ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2011-2012
Θ. Γαρεφαλάκης

Μ1212 – Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

1. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και ο υπόχωρος
$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$
του $\mathbb{R}^n$. Να προσδιορίσετε μία βάση του U.

2. Έστω ο υπόχωρος
$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\right\}$$
του $\mathbb{R}^3$. Να προσδιορίσετε μία βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία να περιέχει μία βάση του U.

3. Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος διάστασης $n \in \mathbb{N}$ και U, W υπόχωροι του V διαστάσεων m, ℓ αντίστοιχα. Εάν $m + \ell > n$ δείξτε ότι υπάρχει $v \in U \cap W$, $v \neq 0$.

4. Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος διάστασης $n \in \mathbb{N}$ και $U_1, \ldots, U_k$ ($k \in \mathbb{N}$) υπόχωροι του V. Αποδείξτε ότι

   (α΄) $\dim(U_1 + \cdots + U_k) \leq \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_k)$,

   (β΄) εάν $\dim(U_j) = n - 1$, $1 \leq j \leq k$ τότε $\dim(U_1 \cap \cdots \cap U_k) \geq n - k$.

5. Έστω ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}[T]_{\leq 3}$ και ο υπόχωρος του
$$U = \operatorname{Span}(\{2T + 1, 3T^2 + T + 2\}).$$
Προσδιορίστε μία βάση του $\mathbb{R}[T]_{\leq 3}/U$.