ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2008-2009
Θ. Γαρεφαλάκης

Μ110 – Άλγεβρα

Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

1. Έστω μη κενό σύνολο A, εφοδιασμένο με μία εσωτερική πράξη $*$, το οποίο διαθέτει ουδέτερο στοιχείο, e, ως προς την πράξη αυτή. Εάν για κάθε $a, b, c, d \in A$ ισχύει $(a*b)*(c*d) = (a*c)*(b*d)$, αποδείξτε ότι το $(A, *)$ είναι αντιμεταθετικό μονοειδές.

2. Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα και $a, b \in G$. Αποδείξτε ότι $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ αν και μόνο αν $a \cdot b = b \cdot a$.

3. Επί του συνόλου $\mathbb{R}$ ορίζουμε την εσωτερική πράξη $*$ ως εξής:

$$x * y = x + y + x^2y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη $*$, καθώς και ότι υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{R}$ που έχουν μηδέν, ένα ή δύο συμμετρικά στοιχεία. Εξηγήστε σε τι οφείλεται η ύπαρξη στοιχείων του $\mathbb{R}$ με περισσότερα από ένα συμμετρικά στοιχεία.

4. Στα παρακάτω σύνολα εφοδιασμένα με τις παρακάτω πράξεις, εξετάστε εάν η πράξη είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική, αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο και αν όλα τα στοιχεία έχουν συμμετρικό στοιχείο.

   (α΄) Στο σύνολο $\mathbb{Q}$ με την πράξη $\odot$ που ορίζεται ως εξής:

$$a \odot b = |a|b, \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}.$$

   (β΄) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ με την πράξη $\oplus$ που ορίζεται ως εξής:

$$a \oplus b = 3(a + b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

5. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με $\mu_n(\mathbb{C})$ το σύνολο των μιγαδικών n-οστων ριζών της μονάδας, δηλαδή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών ζ που ικανοποιούν την $\zeta^n = 1$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mu_n(\mathbb{C})$ εφοδιασμένο με το συνήθη πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών είναι αβελιανή ομάδα.

6. Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e και τάξη $2n$, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε το σύνολο

$$P = \{x \in G \ : \ x^{-1} = x\}.$$

Απόδείξτε τα παρακάτω:

(α΄) Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|P| = 2m$.

(β΄) Υπάρχει στοιχείο $a \in G - \{e\}$, τέτοιο ώστε $a^2 = e$.

(γ΄) Επαληθεύστε τις δύο παραπάνω προτάσεις για τις ομάδες $\mathbb{Z}_7^\times, \mathbb{Z}_8^\times$ και $\mathbb{Z}_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.