ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2008-2009
Θ. Γαρεφαλάκης

M110 – Άλγεβρα

Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

1. Εάν $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών, να αποδειχθούν τα παρακάτω:

   (α') $p_n \leq p_1 \cdots p_{n-1} + 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

   (β') $p_n \geq 2n + 2$, για κάθε $n \in \mathbb{N},\ n \geq 7$.

   (γ') $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Να αποδειχθεί ότι αν ο $2^n - 1$ είναι πρώτος τότε ο n είναι πρώτος.

3. Να αποδειχθεί ότι $4^n \equiv 3n + 1 \pmod 9$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Να αποδειχθεί ότι το 21 διαιρεί τον αριθμό $10^{12n+4} - 4$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, με μ.κ.δ.$(m, n) = 1$, και $a, b \in \mathbb{Z}$. Εάν $a \equiv b \pmod m$ και $a \equiv b \pmod n$ να αποδειχθεί ότι $a \equiv b \pmod{mn}$.

6. Αποδείξτε ότι το 12 διαιρεί το $5n^3 + 7n^5$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

7. Να επιλυθούν οι παρακάτω γραμμικές ισοτιμίες:

   (α') $3x \equiv 5 \pmod{11}$,

   (β') $10x \equiv 6 \pmod{24}$,

   (γ') $20x \equiv 8 \pmod{24}$.