ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ $\#1$

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΑΚΗΣ

(1) Έστω η επέκταση σωμάτων K/F. Αποδείξτε ότι $[K : F] = 1$ αν και μόνο αν $K = F$.

(2) Υπολογίστε το βαθμό της επέκτασης $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})/\mathbb{Q}$.

(3) Αποδείξτε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$ και υπολογίστε το ελάχιστο πολυώνυμο του $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ πάνω από το $\mathbb{Q}$.

(4) Έστω K/F επέκταση σωμάτων με $[K : F] = p$ πρώτος. Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο $\alpha \in K$ τέτοιο ώστε $K = F(\alpha)$.

(5) Έστω K είναι επέκταση του F και $a \in K$ είναι τέτοιο ώστε $[F(a) : F]$ είναι περιττός αριθμός, δείξτε ότι $F(a^2) = F(a)$.

(6) Έστω K πεπερασμένη επέκταση του F και L_1, L_2 ενδιάμεσες επεκτάσεις.
   (α') Αποδείξτε ότι υπάρχει βάση του L_1L_2 πάνω από το L_1 η οποία αποτελείται από στοιχεία του L_2.
   (β') Αποδείξτε ότι $[L_1L_2 : F] \leq [L_1 : F] \cdot [L_2 : F]$.
   (γ') Εάν επιπλέον ισχύει $([L_1 : F], [L_2 : F]) = 1$, δείξτε ότι $[L_1L_2 : F] = [L_1 : F] \cdot [L_2 : F]$