

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ #2

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΑΚΗΣ

- (1) Έστω α μια ρίζα του $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ και C ο γραμμικός κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_4 με πίνακα βάσης τον

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τις παραμέτρους του C . Υπολογίστε ένα μη μηδενικό διάνυσμα του κώδικα με ελάχιστο βάρος. Βρείτε δύο διανύσματα του \mathbb{F}_4^6 τα οποία ανήκουν σε διαφορετικά σύμπλοκα.

- (2) Έστω C γραμμικός κώδικας με ελάχιστη απόσταση d , άρτιο αριθμό. Αποδείξτε ότι κάποιο σύμπλοκο περιέχει (τουλάχιστον) δύο λέξεις βάρους $e + 1$, όπου $e = \lfloor (d - 1)/2 \rfloor$.

- (3) Έστω C ένας $[n, k]$ γραμμικός κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_q και $1 \leq i \leq n$. Δείξτε ότι εάν υπάρχει κωδική λέξη της οποίας η i συντεταγμένη δεν είναι μηδέν τότε κάθε στοιχείο $a \in \mathbb{F}_q$ εμφανίζεται στην i συντεταγμένη ακριβώς σε q^{k-1} λέξεις του κώδικα.

(Υπόδειξη: εξετάστε την προβολή $\pi_i : C \rightarrow \mathbb{F}_q$, $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Ποιά είναι η διάσταση του πυρήνα και της εικόνας; Εμφανίζεται κάθε $a \in \mathbb{F}_q$ στην i συντεταγμένη κάποιας λέξης; Εφόσον εμφανίζεται, σε ποιές λέξεις εμφανίζεται ;)

- (4) Έστω C ένας $[n, k, d]$ γραμμικός κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_q . Έστω ότι για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχει λέξη του κώδικα της οποίας η i συντεταγμένη δεν είναι μηδέν.

(α) Δείξτε ότι $\sum_{c \in C} \text{wt}(c) = n(q - 1)q^{k-1}$.

(β) Δείξτε ότι $d \leq n(q - 1)q^{k-1}/(q^k - 1)$.

(γ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_2 με παραμέτρους $[15, 7, d]$ με $d \geq 8$.