ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ $\#3$

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΑΚΗΣ

(1) (α') Δείξτε ότι δεν υπάρχει δυαδικός γραμμικός κώδικας με παραμέτρους $[2^m, 2^m - m, 3]$ με $m \geq 2$.
(β') Έστω C ένας δυαδικός γραμμικός κώδικας με παραμέτρους $[2^m, k, 4]$ για κάποιο $m \geq 2$. Δείξτε ότι $k \leq 2^m - m - 1$.

(2) Έστω C_i ένας $[n, k_i, d_i]$, $i = 1, 2$, γραμμικός κώδικας πάνω από το $\mathbb{F}_q$, q περιττός. Ορίζουμε τον κώδικα

$$C_1 \diamond C_2 = \{(c_1 + c_2, c_1 - c_2) \ : \ c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}.$$

(α') Δείξτε ότι ο $C_1 \diamond C_2$ είναι γραμμικός κώδικας με παραμέτρους $[2n, k_1 + k_2, d]$ πάνω από το $\mathbb{F}_q$, όπου $d = 2d_2$ αν $2d_2 \leq d_1$ και $d_1 \leq d \leq 2d_2$ αν $2d_2 > d_1$.
(β') Αν G_i είναι πίνακας βάσης του C_i, $i = 1, 2$, εκφράστε ένα πίνακα βάσης του $C_1 \diamond C_2$ με τη βοήθεια των G_1 και G_2.

(3) Έστω ο γραμμικός κώδικας $A = \langle (1, 1), (\alpha, 1 + \alpha) \rangle$ πάνω από το $\mathbb{F}_4$, όπου α είναι μια ρίζα του $1 + X + X^2 \in \mathbb{F}_2[X]$. Έστω B ο δυαδικός κώδικας $\{0000, 1100, 1010, 0110\}$ και η $\mathbb{F}_2-$γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{F}_4 &\longrightarrow B \\ 1 &\mapsto 1100 \\ \alpha &\mapsto 1010. \end{aligned}$$

Γράψτε όλες τις κωδικές λέξεις του κώδικα

$$C = \phi^*(A) = \{(\phi(c_1), \phi(c_2)) \ : \ (c_1, c_2) \in A\}.$$

(4) Έστω ότι γίνονται t ποδοσφαιρικοί αγώνες και ένα στοίχημα αποτελείται από την πρόβλεψη του αποτελέσματος κάθε αγώνα, όπου το αποτέλεσμα μπορεί να είναι 1 (νίκη 1ης ομάδας), 2 (νίκη 2ης ομάδας) ή 0 (ισοπαλία). Δηλαδή κανείς μπορεί να δεί ένα στοίχημα ως ένα στοιχείο του $\{0, 1, 2\}^t$. Ποιός είναι ο μικρότερος αριθμός, $f(t)$, στοιχημάτων που απαιτείται, έτσι ώστε να είναι βέβαιο ότι θα κερδιθεί τουλάχιστον το δεύτερο βραβείο (δηλαδή θα υπάρχει κάποιο στοίχημα με το πολύ μία λάθος πρόβλεψη);
(α') Με χρήση κωδίκων Hamming πάνω από το $\mathbb{F}_3$, υπολογίστε το $f(t)$ για τιμές του t της μορφής $(3^r - 1)/2$, για ακεραίους $r \geq 2$.
(β') Δώστε ένα παράδειγμα τέτοιων στοιχημάτων για τέσσερις αγώνες.
(γ') Δείξτε ότι $23 \leq f(5) \leq 27$.