ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006

Θ. Γαρεφαλάκης

M113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι

Λύσεις Φυλλαδίου 2

1. Ο χώρος V έχει διάσταση n άρα αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_n - v_{n-1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ με $a_1 v_1 + a_2(v_2 - v_1) + \ldots + a_n(v_n - v_{n-1}) = 0$. Τότε έχουμε

$$(a_1 - a_2)v_1 + (a_2 - a_3)v_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)v_{n-1} + a_n v_n = 0$$

οπότε από τη γραμμική ανεξαρτησία των $v_1, \ldots, v_n$ έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 = a_2 \\ a_2 = a_3 \\ \cdots \\ a_{n-1} = a_n \\ a_n = 0 \end{array} \right\} \implies a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

2. (α') Τα διανύσματα του U είναι ακριβώς τα $(x, 2x + 3z, z)$ με $x, z \in \mathbb{R}$. Οπότε κάθε διάνυσμα του U γράφεται ως

$$(x, 2x + 3z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1).$$

Άρα $U \subseteq \langle (1, 2, 0), (0, 3, 1) \rangle$. Επίσης είναι φανερό ότι κάθε διάνυσμα του $\langle (1, 2, 0), (0, 3, 1) \rangle$ ανήκει στον U. Άρα $U = \langle (1, 2, 0), (0, 3, 1) \rangle$. Τα $(1, 2, 0), (0, 3, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού

$$a(1, 2, 0) + b(0, 3, 1) = (0, 0, 0) \implies a = b = 0.$$

Συνεπώς το $\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\}$ είναι μια βάση του U.

(β') Ο U είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2. Συμπληρώνουμε το $\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\}$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Για παράδειγμα μπορούμε να δούμε ότι το σύνολο $\{(1, 2, 0), (0, 3, 1), (1, 0, 0)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Τότε ισχυριζόμαστε ότι $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$, με $V = \langle (1, 0, 0) \rangle$. Κατ' αρχάς είναι φανερό ότι $U \cap V = \{0\}$, διότι αν υπήρχε $0 \neq w \in U \cap V$, τότε θα είχαμε

$$w = a(1, 2, 0) + b(0, 3, 1) = c(1, 0, 0), \text{ με } c \neq 0,$$

που αντιβαίνει στη γραμμική ανεξαρτησία των $(1,2,0),(0,3,1),(1,0,0)$. Επιπλέον είναι φανερό ότι κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός διανύσμτος του U και ενός διανύσματος του V, αφού το $(1,2,0),(0,3,1),(1,0,0)$ είναι βάση.

3. (α') Βλέπουμε ότι τα διανύσματα του U είναι της μορφής

$$(x,x,z)=x(1,1,0)+z(0,0,1),$$

οπότε $U=\langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle$. Καθώς τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αποτελούν μια βάση του U. Βλέπουμε τώρα ότι

$$(2,2,i)=2(1,1,0)+i(0,0,1),$$

οπότε το τυχόν διάνυσμα του V είναι της μορφής

$$a(2,2,i)=2a(1,1,0)+ai(0,0,1)\in U,$$

συνεπώς $V\subseteq U$.

(β') Για να κατασκευάσουμε την απαιτούμενη βάση του U αρχίζουμε με μια (οποιαδήποτε) βάση, ας πούμε την $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$. Το σύνολο $\{(1,1,0),(0,0,1),(2,2,i)\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, άρα μπορούμε να γράψουμε ένα από τα $(1,1,0),(0,0,1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων (γιατί;). Για παράδειγμα,

$$(0,0,1)=2i(1,1,0)-i(2,2,i).$$

Επομένως, το σύνολο $\{(1,1,0),(2,2,i)\}$ παράγει τον U, ο οποίος έχει διάσταση 2, άρα αποτελούν βάση του. Επιπλέον περιέχει το $\{(2,2,i)\}$ που είναι μια βάση του V.

4. Τα διανύσματα του U είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & a+b \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

άρα $U=\langle u_1,u_2\rangle$ όπου $u_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $u_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Τα u_1,u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε το $\{u_1,u_2\}$ είναι μια βάση του U.

Όμοια βλέπουμε ότι $V=\langle v\rangle$, όπου $v=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(α′) Έστω $w \in U \cap V$. Τότε υπάρχουν $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $w = xu_1 + yu_2 = zv$, δηλαδή

$$\begin{aligned} x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\implies \\ \begin{pmatrix} x - z & y \\ x & x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\implies \\ x = y = z = 0 &, \end{aligned}$$

δηλαδή $w = 0$.

(β′) Μια βάση του $U \oplus V$ είναι η $\{u_1, u_2, v\}$. Στο προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ουσιαστικά ότι το $\{u_1, u_2, v\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επίσης $U \oplus V = \langle u_1, u_2, v \rangle$, αφού κάθε διάνυσμα w του $U \oplus V$ γράφεται ως $w = u' + v'$ με $u' \in U$ και $v' \in V$, οπότε $u' = au_1 + bu_2$, $v' = cv$, για κάποια $a, b, c \in \mathbb{R}$, δηλαδή $w = au_1 + bu_2 + cv$.