

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΡΥΠΤΟΛΟΓΙΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ #11

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΛΑΚΗΣ

1. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΣΑΚΙΔΙΟΥ

Το πρόβλημα του σακιδίου είναι το εξής: Δεδομένων θετικών πραγματικών (βαρών) a_1, \dots, a_n και θετικού πραγματικού (χωρητικότητας) E , ζητείται να υπολογιστεί ο μέγιστος αριθμός αντικειμένων που των οποίων το συνολικό βάρος είναι το πολύ E . Κανείς μπορεί να ορίσει διάφορες παραλλαγές του προβλήματος. Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί να αποφασιστεί αν υπάρχει υποσύνολο των αντικειμένων (βαρών) που να έχει άθροισμα βαρών ακριβώς E και αν υπάρχει να βρεθεί. Στο κρυπτοσύστημα που θα περιγράψουμε παρακάτω θα κάνουμε χρήση της δεύτερης παραλλαγής.

Παράδειγμα 1.1. Έστω ότι μας δίνονται τα βάρη 1, 2, 7, 12, 21, 28 και η χωρητικότητα 20. Θέλουμε να αποφασίσουμε αν υπάρχει υποσύνολο βαρών με άθροισμα 20 και αν υπάρχει να το βρούμε. Βλέπουμε ότι το υποσύνολο 1, 7, 12 έχει το ζητούμενο άθροισμα. Αν η χωρητικότητα ήταν 11 δεν θα υπήρχε τέτοιο υποσύνολο.

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Δεδομένων θετικών πραγματικών a_1, \dots, a_n , ζητείται να βρεθούν, αν υπάρχουν, αριθμοί $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ έτσι ώστε $\sum_{i=1}^n a_i x_i = E$. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ότι είναι **NP**-πλήρες, που πρακτικά σημαίνει ότι για κάθε αλγόριθμο που επιλύει το πρόβλημα υπάρχουν είσοδοι οι οποίες απαιτούν από τον αλγόριθμο υπερπολυωνυμικό χρόνο (απ' όσο γνωρίζουμε).

2. ΤΟ ΚΡΥΠΤΟΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ MERKLE-HELLMAN

Το 1978, οι Merkle και Hellman πρότειναν ένα σύστημα κρυπτογράφησης δημόσιου κλειδιού που βασίζεται στο πρόβλημα του σακιδίου. Η βασική ιδέα είναι το δημόσιο κλειδί να είναι ένα σύνολο βαρών $\{a_1, \dots, a_n\}$. Για να κρυπτογραφήσει κανείς ένα μήνυμα, το γράφει πάνω στο αλφάβητο $\{0, 1\}$ και το κρυπτογράφημα του μηνύματος $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ είναι το

$$(1) \quad E = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Εφόσον το πρόβλημα του σακιδίου είναι δύσκολο, τότε είναι δύσκολο για κάποιον επιτιθέμενο να βρει το μήνυμα δεδομένου του κρυπτογράμματος E και του δημόσιου κλειδιού. Βέβαια, το ίδιο δύσκολο είναι να αποκρυπτογραφήσει και ο νόμιμος παραλήπτης! Επιπλέον, δεν είναι καθόλου φανερό ότι η n -άδα (x_1, \dots, x_n) που ικανοποιεί την Εξ.(1) είναι μοναδική. Για να λύσουν τα δύο αυτά προβλήματα, οι Merkle και Hellman πρότειναν να χρησιμοποιούνται βάρη με

ειδική δομή, συγκεκριμένα υπεραύξουσες ακολουθίες. Επιλέγονται αριθμοί s_1, \dots, s_n που ικανοποιούν

$$s_{j+1} > \sum_{i=1}^j s_i, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Αν η κρυπτογράφηση γίνει με τέτοια βάρη, τότε η αποκρυπτογράφηση είναι μοναδική και γίνεται πολύ γρήγορα. Για τη μοναδικότητα, βλέπουμε ότι αν υπήρχαν δύο μηνύματα (x_1, \dots, x_n) και (y_1, \dots, y_n) που αντιστοιχούν στο ίδιο κρυπτογράφημα E , τότε

$$E = \sum_{i=1}^n s_i x_i = \sum_{i=1}^n s_i y_i$$

οπότε

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) s_i = 0.$$

Αν $(x_1, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n)$ τότε οι δύο n -άδες διαφέρουν σε μία τουλάχιστον συντεταγμένη. Ας είναι j ο μεγαλύτερος δείκτης για τον οποίο $x_i \neq y_i$, $1 \leq i \leq n$. Τότε

$$(y_j - x_j) s_j = \sum_{i=1}^{j-1} (x_i - y_i) s_i$$

οπότε

$$\begin{aligned} s_j = |y_j - x_j| |s_j| &= \left| \sum_{i=1}^{j-1} (x_i - y_i) s_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{j-1} |x_i - y_i| s_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{j-1} s_i \\ &< s_j \end{aligned}$$

που είναι αντίφαση. Άρα για υπεραύξουσες ακολουθίες η αποκρυπτογράφηση είναι μοναδική.

Ένας αλγόριθμος αποκρυπτογράφησης είναι ο παρακάτω. Τα δεδομένα είναι η ακολουθία s_1, \dots, s_n και το κρυπτογράφημα E .

- (1) $i := n$
- (2) Όσο $i \geq 1$ και $E > 0$ επανέλαβε
- (3) Αν $E \geq s_i$ τότε $x_i := 1$, διαφορετικά $x_i = 0$
- (4) $E := E - x_i s_i$
- (5) $i := i - 1$
- (6) Τέλος επανάληψης

Με την επιλογή υπεραύξουσών ακολουθιών βαρών έχουμε λύσει το πρόβλημα της αποκρυπτογράφησης για τον νόμιμο παραλήπτη: η αποκρυπτογράφηση είναι μοναδική και γίνεται εύκολα. Παραμένει βέβαια το πρόβλημα ότι με τον ίδιο

απλό τρόπο μπορεί να αποκρυπτογραφήσει ο καθένας. Αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς δεν έχουμε πει τίποτα για ιδιωτικό κλειδί, κάποια πληροφορία που έχει μόνο ο νόμιμος παραλήπτης και που τον βοηθά να αποκρυπτογραφεί. Η ιδέα των Merkle-Hellman ήταν να επιλέξουν δύο ακεραίους W, M , με $M > \sum_{i=1}^n s_i$ και $(W, M) = 1$. Μετά υπολογίζουν αριθμούς a_1, \dots, a_n από τις ιστιμίες

$$(2) \quad Wa_i \equiv s_i \pmod{M}, \quad i = 1, \dots, n$$

όπου $1 \leq a_i < M$, $i = 1, \dots, n$. Τώρα έχουμε όλα τα στοιχεία για να περιγράψουμε το σύστημα.

Ιδιωτικό κλειδί: Τα W, M και τα βάρη s_1, \dots, s_n .

Δημόσιο κλειδί: Τα a_1, \dots, a_n .

Αλγόριθμος κρυπτογράφησης

Το κρυπτογράφημα του $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ είναι το $C = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

Αλγόριθμος αποκρυπτογράφησης

(1) Υπολόγισε το $E \equiv WC \pmod{M}$, με $1 \leq E < M$.

(2) Υπολόγισε τα x_1, \dots, x_n που ικανοποιούν την $\sum_{i=1}^n s_i x_i = E$.

Η ορθότητα του αλγόριθμου αποκρυπτογράφησης φαίνεται από τα εξής. Οι Εξ.(2) συνεπάγονται

$$W \sum_{i=1}^n a_i x_i \equiv \sum_{i=1}^n s_i x_i \pmod{M}$$

άρα

$$WC \equiv \sum_{i=1}^n s_i x_i \pmod{M}.$$

Καθώς το M έχει επιλεγεί ώστε $M > \sum_{i=1}^n s_i \geq \sum_{i=1}^n s_i x_i$, θα έχουμε

$$E = \sum_{i=1}^n s_i x_i.$$

Παράδειγμα 2.1. Ας κατασκευάσουμε ένα σύστημα σακιδίου. Για το ιδιωτικό κλειδί, ας πάρουμε την υπεραύξουσα ακολουθία $s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 7, s_4 = 14, s_5 = 27, s_6 = 55, s_7 = 120$. Επιλέγουμε $M = 227$ και $W = 33$. Το 227 είναι πρώτος, άρα $(M, W) = 1$. Υπολογίζουμε το δημόσιο κλειδί λύνοντας τις

ισοτιμίες

$$\begin{aligned}
 33 \cdot a_1 &\equiv 1 \pmod{227} \iff a_1 \equiv 172 \pmod{227}, \\
 33 \cdot a_2 &\equiv 2 \pmod{227} \iff a_2 \equiv 117 \pmod{227}, \\
 33 \cdot a_3 &\equiv 7 \pmod{227} \iff a_3 \equiv 69 \pmod{227}, \\
 33 \cdot a_4 &\equiv 14 \pmod{227} \iff a_4 \equiv 138 \pmod{227}, \\
 33 \cdot a_5 &\equiv 27 \pmod{227} \iff a_5 \equiv 104 \pmod{227}, \\
 33 \cdot a_6 &\equiv 55 \pmod{227} \iff a_6 \equiv 153 \pmod{227}, \\
 33 \cdot a_7 &\equiv 120 \pmod{227} \iff a_7 \equiv 210 \pmod{227}.
 \end{aligned}$$

Δημοσιοποιούμε τα $a_1 = 172, a_2 = 117, a_3 = 69, a_4 = 138, a_5 = 104, a_6 = 153, a_7 = 210$. Για να κρυπτογραφήσουμε το μήνυμα $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$ υπολογίζουμε το

$$C = \sum_{i=1}^6 a_i x_i = 172 + 117 + 138 + 153 + 210 = 790.$$

Το κρυπτογράφημα του μηνύματος $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$ είναι το 790. Για να αποκρυπτογραφήσουμε το 790 υπολογίζουμε το

$$E \equiv WC \equiv 33 \cdot 790 \pmod{227} \implies E = 192.$$

Βρίσκουμε τώρα διαδοχικά τα ψηφία του αρχικού μηνύματος. $192 > 120$ άρα $x_7 = 1$ και συνεχίζουμε με το $192 - 120 = 72$. $72 > 55$ άρα $x_6 = 1$. $72 - 55 = 17 < 27$ άρα $x_5 = 0$. $17 > 14$ άρα $x_4 = 1$. $17 - 14 = 3 < 7$ οπότε $x_3 = 0$. $7 > 2$ άρα $x_2 = 1$ και $7 - 2 = 5 > 1$ άρα $x_1 = 1$.

Με όσα περιγράψαμε έως τώρα, έχουμε δείξει ότι το σύστημα των Merkle-Hellman είναι λειτουργικό, δηλαδή η κρυπτογράφηση και η αποκρυπτογράφηση γίνεται εύκολα (και σωστά). Δεν έχουμε πει τίποτα για την ασφάλεια του συστήματος. Αρχικά πιστευόταν ότι το σύστημα ήταν ασφαλές, καθώς ο επιτιθέμενος ήταν αντιμέτωπος με ένα πρόβλημα που όλοι πιστεύουν ότι είναι δύσκολο. Όπως αποδείχτηκε λίγα χρόνια αργότερα, το σύστημα αυτό, όπως και όλες οι παραλλαγές του, είναι εντελώς ανασφαλής. Ο λόγος είναι ότι ο επιτιθέμενος δεν έρχεται αντιμέτωπος με οποιαδήποτε είσοδο του προβλήματος του σακιδίου, αλλά με μια πολύ ειδική είσοδο, όπου τα βάρη προέρχονται από μια υπεραύξουσα ακολουθία.