ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006
Θ. Γαρεφαλάκης

Μ113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι

Λύσεις Φυλλαδίου 3

1. (α΄) Το διάνυσμα $(x,y,z,w) \in \ker L$ αν και μόνο αν

$$\left\{ \begin{array}{c} x-y=0 \\ x+y+z=0 \\ y+w=0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y=x \\ z=-2x \\ w=-x \end{array} \right\}$$

Επομένως,

$$\ker L = \{(x,x,-2x,-x) \ : \ x \in K\} = \langle (1,1,-2,-1) \rangle .$$

Μια βάση του $\ker L$ είναι η $\{(1,1,-2,-1)\}$.

(β΄) Γνωρίζουμε ότι $\dim \ker L + \dim \mathrm{im} L = \dim \mathbb{R}^4$, οπότε $\dim \mathrm{im} L = 3$ και συνεπώς $\mathrm{im} L = \mathbb{R}^3$. Μια βάση του είναι η $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

2. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$\begin{array}{rcl} M : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & (a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,\ldots,a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n) \end{array}$$

Έχουμε

$$\begin{array}{rcl} (x_1,\ldots,x_n) \in \ker M & \Longleftrightarrow & (a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,\ldots,a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n) = (0,\ldots,0) \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Η M είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $\ker M = \{0\}$, δηλαδή αν και μόνο αν το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0,\ldots,0)$. Γνωρίζουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα $A=(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ είναι διάφορη του μηδενός.

Εφαρμόζουμε το παραπάνω επιχείρημα στη γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (ax + by, cx + dy). \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος που προκύπτει είναι $ad - bc$. Άρα η L είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $ad \neq bc$.

3. (α′)

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker L &\iff (x - y, y + z, x + z) = (0, 0, 0) \\ &\iff y = x, z = -x \end{aligned}$$

Άρα

$$\ker L = \{(x, x, -x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, -1) \rangle.$$

(β′) Γνωρίζουμε ότι η εικόνα έχει διάσταση 2. Επίσης γνωρίζουμε ότι παράγεται από τα διανύσματα $L(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $L(0, 1, 0) = (-1, 1, 0)$, $L(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$. Δηλαδή $\mathrm{im} L = \langle (1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$. Ακόμη βλέπουμε ότι $(0, 1, 1) = (1, 0, 1) + (-1, 1, 0)$, οπότε $\mathrm{im} L = \langle (1, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle$ και το σύνολο $\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$ είναι μια βάση της εικόνας.

(γ′) Έστω $(x, y, z) \in \ker L \cap \mathrm{im} L$. Τότε υπάρχουν $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} & (x, y, z) = a(1, 1, -1) = b(1, 0, 1) + c(-1, 1, 0) \\ \iff & (a - b + c, a - c, -a - b) = (0, 0, 0) \\ \iff & \left\{ \begin{array}{c} a - b + c = 0 \\ a - c = 0 \\ -a - b = 0 \end{array} \right\} \\ \iff & a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Άρα η τομή έχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα.

4. Έστω ότι $T^2 = 0$. Θα δείξω ότι $\mathrm{im} T \subseteq \ker T$. Έστω $w \in \mathrm{im} T$. Τότε $w = T(v)$ για κάποιο $v \in V$. Οπότε $0 = T^2(v) = T(T(v)) = T(w)$, άρα $w \in \ker T$. Οπότε $\mathrm{im} T \subseteq \ker T$.

Έστω ότι $\mathrm{im} T \subseteq \ker T$. Θα δείξω ότι $T^2 = 0$. Έστω $v \in V$. Τότε $w = T(v) \in \mathrm{im} T$, άρα $w \in \ker T$. Συνεπώς, $T^2(v) = T(T(v)) = T(w) = 0$. Δηλαδή $T^2 = 0$.

5. Υποθέτω ότι $\ker T \cap \operatorname{im} T = \{0\}$. Θα δείξω ότι $T^2(v) = 0 \Rightarrow T(v) = 0$. Έστω ότι $T^2(v) = 0$. Τότε $T(v) \in \ker T$, και φυσικά $T(v) \in \operatorname{im} T$. Άρα $T(v) \in \ker T \cap \operatorname{im} T = \{0\}$, οπότε $T(v) = 0$.

   Υποθέτω ότι $T^2(v) = 0 \Rightarrow T(v) = 0$. Θα δείξω ότι $\ker T \cap \operatorname{im} T = \{0\}$. Έστω $w \in \ker T \cap \operatorname{im} T$. Αφού $w \in \operatorname{im} T$, υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $w = T(v)$. Επίσης, $w \in \ker T$, άρα $T(w) = T(T(v)) = T^2(v) = 0$. Αυτό όμως συνεπάγεται από την υπόθεση μας, ότι $T(v) = 0$, δηλαδή $w = 0$. Άρα $\ker T \cap \operatorname{im} T = \{0\}$.