

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ #3

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΛΑΚΗΣ

- (1) (α) Δείξτε ότι δεν υπάρχει δυαδικός γραμμικός κώδικας με παραμέτρους $[2^m, 2^m - m, 3]$ με $m \geq 2$.
(β) Έστω C ένας δυαδικός γραμμικός κώδικας με παραμέτρους $[2^m, k, 4]$ για κάποιο $m \geq 2$. Δείξτε ότι $k \leq 2^m - m - 1$.
- (2) Βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό n τέτοιο ώστε να υπάρχει δυαδικός κώδικας με παραμέτρους $[n, 50, 3]$.
- (3) Έστω C_i ένας $[n, k_i, d_i]$, $i = 1, 2$, γραμμικός κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_q , q περιττός. Ορίζουμε τον κώδικα
- $$C_1 \diamond C_2 = \{(c_1 + c_2, c_1 - c_2) : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}.$$
- (α) Δείξτε ότι ο $C_1 \diamond C_2$ είναι γραμμικός κώδικας με παραμέτρους $[2n, k_1 + k_2, d]$ πάνω από το \mathbb{F}_q , όπου $d = 2d_2$ αν $2d_2 \leq d_1$ και $d_1 \leq d \leq 2d_2$ αν $2d_2 > d_1$.
(β) Αν G_i είναι πίνακας βάσης του C_i , $i = 1, 2$, εκφράστε ένα πίνακα βάσης του $C_1 \diamond C_2$ με τη βοήθεια των G_1 και G_2 .
- (4) Έστω $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$ ένας (όχι κατ' ανάγκη γραμμικός) (n, M, d) κώδικας και $e = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$. Εάν $M = q^n / V_q^n(e)$, αποδείξτε ότι
- $$\forall x \in \mathbb{F}_q^n \exists c \in C \text{ τέτοιο ώστε } d(x, c) \leq e.$$
- (5) Έστω ότι γίνονται t ποδοσφαιρικοί αγώνες και ένα στοιχείο αποτελείται από την πρόβλεψη του αποτελέσματος κάθε αγώνα, όπου το αποτέλεσμα μπορεί να είναι 1 (νίκη 1ης ομάδας), 2 (νίκη 2ης ομάδας) ή 0 (ισοπαλία). Δηλαδή κανείς μπορεί να δει ένα στοιχείο ως ένα στοιχείο του $\{0, 1, 2\}^t$. Ποιός είναι ο μικρότερος αριθμός, $f(t)$, στοιχημάτων που απαιτείται, έτσι ώστε να είναι βέβαιο ότι θα κερδιθεί τουλάχιστον το δεύτερο βραβείο (δηλαδή θα υπάρχει κάποιο στοιχείο με το πολύ μία λάθος πρόβλεψη);
(α) Δείξτε ότι $f(t) \geq 3^t / (2t + 1)$.
(β) Με χρήση κωδίκων Hamming πάνω από το \mathbb{F}_3 , υπολογίστε το $f(t)$ για τιμές του t της μορφής $(3^r - 1)/2$, για ακέραιους $r \geq 2$.
(γ) Δώστε ένα παράδειγμα τέτοιων στοιχημάτων για τέσσερις αγώνες.
(δ) Δείξτε ότι $23 \leq f(5) \leq 27$.