ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ $\#4$

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΑΚΗΣ

(1) Έστω K, L πεπερασμένες επεκτάσεις Galois του F. Ο ομομορφισμός
$$\begin{array}{ccc} G(KL/F) & \longrightarrow & G(K/F) \times G(L/F) \\ \rho & \mapsto & (\rho|_K, \rho|_L) \end{array}$$
είναι 1-1. Δείξτε ότι είναι επί αν και μόνο αν $F = K \cap L$.

(2) Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ πρώτοι μεταξύ τους και ω_n, ω_m πρωταρχική n-οστή και πρωταρχική m-οστή ρίζα της μονάδας αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι $\mathbb{Q}(\omega_n)\mathbb{Q}(\omega_m) = \mathbb{Q}(\omega_{nm})$ και $\mathbb{Q}(\omega_n) \cap \mathbb{Q}(\omega_m) = \mathbb{Q}$, όπου ω_{nm} είναι πρωταρχική nm τάξης ρίζα της μονάδας.

(3) Έστω ω μια πρωταρχική 7η ρίζα της μονάδας. Υπολογίστε όλες τις ενδιάμεσες επεκτάσεις της επέκτασης $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$.

(4) Υπολογίστε το βαθμό του σώματος διάσπασης, K, του $X^{18} - 1$ πάνω από το $\mathbb{F}_2$. Πόσες και ποιές ενδιάμεσες επεκτάσεις έχει η επέκταση $K/\mathbb{F}_2$;

(5) Έστω $d > 3$ περιττός φυσικός αριθμός, $(d, 3) = 1$. Αν το $\Phi_d \in \mathbb{F}_2[X]$ είναι ανάγωγο, δείξτε ότι το Φ_{3d} είναι γινόμενο δύο αναγώγων βαθμού $\phi(d)$.