ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2008-2009
Θ. Γαρεφαλάκης

M110 – Άλγεβρα

Φυλλάδιο Προβλημάτων 9

1. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Ένα στοιχείο $a \in R$ ονομάζεται μηδενοδύναμο αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a^k = 0$. Αποδείξτε ότι το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων του R, δηλαδή το σύνολο
$$S = \left\{ a \in R \ : \ \exists k \in \mathbb{N}, a^k = 0 \right\}$$
είναι υποδακτύλιος του R.

2. Έστω $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Αποδείξτε ότι η κλάση $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ είναι μηδενοδύναμο στοιχείο αν και μόνο αν κάθε πρώτος διαιρέτης του m είναι διαιρέτης του a. Καταγράψτε όλα τα μηδενοδύναμα στοιχεία του $\mathbb{Z}_{72}$.

3. Είναι γνωστό ότι όταν το R είναι ακέραια περιοχή, τότε $(R[X])^\times = R^\times$. Αυτό δεν είναι κατ' ανάγκη αλήθεια όταν το R δεν είναι ακέραια περιοχή. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\bar{2}X^2 + \bar{2}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_4[X]$ είναι αντιστρέψιμο.

4. Για $n \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}$ με $0 \leq k \leq n$, ορίζουμε $C(n,k)$ να είναι ο συντελεστής του X^k του πολυωνύμου $(X+1)^n \in \mathbb{Z}[X]$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εξ' ορισμού ισχύει
$$(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) X^k.$$
   (α') Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $C(n,0) = C(n,n) = 1$.
   (β') Χρησιμοποιήστε την ισότητα $(X+1)^{n+1} = X(X+1)^n + (X+1)^n$ για να δείξετε ότι $C(n+1,k) = C(n,k) + C(n,k-1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε φυσικό $1 \leq k \leq n$.
   (γ') Αποδείξτε ότι $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
   (δ') Αποδείξτε ότι $C(2n,n) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) C(n,n-k)$.

5. Έστω K ένα σώμα χααρακτηριστικής $p > 0$. Δείξτε ότι η απεικόνιση
$$\phi : K \longrightarrow K, \quad x \mapsto x^p$$
είναι μονομορφισμός. Εάν το K είναι πεπερασμένο, δείξτε ότι η ϕ είναι αυτομορφισμός. Η απεικόνιση ϕ ονομάζεται ενδομορφισμός του Frobenius.