Θεωρία Σωμάτων
Φυλλάδιο ασκήσεων #4

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

29 Μαρτίου 2015

1. Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω επεκτάσεις είναι κανονικές. Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.
   (α′) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$,
   (β′) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$,
   (γ′) $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$, όπου ℓ είναι πρώτος αριθμός και ω είναι μία ρίζα του πολυωνύμου $X^\ell - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ διαφορετική από το 1.

2. Έστω K/F επέκταση σωμάτων με βαθμό $[K : F] = 2$. Δείξτε ότι είναι κανονική.

3. Έστω $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $a^4 = 5$. Δείξτε ότι:
   (α′) Η επέκταση $\mathbb{Q}(ia^2)/\mathbb{Q}$ είναι κανονική.
   (β′) $\mathbb{Q}(ia^2) \leq \mathbb{Q}(a + ia)$ και η επέκταση $\mathbb{Q}(a + ia)/\mathbb{Q}(ia^2)$ είναι κανονική.
   (γ′) Η επέκταση $\mathbb{Q}(a + ia)/\mathbb{Q}$ δεν είναι κανονική.

4. Έστω επεκτάσεις $F \leq L \leq K$.
   (α′) Εάν η επέκταση K/F είναι κανονική, δείξτε ότι και η K/L είναι κανονική. Είναι και η L/F απαραίτητα κανονική;
   (β′) Εάν οι επεκτάσεις K/L και L/F είναι κανονικές, είναι και η K/F απαραίτητα κανονική;

5. Έστω σώμα F και πολυώνυμο $f \in F[X]$ με $\deg(f) = p$ πρώτο αριθμό. Υποθέστε ότι για κάθε επέκταση K του F, εάν το K περιέχει μία ρίζα του f τότε περιέχει όλες τις ρίζες του f. Δείξτε ότι είτε το f είναι ανάγωγο πάνω από το F ή έχει κάποια ρίζα (και άρα όλες τις ρίζες) στο F.

6. Δείξτε ότι παρακάτω πολυώνυμα ικανοποιούν τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης.
   (α′) $f = X^p - a \in \mathbb{Q}(\omega)[X]$, όπου p πρώτος και $\omega = e^{2\pi i/p}$.
   (β′) $f = X^p - a \in F[X]$, όπου p πρώτος και $\mathrm{char}(F) = p$.

7. Έστω K/F κανονική επέκταση και $f \in F[X]$ ανάγωγο πολυώνυμο. Εάν $P_1, P_2 \in K[X]$ είναι ανάγωγοι παράγοντες του f (στην παραγοντοποίηση του f εντός του $K[X]$), δείξτε ότι υπάρχει $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ τέτοιος ώστε $\sigma(P_1) = P_2$. Καταλήξτε ότι όλοι οι ανάγωγοι παράγοντες του f στην παραγοντοποίηση εντός του $K[X]$ έχουν ίδιο βαθμό.
   Υπόδειξη: Έστω $\bar{F}$ μία αλγεβρική θήκη του F η οποία περιέχει το K και $\alpha, \beta \in \bar{F}$ ρίζες των P_1 και P_2 αντίστοιχα. Η επέκταση $\bar{F}/F$ είναι κανονική, άρα μπορούμε να επεκτείνουμε τον ταυτοτικό αυτομορφισμό $\mathrm{id} : F \longrightarrow F$ σε ένα αυτομορφισμό $\tau : \bar{F} \longrightarrow \bar{F}$, τέτοιο ώστε $\tau(\alpha) = \beta$, αφού τα α, β είναι ρίζες του ίδιου αναγώγου $f \in F[X]$. Ορίστε σ να είναι ο περιορισμός του τ στο K. Τότε $\sigma(K) = K$, αφού η επέκταση K/F είναι κανονική, δηλαδή $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$. Παρατηρήστε ότι $0 = \tau(P_1(\alpha)) = \tau(P_1)(\tau(\alpha)) = \sigma(P_1)(\beta)$. Δείξτε ότι $\sigma(P_1) = P_2$.

8. Έστω $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{5})$.
   (α′) Υπολογίστε το βαθμό $[K : \mathbb{Q}]$.
   (β′) Δείξτε ότι η επέκταση $K/\mathbb{Q}$ δεν είναι κανονική.
   (γ′) Βρείτε την κανονική θήκη, N, της $K/\mathbb{Q}$.
   (δ′) Υπολογίστε το βαθμό $[N : \mathbb{Q}]$.