

M110 – Άλγεβρα
Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

1. Υπολογίστε το μ.κ.δ.(1078, 252) με χρήση του Ευκλείδειου αλγόριθμου και με ανά-
λυση σε πρώτους.
2. Έστω $a, b, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Δείξτε ότι $\mu.κ.δ.(n^a - 1, n^b - 1) = n^d - 1$, όπου $d =$
 $\mu.κ.δ.(a, b)$.
3. Έστω $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ και $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι $\mu.κ.δ.(a, b) = \mu.κ.δ.(a, b + ka)$.
Εφαρμογή: Για την ακολουθία Fibonacci που ορίζεται $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} +$
 f_{n-2} , $n \geq 2$, δείξτε ότι $\mu.κ.δ.(f_{n+1}, f_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
4. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $n < p \leq n! + 1$.
5. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδική τριάδα της μορφής $(p, p + 2, p + 4)$, όπου $p, p +$
 $2, p + 4$ είναι πρώτοι αριθμοί.
6. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός $5^{2n+1} + 6^{2n+1}$ είναι πολ/σιο του 11.