

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ #2

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΛΑΚΗΣ

(1) Έστω C ένας αυτοδυϊκός $[n, k]$ -κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_q . Γνωρίζουμε ότι ο $W = C \oplus C$ είναι ένας $[2n, 2k]$ -κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_q . Δείξτε ότι είναι αυτοδυϊκός.

(2) Έστω C ένας αυτοδυϊκός $[n, k]$ -κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_2 .

(α') Δείξτε ότι $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in C$.

(β') Δείξτε ότι το βάρος κάθε κωδικής λέξης του C είναι άρτιος αριθμός.

(γ') Αν το k είναι περιττός, δείξτε ότι: είτε όλες οι κωδικές λέξεις του C έχουν βάρος που διαιρείται με 4 ή οι μισές έχουν βάρος που διαιρείται με 4 και οι άλλες μισές έχουν άρτιο βάρος που δε διαιρείται με 4.

(δ') Έστω C δυαδικός αυτοδυϊκός κώδικας με παραμέτρους $[6, 3]$. Προσδιορίστε την ελάχιστη απόσταση του C .

(3) Έστω ο δυαδικός κώδικας

$$C = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{F}_2^6 : \begin{array}{l} x_4 = x_1 + x_2 + x_3, \\ x_5 = x_1 + x_3, \\ x_6 = x_2 + x_3 \end{array} \right\}.$$

(α') Υπολογίστε τη διάσταση του C .

(β') Βρείτε ένα πίνακα βάσης και ένα πίνακα ελέγχου του C .

(γ') Υπολογίστε την ελάχιστη απόσταση του C .

(4) Έστω C ένας $[n, k, d]$ -κώδικας άνω από το \mathbb{F}_q . Δείξτε ότι $d \leq n - k + 1$. Το φράγμα αυτό είναι γνωστό ως Singleton bound.

(5) Έστω q περιττός και C_i γραμμικοί $[n, k_i, d_i]$ κώδικες, $i = 1, 2$, πάνω από το \mathbb{F}_q . Ορίζουμε το γραμμικό κώδικα

$$C = \{(c_1 + c_2, c_1 - c_2) : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}.$$

Δείξτε ότι ο C έχει παραμέτρους $[2n, k_1 + k_2, d]$, όπου $d = 2d_2$ αν $d_1 \geq 2d_2$ και $d_1 \leq d \leq 2d_2$ αν $d_1 < 2d_2$.