

M110 – Άλγεβρα
Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

1. Στο σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε τη σχέση \sim ως εξής:

$$x \sim y \iff i(x - y) \in \mathbb{R}.$$

Να αποδειχθεί ότι η παραπάνω είναι σχέση ισοδυναμίας και να περιγραφούν οι κλάσεις της.

2. Στο σύνολο $\mathbb{Q} - \{0\}$, ορίζουμε τη σχέση \mathcal{R} ως εξής:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \iff x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}.$$

Να αποδειχθεί ότι είναι σχέση ισοδυναμίας και να περιγραφούν οι κλάσεις της.

3. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$, πρώτοι μεταξύ τους. Να αποδειχθεί ότι $\mu.κ.δ.(n^2 + m^2, m + n) \in \{1, 2\}$.
4. Έστω $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Αποδείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός n μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$n = b_0 + b_1b + \dots + b_kb^k, \quad \text{με } b_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}, 0 \leq i \leq k.$$

5. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mu.κ.δ.(45n^2 + 33n + 11, 15n^2 + 10n + 3) = 1$.