

M113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι
Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

1. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές του A και για κάθε ιδιοτιμή να υπολογιστεί η αλγεβρική και η γεωμετρική της πολλαπλότητα.

2. Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω από το \mathbb{C} διάστασης 3. Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ μια βάση του V και γραμμικός τελεστής $L : V \rightarrow V$ που ορίζεται από τις

$$\begin{aligned} L(v_1) &= -2v_1 - 2v_2 + av_3 \\ L(v_2) &= v_1 + 3v_2 + bv_3 \\ L(v_3) &= 2v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Υπολογίστε $a, b \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε οι ιδιοτιμές του L να είναι οι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Βρείτε μια βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του L να είναι διαγώνιος.

3. Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{C} διάστασης 2. Έστω L γραμμικός τελεστής του V που έχει μια ιδιοτιμή λ με γεωμετρική πολλαπλότητα 2. Δείξτε ότι ο πίνακας του L ως προς οποιαδήποτε βάση του V είναι ο λI .
4. Έστω πίνακας $A \in M_2(\mathbb{C})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(t) = t^2 + t + 1$. Δείξτε ότι $A^3 = I$.