ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006
Θ. Γαρεφαλάκης

M113 – Γραμμική Άλγεβρα I

Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

1. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση
$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, w) &\mapsto (x - y, x + y + z, y + w). \end{aligned}$$
   (α′) Βρείτε μια βάση του πυρήνα της L.
   (β′) Βρείτε τη διάσταση και μια βάση της εικόνας της L.

2. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση
$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (ax + by, cx + dy). \end{aligned}$$
   Δείξτε ότι η L είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $ad \neq bc$. Γενικότερα δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση
$$\begin{aligned} M : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n) \end{aligned}$$
   είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ είναι διάφορη του μηδενός.

3. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση
$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y, y + z, x + z). \end{aligned}$$
   (α′) Βρείτε μια βάση του πυρήνα της L.
   (β′) Βρείτε μια βάση της εικόνας της L.
   (γ′) Δείξτε ότι $\ker L \cap \mathrm{im} L = \{0\}$

4. Έστω K-χώρος V και γραμμική απεικόνιση $T : V \longrightarrow V$. Δείξτε ότι
$$T^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{im}T \subseteq \ker T.$$

5. Έστω K-χώρος V και γραμμική απεικόνιση $T : V \longrightarrow V$. Δείξτε ότι
$$\ker T \cap \mathrm{im}T = \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad (T^2(v) = 0 \Longrightarrow T(v) = 0).$$