

# Θεωρία Σωμάτων

## Φυλλάδιο ασκήσεων #2

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

20 Φεβρουαρίου 2015

1. Έστω  $F \leq K$  επέκταση σωμάτων. Εάν  $[K : F] = 1$  δείξτε ότι  $K = F$ .
2. Έστω  $F \leq K$  επέκταση σωμάτων με  $[K : F] = p$  πρώτο αριθμό.
  - (α') Εάν  $L$  είναι σώμα με  $F \leq L \leq K$ , δείξτε ότι  $L = F$  ή  $L = K$ .
  - (β') Εάν  $\alpha \in K \setminus F$ , δείξτε ότι  $K = F(\alpha)$ .
3. Δίνεται το  $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ .
  - (α') Δείξτε ότι το  $\alpha$  είναι αλγεβρικό πάνω από το  $\mathbb{Q}$  και βρείτε το  $\min(\alpha, \mathbb{Q})$ . Ποιός είναι ο βαθμός της επέκτασης  $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ ;
  - (β') Γράψτε το στοιχείο  $1/(\alpha + 1)$  ως προς τη βάση  $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ .
4. Έστω  $p, q$  διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί.
  - (α') Δείξτε ότι  $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q})$ .
  - (β') Δείξτε ότι το πολυώνυμο  $X^2 - q$  είναι ανάγωγο στο δακτύλιο  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})[X]$ .
  - (γ') Υπολογίστε το βαθμό της επέκτασης  $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbb{Q}$ .
  - (δ') Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του στοιχείου  $\sqrt{p} + \sqrt{q}$  πάνω από το  $\mathbb{Q}$ .
5. Δίνεται το στοιχείο  $\alpha = \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ .
  - (α') Βρείτε το  $\min(\alpha, \mathbb{Q})$ .
  - (β') Δείξτε ότι  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leq \mathbb{Q}(\alpha)$ .
  - (γ') Υπολογίστε το βαθμό της επέκτασης  $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ .
  - (δ') Βρείτε το  $\min(\alpha, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ .
6. Έστω  $F \leq K \leq L$  επεκτάσεις σωμάτων και  $\alpha \in L$  αλγεβρικό πάνω από το  $F$ .
  - (α') Δείξτε ότι  $[K(\alpha) : K] \leq [F(\alpha) : F]$ .
  - (β') Δείξτε ότι  $[K(\alpha) : F(\alpha)] \leq [K : F]$ .
  - (γ') Εξηγήστε γιατί όλοι οι βαθμοί που εμφανίζονται παραπάνω είναι πεπερασμένοι.