id}_{K^n}} = \mathbf{I}_n,$$

οπότε $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in \text{GL}_n(K)$ (με $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^{-1} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1})$).

(ii)⇒(i) Εάν $\mathbf{M}_B^B(f) \in \text{GL}_n(K)$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_B^B(\mathbf{M}_B^B(f)^{-1}) \circ f &= \mathbf{L}_B^B(\mathbf{M}_B^B(f)^{-1}) \circ \mathbf{L}_B^B(\mathbf{M}_B^B(f)) \\ &= \mathbf{L}_B^B(\mathbf{M}_B^B(f)^{-1} \cdot \mathbf{M}_B^B(f)) = \mathbf{L}_B^B(\mathbf{I}_n) = \text{id}_V \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f \circ \mathbf{L}_B^B(\mathbf{M}_B^B(f)^{-1}) &= \mathbf{L}_B^B(\mathbf{M}_B^B(f)) \circ \mathbf{L}_B^B(\mathbf{M}_B^B(f)^{-1}) \\ &= \mathbf{L}_B^B(\mathbf{M}_B^B(f) \cdot \mathbf{M}_B^B(f)^{-1}) = \mathbf{L}_B^B(\mathbf{I}_n) = \text{id}_V, \end{aligned}$$

οπότε $f \in \text{Aut}_K(V)$ (με $f^{-1} = \mathbf{L}_B^B(\mathbf{M}_B^B(f)^{-1})$). \square

5.2.24 Πρόρισμα. Εάν το \mathcal{B} είναι μια διατεταγμένη βάση ενός K -διανυσματικού χώρου V διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) $\mathbf{A} \in \text{GL}_n(K)$.

(ii) $\mathbf{L}_B^B(\mathbf{A}) \in \text{Aut}_K(V)$.

Επιπροσθέτως, εάν ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες, τότε

$$\mathbf{L}_B^B(\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{L}_B^B(\mathbf{A}^{-1}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται από το θεώρημα 5.2.16 και το πρόρισμα 5.2.23. \square

5.2.25 Πρόρισμα. Εάν το \mathcal{B} είναι μια διατεταγμένη βάση ενός K -διανυσματικού χώρου V διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$, τότε η απεικόνιση

$$\mathbf{M}_B^B|_{\text{Aut}_K(V)} : \text{Aut}_K(V) \longrightarrow \text{GL}_n(K), \quad f \longmapsto \mathbf{M}_B^B(f) := \mathbf{A}_{\iota_B \circ f \circ \iota_B^{-1}},$$

είναι ένας ισομορφισμός ομάδων. (Βλ. 3.1.24 (ii) και 5.1.22.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από τα πορίσματα 5.2.23 και 5.2.24. \square

5.2.26 Ορισμός. (Αλλαγή βάσεως) Έστω V ένας K -διανυσματικός χώρος διαστάσεως $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Εάν οι $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, $\mathcal{B}' = (\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n)$ είναι δυο διατεταγμένες βάσεις τού V , τότε ο ισομορφισμός

$$\iota_{\mathcal{B}'} \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1} : K^n \longrightarrow K^n$$

ο καταχωριζόμενος στο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \iota_{\mathcal{B}} \cong \swarrow & \circ & \searrow \cong \iota_{\mathcal{B}'} \\ K^n & \xrightarrow{\cong} & K^n \\ & \iota_{\mathcal{B}'} \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1} & \end{array}$$

(που αποτελεί την παράσταση συντεταγμένων τού id_V ως προς τις B και B') καλείται **μετασχηματισμός συντεταγμένων** ως προς το ζεύγος (B, B') και ο πίνακας

$$\mathbf{T}_{B'}^B := \mathbf{M}_{B'}^B(\text{id}_V) \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$$

πίνακας μεταβάσεως¹³ από την B στην B' .

5.2.27 Σημείωση. Για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$ η j -οστή στήλη τού $\mathbf{T}_{B'}^B$ είναι ο ανάστροφος τού διανύσματος συντεταγμένων τού \mathbf{v}_j ως προς τη βάση B' , όταν αυτό το εκλαμβάνουμε ως $(1 \times n)$ -πίνακα. Πράγματι για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} (\iota_{B'} \circ \iota_B^{-1})(x_1, \dots, x_n) &= (\iota_{B'} \circ \iota_B^{-1}) \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j^{[n]} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j (\iota_{B'}(\iota_B^{-1}(\mathbf{e}_j^{[n]}))) = \sum_{j=1}^n x_j (\iota_{B'}(\mathbf{v}_j)) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \iota_{B'}(\mathbf{v}_1) \\ \vdots \\ \iota_{B'}(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Εκφράζοντας το \mathbf{v}_j ως γραμμικό συνδυασμό $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \mathbf{v}'_i$, όπου τα στοιχεία $\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni} \in K$ είναι μονοσημάντως ορισμένα για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, λαμβάνουμε

$$\iota_{B'}(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \iota_{B'}(\mathbf{v}'_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \mathbf{e}_i^{[n]} = (\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{nj}),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$(\iota_{B'} \circ \iota_B^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Κατά συνέπεια,

$$\mathbf{T}_{B'}^B = \mathbf{A}_{\iota_{B'} \circ \iota_B^{-1}} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

5.2.28 Παραδείγματα. (i) Εάν θεωρήσουμε τις διατεταγμένες βάσεις

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3), \quad B' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3)$$

¹³Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς ονομάζουν πίνακα μεταβάσεως από την B στην B' τον $\mathbf{T}_B^{B'}$. Εδώ δεν θα ακολουθηθεί αυτή η ορολογία! (Όπως θα δούμε στο λήμμα 5.2.29, $\mathbf{T}_B^{B'} = (\mathbf{T}_{B'}^B)^{-1}$.)

τού \mathbb{Q} -διανυσματικού χώρου \mathbb{Q}^3 , όπου

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (1, -1, 2), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 3, 7), \quad \mathbf{v}_3 = (2, 3, 6), \\ \mathbf{v}'_1 &= (1, 2, 2), \quad \mathbf{v}'_2 = (-1, 3, 3), \quad \mathbf{v}'_3 = (-2, 7, 6),\end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}'_1 + 6\mathbf{v}'_2 - 3\mathbf{v}'_3, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{13}{5}\mathbf{v}'_1 + \frac{43}{5}\mathbf{v}'_2 - 4\mathbf{v}'_3, \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{12}{5}\mathbf{v}'_1 + \frac{32}{5}\mathbf{v}'_2 - 3\mathbf{v}'_3,\end{aligned}$$

οπότε ο πίνακας μεταβάσεως από την \mathcal{B} στην \mathcal{B}' είναι ο

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} := \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{Q}^3}) = \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{B}'} \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ \frac{13}{5} & \frac{43}{5} & -4 \\ \frac{12}{5} & \frac{32}{5} & -3 \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{5} & \frac{12}{5} \\ 6 & \frac{43}{5} & \frac{32}{5} \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Εάν θεωρήσουμε τις διατεταγμένες βάσεις

$$\mathcal{B} = (1, X + 1, (X + 1)^2, \dots, (X + 1)^n), \quad \mathcal{B}' = (1, X, X^2, \dots, X^n)$$

τού \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ έχουμε

$$(X + 1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^j + \sum_{j=k+1}^n 0 \cdot X^j,$$

οπότε ο πίνακας μεταβάσεως από την \mathcal{B} στην \mathcal{B}' είναι ο

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R}) \quad (5.23)$$

(βλ. 5.2.27).

5.2.29 Λήμμα. Ο $\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ είναι αντιστρέψιμος και $(\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1} = \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή (σύμφωνα με το θεώρημα 5.2.21) ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} &= \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V \circ \text{id}_V) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) \\ &= \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{B}'} \circ \text{id}_V \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} = \mathbf{A}_{\text{id}_{K^n}} = \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{B}} \circ \text{id}_V \circ \iota_{\mathcal{B}'}^{-1}} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) \\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V \circ \text{id}_V) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}},\end{aligned}$$

ο πίνακας $\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ είναι αντιστρέψιμος και $(\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1} = \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. □

5.2.30 Παράδειγμα. Στο παράδειγμα 5.2.28 (ii) έχουμε

$$X^k = ((X+1) - 1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (X+1)^j,$$

$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, οπότε ο πίνακας μεταβάσεως από την B' στην B είναι ο

$$\mathbf{T}_{B'}^{B'} = (\mathbf{T}_{B'}^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ \vdots & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

5.2.31 Πρόταση. Εάν οι \mathcal{A}, \mathcal{B} είναι διατεταγμένες βάσεις ενός μη τετριμμένου K -διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διαστάσεως, τότε ο πίνακας μεταβάσεως από την δυϊκή \mathcal{A}^* τής \mathcal{A} στη δυϊκή \mathcal{B}^* τής \mathcal{B} είναι ο

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = ((\mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{\top})^{-1} = ((\mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1})^{\top}. \quad (5.25)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι (5.25) είναι αληθείς λόγω των ισοτήτων

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} &= (\mathbf{T}_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*})^{-1} = (\mathbf{M}_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(\text{id}_{V^*}))^{-1} = (\mathbf{M}_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(\text{id}_V^{\top}))^{-1} \\ &= (\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\text{id}_V)^{\top})^{-1} = ((\mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{\top})^{-1} = ((\mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1})^{\top}, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη εξ αυτών έπεται από το λήμμα 5.2.29, η τρίτη από το (ii) τής προτάσεως 4.3.2, η τέταρτη από την (5.22) (εφαρμοζόμενη για την ταυτοτική απεικόνιση $f = \text{id}_V$) και η έκτη από την πρόταση 5.1.26. \square

5.2.32 Παράδειγμα. Εάν θεωρήσουμε τις διατεταγμένες βάσεις $\mathcal{A} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ και $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ τού \mathbb{Q}^2 , όπου

$$\mathbf{u}_1 = (1, \frac{1}{2}), \quad \mathbf{u}_2 = (\frac{7}{3}, 8), \quad \mathbf{v}_1 = (3, 5), \quad \mathbf{v}_2 = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}),$$

τότε

$$\mathbf{u}_1 = \frac{61}{330}\mathbf{v}_1 + \frac{49}{66}\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{644}{495}\mathbf{v}_1 - \frac{259}{99}\mathbf{v}_2,$$

οπότε

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \frac{61}{330} & \frac{644}{495} \\ \frac{49}{66} & -\frac{259}{99} \end{pmatrix} \xrightarrow{(5.25)} \mathbf{T}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = \begin{pmatrix} \frac{74}{41} & \frac{21}{41} \\ \frac{184}{205} & -\frac{183}{1435} \end{pmatrix}.$$

5.2.33 Θεώρημα. Έστω ότι οι V, W είναι μη τετριμμένοι K -διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διαστάσεως και $f \in \text{Hom}_K(V, W)$. Εάν οι $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ είναι δυο διατεταγμένες βάσεις τού V και οι $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ δυο διατεταγμένες βάσεις τού W , τότε

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \mathbf{T}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathbf{T}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot (\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1}. \quad (5.26)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$, $\dim_K(W) = m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\iota_{\mathcal{C}'} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}'}^{-1} = (\iota_{\mathcal{C}'} \circ \text{id}_W \circ \iota_{\mathcal{C}}^{-1}) \circ (\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}) \circ (\iota_{\mathcal{B}'} \circ \text{id}_V \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})^{-1},$$

κάτι που παρεμφαίνεται στο «τρισιδιάστατο» μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \text{id}_V & \searrow \iota_{\mathcal{B}} & \downarrow \text{id}_W \\ & K^n & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} & K^m \\ & \downarrow & \downarrow \iota_{\mathcal{C}} & \downarrow \iota_{\mathcal{C}'} \circ \text{id}_W \circ \iota_{\mathcal{C}}^{-1} \\ V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \iota_{\mathcal{B}'} & \searrow \iota_{\mathcal{B}'} \circ \text{id}_V \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1} & \downarrow \iota_{\mathcal{C}'} \\ & K^n & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{C}'} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} & K^m \end{array}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f) &= \Psi(\iota_{\mathcal{C}'} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}'}^{-1}) = \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{C}'} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} \\ &= \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{C}'} \circ \text{id}_W \circ \iota_{\mathcal{C}}^{-1}} \cdot \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} \cdot \mathbf{A}_{(\iota_{\mathcal{B}'} \circ \text{id}_V \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})^{-1}} \\ &= \Psi(\iota_{\mathcal{C}'} \circ \text{id}_W \circ \iota_{\mathcal{C}}^{-1}) \cdot \Psi(\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}) \cdot \Psi(\iota_{\mathcal{B}} \circ \text{id}_V \circ \iota_{\mathcal{B}'}^{-1}) \\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{id}_W) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) \\ &= \mathbf{T}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα τού (5.26) έπεται από το λήμμα 5.2.29. \square

5.2.34 Παράδειγμα. Εάν θεωρήσουμε τον ομομορφισμό \mathbb{Q} -διανυσματικών χώρων

$$f : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) := \left(\frac{1}{2}x - y + z, x + 3y - \frac{2}{5}z\right),$$

τις διατεταγμένες βάσεις $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, $\mathcal{B}' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3)$ τού \mathbb{Q}^3 , όπου

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (2, 1, 1), \\ \mathbf{v}'_1 &= (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}'_2 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v}'_3 = (0, 1, 1), \end{aligned}$$

και τις διατεταγμένες βάσεις $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, $\mathcal{C}' = (\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2)$ τού \mathbb{Q}^2 , όπου

$$\mathbf{w}_1 = (1, 3), \mathbf{w}_2 = (4, 2), \mathbf{w}'_1 = (3, \frac{1}{2}), \mathbf{w}'_2 = (\frac{1}{5}, -\frac{2}{7}),$$

τότε οι πίνακες $\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, $\mathbf{T}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}$, $\mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ και $\mathbf{M}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ υπολογίζονται ως εξής: Επειδή

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 0 \cdot \mathbf{v}'_1 + 1 \cdot \mathbf{v}'_2 + 0 \cdot \mathbf{v}'_3, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{v}'_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}'_2 + \frac{1}{2} \mathbf{v}'_3, \\ \mathbf{v}_3 &= 1 \cdot \mathbf{v}'_1 + 1 \cdot \mathbf{v}'_2 + 0 \cdot \mathbf{v}'_3, \end{aligned}$$

ο πίνακας μεταβάσεως από την \mathcal{B} στην \mathcal{B}' (επί τη βάσει των προαναφερθέντων στη σημείωση 5.2.27) είναι ο

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} := \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{Q}^3}) = \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{B}'} \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

έχων ως αντίστροφό του τον

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1} = \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Κατ' αναλογία, επειδή

$$\mathbf{w}_1 = \frac{62}{67} \mathbf{w}'_1 - \frac{595}{67} \mathbf{w}'_2, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{108}{67} \mathbf{w}'_1 - \frac{280}{67} \mathbf{w}'_2,$$

ο πίνακας μεταβάσεως από την \mathcal{C} στην \mathcal{C}' είναι ο

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} := \mathbf{M}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{id}_{\mathbb{Q}^2}) = \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{C}'} \circ \iota_{\mathcal{C}}^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{62}{67} & -\frac{595}{67} \\ \frac{108}{67} & -\frac{280}{67} \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} \frac{62}{67} & \frac{108}{67} \\ -\frac{595}{67} & -\frac{280}{67} \end{pmatrix}.$$

Από την άλλη μεριά,

$$(\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} (\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})(\mathbf{e}_1^{[3]}) \\ (\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})(\mathbf{e}_2^{[3]}) \\ (\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})(\mathbf{e}_3^{[3]}) \end{pmatrix}$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ με

$$\begin{aligned} (\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})(\mathbf{e}_1^{[3]}) &= (\iota_{\mathcal{C}} \circ f)(\iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{e}_1^{[3]})) = \iota_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{v}_1)) \\ &= \iota_{\mathcal{C}}\left(\frac{1}{2} \cdot 1 - 0 + 1, 1 + 3 \cdot 0 - \frac{2}{5} \cdot 1\right) \\ &= \iota_{\mathcal{C}}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right) = \iota_{\mathcal{C}}\left(-\frac{3}{50}(1, 3) + \frac{39}{100}(4, 2)\right) \\ &= -\frac{3}{50} \iota_{\mathcal{C}}(1, 3) + \frac{39}{100} \iota_{\mathcal{C}}(4, 2) \\ &= -\frac{3}{50} \mathbf{e}_1^{[2]} + \frac{39}{100} \mathbf{e}_2^{[2]} = \left(-\frac{3}{50}, \frac{39}{100}\right) \end{aligned}$$

και (κατόπιν εκτελέσεως αναλόγων πράξεων)

$$(\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1})(\mathbf{e}_2^{[3]}) = \left(\frac{67}{50}, -\frac{21}{100}\right), \quad (\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1})(\mathbf{e}_3^{[3]}) = \left(\frac{41}{25}, -\frac{4}{25}\right).$$

Ως εκ τούτου, ο πίνακας παραστάσεως τού f ως προς τις \mathcal{B} και \mathcal{C} είναι ο

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C^{\mathcal{B}}(f) &= \Psi(\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1}) = \mathbf{A}_{\iota_C \circ f \circ \iota_B^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{50} & \frac{39}{100} \\ \frac{67}{50} & -\frac{21}{100} \\ \frac{41}{25} & -\frac{4}{25} \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{50} & \frac{67}{50} & \frac{41}{25} \\ \frac{39}{100} & -\frac{21}{100} & -\frac{4}{25} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(βλ. (5.21)). Ο πίνακας παραστάσεως τού f ως προς τις \mathcal{B}' και \mathcal{C}' προσδιορίζεται από την (5.26):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f) &= \mathbf{T}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{M}_C^{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{62}{67} & \frac{108}{67} \\ -\frac{595}{67} & -\frac{280}{67} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{50} & \frac{67}{50} & \frac{41}{25} \\ \frac{39}{100} & -\frac{21}{100} & -\frac{4}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{46}{67} & \frac{192}{335} & \frac{182}{335} \\ -\frac{1715}{134} & -\frac{147}{134} & -\frac{546}{67} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.2.35 Πρόσμομα. Εάν οι $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ είναι διατεταγμένες βάσεις ενός μη τετριμμένου K -διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διαστάσεως και $f \in \text{End}_K(V)$, τότε

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot (\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1}. \quad (5.27)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται ύστερα από εφαρμογή τού θεωρήματος 5.2.33 στην ειδική περίπτωση όπου $V = W$, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ και $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$. \square

5.2.36 Παράδειγμα. Εάν θεωρήσουμε τις διατεταγμένες βάσεις

$$\mathcal{B} = (1, X + 1, (X + 1)^2, \dots, (X + 1)^n), \quad \mathcal{B}' = (1, X, X^2, \dots, X^n)$$

τού \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$, $n \in \mathbb{N}$, και τον ενδομορφισμό

$$\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}} : \mathbb{R}[X]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq n}$$

τού $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ (βλ. 3.1.16 (xvii)), τότε

$$\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}(1) = 0, \quad \mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}((X + 1)^k) = k(X + 1)^{k-1}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},$$

οπότε ο πίνακας παραστάσεως τού $\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}$ ως προς τη βάση \mathcal{B} είναι ο

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}) := \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{B}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή

$$\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}(1) = 0, \quad \mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}(X^k) = kX^{k-1}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},$$

ο πίνακας παραστάσεως τού $\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}$ ως προς τη βάση \mathcal{B}' είναι ο

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}) := \mathbf{A}_{\iota_{\mathcal{B}'} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}'}^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

οπότε $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}})$. Από την άλλη μεριά, επειδή οι $\mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ και $\mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ είναι γνωστοί (βλ. (5.23) και (5.24)), ο πίνακας παραστάσεως τού $\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}$ ως προς τη βάση \mathcal{B}' μπορεί να υπολογισθεί, εναλλακτικώς, μέσω της (5.27):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}) &= \mathbf{T}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{D}|_{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}) \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} + 2\binom{2}{2} & \binom{3}{1} - 2\binom{3}{2} + 3\binom{3}{3} & \cdots & \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} j \binom{j-1}{0} \binom{n}{j} \\ 0 & 0 & 2\binom{1}{1} \binom{2}{2} & -2\binom{1}{1} \binom{3}{2} + 3\binom{2}{1} \binom{3}{3} & \cdots & \sum_{j=2}^n (-1)^{n-j} j \binom{j-1}{1} \binom{n}{j} \\ \vdots & 0 & 0 & 3\binom{2}{2} \binom{3}{3} & \cdots & \sum_{j=3}^n (-1)^{n-j} j \binom{j-1}{2} \binom{n}{j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & n \binom{n-1}{n-1} \binom{n}{n} [= n] \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στις ακόλουθες (στοιχειώδεις αλλά μη τετριμμένες) συνδυαστικές ταυτότητες (για κάθε $n \geq 2$):

$$\sum_{j=l}^k (-1)^{k-j} j \binom{j-1}{l-1} \binom{k}{j} = 0, \quad \forall k \in \{2, \dots, n\} \text{ και } \forall l \in \{1, \dots, k-1\}.$$

5.2.37 Πρόσμομα. Εάν οι A, B, C είναι διατεταγμένες βάσεις ενός μη τετρομμένου K -διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διαστάσεως, τότε

$$\mathbf{T}_C^A = \mathbf{T}_C^B \cdot \mathbf{T}_B^A. \quad (5.28)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα ύστερα από εφαρμογή τού θεωρήματος 5.2.33 στην ειδική περίπτωση όπου $V = W$, $f = \text{id}_V$, $A = B'$ και $C = C'$. \square

5.2.38 Παράδειγμα. Εάν θεωρήσουμε τις διατεταγμένες βάσεις

$$A = ((1, \sqrt{3}), (2 + \sqrt[3]{7}, 6)), B = ((1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{3}{7})), C = ((1, 0), (\sqrt{2}, 9))$$

τού \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^2 , τότε

$$\begin{aligned} (1, \sqrt{3}) &= (-6 + 7\sqrt{3})(1, 1) + (14 - 14\sqrt{3})(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}), \\ (2 + \sqrt[3]{7}, 6) &= (30 - 6\sqrt[3]{7})(1, 1) + (-56 + 14\sqrt[3]{7})(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}), \\ (1, 1) &= (1 - \frac{1}{9}\sqrt{2})(1, 0) + \frac{1}{9}(\sqrt{2}, 9), \\ (\frac{1}{2}, \frac{3}{7}) &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{21}\sqrt{2})(1, 0) + \frac{1}{21}(\sqrt{2}, 9), \end{aligned}$$

οπότε

$$\mathbf{T}_B^A = \begin{pmatrix} -6 + 7\sqrt{3} & 30 - 6\sqrt[3]{7} \\ 14 - 14\sqrt{3} & -56 + 14\sqrt[3]{7} \end{pmatrix}, \mathbf{T}_C^B = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{9}\sqrt{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{21}\sqrt{2} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}.$$

Η (5.28) δίδει

$$\mathbf{T}_C^A = \mathbf{T}_C^B \cdot \mathbf{T}_B^A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{9}\sqrt{2}\sqrt{3} & 2 + \sqrt[3]{7} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{9}\sqrt{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

5.3 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

5.3.1 Ορισμός. (ΔΧΓ και ΔΧΣ) Έστω $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ (K σώμα, $m, n \in \mathbb{N}$).

Ο γραμμικός υπόχωρος

$$\Delta\text{ΧΓ}(A) := \text{Lin}(\{\Gamma\alpha_1(A), \dots, \Gamma\alpha_m(A)\}) \subseteq \text{Mat}_{1 \times n}(K)$$

τού $\text{Mat}_{1 \times n}(K)$ (ο παραγόμενος από τις γραμμές τού A) καλείται **διανυσματικός χώρος γραμμών τού A** . Κατ' αναλογία, ο γραμμικός υπόχωρος

$$\Delta\text{ΧΣ}(A) := \text{Lin}(\{\Sigma\tau_1(A), \dots, \Sigma\tau_n(A)\}) \subseteq \text{Mat}_{m \times 1}(K)$$

τού $\text{Mat}_{m \times 1}(K)$ (ο παραγόμενος από τις στήλες τού A) καλείται **διανυσματικός χώρος στηλών τού A** .

5.3.2 Ορισμός. (Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών) (i) Για οιοδήποτε στοιχείο $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ και $i \in \{1, \dots, m\}$ η απεικόνιση

$$\text{Mat}_{m \times n}(K) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \lambda \Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \mathbf{A}',$$

μέσω τής οποίας η i -οστή γραμμή ενός \mathbf{A} πολλαπλασιάζεται με το λ , καλείται **στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών τύπου I**. Γ' αυτόν χρησιμοποιείται η βραχυγραφία:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\Gamma_{Q_i} \mapsto \lambda \Gamma_{Q_i}} \mathbf{A}'$$

(ii) Για οιοδήποτε $\lambda \in K$ και $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, η απεικόνιση

$$\text{Mat}_{m \times n}(K) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) + \lambda \Gamma_{Q_j}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \mathbf{A}',$$

μέσω τής οποίας η i -οστή γραμμή ενός \mathbf{A} αντικαθίσταται με το άθροισμα τής i -οστής γραμμής και τής j -οστής γραμμής πολλαπλασιασθείσας με το λ , καλείται **στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών τύπου II**. Χρησιμοποιούμενη βραχυγραφία:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\Gamma_{Q_i} \mapsto \Gamma_{Q_i} + \lambda \Gamma_{Q_j}} \mathbf{A}'$$

(iii) Εάν $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, τότε η απεικόνιση

$$\text{Mat}_{m \times n}(K) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_j}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_j}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_i}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \mathbf{A}',$$

(όταν $i < j$, και με αλλαγή τής διατάξεως των $\Gamma_{Q_i}(\mathbf{A})$ και $\Gamma_{Q_j}(\mathbf{A})$ όταν $i > j$), μέσω τής οποίας η i -οστή γραμμή ενός \mathbf{A} αντικαθίσταται με την j -οστή γραμμή

του (και τανάπαλιν), καλείται **στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών τύπου III**. Χρησιμοποιούμενη βραχυγραφία:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\Gamma_{\theta_i} \leftrightarrow \Gamma_{\theta_j}} \mathbf{A}'$$

5.3.3 Πρόταση. Έστω τυχόν πίνακας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Εάν ο \mathbf{A}' είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει ύστερα από εκτέλεση διαδοχικών στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών τού \mathbf{A} , τότε

$$\Delta X \Gamma(\mathbf{A}) = \Delta X \Gamma(\mathbf{A}').$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από την πρόταση 1.4.9 (εφαρμοζόμενη για τις m γραμμές τού \mathbf{A} , οι οποίες παράγουν τον γραμμικό υπόχωρο $U = \Delta X \Gamma(\mathbf{A})$ τού K -διανυσματικού χώρου $V = \text{Mat}_{1 \times n}(K)$). \square

5.3.4 Ορισμός. (Κλιμακωτοί πίνακες) Έστω $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Ο \mathbf{A} καλείται **κλιμακωτός πίνακας** όταν είναι είτε ο μηδενικός πίνακας $\mathbf{0}_{m \times n}$ είτε ένας μη μηδενικός πίνακας για τον οποίο υπάρχει κάποιος $r \in \{1, \dots, m\}$, καθώς και δείκτες j_1, \dots, j_r , ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

- (i) $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m$,
- (ii) $a_{ij} = 0_K$ για κάθε $i \in \{1, \dots, r\}$ και κάθε $j \in \{1, \dots, j_i\}$,
- (iii) $a_{ij} = 0_K$ για κάθε $i \in \{r, \dots, m\}$ και κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$,
- (iv) $a_{ij_i} \neq 0_K$ για κάθε $i \in \{1, \dots, r\}$.

Εν τοιαύτη περιπτώσει, ο \mathbf{A} είναι τής μορφής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0_K & \dots & 0_K & \boxed{a_{1j_1}} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0_K & \dots & \dots & 0_K & \dots & 0_K & \boxed{a_{2j_2}} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0_K & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0_K & \dots & 0_K & \boxed{a_{3j_3}} & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0_K & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0_K & \boxed{a_{rj_r}} & * & \dots & * \\ 0_K & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0_K & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0_K & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0_K \end{pmatrix}$$

Οι εγγραφές $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$ ονομάζονται, ιδιαιτέρως, **καθοδηγητικές εγγραφές** τού \mathbf{A} . Εάν, πέραν των (i)-(iv), ικανοποιούνται και οι συνθήκες:

- (v) $a_{1j_1} = \dots = a_{rj_r} = 1_K$ και
- (vi) $a_{kj_i} = 0_K$ για κάθε $k \in \{1, \dots, i-1\}$ και κάθε $i \in \{1, \dots, r\}$,

τότε ο \mathbf{A} καλείται **ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας**.

5.3.5 Ορισμός. Λέμε ότι δυο πίνακες ανήκοντες στον $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ είναι **γραμμοϊσοδύναμοι** όταν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλον ύστερα από την εκτέλεση πεπερασμένων πλήθους στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών (τύπου I, II ή III).

Η χρησιμότητα των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών καθίσταται προδήλη στο ακόλουθο:

5.3.6 Θεώρημα. (Αλγόριθμος απαλοιφής των Gauss και Jordan)

Έστω τυχόν πίνακας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) Ο \mathbf{A} είναι γραμμοϊσοδύναμος με κάποιο κλιμακωτό πίνακα.
- (ii) Εάν $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}_{m \times n}$, τότε ο \mathbf{A} είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν και μόνον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα ¹⁴ $\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda.}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ (i). Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}_{m \times n}$. Από τον $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ αποκτούμε έναν άλλον πίνακα $\mathbf{A}^{(1)}$

$$\mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{A}^{(1)}$$

μέσω των εξής βημάτων:

Βήμα 1ο. Διατρέχουμε τις στήλες τού \mathbf{A} από επάνω προς τα κάτω (εκκινώντας από την πρώτη στήλη), έως ότου συναντήσουμε την πρώτη μη μηδενική εγγραφή $a_{i_1 j_1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0_K & \cdots & 0_K & 0_K & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0_K & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & a_{i_1 j_1} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_K & \cdots & 0_K & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Βήμα 2ο. Εάν το $a_{i_1 j_1}$ δεν βρίσκεται στην πρώτη γραμμή, δηλαδή εάν $i_1 \neq 1$, τότε εναλλάσσουμε τις $\Gamma_{0_1}(\mathbf{A})$ και $\Gamma_{i_1}(\mathbf{A})$ (στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών τύπου III) και συμβολίζουμε τον προκύπτοντα πίνακα ως $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Αυτός έχει το $\tilde{a}_{1 j_1}$ ως πρώτη του καθοδηγητική εγγραφή.

¹⁴Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς δεν συμπεριλαμβάνουν τη συνθήκη (vi) στον ορισμό 5.3.4 τού ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα. (Βάσει τής (vi), οι εγγραφές που ανήκουν στην ίδια στήλη με κάποια καθοδηγητική εγγραφή και βρίσκονται επάνω από αυτήν, οφείλουν να είναι ίσες με το 0_K .) Ωστόσο, η μοναδικότητα τού τελικώς προκύπτοντος «ανηγμένου» κλιμακωτού πίνακα (που είναι σημαντική για διάφορες εφαρμογές) προϋποθέτει το ότι πληρούνται *αμφότερες* οι συνθήκες (v) και (vi)!

Βήμα 3ο. Μετατρέπουμε όλες τις εγγραφές τής στήλης $\Sigma_{j_1}(\tilde{\mathbf{A}})$ τις ευρισκόμενες κάτω από από το \tilde{a}_{1j_1} σε 0_K κατόπιν εκτελέσεως (στον $\tilde{\mathbf{A}}$) μετασχηματισμών γραμμών τύπου II:

$$\Gamma_{Q_k} \mapsto \Gamma_{Q_k} + \left(-\frac{\tilde{a}_{kj_1}}{a_{1j_1}}\right) \Gamma_{Q_1}, \forall k \in \{2, \dots, m\}.$$

(Οι l -οστές στήλες με $l < j_1$ μένουν ανεπηρέαστες.) Κατόπιν τούτου λαμβάνουμε έναν πίνακα τής μορφής

$$\mathbf{A}^{(1)} := \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0_K & \cdots & 0_K & a_{1j_1}^{(1)} & * & \cdots & * \\ 0_K & \cdots & 0_K & 0_K & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ 0_K & \cdots & 0_K & 0_K & & & \end{array} \right),$$

όπου ο \mathbf{A}_2 είναι ένας $(m-1) \times (n-j_1)$ -πίνακας όταν $m \geq 2$ και $n > j_1$. Στις περιπτώσεις, όπου έχουμε είτε $m = 1$ είτε $n = j_1$ είτε τον \mathbf{A}_2 μηδενικό, σταματούμε. Ειδιάλλως, αποκτούμε έναν άλλον πίνακα $\mathbf{A}^{(2)}$

$$\mathbf{A}^{(1)} \rightsquigarrow \mathbf{A}^{(2)}$$

ακολουθώντας εκ νέου τα βήματα **1-3** με τον (εξ υποθέσεως μη μηδενικό) \mathbf{A}_2 στη θέση τού \mathbf{A} . Εν προκειμένω, είναι δυνατόν να επεκτείνουμε τους εκτελούμενους μετασχηματισμούς γραμμών τού \mathbf{A}_2 σε μετασχηματισμούς γραμμών τού πίνακα $\mathbf{A}^{(1)}$ χωρίς τον επηρεασμό των πρώτων j_1 στηλών (καθότι αυτές έχουν μόνον μηδενικές εγγραφές). Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένας πίνακας τής μορφής

$$\mathbf{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0_K & \cdots & 0_K & a_{1j_1}^{(2)} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0_K & \cdots & 0_K & 0_K & \cdots & 0_K & a_{2j_2}^{(2)} & \cdots & \cdots & * \\ 0_K & \cdots & 0_K & 0_K & \cdots & 0_K & 0_K & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \\ 0_K & \cdots & 0_K & 0_K & \cdots & 0_K & 0_K & & & \end{array} \right),$$

με μια νέα καθοδηγητική εγγραφή $a_{2j_2}^{(2)}$, όπου ο \mathbf{A}_3 , όταν $m \geq 3$ και $n > j_2$, είναι ένας πίνακας με μία γραμμή και τουλάχιστον μία στήλη λιγότερη απ' ό,τι ο \mathbf{A}_2 . Στις περιπτώσεις, όπου έχουμε είτε $m = 2$ είτε $n = j_2$ είτε τον \mathbf{A}_3 μηδενικό, σταματούμε. Ειδιάλλως, συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία (με τον \mathbf{A}_3 στη θέση τού \mathbf{A} κ.ο.κ.) αποκτώντας νέους πίνακες $\mathbf{A}^{(3)}$, \mathbf{A}_4 , $\mathbf{A}^{(4)}$, κ.λπ.

$$\dots \rightsquigarrow \mathbf{A}^{(\nu)} \rightsquigarrow \mathbf{A}^{(\nu+1)} \rightsquigarrow \dots$$

Η εν λόγω διαδικασία σταματά ύστερα από r εφαρμογές των βημάτων **1-3** όταν είτε $r = m$ είτε $r = n$ είτε ο \mathbf{A}_{r+1} είναι μηδενικός. Και στις τρεις περιπτώσεις ο $\mathbf{A}^{(r)}$ είναι ένας κλιμακωτός πίνακας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ (ii). Για να μεταβούμε από τον πίνακα $\mathbf{A}^{(r)} = (a_{ij}^{(r)})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα, εκτελούμε εν πρώτοις (στον $\mathbf{A}^{(r)}$) μετασχηματισμούς γραμμών τύπου I:

$$\Gamma_{\mathcal{Q}_i} \mapsto \frac{1}{a_{ij_i}^{(r)}} \Gamma_{\mathcal{Q}_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\},$$

ούτως ώστε όλες οι καθοδηγητικές εγγραφές τού προκύπτου κλιμακωτού πίνακα $\mathbf{A}' = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ να είναι ίσες με 1_K (βλ. συνθήκη 5.3.4 (v)). Κατόπιν τούτου, εκτελούμε (στον \mathbf{A}') μετασχηματισμούς γραμμών τύπου II:

$$\Gamma_{\mathcal{Q}_k} \mapsto \Gamma_{\mathcal{Q}_k} + (-a'_{kj_i}) \Gamma_{\mathcal{Q}_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \text{ και } \forall k \in \{1, \dots, j_i - 1\},$$

εισπράττοντας έναν πίνακα $\mathbf{A}'' = (a''_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο τα στοιχεία a'_{ij} τής $\Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A}')$ αντεκαθεστάθησαν με τα στοιχεία $a''_{ij} = 0_K$ για κάθε $j < j_i$ (βλ. συνθήκη 5.3.4 (vi)). Επομένως, ο \mathbf{A}'' είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας και αρκεί να θέσουμε

$$\mathbf{A}^{\text{αν.κλ.}} := \mathbf{A}''.$$

Το ότι αυτός ο πίνακας είναι ο *μόνος* ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας, ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον αρχικό \mathbf{A} , θα αποδειχθεί αργότερα στη σελίδα 245. \square

5.3.7 Παράδειγμα. Ο μοναδικός ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 5}(\mathbb{Q}).$$

είναι ο

$$\mathbf{A}^{\text{αν.κλ.}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 5}(\mathbb{Q}).$$

Πράγματι εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο απαλοιφής των Gauss και Jordan λαμβά-

νουμε

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_1} \leftrightarrow \Gamma_{\Theta_2}} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_3} \mapsto \Gamma_{\Theta_3} + \Gamma_{\Theta_1}} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -3 & 0 & 2 & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_3} \mapsto \Gamma_{\Theta_3} + (-2)\Gamma_{\Theta_2}} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_1} \mapsto (-1)\Gamma_{\Theta_1}} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_2} \mapsto (-1)\Gamma_{\Theta_2}} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_3} \mapsto (-1)\Gamma_{\Theta_3}} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_1} \mapsto \Gamma_{\Theta_1} + 2\Gamma_{\Theta_3}} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_2} \mapsto \Gamma_{\Theta_2} + 3\Gamma_{\Theta_3}} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_1} \mapsto \Gamma_{\Theta_1} + (-3)\Gamma_{\Theta_2}} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

5.3.8 Ορισμός. (Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών) (i) Για οιοδήποτε στοιχείο $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ και $k \in \{1, \dots, n\}$ η απεικόνιση

$$\text{Mat}_{m \times n}(K) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix}^T \longmapsto \begin{pmatrix} \Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \lambda\Sigma\tau_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix}^T = \mathbf{A}',$$

μέσω της οποίας η k -αστή στήλη ενός \mathbf{A} πολλαπλασιάζεται με το λ , καλείται **στοι-**

χειώδης μετασχηματισμός στηλών τύπου I. Χρησιμοποιούμενη βραχυγραφία:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\Sigma\tau_k \mapsto \lambda\Sigma\tau_k} \mathbf{A}'$$

(ii) Για οιοδήποτε $\lambda \in K$ και $k, j \in \{1, \dots, n\}, k \neq j$, η απεικόνιση

$$\text{Mat}_{m \times n}(K) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix}^T \mapsto \begin{pmatrix} \Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_k(\mathbf{A}) + \lambda\Sigma\tau_j(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix}^T = \mathbf{A}',$$

μέσω της οποίας η k -αστή στήλη ενός \mathbf{A} αντικαθίσταται με το άθροισμα της k -αστής στήλης και της j -οστής στήλης πολλαπλασιασθείσας με το λ , καλείται **στοιχειώδης μετασχηματισμός στηλών τύπου II**. Χρησιμοποιούμενη βραχυγραφία:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\Sigma\tau_k \mapsto \Sigma\tau_k + \lambda\Sigma\tau_j} \mathbf{A}'$$

(iii) Εάν $k, j \in \{1, \dots, n\}, k \neq j$, τότε η απεικόνιση

$$\text{Mat}_{m \times n}(K) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_j(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix}^T \mapsto \begin{pmatrix} \Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_j(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Sigma\tau_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix}^T = \mathbf{A}',$$

(όταν $k < j$, και με αλλαγή της διατάξεως των $\Sigma\tau_k(\mathbf{A})$ και $\Sigma\tau_j(\mathbf{A})$ όταν $k > j$), μέσω της οποίας η k -αστή στήλη ενός \mathbf{A} αντικαθίσταται με την j -οστή στήλη του (και τανάπαλιν), καλείται **στοιχειώδης μετασχηματισμός στηλών τύπου III**. Χρησιμοποιούμενη βραχυγραφία:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\Sigma\tau_k \leftrightarrow \Sigma\tau_j} \mathbf{A}'$$

5.3.9 Πρόταση. Έστω τυχόν πίνακας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Εάν ο \mathbf{A}' είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει ύστερα από εκτέλεση διαδοχικών στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών τού \mathbf{A} , τότε

$$\Delta X \Sigma(\mathbf{A}) = \Delta X \Sigma(\mathbf{A}').$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από την πρόταση 1.4.9 (εφαρμοζόμενη για τις n στήλες του \mathbf{A} , οι οποίες παράγουν τον γραμμικό υπόχωρο $U = \Delta X \Sigma(\mathbf{A})$ του K -διανυσματικού χώρου $V = \text{Mat}_{m \times 1}(K)$). \square

5.3.10 Ορισμός. Λέμε ότι δυο πίνακες (ανήκοντες στον $\text{Mat}_{m \times n}(K)$) είναι **στηλοϊσοδύναμοι** όταν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλον ύστερα από την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών (τύπου I, II ή III).

5.3.11 Θεώρημα. Κάθε μη μηδενικός κλιμακωτός πίνακας $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) με r καθοδηγητικές εγγραφές είναι στηλοϊσοδύναμος με τον (σε τέσσερα τεμάχια χωριζόμενον) πίνακα

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right). \quad (5.29)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ένας μη μηδενικός κλιμακωτός πίνακας. Ας υποθέσουμε ότι οι δείκτες j_1, \dots, j_r ικανοποιούν τις συνθήκες (i)-(iv) του ορισμού 5.3.4 για τον \mathbf{B} , ούτως ώστε οι $b_{1j_1}, \dots, b_{rj_r}$ να είναι οι καθοδηγητικές εγγραφές του. Εναλλάσσοντας την $\Sigma_{j_p}(\mathbf{B})$ με την $\Sigma_{j_p}(\mathbf{B})$ για εκείνους τους $p \in \{1, \dots, r\}$ για τους οποίους ισχύει $j_p \neq p$ (εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών τύπου III), καθιστούμε τον \mathbf{B} στηλοϊσοδύναμο με έναν πίνακα τής μορφής

$$\mathbf{B}^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}' & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right),$$

όπου $\mathbf{B}' = (b'_{\mu\nu})_{1 \leq \mu, \nu \leq r} \in \text{Diag}_{r \times r}(K)$ με

$$b'_{\mu\nu} = \begin{cases} 0_K, & \text{όταν } \mu \neq \nu, \\ b_{\mu j_\mu}, & \text{όταν } \mu = \nu, \end{cases}$$

και $\mathbf{C} = (c_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq l \leq n-r}}$ ένας πίνακας περιέχων τις όποιες μη μηδενικές εγγραφές του \mathbf{B} ενδέχεται να εξακολουθούν να υφίστανται ύστερα από αυτούς τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς. Εν συνεχεία, εκτελούμε (στον $\mathbf{B}^{(0)}$) τους ακόλουθους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών τύπου II:

$$\Sigma_{r+l} \mapsto \Sigma_{r+l} + (-c_{1l}(b'_{11})^{-1}) \Sigma_1, \quad \forall l \in \{1, \dots, n-r\}.$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο αποκτούμε έναν πίνακα, στηλοϊσοδύναμο με τον $\mathbf{B}^{(0)}$, τής μορφής

$$\mathbf{B}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}' & \mathbf{C}^{(1)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right),$$

όπου ο $\mathbf{C}^{(1)}$ είναι ένας $(r \times (n - r))$ -πίνακας με όλες τις εγγραφές τής πρώτης του γραμμής ίσες με το 0_K . Επαναλαμβάνοντας το ίδιο τέχνασμα (αυτήν τη φορά με τον $\mathbf{B}^{(1)}$ στη θέση του $\mathbf{B}^{(0)}$ και με την $\Sigma_2(\mathbf{B}^{(1)})$ στη θέση τής $\Sigma_1(\mathbf{B}^{(0)})$) αποκτούμε έναν πίνακα, στηλοϊσοδύναμο με τον $\mathbf{B}^{(0)}$, τής μορφής

$$\mathbf{B}^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}' & \mathbf{C}^{(2)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right),$$

όπου ο $\mathbf{C}^{(2)}$ είναι ένας $(r \times (n - r))$ -πίνακας με όλες τις εγγραφές των δύο πρώτων του γραμμών ίσες με το 0_K . Συνεχίζοντας αυτήν τη διαδικασία φθάνουμε στον πίνακα

$$\mathbf{B}^{(r)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}' & \mathbf{C}^{(r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right),$$

όπου

$$\mathbf{C}^{(r)} = \mathbf{0}_{r \times (n-r)}.$$

Εν τέλει, κάνοντας χρήση των r στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών του $\mathbf{B}^{(r)}$ (τύπου I):

$$\Sigma_{\kappa} \mapsto (b'_{\kappa\kappa})^{-1} \Sigma_{\kappa}, \quad \forall \kappa \in \{1, \dots, r\},$$

καταλήγουμε στον πίνακα 5.29. □

5.3.12 Ορισμός. Για οιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και οιοδήποτε σώμα K ορίζονται οι ακόλουθοι πίνακες (ανήκοντες στον $\text{Mat}_{n \times n}(K)$) που καλούνται **στοιχειώδεις πίνακες**¹⁵:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda) &:= \mathbf{I}_n + (\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]}, \quad \lambda \in K, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \\ \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda) &:= \mathbf{I}_n + \lambda \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]}, \quad \lambda \in K, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j, \\ \mathbf{S}_{ij}^{[n]} &:= \mathbf{I}_n - \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} - \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

¹⁵Ειδικότερες ονομασίες που χρησιμοποιούνται γι' αυτούς είναι οι εξής: Οι $\mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda)$ καλούνται **στοιχειώδεις διαστολές**, οι $\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda)$ **στοιχειώδεις διατμήσεις** και οι $\mathbf{S}_{ij}^{[n]}$ **στοιχειώδεις μετατακτικοί πίνακες**.

Προφανώς, $\mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda) = \text{diag}(\underbrace{1_K, \dots, 1_K}_{i-1 \text{ φορές}}, \lambda, \underbrace{1_K, \dots, 1_K}_{n-i \text{ φορές}})$ και όταν, π.χ., $i < j$,

$$\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1_K & \cdots & \overset{i}{\downarrow} 0_K & \cdots & \overset{j}{\downarrow} 0_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0_K & \cdots & 1_K & \cdots & \lambda & \cdots & 0_K \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0_K & \cdots & 0_K & \cdots & 1_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & \cdots & 0_K & \cdots & 0_K & \cdots & 1_K \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

και

$$\mathbf{S}_{ij}^{[n]} = \begin{pmatrix} 1_K & \cdots & \overset{i}{\downarrow} 0_K & \cdots & \overset{j}{\downarrow} 0_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0_K & \cdots & 0_K & \cdots & 1_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0_K & \cdots & 1_K & \cdots & 0_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & \cdots & 0_K & \cdots & 0_K & \cdots & 1_K \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

5.3.13 Λήμμα. Για τους στοιχειώδεις πίνακες ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) $\mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda\mu) = \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda) \cdot \mathbf{D}_i^{[n]}(\mu)$,
- (ii) $\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda + \mu) = \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\mu)$, και
- (iii) $\mathbf{S}_{ij}^{[n]} \cdot \mathbf{S}_{ij}^{[n]} = \mathbf{I}_n$,

για ουσδήποτε $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, και $\lambda, \mu \in K$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Επειδή $\mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} = \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]}$, τα (ii), (iii) και (iv) της προτάσεως 5.1.12 δίδουν

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda\mu) &= (\mathbf{I}_n + (\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]})(\mathbf{I}_n + (\mu - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]}) \\ &= \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n \cdot ((\mu - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]}) \\ &\quad + ((\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]}) \cdot \mathbf{I}_n + ((\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]}) \cdot ((\mu - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]}) \\ &= \mathbf{I}_n + ((\mu - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]}) + ((\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]}) + (\lambda - 1_K)(\mu - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} \\ &= \mathbf{I}_n + ((\mu - 1_K) + (\lambda - 1_K) + (\lambda - 1_K)(\mu - 1_K)) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} \\ &= \mathbf{I}_n + (\lambda\mu - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} = \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda) \cdot \mathbf{D}_i^{[n]}(\mu). \end{aligned}$$

(ii) Επειδή $\mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} = \mathbf{0}_{n \times n}$, η πρόταση 5.1.12 δίδει

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\mu) &= (\mathbf{I}_n + \lambda \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]}) \cdot (\mathbf{I}_n + \mu \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]}) \\ &= \mathbf{I}_n + \mu \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + \lambda \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + (\lambda \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]}) \cdot (\mu \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]}) \\ &= \mathbf{I}_n + \mu \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + \lambda \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + \lambda \mu (\mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]}) \\ &= \mathbf{I}_n + \mu \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + \lambda \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} = \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda + \mu). \end{aligned}$$

(iii) Επειδή

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} &= \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} = \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} \\ \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} &= \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} = \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} \\ \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} &= \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} = \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} \\ \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} &= \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} = \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} &= \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} = \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} \\ &= \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} = \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} \cdot \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} = \mathbf{0}_{n \times n}, \end{aligned}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{ij}^{[n]} \cdot \mathbf{S}_{ij}^{[n]} &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} - \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]})^2 \\ &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} - \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]}) + (-\mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} - \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]}) \\ &\quad + (-\mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} - \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]}) + (\mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} - \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]}) + (\mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} - \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]}) \end{aligned}$$

που (κατόπιν απαλοιφής προσθετέων) ισούται με τον \mathbf{I}_n . □

5.3.14 Πρόταση. Οι $\mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda)$ και $\mathbf{S}_{ij}^{[n]}$ είναι συμμετρικοί (βλ. 5.1.16) και

$$(\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda))^\top = \mathbf{R}_{ji}^{[n]}(\lambda), \quad \mathbf{S}_{ij}^{[n]} = \mathbf{S}_{ji}^{[n]}.$$

Επιπροσθέτως, όλοι οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι (δηλαδή ανήκουν στην ομάδα $\text{GL}_n(K)$, βλ. 5.1.22), και οι αντίστροφοί τους είναι οι εξής:

$$(\mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda))^{-1} = \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda^{-1}), \quad (\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda))^{-1} = \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(-\lambda), \quad (\mathbf{S}_{ij}^{[n]})^{-1} = \mathbf{S}_{ij}^{[n]}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda)^\top &= (\mathbf{I}_n + (\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]})^\top = \mathbf{I}_n^\top + (\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]\top} \\ &= \mathbf{I}_n + (\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} = \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda) \end{aligned}$$

και (μέσω τού (i) τού λήμματος 5.3.13)

$$\mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda) \cdot \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda^{-1}) = \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda\lambda^{-1}) = \mathbf{D}_i^{[n]}(1_K) = \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda^{-1}) \cdot \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda).$$

Εξάλλου,

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda))^\top &= (\mathbf{I}_n + \lambda \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]})^\top = \mathbf{I}_n^\top + \lambda \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]\top} \\ &= \mathbf{I}_n + \lambda \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} = \mathbf{R}_{ji}^{[n]}(\lambda) \end{aligned}$$

και (μέσω τού (ii) τού λήμματος 5.3.13)

$$\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(-\lambda) = \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(0_K) = \mathbf{I}_n = \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(-\lambda) \cdot \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda).$$

Τέλος, η ισότητα $\mathbf{S}_{ij}^{[n]} = \mathbf{S}_{ji}^{[n]}$ έπεται άμεσα από τον ορισμό και

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_{ij}^{[n]})^\top &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} - \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]})^\top \\ &= \mathbf{I}_n^\top - \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]\top} - \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]\top} + \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]\top} + \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]\top} \\ &= \mathbf{I}_n - \mathbf{E}_{ii}^{[n,n]} - \mathbf{E}_{jj}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ji}^{[n,n]} + \mathbf{E}_{ij}^{[n,n]} = \mathbf{S}_{ij}^{[n]}, \end{aligned}$$

ενώ η επαλήθευση τού ισχυρισμού περί τής αντιστρεψιμότητας των $\mathbf{S}_{ij}^{[n]}$ είναι πρόδηλη λόγω τού (iii) τού λήμματος 5.3.13. \square

5.3.15 Πρόταση. *Οι στοιχειώδεις πίνακες συσχετίζονται μεταξύ τους μέσω των ακόλουθων ισοτήτων:*

- (i) $\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(0_K) = \mathbf{D}_k^{[n]}(1_K) = \mathbf{S}_{kk}^{[n]} = \mathbf{I}_n$,
- (ii) $\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda) = \mathbf{D}_j^{[n]}(\lambda^{-1}) \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(1_K) \mathbf{D}_j^{[n]}(\lambda)$,
- (iii) $\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda\mu) = \mathbf{D}_j^{[n]}(\lambda^{-1}) \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\mu) \mathbf{D}_j^{[n]}(\lambda)$,
- (iv) $\mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\lambda\mu) = \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda) \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(\mu) \mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda^{-1})$, και
- (v) $\mathbf{S}_{ij}^{[n]} = \mathbf{R}_{ji}^{[n]}(1_K) \mathbf{R}_{ij}^{[n]}(-1_K) \mathbf{R}_{ji}^{[n]}(1_K) \mathbf{D}_j^{[n]}(-1)$,

για οιοσδήποτε $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, και $\lambda, \mu \in K$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται ύστερα από (σχετικώς μακροσκελείς) πράξεις και αφήνεται ως άσκηση. \square

5.3.16 Θεώρημα. *Έστω τυχόν πίνακας $\mathbf{A} = (a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$).*

Τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) *Ο πίνακας \mathbf{A}' , ο οποίος προκύπτει ύστερα από την εκτέλεση ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών 5.3.2 τού \mathbf{A} , ισούται με τον \mathbf{A} πολλαπλασιαζόμενο εξ αριστερών με έναν κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα. Συγκεκριμένα, αναλόγως τού*

τύπου τού εκτελούμενου στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών, ο \mathbf{A}' είναι αυτός που καταχωρίζεται στον κάτωθι κατάλογο:

| Τύπος | \mathbf{A}' |
|-------|--|
| I | $\mathbf{D}_i^{[m]}(\lambda) \cdot \mathbf{A} \quad (\lambda \in K \setminus \{0_K\})$ |
| II | $\mathbf{R}_{ij}^{[m]}(\lambda) \cdot \mathbf{A} \quad (\lambda \in K, i \neq j)$ |
| III | $\mathbf{S}_{ij}^{[m]} \cdot \mathbf{A} \quad (i \neq j)$ |

(ii) Ο πίνακας \mathbf{A}' , ο οποίος προκύπτει ύστερα από την εκτέλεση ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού στηλών 5.3.8 τού \mathbf{A} , ισούται με τον \mathbf{A} πολλαπλασιασθένο εκ δεξιών με έναν κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα. Συγκεκριμένα, αναλόγως τού τύπου τού εκτελούμενου στοιχειώδους μετασχηματισμού στηλών, ο \mathbf{A}' είναι αυτός που καταχωρίζεται στον κάτωθι κατάλογο:

| Τύπος | \mathbf{A}' |
|-------|--|
| I | $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_k^{[n]}(\lambda) \quad (\lambda \in K \setminus \{0_K\})$ |
| II | $\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{jk}^{[n]}(\lambda) \quad (\lambda \in K, k \neq j)$ |
| III | $\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_{kj}^{[n]} \quad (k \neq j)$ |

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) *Περίπτωση πρώτη.* Εάν ο \mathbf{A}' είναι ο πίνακας που προκύπτει ύστερα από αντικατάσταση τής $\Gamma_{\alpha_i}(\mathbf{A})$ με το πολλαπλάσιό της $\lambda \Gamma_{\alpha_i}(\mathbf{A})$ για κάποιον δείκτη $i \in \{1, \dots, m\}$ και $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i^{[m]}(\lambda) \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{I}_m + (\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[m,m]}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} + (\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{ii}^{[m,m]} \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} + ((\lambda - 1_K) \delta_{ij} a_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq m}} = \mathbf{A}'. \end{aligned}$$

Περίπτωση δεύτερη. Εάν ο \mathbf{A}' είναι ο πίνακας που προκύπτει ύστερα από αντικατάσταση τής $\Gamma_{\alpha_i}(\mathbf{A})$ με την $\Gamma_{\alpha_i}(\mathbf{A}) + \lambda \Gamma_{\alpha_j}(\mathbf{A})$ για κάποιους $i, j \in \{1, \dots, m\}$,

$i \neq j$, και $\lambda \in K$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ij}^{[m]}(\lambda) \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{I}_m + \lambda \mathbf{E}_{ij}^{[m,m]}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} + \lambda \mathbf{E}_{ij}^{[m,m]} \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} + (\lambda \delta_{i\mu} a_{j\nu})_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 1 \leq \nu \leq n}} = \mathbf{A}'. \end{aligned}$$

Περίπτωση τρίτη. Εάν ο \mathbf{A}' είναι ο πίνακας που προκύπτει ύστερα από αντικατάσταση τής $\Gamma_{\mathcal{R}_i}(\mathbf{A})$ με την $\Gamma_{\mathcal{R}_j}(\mathbf{A})$ για κάποιους $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \mathbf{E}_{ii}^{[m,m]} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{E}_{jj}^{[m,m]} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{E}_{ij}^{[m,m]} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{E}_{ji}^{[m,m]} \cdot \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{I}_m - \mathbf{E}_{ii}^{[m,m]} - \mathbf{E}_{jj}^{[m,m]} + \mathbf{E}_{ij}^{[m,m]} + \mathbf{E}_{ji}^{[m,m]}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{S}_{ij}^{[m]} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned}$$

(ii) *Περίπτωση πρώτη.* Εάν ο \mathbf{A}' είναι ο πίνακας που προκύπτει ύστερα από αντικατάσταση τής $\Sigma_k(\mathbf{A})$ με το πολλαπλάσιό τής $\lambda \Sigma_k(\mathbf{A})$ για κάποιον $k \in \{1, \dots, n\}$ και $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_k^{[n]}(\lambda) &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{I}_n + (\lambda - 1_K) \mathbf{E}_{kk}^{[n,n]}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n + (\lambda - 1_K) \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_{kk}^{[n,n]} \\ &= \mathbf{A} + ((\lambda - 1_K) \delta_{\nu k} a_{\mu\nu})_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 1 \leq \nu \leq n}} = \mathbf{A}'. \end{aligned}$$

Περίπτωση δεύτερη. Έστω \mathbf{A}' ο πίνακας που προκύπτει ύστερα από αντικατάσταση τής $\Sigma_k(\mathbf{A})$ με την $\Sigma_k(\mathbf{A}) + \lambda \Sigma_j(\mathbf{A})$ για κάποιους $k, j \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$, και $\lambda \in K$. Από τις προτάσεις 5.1.25 και 5.3.14 συνάγουμε ότι

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{jk}^{[n]}(\lambda))^\top = (\mathbf{R}_{jk}^{[n]}(\lambda))^\top \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{R}_{kj}^{[n]}(\lambda) \cdot \mathbf{A}^\top.$$

Επομένως, ο $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{jk}^{[n]}(\lambda))^\top$ είναι ο πίνακας που προκύπτει ύστερα από αντικατάσταση τής $\Gamma_{\mathcal{R}_k}(\mathbf{A}^\top)$ με την $\Gamma_{\mathcal{R}_k}(\mathbf{A}^\top) + \lambda \Gamma_{\mathcal{R}_j}(\mathbf{A}^\top)$ και, ως εκ τούτου,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{jk}^{[n]}(\lambda).$$

Περίπτωση τρίτη. Έστω \mathbf{A}' ο πίνακας που προκύπτει ύστερα από αντικατάσταση τής $\Sigma_k(\mathbf{A})$ με την $\Sigma_j(\mathbf{A})$ για κάποιους $k, j \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$. Από τις προτάσεις 5.1.25 και 5.3.14 έπεται ότι

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_{kj}^{[n]})^\top = (\mathbf{S}_{kj}^{[n]})^\top \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{S}_{kj}^{[n]} \cdot \mathbf{A}^\top.$$

Επομένως, ο $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_{kj}^{[n]})^\top$ είναι ο πίνακας που προκύπτει ύστερα από αντικατάσταση τής $\Gamma_{\mathcal{R}_k}(\mathbf{A}^\top)$ με την $\Gamma_{\mathcal{R}_j}(\mathbf{A}^\top)$ και, ως εκ τούτου, $\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_{kj}^{[n]}$. \square

5.3.17 Λήμμα. Για κάθε μη μηδενικό πίνακα $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k \in \text{GL}_m(K)$ ($k \in \mathbb{N}$), τέτοιοι ώστε ο

$$\mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A}$$

να είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $\mathbf{A}^{\text{αν.}\lambda}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το θεώρημα 5.3.6, από κάθε μη μηδενικό \mathbf{A} αποκτάται ένας και μόνον ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $\mathbf{A}^{av.λλ.}$ κατόπιν εκτελέσεως πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μετασχηματισμών (ορισμένων) γραμμών του. Εάν υποθέσουμε ότι για την απόκτηση του $\mathbf{A}^{av.λλ.}$ χρησιμοποιούνται k στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών, τότε αυτός γράφεται ως

$$\mathbf{A}^{av.λλ.} = (\mathbf{P}_k \cdot (\dots (\mathbf{P}_2 \cdot (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A}))),$$

όπου καθένας εκ των $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k \in \text{GL}_m(K)$ είναι στοιχειώδης πίνακας $(\mathbf{D}_i^{[m]}(\lambda))$, $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$, $\mathbf{R}_{ij}^{[m]}(\lambda)$, $\lambda \in K$, ή $\mathbf{S}_{ij}^{[m]}$, για κατάλληλους $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, επί τη βάσει των επεξηγηθέντων στο (i) του θεωρήματος 5.3.16. \square

5.3.18 Λήμμα. Για οιοδήποτε μη μηδενικό κλιμακωτό πίνακα $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) που έχει r καθοδηγητικές εγγραφές υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_l \in \text{GL}_n(K)$ ($l \in \mathbb{N}$), τέτοιοι ώστε

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}_l = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right). \quad (5.30)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το θεώρημα 5.3.11 οιοδήποτε πίνακας \mathbf{B} αυτού του είδους είναι στηλοϊσοδύναμος με τον πίνακα

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right).$$

Ο τελευταίος πίνακας, αποκτούμενος κατόπιν εκτελέσεως πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μετασχηματισμών (ορισμένων) στηλών του \mathbf{B} , είναι τής μορφής $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}_l$ ($l \in \mathbb{N}$), όπου καθένας εκ των $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_l \in \text{GL}_n(K)$ είναι στοιχειώδης πίνακας $(\mathbf{D}_i^{[n]}(\lambda))$, $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$, $\mathbf{R}_{ji}^{[n]}(\lambda)$, $\lambda \in K$, ή $\mathbf{S}_{ji}^{[n]}$, για κατάλληλους $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, επί τη βάσει των επεξηγηθέντων στο (ii) του θεωρήματος 5.3.16. \square

5.3.19 Θεώρημα. Για κάθε μη μηδενικό πίνακα $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες

$$\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k \in \text{GL}_m(K) \text{ και } \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_l \in \text{GL}_n(K) \text{ (} k, l \in \mathbb{N}\text{),}$$

τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\boxed{\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right)}, \quad (5.31)$$

όπου $\mathbf{P} := \mathbf{P}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q} := \mathbf{Q}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}_l$ και $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας με r καθοδηγητικές εγγραφές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το λήμμα 5.3.17 υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k \in \text{GL}_m(K)$ ($k \in \mathbb{N}$), τέτοιοι ώστε $\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda.} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ ($\neq \mathbf{0}_{m \times n}$), όπου $\mathbf{P} := \mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_1$. Εάν ο $\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda.}$ έχει r καθοδηγητικές εγγραφές, τότε, σύμφωνα με το λήμμα 5.3.18, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_l \in \text{GL}_n(K)$ ($l \in \mathbb{N}$), τέτοιοι ώστε ο $\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda.} \cdot \mathbf{Q}$ να γράφεται υπό τη μορφή (5.30), όπου $\mathbf{Q} := \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_l$. Άρα η ισότητα (5.31) είναι αληθής. \square

5.3.20 Σημείωση. (Διαδικασία προσδιορισμού των \mathbf{P} και \mathbf{Q}) (i) Δοθέντος ενός μη μηδενικού πίνακα $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) είναι δυνατός ο (πρακτικός) προσδιορισμός αντιστρεψίμων ($m \times m$)-πινάκων \mathbf{P} και αντιστρεψίμων ($n \times n$)-πινάκων \mathbf{Q} που πληρούν τις συνθήκες τις παρατεθείσες στο θεώρημα 5.3.19 ακολουθώντας την εξής διαδικασία: Εκκινούμε από τη (διατεταγμένη) τριάδα πινάκων $(\mathbf{A}, \mathbf{I}_m, \mathbf{I}_n)$ και εκτελούμε πεπερασμένου πλήθους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς (ορισμένων) γραμμών ή/και στηλών του \mathbf{A} , έως ότου καταλήξουμε στον πίνακα τού δεξιού μέλους τής (5.31):

$$(\mathbf{A}, \mathbf{I}_m, \mathbf{I}_n) \mapsto \cdots \mapsto \left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right), \mathbf{P}, \mathbf{Q} \right).$$

Εν προκειμένω, δεν είναι αναγκαίο να εκτελούμε όλους τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών προ των στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών (ή το αντίθετο): Έχουμε το δικαίωμα αναμείξεως των δύο ειδών στοιχειωδών μετασχηματισμών. Ωστόσο, εκ παραλλήλου, οφείλουμε

(a) να εκτελούμε όλους τους εκάστοτε χρησιμοποιούμενους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς *γραμμών και* στον \mathbf{I}_m (και να αφήνουμε αυτόν και οιονδήποτε κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτοντα πίνακα *ανεπηρέαστο* όταν μεσολαβούν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών τού πρώτου στοιχείου τής όποιας τριάδας αναφοράς μας),

(b) να εκτελούμε όλους τους εκάστοτε χρησιμοποιούμενους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς *στηλών και* στον \mathbf{I}_n (και να αφήνουμε αυτόν και οιονδήποτε κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτοντα πίνακα *ανεπηρέαστο* όταν μεσολαβούν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών τού πρώτου στοιχείου τής όποιας τριάδας αναφοράς μας) και

(c) να προσδιορίζουμε (άμα τη λήξει τής διαδικασίας) τους στοιχειώδεις πίνακες που αποτελούν τους παράγοντες των τελικώς εξαγομένων \mathbf{P} και \mathbf{Q} μέσω τού θεωρήματος 5.3.16.

(ii) Επειδή (κατά κανόνα) υπάρχουν ποικίλοι τρόποι εκτέλεσεως των απαιτούμενων στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών ή/και στηλών στο (i), οι εξαγόμενοι πίνακες \mathbf{P} και \mathbf{Q} δεν είναι (για τον δοθέντα πίνακα \mathbf{A}) κατ' ανάγκην μονοσημάτως ορισμένοι!

Τα (i) και (ii) αποσαφηνίζονται μέσω τού επομένου παραδείγματος.

5.3.21 Παράδειγμα. Θεωρούμε τον (2×3) -πίνακα

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{Q}).$$

Χρησιμοποιώντας δύο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, ακολουθούμενους από δύο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{Q}_2} \mapsto \Gamma_{\mathcal{Q}_2} + (-1)\Gamma_{\mathcal{Q}_1}} & \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{Q}_1} \mapsto \Gamma_{\mathcal{Q}_1} + \Gamma_{\mathcal{Q}_2}} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ \xrightarrow{\Sigma_{\mathcal{T}_3} \mapsto \Sigma_{\mathcal{T}_3} + \Sigma_{\mathcal{T}_1}} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ \xrightarrow{\Sigma_{\mathcal{T}_3} \mapsto \Sigma_{\mathcal{T}_3} + 2\Sigma_{\mathcal{T}_2}} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

λαμβάνουμε

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_{12}^{[2]}(1) \cdot \mathbf{R}_{21}^{[2]}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_{13}^{[3]}(1) \cdot \mathbf{R}_{23}^{[3]}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από την άλλη μεριά, ένα διαφορετικό μείγμα στοιχειωδών μετασχηματισμών δίδει

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3) &= \left(\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right) \\
 \xrightarrow{\Gamma_{\mathbf{Q}_2} \mapsto \Gamma_{\mathbf{Q}_2} + (-1)\Gamma_{\mathbf{Q}_1}} & \left(\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right) \\
 \xrightarrow{\Gamma_{\mathbf{Q}_1} \mapsto \Gamma_{\mathbf{Q}_1} + \Gamma_{\mathbf{Q}_2}} & \left(\left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right) \\
 \xrightarrow{\Sigma_{\mathbf{r}_1} \mapsto (-1)\Sigma_{\mathbf{r}_1}} & \left(\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right) \\
 \xrightarrow{\Sigma_{\mathbf{r}_3} \mapsto \Sigma_{\mathbf{r}_3} + (-2)\Sigma_{\mathbf{r}_1}} & \left(\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right) \\
 \xrightarrow{\Sigma_{\mathbf{r}_3} \mapsto \Sigma_{\mathbf{r}_3} + \Sigma_{\mathbf{r}_2}} & \left(\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right),
 \end{aligned}$$

οπότε

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{R}_{12}^{[2]}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \mathbf{Q} = \mathbf{S}_{12}^{[3]} \cdot \mathbf{D}_1^{[3]}(-1) \cdot \mathbf{R}\mathbf{S}_{13}^{[3]}(-2) \cdot \mathbf{R}\mathbf{S}_{23}^{[3]}(1) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

5.4 ΒΑΘΜΙΔΑ ΠΙΝΑΚΑ

5.4.1 Ορισμός. Ως **βαθμίδα** ενός πίνακα $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ (όπου K σώμα και $m, n \in \mathbb{N}$) ορίζεται η βαθμίδα

$$\text{rank}(\mathbf{A}) := \text{rank}(f_{\mathbf{A}}) = \dim_K(\text{Im}(f_{\mathbf{A}}))$$

τού ομομορφισμού $f_{\mathbf{A}} \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$ (βλ. 5.2.1 και 5.2.3 (i)). Προφανώς,

$$0 \leq \text{rank}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\} \quad (5.32)$$

(βλ. πρόταση 3.2.19).

5.4.2 Πρόταση. (i) *Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$), τότε*

$$|\text{rank}(\mathbf{A}) - \text{rank}(\mathbf{B})| \leq \text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B}).$$

(ii) *Εάν $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ και $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times p}(K)$ ($m, n, p \in \mathbb{N}$), τότε*

$$\text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B}) - n \leq \text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min\{\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{B})\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Επειδή $f_{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = f_{\mathbf{A}} + f_{\mathbf{B}}$ (βλ. 5.2.3 (ii)), αρκεί να εφαρμοσθεί η πρόταση 3.2.29 για τους ομομορφισμούς $f_{\mathbf{A}}$ και $f_{\mathbf{B}}$.

(ii) Επειδή $f_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}}$ (βλ. λήμμα 5.2.4), τούτο έπεται από τα (v) και (vi) τής προτάσεως 3.2.30 (εφαρμοζόμενα για τους ομομορφισμούς $f_{\mathbf{A}}$ και $f_{\mathbf{B}}$). \square

5.4.3 Πρόταση. *Για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν $\mathbf{Q} \in \text{GL}_n(K)$, τότε $\text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}) = \text{rank}(\mathbf{A})$.*

(ii) *Εάν $\mathbf{P} \in \text{GL}_m(K)$, τότε $\text{rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A})$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Εάν $\mathbf{Q} \in \text{GL}_n(K)$, τότε ο ενδομορφισμός $f_{\mathbf{Q}}$ τού K^n είναι αυτομορφισμός τού K^n (βλ. πρόταση¹⁶ 5.2.23), οπότε $f_{\mathbf{Q}}(K^n) = K^n$. Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}) &= \dim_K(\text{Im}(f_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}})) \\ &= \dim_K(\text{Im}(f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{Q}})) && \text{(βλ. λήμμα 5.2.4)} \\ &= \dim_K(f_{\mathbf{A}}(f_{\mathbf{Q}}(K^n))) = \dim_K(f_{\mathbf{A}}(K^n)) \\ &= \dim_K(\text{Im}(f_{\mathbf{A}})) = \text{rank}(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

(ii) Εάν $\mathbf{P} \in \text{GL}_m(K)$, τότε ο ενδομορφισμός $f_{\mathbf{P}}$ τού K^m είναι αυτομορφισμός τού K^m (βλ. πρόταση 5.2.23), οπότε

$$f_{\mathbf{A}}(K^n) = \text{Im}(f_{\mathbf{A}}) \cong f_{\mathbf{P}}(\text{Im}(f_{\mathbf{A}})) = f_{\mathbf{P}}(f_{\mathbf{A}}(K^n)).$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) &= \dim_K(\text{Im}(f_{\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}})) \\ &= \dim_K(\text{Im}(f_{\mathbf{P}} \circ f_{\mathbf{A}})) && \text{(βλ. λήμμα 5.2.4)} \\ &= \dim_K(f_{\mathbf{P}}(f_{\mathbf{A}}(K^n))) = \dim_K(f_{\mathbf{A}}(K^n)) && \text{(βλ. θεώρημα 3.2.12)} \\ &= \dim_K(\text{Im}(f_{\mathbf{A}})) = \text{rank}(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Άρα και η δεύτερη ισότητα είναι αληθής. \square

¹⁶Εν προκειμένω, $V = K^n$ και $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{Q}}) = \mathbf{Q}$, όπου $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1^{[n]}, \dots, \mathbf{e}_n^{[n]})$.

5.4.4 Θεώρημα. *Εάν οι V, W είναι K -διανυσματικοί χώροι έχοντες διαστάσεις*

$$\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}, \quad \dim_K(W) = m \in \mathbb{N},$$

και $f \in \text{Hom}_K(V, W)$, τότε υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n), \quad \mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$$

των V και W , αντιστοίχως, τέτοιες ώστε ο πίνακας παραστάσεως τού f ως προς αυτές να είναι ο (σε τέσσερα τεμάχια χωριζόμενος) πίνακας

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right), \quad (5.33)$$

όπου $r := \text{rank}(f)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω U ένα συμπλήρωμα τού πυρήνα $\text{Ker}(f)$ τού f εντός τού V . Σύμφωνα με το (ii) τού λήμματος 3.2.10 ο επιμορφισμός

$$\check{f}|_U : U \longrightarrow \text{Im}(f), \quad \mathbf{u} \longmapsto f(\mathbf{u}),$$

ο επαγόμενος από τον $f|_U$ είναι ισομορφισμός. Επιλέγουμε μια διατεταγμένη βάση $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$ τού K -διανυσματικού χώρου $\text{Im}(f)$. Τότε η

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r), \quad \text{όπου } \mathbf{v}_i := (\check{f}|_U)^{-1}(\mathbf{w}_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, r\},$$

είναι μια διατεταγμένη βάση τού U . Εν συνεχεία, επιλέγουμε μια διατεταγμένη βάση $(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ τού $\text{Ker}(f)$. Επειδή $V = \text{Ker}(f) \oplus U \cong U \oplus \text{Ker}(f)$, η $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ αποτελεί μια διατεταγμένη βάση τού V . Επεκτείνοντας (δυνάμει τού πορίσματος 2.3.5) την $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$ αποκτούμε μια διατεταγμένη βάση $\mathcal{C} := (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r, \mathbf{w}_{r+1}, \dots, \mathbf{w}_m)$ τού W και παρατηρούμε ότι

$$f(\mathbf{v}_j) = \begin{cases} \mathbf{w}_j, & \forall j \in \{1, \dots, r\}, \\ \mathbf{0}_W, & \forall j \in \{r+1, \dots, n\}, \end{cases}$$

ήτοι ότι

$$(\iota_{\mathcal{C}} \circ f \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \iota_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{v}_1)) \\ \vdots \\ \iota_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{v}_n)) \end{pmatrix}$$

για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ με

$$\iota_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{v}_j)) = \begin{cases} (\underbrace{0_K, \dots, 0_K}_{j-1 \text{ φορές}}, 1_K, \underbrace{0_K, \dots, 0_K}_{m-j \text{ φορές}}) & \forall j \in \{1, \dots, r\}, \\ \mathbf{0}_{K^m}, & \forall j \in \{r+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Ως εκ τούτου, ο πίνακας $M_C^B(f)$ δίδεται από την (5.33) (βλ. (5.21)). \square

5.4.5 Πρόσμομα. Για κάθε μη μηδενικό πίνακα $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) υπάρχουν $P \in \text{GL}_m(K)$ και $Q \in \text{GL}_n(K)$, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$P \cdot A \cdot Q = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right),$$

όπου $r := \text{rank}(A)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 5.4.4 στην ειδική περίπτωση όπου

$$V = K^n, \quad W = K^m \quad \text{και} \quad f = f_A.$$

Μέσω αυτού εξασφαλίζεται η ύπαρξη διατεταγμένων βάσεων B, C των K^n και K^m , αντιστοίχως, ούτως ώστε να ισχύει η ισότητα (5.33) (για τον $f = f_A$ με βαθμίδα $r = \text{rank}(A)$). Επειδή $A = M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(f_A)$, όπου $\mathcal{E} := (e_1^{[n]}, \dots, e_n^{[n]})$ και $\mathcal{E}' := (e_1^{[m]}, \dots, e_m^{[m]})$, το θεώρημα 5.2.33 δίδει

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right) = M_C^B(f_A) = T_C^{\mathcal{E}'} \cdot A \cdot T_{\mathcal{E}}^B.$$

Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $P := T_C^{\mathcal{E}'}$ και $Q := T_{\mathcal{E}}^B$. \square

5.4.6 Ορισμός. Έστω $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Ως **βαθμίδα γραμμών** τού A ορίζεται η διάσταση

$$\Gamma\text{-rank}(A) := \dim_K(\Delta X \Gamma(A))$$

τού διανυσματικού χώρου γραμμών τού A . Κατ' αναλογία, ως **βαθμίδα στηλών** τού A ορίζεται η διάσταση

$$\Sigma\text{-rank}(A) := \dim_K(\Delta X \Sigma(A))$$

τού διανυσματικού χώρου στηλών τού A (βλ. 5.3.1).

5.4.7 Σημείωση. Επειδή ο K -διανυσματικός χώρος $\Delta X \Gamma(A)$ (και αντιστοίχως, ο $\Delta X \Sigma(A)$) είναι εξ ορισμού ο γραμμικός υπόχωρος τού $\text{Mat}_{1 \times n}(K)$ (και αντιστοίχως, τού $\text{Mat}_{m \times 1}(K)$) ο παραγόμενος από τις γραμμές (και αντιστοίχως, τις στήλες) τού A , η $\Gamma\text{-rank}(A)$ (και αντιστοίχως, η $\Sigma\text{-rank}(A)$) ισούται με το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξαρτήτων γραμμών (και αντιστοίχως, στηλών) τού A . (Πρβλ. 2.3.3 (iii).)

5.4.8 Πρόταση. Έστω τυχόν πίνακας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Εάν ο \mathbf{A}' είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει ύστερα από την εκτέλεση διαδοχικών στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών τού \mathbf{A} , τότε

$$\Gamma\text{-rank}(\mathbf{A}) = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{A}').$$

(ii) Εάν ο \mathbf{A}' είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει ύστερα από την εκτέλεση διαδοχικών στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών τού \mathbf{A} , τότε

$$\Sigma\text{-rank}(\mathbf{A}) = \Sigma\text{-rank}(\mathbf{A}').$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται από τις προτάσεις 5.3.3 και 5.3.9. □

5.4.9 Λήμμα. Για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) ισχύει η ισότητα

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \Sigma\text{-rank}(\mathbf{A}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το λήμμα 3.2.1,

$$\begin{aligned} \text{Im}(f_{\mathbf{A}}) &= f_{\mathbf{A}}(K^n) = f_{\mathbf{A}}(\text{Lin}(\{\mathbf{e}_1^{[n]}, \dots, \mathbf{e}_n^{[n]}\})) \\ &= \text{Lin}(\{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_1^{[n]}), \dots, f_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_n^{[n]})\}) = \text{Lin}(\{\Sigma\tau_1(\mathbf{A})^\top, \dots, \Sigma\tau_n(\mathbf{A})^\top\}). \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ισομορφισμό

$$(\text{Mat}_{1 \times m}(K) =) K^m \ni (x_1, \dots, x_m) = \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times 1}(K),$$

συνάγουμε (μέσω τού θεωρήματος 3.2.12) ότι

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{A}) &= \dim_K(\text{Lin}(\{\Sigma\tau_1(\mathbf{A})^\top, \dots, \Sigma\tau_n(\mathbf{A})^\top\})) \\ &= \dim_K(\text{Lin}(\{\Sigma\tau_1(\mathbf{A}), \dots, \Sigma\tau_n(\mathbf{A})\})) \\ &= \dim_K(\Delta X \Sigma(\mathbf{A})) = \Sigma\text{-rank}(\mathbf{A}), \end{aligned}$$

οπότε η βαθμίδα τού \mathbf{A} ισούται με τη βαθμίδα στηλών τού \mathbf{A} . □

5.4.10 Λήμμα. Για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) ισχύουν οι ισότητες

$$\Gamma\text{-rank}(\mathbf{A}) = \Sigma\text{-rank}(\mathbf{A}^\top) \quad \text{και} \quad \Sigma\text{-rank}(\mathbf{A}) = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{A}^\top).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από τον ορισμό τού αναστρέφου (βλ. (5.8)). □

Από το θεώρημα 5.4.11 που ακολουθεί εξάγεται μια ολόκληρη σειρά χρήσιμων πορισμάτων.

5.4.11 Θεώρημα. Για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) ισχύουν οι ισότητες

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{A}) = \Sigma\text{-rank}(\mathbf{A}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν ο \mathbf{A} είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε αυτές οι ισότητες είναι προφανείς. Ας υποθέσουμε, από εδώ και στο εξής, ότι ο \mathbf{A} είναι μη μηδενικός πίνακας και ότι $r := \text{rank}(\mathbf{A}) \geq 1$. Λόγω του λήμματος 5.4.9 αρκεί να αποδειχθεί η ισότητα $\Gamma\text{-rank}(\mathbf{A}) = r$. Κατά το πόρισμα 5.4.5 υπάρχουν $\mathbf{P} \in \text{GL}_m(K)$, $\mathbf{Q} \in \text{GL}_n(K)$, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right).$$

Προφανώς¹⁷, $\Gamma\text{-rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}) = r$. Επιπροσθέτως,

$$\mathbf{P}^\top \in \text{GL}_m(K) \text{ και } \mathbf{Q}^\top \in \text{GL}_n(K)$$

(βλ. πρόταση 5.1.26). Επειδή

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-rank}(\mathbf{A}) &= \Sigma\text{-rank}(\mathbf{A}^\top) && (\text{βλ. λήμμα 5.4.10}) \\ &= \text{rank}(\mathbf{A}^\top) && (\text{βλ. λήμμα 5.4.9}) \\ &= \text{rank}(\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{A}^\top) = \text{rank}((\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{A}^\top) \cdot \mathbf{P}^\top) && (\text{βλ. πρόταση 5.4.3}) \\ &= \text{rank}(\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{P}^\top) = \Sigma\text{-rank}(\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{P}^\top) && (\text{βλ. λήμμα 5.4.9}) \\ &= \Sigma\text{-rank}((\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q})^\top) && (\text{βλ. πρόταση 5.1.25}) \\ &= \Gamma\text{-rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}) && (\text{βλ. λήμμα 5.4.10}) \end{aligned}$$

λαμβάνουμε τελικώς $\Gamma\text{-rank}(\mathbf{A}) = r$. □

5.4.12 Πόρισμα. Για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) ισχύει η ισότητα

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}^\top).$$

ΠΡΩΤΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το λήμμα 5.4.10 και το θεώρημα 5.4.11 έπεται ότι

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{A}) = \Sigma\text{-rank}(\mathbf{A}^\top) = \text{rank}(\mathbf{A}^\top).$$

ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (Ανεξάρτητη τού θεωρήματος 5.4.11.) Ως προς τις συνήθεις διατεταγμένες βάσεις

$$\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1^{[n]}, \dots, \mathbf{e}_n^{[n]}) \text{ και } \mathcal{E}' = (\mathbf{e}_1^{[m]}, \dots, \mathbf{e}_m^{[m]})$$

¹⁷Οι πρώτες r γραμμές τού $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ είναι (εξ ορισμού) γραμμικώς ανεξάρτητες. Επειδή οι υπόλοιπες γραμμές είναι μηδενικές, το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξαρτήτων γραμμών τού $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ ισούται με r . (Βλ. πόρισμα 2.1.7.)

των K^n και K^m , αντιστοίχως, έχουμε

$$\mathbf{M}_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}, \quad \mathbf{M}_{\mathcal{E}^*}^{(\mathcal{E}')^*}(f_{\mathbf{A}}^{\top}) = \mathbf{M}_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{A}})^{\top} = \mathbf{A}^{\top}$$

(βλ. θεώρημα 5.2.20), οπότε

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{M}_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{A}})) &= \text{rank}(\mathbf{A}) := \text{rank}(f_{\mathbf{A}}) = \text{rank}(f_{\mathbf{A}}^{\top}) \\ &= \text{rank}(\mathbf{M}_{\mathcal{E}^*}^{(\mathcal{E}')^*}(f_{\mathbf{A}}^{\top})) = \text{rank}(\mathbf{M}_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{A}})^{\top}) = \text{rank}(\mathbf{A}^{\top}), \end{aligned}$$

όπου η ισότητα $\text{rank}(f_{\mathbf{A}}) = \text{rank}(f_{\mathbf{A}}^{\top})$ ισχύει δυνάμει τού θεωρήματος 4.3.3. \square

5.4.13 Πρόρισμα. Έστω τυχόν πίνακας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Εάν ο \mathbf{A}' είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει ύστερα από την εκτέλεση διαδοχικών στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών ή/και στηλών τού \mathbf{A} , τότε

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}').$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από την πρόταση 5.4.8 και το θεώρημα 5.4.11. \square

5.4.14 Πρόρισμα. Εάν ο $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) είναι ένας μη μηδενικός κλιμακωτός πίνακας, τότε η βαθμίδα τού \mathbf{B} ισούται με το πλήθος των καθοδηγητικών του εγγραφών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω r ο πλήθος των καθοδηγητικών εγγραφών τού \mathbf{B} . Σύμφωνα με το λήμμα 5.3.18 υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_l \in \text{GL}_n(K)$ ($l \in \mathbb{N}$), τέτοιοι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right),$$

όπου $\mathbf{Q} := \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_l \in \text{GL}_n(K)$. Από το θεώρημα 5.4.11 και το (i) τής προτάσεως 5.4.3 λαμβάνουμε

$$r = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}) = \text{rank}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}) = \text{rank}(\mathbf{B}),$$

οπότε $\text{rank}(\mathbf{B}) = r$. \square

Το πρόρισμα 5.4.15 ισχυροποιεί το πρόρισμα 5.4.5.

5.4.15 Πρόρισμα. Για κάθε μη μηδενικό πίνακα $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) υπάρχουν $\mathbf{P} \in \text{GL}_m(K)$ και $\mathbf{Q} \in \text{GL}_n(K)$, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right), \quad (5.34)$$

όπου $r := \text{rank}(\mathbf{A})$ και καθένας εκ των \mathbf{P} και \mathbf{Q} είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το θεώρημα 5.3.19, τα ανωτέρω ισχύουν όταν το r συμβολίζει το πλήθος των καθοδηγητικών του εγγραφών του $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$. Επειδή αυτό το πλήθος ισούται με $\text{rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A})$ (βλ. το πόρισμα 5.4.14 και το (ii) τής προτάσεως 5.4.3), ο ισχυρισμός είναι αληθής. \square

5.4.16 Σημείωση. (i) Η διαδικασία προσδιορισμού των ανωτέρω $\mathbf{P} \in \text{GL}_m(K)$ και $\mathbf{Q} \in \text{GL}_n(K)$ έχει ήδη περιγραφεί στο εδάφιο 5.3.20. Είναι αξιοπρόσεκτο το ότι η βαθμίδα του πίνακα \mathbf{A} υπολογίζεται *αυτομάτως* μέσω τής ισότητας (5.34) τού πορίσματος 5.4.15.

(ii) Μέσω των πορισμάτων 5.4.13 και 5.4.14, και τού θεωρήματος 5.4.11 οδηγούμεθα στη συμπλήρωση τής αποδείξεως τού δευτέρου μέρους τού (ii) τού θεωρήματος 5.3.6 (που αφορά στη μοναδικότητα τού $\mathbf{A}^{\text{αν.κλ.}}$ για κάθε $(m \times n)$ -πίνακα \mathbf{A}).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ (ii) ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 5.3.6. Έστω τυχών μη μηδενικός πίνακας $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) βαθμίδας r . Υποθέτουμε ότι αυτός είναι γραμμοϊσοδύναμος με δυο *ανηγμένους* κλιμακωτούς πίνακες $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ και $\mathbf{B}' = (b'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Σύμφωνα με τα πορίσματα 5.4.13 και 5.4.14, και το θεώρημα 5.4.11,

$$r = \text{rank}(\mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{B}') = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{B}) = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{B}'),$$

με το πλήθος των καθοδηγητικών εγγραφών *αμφοτέρων* των \mathbf{B} και \mathbf{B}' να ισούται με r . Έστω ότι οι

$$b_{1j_1} = \dots = b_{rj_r} = 1_K \text{ και } b'_{1j'_1} = \dots = b'_{rj'_r} = 1_K,$$

είναι οι καθοδηγητικές εγγραφές των \mathbf{B} και \mathbf{B}' , αντιστοίχως. Θα αποδείξουμε επαγωγικώς ότι οι γραμμές των πινάκων \mathbf{B} και \mathbf{B}' συμπίπτουν (οπότε $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$).

• *Ισχυρισμός:* Για κάθε $i \in \mathbb{N}_0$ έχουμε είτε $i \geq r$ είτε $\Gamma_{\mathbf{Q}_{r-i}}(\mathbf{B}) = \Gamma_{\mathbf{Q}_{r-i}}(\mathbf{B}')$ (οπότε $j_{r-i} = j'_{r-i}$).

Αρχή επαγωγής για $i = 0$. Δίχως βλάβη τής γενικότητας υποθέτουμε ότι $j_r \geq j'_r$. Επειδή $r \geq 1$ και

$$\Gamma_{\mathbf{Q}_r}(\mathbf{B}) \in \Delta\text{X}\Gamma(\mathbf{B}) = \Delta\text{X}\Gamma(\mathbf{A}) = \Delta\text{X}\Gamma(\mathbf{B}')$$

(βλ. πρόταση 5.3.3) με

$$\Delta\text{X}\Gamma(\mathbf{B}') = \text{Lin}(\{\Gamma_{\mathbf{Q}_1}(\mathbf{B}'), \dots, \Gamma_{\mathbf{Q}_r}(\mathbf{B}')\}),$$

υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\Gamma_{\mathbf{Q}_r}(\mathbf{B}) = \lambda_1 \Gamma_{\mathbf{Q}_1}(\mathbf{B}') + \dots + \lambda_r \Gamma_{\mathbf{Q}_r}(\mathbf{B}').$$

Ιδιαίτερος, για $i = 1, \dots, r-1$ έχουμε

$$0_K = b_{rj'_i} = \lambda_i \text{ και } b_{rj'_r} = \lambda_r$$

λόγω των συνθηκών (v) και (vi) τού ορισμού 5.3.4 για τον \mathbf{B}' και τής συνθήκης (ii) τού ορισμού 5.3.4 για τον \mathbf{B} . Κατά συνέπεια,

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_{\mathcal{Q}_r}(\mathbf{B}) = \lambda_r \Gamma_{\mathcal{Q}_r}(\mathbf{B}') \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_r}(\mathbf{B}) \neq \mathbf{0}_{\text{Mat}_{1 \times n}(K)} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_r \neq 0_K \xrightarrow{5.3.4(ii)} j'_r = j_r,$$

οπότε (λόγω τής 5.3.4 (v)) $1_K = b_{rj_r} = \lambda_r \Rightarrow \Gamma_{\mathcal{Q}_r}(\mathbf{B}) = \Gamma_{\mathcal{Q}_r}(\mathbf{B}')$.

Επαγωγικό βήμα για $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για τους $0, \dots, i-1$ και (δίχως βλάβη τής γενικότητας) ότι $j_{r-i} \geq j'_{r-i}$. Σύμφωνα με την επαγωγική μας υπόθεση έχουμε

$$\Gamma_{\mathcal{Q}_{r-i}}(\mathbf{B}) \in \Delta\text{X}\Gamma(\mathbf{B}) = \Delta\text{X}\Gamma(\mathbf{A}) = \Delta\text{X}\Gamma(\mathbf{B}')$$

με

$$\Delta\text{X}\Gamma(\mathbf{B}') = \text{Lin}(\{\Gamma_{\mathcal{Q}_1}(\mathbf{B}'), \dots, \Gamma_{\mathcal{Q}_{r-i}}(\mathbf{B}'), \Gamma_{\mathcal{Q}_{r-i+1}}(\mathbf{B}), \dots, \Gamma_{\mathcal{Q}_r}(\mathbf{B})\}),$$

οπότε υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\Gamma_{\mathcal{Q}_{r-i}}(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{r-i} \lambda_k \Gamma_{\mathcal{Q}_k}(\mathbf{B}') + \sum_{k=r-i+1}^r \lambda_k \Gamma_{\mathcal{Q}_k}(\mathbf{B}). \quad (5.35)$$

Για $k = r-i+1, \dots, r$ έχουμε

$$0_K = b_{r-ij_k} = \lambda_k \quad (5.36)$$

λόγω τής συνθήκης (vi) τού ορισμού 5.3.4 για τον \mathbf{B} και τού ότι $r-i < k$. Από την άλλη μεριά, για $k = 1, \dots, r-i-1$ έχουμε

$$0_K = b_{r-ij'_k} = \lambda_k \quad (5.37)$$

λόγω τής συνθήκης (ii) τού ορισμού 5.3.4 για τον \mathbf{B} , τής συνθήκης (vi) τού ορισμού 5.3.4 για τον \mathbf{B}' και τού ότι $j'_k < j'_{r-1} \leq j_{r-i}$. Από τις σχέσεις (5.35), (5.36) και (5.37) λαμβάνουμε

$$\Gamma_{\mathcal{Q}_{r-i}}(\mathbf{B}) = \lambda_{r-i} \Gamma_{\mathcal{Q}_{r-i}}(\mathbf{B}'). \quad (5.38)$$

Εάν ίσχυε $j_{r-i} > j'_{r-i}$, τότε θα είχαμε (εκ νέου λόγω τής 5.3.4 (ii))

$$0_K = b_{r-ij'_{r-i}} = \lambda_{r-i},$$

ήτοι κάτι που θα αντέκειτο προς την (5.38), διότι $\Gamma_{\mathcal{Q}_{r-i}}(\mathbf{B}) \neq \mathbf{0}_{\text{Mat}_{1 \times n}(K)}$. Επομένως,

$$j_{r-i} = j'_{r-i} \xrightarrow[5.3.4(v)]{\implies} \lambda_{r-i} = b_{r-i j_{r-i}} = 1_K \xrightarrow[(5.38)]{\implies} \Gamma_{\mathcal{Q}_{r-i}}(\mathbf{B}) = \Gamma_{\mathcal{Q}_{r-i}}(\mathbf{B}').$$

Ως εκ τούτου, ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής και $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$. □

5.4.17 Πρόρισμα. Έστω $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ($n \in \mathbb{N}$). Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- (i) Οι γραμμές τού \mathbf{A} συγκροτούν μια βάση τού $\text{Mat}_{1 \times n}(K)$.
- (ii) Οι γραμμές τού \mathbf{A} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- (iii) Οι στήλες τού \mathbf{A} συγκροτούν μια βάση τού $\text{Mat}_{n \times 1}(K)$.
- (iv) Οι στήλες τού \mathbf{A} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- (v) $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$.
- (vi) Ο \mathbf{A} ισούται με το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων.
- (vii) $\mathbf{A} \in \text{GL}_n(K)$.
- (viii) Είτε $\exists \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ είτε $\exists \mathbf{C} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή ο \mathbf{A} έχει n γραμμές και n στήλες, οι ισοδυναμίες συνθηκών (i) \Leftrightarrow (ii), (iii) \Leftrightarrow (iv) και (i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (v) είναι προφανείς λόγω της προτάσεως 2.4.4 και τού θεωρήματος 5.4.11, αντιστοίχως. Οι ισοδυναμίες των λοιπών συνθηκών αποδεικνύονται ως ακολούθως:

(v) \Rightarrow (vi) Εάν $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$, τότε κατά το πρόρισμα 5.4.15 υπάρχουν $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \text{GL}_n(K)$, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n \implies \mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{-1},$$

όπου οι \mathbf{P}, \mathbf{Q} (και, κατ' επέκτασιν, και οι $\mathbf{P}^{-1}, \mathbf{Q}^{-1}$ λόγω της προτάσεως 5.3.14) είναι γινόμενα πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων.

(vi) \Rightarrow (vii) Σύμφωνα με την πρόταση 5.3.14 οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Εάν λοιπόν ο \mathbf{A} ισούται με το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων, τότε είναι και ο ίδιος αντιστρέψιμος (βλ. λήμμα 5.1.21).

(vii) \Rightarrow (viii) Τούτο είναι (εξ ορισμού) προφανές.

(viii) \Rightarrow (v) Εάν $\exists \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$, τότε η (5.32) και το (ii) της προτάσεως 5.4.2 δίδουν

$$n = \text{rank}(\mathbf{I}_n) = \text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) \leq n.$$

Κατ' αναλογίαν, εάν $\exists \mathbf{C} \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, τότε

$$n = \text{rank}(\mathbf{I}_n) = \text{rank}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) \leq n.$$

Σε αμφότερες τις περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$. □

5.4.18 Πρόρισμα. Έστω $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ($n \in \mathbb{N}$). Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- (i) $\mathbf{A} \in \text{GL}_n(K)$.
- (ii) $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$.
- (iii) $\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda\lambda.} = \mathbf{I}_n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η ισοδυναμία των συνθηκών (i) και (ii) έχει ήδη αποδειχθεί στο πρόρισμα 5.4.17. Επειδή (σύμφωνα με το θεώρημα 5.3.6, το θεώρημα 5.4.11 και τα πορίσματα 5.4.13 και 5.4.14)

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{A}) = n &\iff \text{rank}(\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda\lambda.}) = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda\lambda.}) = n \\ &\iff \text{card}(\{\text{καθοδηγητικές εγγραφές του } \mathbf{A}^{\text{av.}\lambda\lambda.}\}) = n, \end{aligned}$$

η συνθήκη (ii) πληρούται εάν και μόνον εάν (όλες) οι γραμμές του $\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda\lambda.}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Εν τοιαύτη περιπτώσει, ο $\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda\lambda.}$ δεν διαθέτει καμία μηδενική γραμμή και, επειδή το πλήθος των καθοδηγητικών του εγγραφών ισούται με n και κάθε καθοδηγητική του εγγραφή ισούται με 1_K (βλ. 5.3.4 (v)), ο $\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda\lambda.}$ είναι άνω τριγωνικός και κάθε εγγραφή του ευρισκομένη στην (κύρια) διαγώνιο του ισούται με 1_K . Επιπροσθέτως, επειδή οι εγγραφές του $\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda\lambda.}$ που ανήκουν στην ίδια στήλη με κάποια καθοδηγητική εγγραφή και βρίσκονται επάνω από αυτήν, οφείλουν να είναι ίσες με το 0_K (βλ. 5.3.4 (vi)), έχουμε κατ' ανάγκην

$$\mathbf{A}^{\text{av.}\lambda\lambda.} = \text{diag}(1_K, 1_K, \dots, 1_K, 1_K) = \mathbf{I}_n.$$

Εξ αυτού έπεται και η ισοδυναμία των συνθηκών (ii) και (iii). □

5.4.19 Σημείωση. (Προσδιορισμός αντιστρόφου πίνακα) Έστω τυχών πίνακας $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{GL}_n(K)$. Επειδή (κατά το λήμμα 5.3.17 και το πρόρισμα 5.4.18) υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k \in \text{GL}_n(K)$, εκφράζοντες κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς *γραμμών*, τέτοιιο ώστε να ισχύει

$$\mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\text{av.}\lambda\lambda.} = \mathbf{I}_n \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_1,$$

ο αντίστροφος πίνακας \mathbf{A}^{-1} του \mathbf{A} προσδιορίζεται (πρακτικώς) κατόπιν θεωρήσεως του *επαυξημένου πίνακα*

$$(\mathbf{A} | \mathbf{I}_n) := \left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1_K & 0_K & \cdots & \cdots & 0_K \\ & & & 0_K & 1_K & 0_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0_K & \cdots & 0_K & 1_K & 0_K \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0_K & \cdots & \cdots & 0_K & 1_K \end{array} \right) \in \text{Mat}_{n \times 2n}(K).$$

Αυτός, πολλαπλασιαζόμενος εξ αριστερών με τον $\mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_1$, δίδει

$$\mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_1 \cdot (\mathbf{A} | \mathbf{I}_n) = (\mathbf{I}_n | \mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_1) = (\mathbf{I}_n | \mathbf{A}^{-1}).$$

5.4.20 Παράδειγμα. Ακολουθώντας την ανωτέρω περιγραφείσα διαδικασία για τον πίνακα

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$$

λαμβάνουμε

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_3 \mapsto \Gamma_{\Theta_3} + (-1)\Gamma_{\Theta_1}} \rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_3 \mapsto \Gamma_{\Theta_3} + \Gamma_{\Theta_2}} \rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_1 \mapsto \Gamma_{\Theta_1} + (-1)\Gamma_{\Theta_3}} \rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_2 \mapsto \Gamma_{\Theta_2} + (-1)\Gamma_{\Theta_3}} \rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_1 \mapsto \Gamma_{\Theta_1} + (-1)\Gamma_{\Theta_2}} \rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

οπότε

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.4.21 Παράδειγμα. Ακολουθώντας την ανωτέρω περιγραφείσα διαδικασία για τον πίνακα

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$$

λαμβάνουμε

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_2} \mapsto \Gamma_{\Theta_2} + (-3)\Gamma_{\Theta_1}} \\ \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_1} \mapsto \Gamma_{\Theta_1} + (-2)\Gamma_{\Theta_2}} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

οπότε

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Σημειωτέον ότι (λόγω τού λήμματος 5.4.10, τού θεωρήματος 5.4.11 και των πορισμάτων του 5.4.12 και 5.4.13) δικαιούμεθα να χρησιμοποιούμε (σε αυτήν τη διαδικασία) στοιχειώδεις μετασχηματισμούς *στηλών* αντί των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών:

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\Sigma_{\tau_2} \mapsto \Sigma_{\tau_2} + (-2)\Sigma_{\tau_1}} \\ \xrightarrow{\Sigma_{\tau_1} \mapsto \Sigma_{\tau_1} + (-3)\Sigma_{\tau_2}} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

Ωστόσο, πρέπει, εκ παραλλήλου, να επισημανθεί ότι *δεν επιτρέπεται ανάμειξη* στοιχειωδών μετασχηματισμών *γραμμών και στηλών*! Επί παραδείγματι, για τον ανωτέρω (2×2) -πίνακα \mathbf{A} , η εκτέλεση ενός μετασχηματισμού γραμμών και ενός μετασχηματισμού στηλών δίδει

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\Gamma_{\Theta_2} \mapsto \Gamma_{\Theta_2} + (-3)\Gamma_{\Theta_1}} \\ \xrightarrow{\Sigma_{\tau_2} \mapsto \Sigma_{\tau_2} + (-2)\Sigma_{\tau_1}} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array} \right)$$

με

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}.$$

5.4.22 Πρόσιμα. Έστω $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K) \setminus \{\mathbf{0}_{m \times n}\}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) και έστω r φυσικός αριθμός με $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$. Τότε $\text{rank}(\mathbf{A}) = r \iff$ υπάρχει τουλάχιστον ένας αντιστρέψιμος $(r \times r)$ -υποπίνακας τού \mathbf{A} και (ταυτοχρόνως) οι $(k \times k)$ -υποπίνακες τού \mathbf{A} για όλους τους $k \in \{r + 1, \dots, \min\{m, n\}\}$ είναι μη αντιστρέψιμοι.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. “ \Rightarrow ” Εάν $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$, επιλέγουμε r γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές $\Gamma_{\mathcal{Q}_{i_1}}(\mathbf{A}), \dots, \Gamma_{\mathcal{Q}_{i_r}}(\mathbf{A})$ τού \mathbf{A} , όπου $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m$, και θεωρούμε τον υποπίνακα

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathcal{Q}_{i_1}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_{i_r}}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{r \times n}(K)$$

τού \mathbf{A} . Σύμφωνα με το θεώρημα 5.4.11 (για τον \mathbf{B}),

$$\text{rank}(\mathbf{B}) = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{B}) = \Sigma\text{-rank}(\mathbf{B}) = r,$$

οπότε έχουμε τη δυνατότητα επιλογής r γραμμικώς ανεξαρτήτων στηλών $\Sigma_{\tau_{j_1}}(\mathbf{B}), \dots, \Sigma_{\tau_{j_r}}(\mathbf{B})$ τού \mathbf{B} , όπου $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$. Ο υποπίνακας

$$\mathbf{C} := (\Sigma_{\tau_{j_1}}(\mathbf{B}) \cdots \Sigma_{\tau_{j_r}}(\mathbf{B})) \in \text{Mat}_{r \times r}(K)$$

τού \mathbf{B} (και, ως εκ τούτου, και τού \mathbf{A}) έχει βαθμίδα $\text{rank}(\mathbf{C}) = r$. (Αρκεί η εφαρμογή της συνεπαγωγής (iv) \Rightarrow (v) τού πορίσματος 5.4.17 για τον πίνακα \mathbf{C} .) Άρα ο \mathbf{C} είναι αντιστρέψιμος (κατόπιν εφαρμογής τού 5.4.17 (v) \Rightarrow (vii) για τον \mathbf{C}). Εξάλλου, οι k γραμμές οιοδήποτε $(k \times k)$ -υποπίνακα τού \mathbf{A} με $k \in \{r + 1, \dots, \min\{m, n\}\}$ είναι κατ' ανάγκην γραμμικώς εξαρτημένες (διότι $k > r = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{A})$). Επομένως, αυτός οφείλει να είναι μη αντιστρέψιμος (βλ. 5.4.17 (vii) \Leftrightarrow (ii)).

“ \Leftarrow ” Υποθέτουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αντιστρέψιμος $(r \times r)$ -υποπίνακας $\tilde{\mathbf{A}}$ τού \mathbf{A} και ότι οι $(k \times k)$ -υποπίνακες τού \mathbf{A} για όλους τους φυσικούς αριθμούς $k \in \{r + 1, \dots, \min\{m, n\}\}$ είναι μη αντιστρέψιμοι. Εάν $r = \min\{m, n\}$, τότε (προφανώς) $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$. Εάν $r \leq \min\{m, n\} - 1$, επιλέγουμε k γραμμές τού \mathbf{A}

$$\Gamma_{\mathcal{Q}_{i_1}}(\mathbf{A}), \dots, \Gamma_{\mathcal{Q}_{i_k}}(\mathbf{A}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m,$$

όπου $k \in \{r + 1, \dots, \min\{m, n\}\}$. Θα δείξουμε ότι αυτές είναι γραμμικώς εξαρτημένες κάνοντας χρήση «εις άτοπον απαγωγής». Προς τούτο υποθέτουμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Τότε ο

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathcal{Q}_{i_1}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_{i_k}}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{k \times n}(K)$$

έχει βαθμίδα $\text{rank}(\mathbf{D}) = \Gamma\text{-rank}(\mathbf{D}) = k > r$, οπότε είναι αντιστρέψιμος (κατόπιν εφαρμογής τού 5.4.17 (v) \Rightarrow (vii) γι' αυτόν). Άτοπο! Κατά συνέπεια, οιοσδήποτε k γραμμές τού \mathbf{A} (για $k \in \{r+1, \dots, \min\{m, n\}\}$) είναι γραμμικώς εξαρτημένες. Εξ αυτού έπεται ότι $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq r$. Από την άλλη μεριά, εάν υποθέσουμε ότι οι γραμμές

$$\Gamma_{Q_{l_1}}(\mathbf{A}), \dots, \Gamma_{Q_{l_r}}(\mathbf{A}), \quad 1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq m,$$

τού πίνακα \mathbf{A} είναι οι r γραμμές τού $\tilde{\mathbf{A}}$, τότε αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (βλ. 5.4.17 (vii) \Leftrightarrow (ii)). Επειδή

$$\{\Gamma_{Q_{l_1}}(\mathbf{A}), \dots, \Gamma_{Q_{l_r}}(\mathbf{A})\} \subseteq \{\Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}), \dots, \Gamma_{Q_m}(\mathbf{A})\},$$

έχουμε $r \leq \text{rank}(\mathbf{A})$. Άρα τελικώς $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$. □

5.5 ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Επί τού $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ (και αντιστοίχως, επί τού $\text{Mat}_{n \times n}(K)$) ορίζεται κατά τρόπο φυσικό¹⁸ η σχέση ισοδυναμίας (5.39) (και αντιστοίχως, η σχέση ισοδυναμίας (5.40)). Ευλόγως τίθεται το ερώτημα τού κατά πόσον κάθε κλάση ισοδυναμίας ως προς αυτήν διαθέτει ως εκπρόσωπό της κάποιον πίνακα «αρκούντως απλής μορφής».

5.5.1 Ορισμός. Λέμε ότι δυο πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ (όπου K σώμα και $m, n \in \mathbb{N}$) είναι **ισοδύναμοι** όταν

$$\exists \mathbf{P} \in \text{GL}_m(K) \text{ και } \mathbf{Q} \in \text{GL}_n(K) : \mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}.$$

Επί τού $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ ορίζεται η διμελής σχέση

$$\mathbf{A} \sim_{\text{ισ.}} \mathbf{B} \iff_{\text{ορισ.}} \left(\begin{array}{l} \text{οι } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ είναι ισοδύναμοι} \\ \text{υπό την ως άνω έννοια} \end{array} \right). \quad (5.39)$$

5.5.2 Πρόταση. Η (5.39) αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η (5.39) είναι αυτοπαθής, διότι

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n \implies \mathbf{A} \sim_{\text{ισ.}} \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K),$$

συμμετρική, διότι εάν $\mathbf{A} \sim_{\text{ισ.}} \mathbf{B}$ για κάποιους $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$, τότε

$$\exists \mathbf{P} \in \text{GL}_m(K) \text{ και } \mathbf{Q} \in \text{GL}_n(K) : \mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}^{-1}$$

¹⁸Ως κίνητρο για την εισαγωγή των εν λόγω σχέσεων ισοδυναμίας επί των $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ και $\text{Mat}_{n \times n}(K)$ μπορούν να θεωρηθούν οι τύποι (5.26) και (5.27).

με $\mathbf{P}^{-1} \in \text{GL}_m(K)$ και $\mathbf{Q}^{-1} \in \text{GL}_n(K)$, οπότε $\mathbf{B} \sim_{\text{ισ.}} \mathbf{A}$, και, τέλος, μεταβατική, διότι εάν $\mathbf{A} \sim_{\text{ισ.}} \mathbf{B}$ και $\mathbf{B} \sim_{\text{ισ.}} \mathbf{C}$ για κάποιους $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$, τότε

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{P}_1 \in \text{GL}_m(K) \text{ και } \mathbf{Q}_1 \in \text{GL}_n(K) : \mathbf{B} &= \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1, \\ \exists \mathbf{P}_2 \in \text{GL}_m(K) \text{ και } \mathbf{Q}_2 \in \text{GL}_n(K) : \mathbf{C} &= \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_2, \end{aligned}$$

οπότε

$$\mathbf{C} = (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2) \Rightarrow \mathbf{A} \sim_{\text{ισ.}} \mathbf{C},$$

καθόσον $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \in \text{GL}_m(K)$ και $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \in \text{GL}_n(K)$. □

5.5.3 Πρόταση. Δύο πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) είναι ισοδύναμοι εάν και μόνον εάν $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{B})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι οι \mathbf{A}, \mathbf{B} είναι ισοδύναμοι πίνακες. Τότε (σύμφωνα με το πόρισμα 5.4.5) υπάρχουν $\mathbf{P} \in \text{GL}_m(K)$ και $\mathbf{Q} \in \text{GL}_n(K)$, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right),$$

όπου $r := \text{rank}(\mathbf{A})$, οπότε

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right) \sim_{\text{ισ.}} \mathbf{A}.$$

Επειδή (εξ υποθέσεως) $\mathbf{A} \sim_{\text{ισ.}} \mathbf{B}$, έχουμε

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right) \sim_{\text{ισ.}} \mathbf{B}$$

λόγω της μεταβατικής ιδιότητας της (5.39). Επομένως, $\text{rank}(\mathbf{B}) = r$ (πρβλ. πρόταση 5.4.3). Και αντιστρόφως: εάν $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{B}) =: r$, τότε (σύμφωνα με το πόρισμα 5.4.5) αμφότεροι οι \mathbf{A}, \mathbf{B} είναι ισοδύναμοι με τον

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right),$$

οπότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμοι. □

5.5.4 Παρατήρηση. Ο K -διανυσματικός χώρος $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ διασπάται σε ακριβώς $\min\{m, n\} + 1$ κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την (5.39) (βλ. (5.32)) και καθεμιά εξ αυτών είναι μονοσημάντως ορισμένη μέσω της βαθμίδας ενός εκ των πινάκων της.

Επιπροσθέτως, κάθε κλάση ισοδυναμίας $[\mathbf{A}]_{\sim_{\text{ισ}}}$, $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$, διαθέτει έναν ιδιαίτερα «ομορφο» εκπρόσωπο, ήτοι τον

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{\text{rank}(\mathbf{A})} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right).$$

5.5.5 Ορισμός. Λέμε ότι δυο τετραγωνικοί πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ (όπου K σώμα και $n \in \mathbb{N}$) είναι **όμοιοι** όταν

$$\exists \mathbf{P} \in \text{GL}_n(K) : \mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Επί τού $\text{Mat}_{n \times n}(K)$ ορίζεται η διμελής σχέση

$$\mathbf{A} \sim_{\text{ομ.}} \mathbf{B} \iff_{\text{ομο}} (\text{οι } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ είναι όμοιοι}). \quad (5.40)$$

5.5.6 Σημείωση. Δυο όμοιοι πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ είναι πάντοτε ισοδύναμοι, οπότε οι βαθμίδες τους είναι ίσες (βλ. πρόταση 5.5.3).

5.5.7 Πρόταση. Η (5.40) αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η (5.40) είναι *αντοπαθής*, διότι

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \implies \mathbf{A} \sim_{\text{ομ.}} \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K),$$

συμμετρική, διότι εάν $\mathbf{A} \sim_{\text{ομ.}} \mathbf{B}$ για κάποιους $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$, τότε

$$\exists \mathbf{P} \in \text{GL}_n(K) : \mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1} \implies \mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{P}^{-1})^{-1}$$

και, τέλος, *μεταβατική*, διότι εάν $\mathbf{A} \sim_{\text{ομ.}} \mathbf{B}$ και $\mathbf{B} \sim_{\text{ομ.}} \mathbf{C}$ για κάποιους πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$, τότε

$$\exists \mathbf{P}_1 \in \text{GL}_n(K) : \mathbf{B} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_1^{-1} \quad \text{και} \quad \exists \mathbf{P}_2 \in \text{GL}_n(K) : \mathbf{C} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_2^{-1},$$

οπότε

$$\mathbf{C} = (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1)^{-1} \implies \mathbf{A} \sim_{\text{ομ.}} \mathbf{C},$$

καθόσον $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \in \text{GL}_n(K)$. □

5.5.8 Πρόταση. Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ($n \in \mathbb{N}$), τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Οι \mathbf{A}, \mathbf{B} είναι όμοιοι.

(ii) Υπάρχει μια διατεταγμένη βάση \mathcal{B} τού K^n , τέτοια ώστε να ισχύει

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{A}}),$$

ήτοι τέτοια, ώστε ο \mathbf{B} να είναι η εικόνα τού ενδομορφισμού

$$f_{\mathbf{A}} : K^n \longrightarrow K^n, \quad \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^{\top},$$

μέσω τού ισομορφισμού

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \text{End}_K(K^n) \longrightarrow \text{Mat}_{n \times n}(K), \quad f \longmapsto \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f).$$

(iii) Υπάρχουν ένας K -διανυσματικός χώρος V διαστάσεως n , ένας ενδομορφισμός $f \in \text{End}_K(V)$, καθώς και δυο διατεταγμένες βάσεις \mathcal{A} και \mathcal{B} τού V , ούτως ώστε να ισχύει

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f).$$

(Εν τοιαύτη περιπτώσει, οι \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι οι εικόνες τού ενδομορφισμού f μέσω των ισομορφισμών

$$\mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} : \text{End}_K(V) \longrightarrow \text{Mat}_{n \times n}(K) \quad \text{και} \quad \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \text{End}_K(V) \longrightarrow \text{Mat}_{n \times n}(K),$$

αντιστοίχως. Βλ. πρόρισμα 5.2.22.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) \Rightarrow (ii) Εάν οι \mathbf{A}, \mathbf{B} είναι όμοιοι, τότε $\exists \mathbf{P} \in \text{GL}_n(K) : \mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1}$. Προφανώς, $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{A}})$, όπου $\mathcal{E} := (e_1^{[n]}, \dots, e_n^{[n]})$ η συνήθης διατεταγμένη βάση τού K^n . Επιπροσθέτως, η διατεταγμένη n -άδα

$$\mathcal{B} := (\Sigma \tau_1(\mathbf{P})^{\top}, \dots, \Sigma \tau_n(\mathbf{P})^{\top})$$

είναι μια διατεταγμένη βάση τού K^n με

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} := \mathbf{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_{K^n}) = \mathbf{P} \quad \text{και} \quad \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = (\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1} = \mathbf{P}^{-1},$$

οπότε το πρόρισμα 5.2.35 δίδει

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{A}}).$$

(ii) \Rightarrow (iii) Εάν υπάρχει μια διατεταγμένη βάση \mathcal{B} τού K^n , τέτοια ώστε να ισχύει $\mathbf{B} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{A}})$, τότε θέτοντας $V := K^n$, $f := f_{\mathbf{A}}$ και $\mathcal{A} := \mathcal{E} = (e_1^{[n]}, \dots, e_n^{[n]})$, έχουμε $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$.

(iii) \Rightarrow (i) Εάν υπάρχουν ένας K -διανυσματικός χώρος V διαστάσεως n , ένας ενδομορφισμός $f \in \text{End}_K(V)$, καθώς και δυο διατεταγμένες βάσεις \mathcal{A} και \mathcal{B} τού V , ούτως ώστε να ισχύει

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f),$$

τότε (σύμφωνα με το πόρισμα 5.2.35)

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_B^A \cdot \mathbf{M}_A^A(f) \cdot \mathbf{T}_A^B = \mathbf{T}_B^A \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{T}_B^A)^{-1}.$$

Θέτοντας $\mathbf{P} := \mathbf{T}_B^A \in \text{GL}_n(K)$, λαμβάνουμε $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, οπότε οι \mathbf{A}, \mathbf{B} είναι όμοιοι. \square

5.5.9 Πόρισμα. *Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ($n \in \mathbb{N}$), τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Οι \mathbf{A}, \mathbf{B} είναι όμοιοι.*

(ii) *Υπάρχει μια διατεταγμένη βάση \mathcal{B} του K^n , τέτοια ώστε να ισχύει $\mathbf{L}_B^B(\mathbf{B}) = f_A$, ήτοι τέτοια, ώστε ο ενδομορφισμός*

$$f_A : K^n \longrightarrow K^n, \quad \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^\top,$$

να είναι η εικόνα του \mathbf{B} μέσω του ισομορφισμού

$$\mathbf{L}_B^B : \text{Mat}_{n \times n}(K) \longrightarrow \text{End}_K(K^n).$$

(iii) *Υπάρχουν ένας K -διανυσματικός χώρος V διαστάσεως n , ένας ενδομορφισμός $f \in \text{End}_K(V)$, καθώς και δυο διατεταγμένες βάσεις \mathcal{A} και \mathcal{B} του V , ούτως ώστε να ισχύει*

$$\mathbf{L}_A^A(\mathbf{A}) = f = \mathbf{L}_B^B(\mathbf{B}).$$

(Εν τοιαύτη περιπτώσει, ο ενδομορφισμός f είναι η εικόνα των \mathbf{A} και \mathbf{B} μέσω των ισομορφισμών

$$\mathbf{L}_A^A : \text{Mat}_{n \times n}(K) \longrightarrow \text{End}_K(V) \quad \text{και} \quad \mathbf{L}_B^B : \text{Mat}_{n \times n}(K) \longrightarrow \text{End}_K(V),$$

αντιστοίχως.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από την πρόταση 5.5.8 και το πόρισμα 5.2.22. \square

5.5.10 Σημείωση. Ο διαμελισμός του $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την (5.39) είναι σχετικώς αδρομερής (βλ. 5.5.4). Ο διαμελισμός του $\text{Mat}_{n \times n}(K)$ σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την (5.40) είναι περισσότερο εκλεπτυσμένος και η αναζήτηση «όμορφων» εκπροσώπων τους οδηγεί στο εξής:

• **Πρόβλημα:** *Δοθέντος ενός πίνακα $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$, να προσδιορισθεί ένας πίνακας $\mathbf{P} \in \text{GL}_n(K)$, τέτοιος ώστε ο $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ να έχει την απλούστερη δυνατή μορφή.*

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στην πρόταση 5.5.8, αυτό ισοδυναμεί με το ακόλουθο:

• Πρόβλημα: Δοθέντος ενός ενδομορφισμού $f \in \text{End}_K(V)$ ενός n -διάστατου K -διανυσματικού χώρου V , να προσδιορισθεί μια διατεταγμένη βάση \mathcal{B} τού V , ούτως ώστε ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ να έχει την απλούστερη δυνατή μορφή.

Η παρουσίαση τής πλήρους λύσεως τού προβλήματος γίνεται στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙΙ». Ωστόσο, μια πρώτη αντιμετώπισή του σε ειδικές περιπτώσεις περιλαμβάνεται στο κεφάλαιο 8 (περί ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων). Εκεί δίδονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες, υπό τις οποίες ο $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ είναι είτε διαγώνιος είτε άνω τριγωνικός.

