ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006
Θ. Γαρεφαλάκης

# M113 – Γραμμική Άλγεβρα I

## Λύσεις Φυλλαδίου 1

1. (α') Για τον γραμμικό συνδυασμό $a \cdot 1 + b \cdot i$ με $a, b \in \mathbb{R}$, βλέπουμε ότι

$$a \cdot 1 + b \cdot i = 0 \iff a = b = 0.$$

Άρα τα διανύσματα $1, i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(β') Τα $a + ib$, $c + id$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί συντελεστές $x, y$, όχι και οι δύο μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} x(a+ib) + y(c+id) = 0 &\iff \\ (ax+cy) + i(bx+dy) = 0 &\iff \\ \left\{ \begin{array}{c} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{array} \right\} & \end{aligned}$$

Το τελευταίο σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν η ορίζουσα

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

είναι ίση με μηδέν.

2. Για τις συναρτήσεις $\sin, \cos$, κοιτάμε τους γραμμικούς συνδυασμούς $a \sin + b \cos$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Βλέπουμε ότι αν

$$a \sin(x) + b \cos(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

τότε για $x = 0$ παίρνουμε $b = 0$ και για $x = \pi/2$ παίρνουμε $a = 0$. Αρα η σχέση $a \sin + b \cos = 0$ μπορεί να ισχύει μόνο για $a = b = 0$.

3. (α') Ελέγχουμε ότι τα $V$ και $W$ είναι κλειστά ως προς τις πράξεις.

(β΄) Ένα τυχαίο στοιχείο του $V$ γράφεται

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

οπότε $V \subseteq \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, όπου $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Εύκολα βλέπει κανείς από τους παραπάνω υπολογισμούς ότι κάθε στοιχείο του $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ ανήκει στον $V$, άρα $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$.

Όμοια δείχνουμε ότι τα $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ παράγουν τον $W$.

(γ΄) Για το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 &\iff \\ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1+a_2 & a_3 \end{pmatrix} = 0 &\iff \\ a_1 = a_2 = a_3 = 0 & \quad . \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι το σύνολο $\{w_1, w_2, w_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(δ΄) Έχουμε

$$V \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Δουλεύοντας όπως στο δεύτερο υποερώτημα βρίσκουμε ότι ο υπόχωρος $V \cap W$ παράγεται από τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ε΄) Προφανώς $V + W \subseteq M_2(\mathbb{R})$. Μένει να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα του $M_2(\mathbb{R})$ ανήκει στον $V + W$. Πραγματικά,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c-b & a \end{pmatrix}$$

και βλέπουμε ότι $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d-a \end{pmatrix} \in V$ και $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c-b & a \end{pmatrix} \in W$. Έχουμε ήδη ένα τρόπο για να γράψουμε το $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ στη ζητούμενη μορφή. Για να βρούμε ένα άλλο τρόπο γραφής, επιλέγουμε ένα διάνυσμα στην τομή $V \cap W$, ας πούμε το $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c-b & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & b+1 \\ b+1 & d-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -1 \\ c-b-1 & a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$