ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ $\#5$

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΑΚΗΣ

(1) Έστω K/F πεπερασμένη, διαχωρίσιμη επέκταση και $n \in \mathbb{N}$. Για $\alpha \in K$, δείξτε ότι η απεικόνιση $T_\alpha : K \to F$, $T_\alpha(x) = T_{K/F}(\alpha x)$ είναι F-γραμμική. Δείξτε επίσης ότι για $\alpha, \beta \in K$, $T_\alpha = T_\beta$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$. Δείξτε ότι αν $L : K \to F$ είναι F-γραμμική, τότε $L = T_\alpha$ γιά κάποιο $\alpha \in K$.

(2) Έστω $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ μία βάση της επέκτασης K/F. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική βάση $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ με την ιδιότητα $T_{K/F}(\alpha_i\beta_j) = \delta_{ij}$, για $1 \leq i, j \leq n$, όπου $\delta_{ij} = 0$ αν $i \neq j$ και $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$. Η βάση $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ ονομάζεται δυϊκή της $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης για τις γραμμικές απεικονίσεις $L_j : K \to F$ με $L_j(\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i) = c_j$ για να δείξετε ότι τα β_j υπάρχουν. Μετά δείξτε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα πάνω από το F.

(3) (α΄) Βρείτε τη δυϊκή βάση της βάσης $\{1, \sqrt{d}\}$ της επέκτασης $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$, όπου $d \in \mathbb{Q}$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο στο $\mathbb{Q}$.
(β΄) Εξετάστε αν υπάρχει βάση της επέκτασης $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ η οποία να είναι δυϊκή του εαυτού της.
(γ΄) Υπολογίστε μία βάση της επέκτασης $\mathbb{F}_{2^2}/\mathbb{F}_2$ η οποία είναι δυϊκή του εαυτού της.

(4) Έστω q δύναμη πρώτου και $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι για $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$, $N_{q^n|q}(\alpha) = 1$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta^{q-1}$ για κάποιο $\beta \in \mathbb{F}_{q^n}$.

(5) Δίνεται το πολυώνυμο $f = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Αν K είναι σώμα ανάλυσης του f πάνω από το $\mathbb{Q}$, υπολογίστε το βαθμό της επέκτασης $[K : \mathbb{Q}]$ και δείξτε ότι η ομάδα Galois είναι κυκλική.