ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006
Θ. Γαρεφαλάκης

Μ113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι

Φυλλάδιο Προβλημάτων 8

1. Βρείτε την εικόνα της γραμμικής απεικόνισης $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ με
$$\ker L = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = x_4\right\}.$$

2. Έστω ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$,
$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_1 = x_4\right\}.$$
Βρείτε ένα χώρο W τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

3. Έστω ο μιγαδικός διανυσματικός χώρος $\mathbb{P}_3$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 2 με συντελεστές στο $\mathbb{C}$ και η απεικόνιση
$$L : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_3, \quad L(p(x)) = (x+1)p'(x) + p(x).$$
   (α΄) Δείξτε ότι η L είναι γραμμική.
   (β΄) Βρείτε τις ιδιοτιμές της L.

4. Έστω διανυσματικός χώρος V διάστασης $n > 1$ πάνω από το $\mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο και υπόχωρος W διάστασης $1 \leq m < n$.
   (α΄) Δείξτε ότι ο $W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \ \ \forall w \in W\}$ είναι υπόχωρος του V.
   (β΄) Δείξτε ότι $V = W \oplus W^{\perp}$.