Θεωρία Σωμάτων
Φυλλάδιο ασκήσεων #5

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

23 Απριλίου 2015

1. Έστω $1 \neq \omega \in \mathbb{C}$ μια 7η ρίζα της μονάδας και $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Υπολογίστε την ομάδα $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ και δείξτε ότι είναι οσόμορφη με την $\mathbb{Z}_7^*$. Βρείτε όλες τις ενδιάμεσες επεκτάσεις της $K/\mathbb{Q}$.

2. Έστω $\omega = e^{2\pi i/8} \in \mathbb{C}$ και $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Δείξτε ότι $\min(\omega, \mathbb{Q}) = X^4 + 1$. Υπολογίστε την $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ και δείξτε ότι είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_8^*$. Υπολογίστε όλες τις ενδιάμεσες επεκτάσεις της $K/\mathbb{Q}$.

3. Έστω E το σώμα ανάλυσης του $f = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ πάνω από το $\mathbb{Q}$. Υπολογίστε την ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. Δείξτε ότι δεν είναι αβελιανή και βρείτε μία κανονική και μία μη κανονική υποομάδα της.

4. Έστω $f = X^4 - 2X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ και K το σώμα ανάλυσης του f πάνω από το $\mathbb{Q}$. Βείτε την ομάδα $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ καθώς και τις ενδιάμεσες επεκτάσεις που αντιστοιχούν στις κυκλικές υποομάδες της G. Ποιές από αυτές είναι κανονικές υποομάδες της G;

5. Έστω $f \in \mathbb{Q}[X]$ ανάγωγο πολυώνυμο και K το σώμα ανάλυσης του f πάνω από το $\mathbb{Q}$. Υποθέτουμε ότι η ομάδα Galois της επέκατασης $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ είναι αβελιανή. Εάν α είναι μία ρίζα του f δείξτε ότι $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
   Υπόδειξη: Η $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ είναι αβελιανή, άρα κάθε υποομάδα της είναι κανονική. Ποιό συμπέρασμα βγάζετε για την επέκταση $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$;

6. Έστω K/F μία πεπερασμένη επέκταση Galois με ομάδα Galois G. Ορίζουμε την απεικόνιση του ίχνους:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} : K &\longrightarrow K \\ \alpha &\mapsto \sum_{\sigma \in G} \sigma(\alpha). \end{aligned}$$

   (α΄) Δείξτε ότι $\mathrm{Tr}(\alpha) \in F$, για κάθε $\alpha \in K$.
   (β΄) Δείξτε ότι $\mathrm{Tr}(\alpha) = \mathrm{Tr}(\tau(\alpha))$, για κάθε $\alpha \in K$ και $\tau \in G$.
   (γ΄) Δείξτε ότι $\mathrm{Tr}(c\alpha + \beta) = c\mathrm{Tr}(\alpha) + \mathrm{Tr}(\beta)$, για κάθε $c \in F$ και $\alpha, \beta \in K$.
   (δ΄) Δείξτε ότι υπάρχει $\alpha \in K$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Tr}(\alpha) \neq 0$. (Λήμμα του Dedekind.)
   (ε΄) Δείξτε ότι $\dim_F(\ker(\mathrm{Tr})) = [K : F] - 1$. (Παρατηρήστε ότι έχουμε δείξει ότι η απεικόνιση $\mathrm{Tr} : K \longrightarrow F$ είναι F-γραμμική και $\mathrm{im}(\mathrm{Tr}) \neq \{0\}$. Ποιά πρέπει να είναι η εικόνα;)

7. Έστω K/F πεπερασμένη επέκταση Galois με κυκλική ομάδα Galois $G = \langle\sigma\rangle$. Δείξτε ότι

$$\ker(\mathrm{Tr}) = \{\sigma(\beta) - \beta \ : \ \beta \in K\}.$$

   Υπόδειξη: Εξετάστε την F-γραμμική απεικόνιση $L : K \longrightarrow K$, $L(\beta) = \sigma(\beta) - \beta$. Δείξτε ότι $\ker(L) = F$ και στη συνέχεια ότι $\mathrm{im}(L) = \ker(\mathrm{Tr})$.