ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006
Θ. Γαρεφαλάκης

M113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι

Λύσεις Φυλλαδίου 7

1. (α') Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι $\|(x_1, x_2)\| \geq 0$ και $\|(x_1, x_2\| = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned} \|a(x_1, x_2)\| &= \|(ax_1, ax_2)\| \\ &= |ax_1| + |ax_2| \\ &= |a|(|x_1| + |x_2|) \\ &= |a|\|(x_1, x_2)\|. \end{aligned}$$

Έστω $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\| \\ &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \\ &= \|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\| \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση ικανοποιεί τα τρία αξιώματα της νόρμας.

(β') Γνωρίζουμε ότι σε ένα διανυσματικό χώρο V με νόρμα, για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ ισχύει $\|v\| > 0$. Για την δοθείσα απεικόνιση βλέπουμε ότι $\|(-1, 0)\| = 0$. Άρα η απεικόνιση δεν είναι νόρμα.

2. (α') Έστω $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε $au + v = (au_1 + v_1, au_2 + v_2)$, οπότε

$$\begin{aligned} \langle au + v, w\rangle &= 2(au_1 + v_1)w_1 + 3(au_2 + v_2)w_2 \\ &= a(2u_1w_1 + 3u_2w_2) + (2v_1w_1 + 3v_2w_2) \\ &= a\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \end{aligned}$$

άρα η απεικόνιση είναι γραμμική ως προς το πρώτο όρισμα. Επίσης βλέπουμε ότι

$$\langle u, w\rangle = 2u_1w_1 + 3u_2w_2 = \langle w, u\rangle = \overline{\langle w, u\rangle},$$

διότι $\langle u, w\rangle \in \mathbb{R}$. Ακόμη, $\langle u, u\rangle = 2u_1^2 + 3u_2^2 \geq 0$ και $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = (0, 0)$. Άρα η απεικόνιση ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

(β′) Το διάνυσμα $w = (w_1, w_2)$ είναι κάθετο στο $u = (2, 1)$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \langle u, w\rangle &= 0 \quad \iff \\ 2\cdot 2\cdot w_1 + 3\cdot 1\cdot w_2 &= 0 \quad \iff \\ w_2 &= -\frac{4}{3}w_1. \end{aligned}$$

Άρα το διάνυσμα $w = (3, -4)$, για παράδειγμα, είναι κάθετο στο $(2, 1)$.

3. (α′) Θα δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $a \in \mathbb{C}$, $ax + y \in X$.

$$\langle ax + y, v\rangle = a\langle x, v\rangle + \langle y, v\rangle = 0,$$

διότι $x, y \in X$ οπότε $\langle x, v\rangle = \langle y, v\rangle = 0$. Οπότε $ax + y \in X$.

(β′) Θα δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in Y$ και για κάθε $a \in \mathbb{C}$, $ax + y \in Y$. Έστω οποιοδήποτε $w \in W$. Τότε $x, y \in Y$ οπότε $\langle x, w\rangle = \langle y, w\rangle = 0$. Τότε

$$\langle ax + y, w\rangle = a\langle x, w\rangle + \langle y, w\rangle = 0.$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $w \in W$. Οπότε $ax + y \in Y$.

4. Η νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο είναι η $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ για $x \in V$. Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι για $x, y \in V$ και $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \langle ax + by, ax + by\rangle &= \langle ax, ax + by\rangle + \langle by, ax + by\rangle \\ &= a\langle x, ax + by\rangle + b\langle y, ax + by\rangle \\ &= a\overline{\langle ax + by, x\rangle} + b\overline{\langle ax + by, y\rangle} \\ &= a(\overline{\langle ax, x\rangle + \langle by, x\rangle}) + b(\overline{\langle ax, y\rangle + \langle by, y\rangle}) \\ &= a(\overline{a\langle x, x\rangle + b\langle y, x\rangle}) + b(\overline{a\langle x, y\rangle + b\langle y, y\rangle}) \\ &= a\overline{a}\langle x, x\rangle + a\overline{b}\langle x, y\rangle + b\overline{a}\langle y, x\rangle + b\overline{b}\langle y, y\rangle \\ &= |a|^2\|x\|^2 + |b|^2\|b\|^2 + a\overline{b}\langle x, y\rangle + b\overline{a}\langle y, x\rangle. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle. \end{aligned}$$

Όμοια έχουμε

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$