

Μ113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι
Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

1. Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω από σώμα \mathbb{K} και $v_1, \dots, v_n \in V$. Δείξτε ότι αν το $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι βάση του V τότε και το $\{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2, \dots, v_n - v_{n-1}\}$ είναι βάση του V .
2. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^3 .
 - (α') Βρείτε μια βάση του υπόχωρου $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$.
 - (β') Βρείτε ένα υπόχωρο V τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
3. Στο διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^3 πάνω από το \mathbb{C} θεωρούμε τους υπόχωρους

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x - y = 0\}$$
$$V = \langle (2, 2, i) \rangle.$$

- (α') Δείξτε ότι ο V είναι υπόχωρος του U .
 - (β') Βρείτε μια βάση του U που να περιέχει μια βάση του V .
4. Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $M_2(\mathbb{R})$ θεωρούμε τους υπόχωρους

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + b - d = 0, a - c = 0 \right\}$$
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : b = c = d = 0, \right\}.$$

- (α') Δείξτε ότι $U \cap V = \{0\}$.
- (β') Βρείτε μια βάση του $U \oplus V$.