

M110 – Άλγεβρα
Φυλλάδιο Προβλημάτων 8

1. Έστω R δακτύλιος για τον οποίο ισχύει $a^2 = a, \forall a \in R$. Αποδείξτε ότι
- (α') Για κάθε $a \in R$ ισχύει $2a = 0$.
 - (β') Ο δακτύλιος είναι αντιμεταθετικός.
 - (γ') Εάν ο R περιέχει τουλάχιστον τρία στοιχεία, τότε ο R περιέχει μηδενοδιαίρετες.

2. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$R = \left\{ \frac{a}{3^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

είναι υποδακτύλιος του \mathbb{Q} και υπολογίστε την ομάδα, R^\times , των αντιστρέψιμων στοιχείων του.

3. Έστω p πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, p \nmid b \right\}$$

είναι υποδακτύλιος του \mathbb{Q} και υπολογίστε την ομάδα $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$, των αντιστρέψιμων στοιχείων του.

4. Δίνονται τα παρακάτω υποσύνολα του δακτυλίου $M_2(\mathbb{R})$.

$$R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 2a & 2a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- (α') Δείξτε ότι το R_1 είναι μη αντιμεταθετικός υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{R})$ χωρίς μονάδα.
- (β') Υπολογίστε το σύνολο των μηδενοδιαίρετων του R_1 .
- (γ') Δείξτε ότι το R_2 είναι αντιμεταθετικός υποδακτύλιος του R_1 με μονάδα.
- (δ') Δείξτε ότι το R_2 είναι σώμα.
- (ε') Δείξτε ότι $\mathbb{R} \cong R_2$.