ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ $\#3$

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΑΚΗΣ

(1) Έστω p πρώτος. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $X^p - X - c \in \mathbb{F}_p[X]$, $c \neq 0$, είναι ανάγωγο.

(2) Έστω $\mathbb{F}_q$ πεπερασμένο σώμα και K πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{F}_q$. Αν $f \in \mathbb{F}_q[X]$ είναι ανάγωγο, δείξτε ότι όλοι οι ανάγωγοι παράγοντες του f στο $K[X]$ έχουν ίσο βαθμό.

(3) Έστω F σώμα χαρακτηριστικής p και K μια γνησίως μη διαχωρίσιμη επέκταση του F με $[K : F] = p^n$. Δείξτε ότι $\alpha^{p^n} \in F$ για κάθε $\alpha \in K$.

(4) Έστω σώματα $F \leq L \leq K$ τέτοια ώστε η επέκταση K/L είναι κανονική και η επέκταση L/F είναι γνησίως μη διαχωρίσιμη. Δείξτε ότι η επέκταση K/F είναι κανονική.

(5) Έστω σώμα k χαρακτηριστικής p και x, y μεταβλητές. Έστω $K = k(x, y)$ και $F = k(x^p, y^p)$. Δείξτε ότι η επέκταση K/F είναι γνησίως μη διαχωρίσιμη με $[K : F] = p^2$. Επίσης δείξτε ότι για κάθε $a \in K$, $a^p \in F$. Συμπαιράνετε ότι δεν υπάρχει $a \in K$ τέτοιο ώστε $K = F(a)$.

(6) Έστω $F \leq E$ αλγεβρική επέκταση και $F \leq L$ είναι γνησίως μη διαχωρίσιμη επέκταση, τότε $[EL : L]_s = [E : F]_s$.