

Θεωρία Σωμάτων

Φυλλάδιο ασκήσεων #1

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

19 Φεβρουαρίου 2015

1. Έστω F σώμα και $c \in F$.

(α') Δείξτε ότι η απεικόνιση $\sigma : F[X] \rightarrow F[X]$, $\sigma(f(X)) = f(X + c)$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων.

(β') Δείξτε ότι $\deg(f(X)) = \deg(\sigma(f(X)))$.

(γ') Δείξτε ότι αν το $\sigma(f(X))$ είναι ανάγωγο, τότε και το $f(X)$ είναι ανάγωγο.

2. Έστω p πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(X) = X^{p-1} + \dots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ είναι ανάγωγο.
Υπόδειξη: εξετάστε το πολυώνυμο $f(X + 1)$ και χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.

3. Έστω $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ και δεν διαιρείται από τετράγωνο πρώτου αριθμού και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $X^n - a \in \mathbb{Q}[X]$ είναι ανάγωγο.

4. Καταγράψτε όλα τα μονικά ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού δύο των δακτυλίων $\mathbb{F}_2[X]$ και $\mathbb{F}_3[X]$.

5. Έστω p πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $X^p - X \in \mathbb{F}_p[X]$ παραγοντοποιείται ως:

$$X^p - X = X(X - \bar{1}) \cdots (X - \overline{p-1}).$$

6. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα του $\mathbb{Q}[X]$ είναι ανάγωγα.

(α') $X^4 + 3X^3 - 2X^2 - 7$,

(β') $X^5 - 4X^3 + X^2 - 9$,

(γ') $10X^3 + 13X^2 - X + 4$.