ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006
Θ. Γαρεφαλάκης

Μ113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι

Λύσεις Φυλλαδίου 5

1. Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του A υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \det(A - tI) \\
&= \det \begin{pmatrix} 7-t & 6 & -1 \\ -5 & -4-t & 1 \\ 2 & 2 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -t^3 + 4t^2 - 5t + 2.
\end{aligned}
$$

Βλέπουμε εύκολα ότι το $\lambda_1 = 1$ είναι ρίζα του $p(t)$. Εκτελώντας τη διαίρεση του $p(t)$ με το $t-1$ βρίσκουμε ότι $p(t) = -(t-1)(t^2-3t+2)$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι 1 και 2. Άρα τελικά, $p(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Έχουμε δύο ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$.

Για να βρούμε τον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί στο λ_1 βρίσκουμε όλα τα διανύσματα $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν την $(A - \lambda_1 I)x = 0$, δηλαδή

$$
\begin{pmatrix} 6 & 6 & -1 \\ -5 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff
\left\{ \begin{array}{rcl} 6x_1 + 6x_2 - x_3 &=& 0 \\ -5x_1 - 5x_2 + x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &=& 0 \end{array} \right\} \iff
\left\{ \begin{array}{rcl} x_3 &=& 0 \\ x_2 &=& -x_1 \\ x_1 &\in& \mathbb{R} \end{array} \right\}.
$$

Άρα ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι ο

$$X_1 = \{x_1(1, -1, 0) \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\}$$

και είναι διάστασης 1.

Όμοια, για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ λύνουμε το σύστημα $(A - \lambda_2 I)x = 0$ δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ -5 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_3 & = & \frac{1}{2}x_1 \\ x_2 & = & -\frac{3}{4}x_1 \\ x_1 & \in & \mathbb{R} \end{array} \right\},$$

οπότε

$$X_2 = \{(x_1, -\frac{3}{4}x_1, \frac{1}{2}x_1) \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(4, -1, 2) \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\},$$

που είναι επίσης διάστασης 1.

2. Οι ιδιοτιμές του L είναι ίδιες με αυτές του πίνακα του L ως προς μία (οποιαδήποτε) βάση. Βρίσκουμε τον πίνακα του L ως προς τη βάση $\mathcal{X}$. Από την εκφώνηση βλέπουμε ότι

$$A = [L; \mathcal{X}, \mathcal{X}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηρισιτκό πολυώνυμο του A είναι το

$$p(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - t + 1.$$

(α′) Όταν $K = \mathbb{R}$, ο A δεν έχει καμία ιδιοτιμή, αφού το $p(t)$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(β′) Όταν $K = \mathbb{C}$, οι ρίζες του $p(t)$ στο $\mathbb{C}$ είναι οι $\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Αφού ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος έχει ορίζουσα $\det(P) \neq 0$. Ακόμη,

$$PP^{-1} = I \ \Rightarrow \det(PP^{-1}) = \det(I) = 1 \Rightarrow \det(P)\det(P^{-1}) = 1,$$

άρα

$$\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι

$$\begin{array}{rcl} p_B(t) & = & \det(B - tI) \\ & = & \det(PAP^{-1} - tI) \\ & = & \det(P(A - tI)P^{-1}) \\ & = & \det(P)\det(A - tI)\det(P^{-1}) \\ & = & \det(A - tI) \\ & = & p_A(t), \end{array}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $PAP^{-1} - tI = P(A - tI)P^{-1}$ που ελέγχεται εύκολα. Άρα τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των δύο πινάκων είναι τα ίδια.

4. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 2 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 \\ -1 & -1 & 2-t \end{pmatrix} = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6 = -(t-1)(t-2)(t-3).$$

Άρα $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Επίσης έχουμε, $\mathrm{tr}(A) = 3 + 1 + 2 = \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2$ και $\det(A) = 6 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.