ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2011-2012

Θ. Γαρεφαλάκης

Μ1212 – Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

1. Δίνονται τα διανύσματα $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)$ του $\mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι το $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ και υπολογίστε τις τιμές $v_j^*(x,y,z)$ για $j = 1,2,3$ και κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Έστω $\{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (0,1,1)\}$ μία βάση του $\mathbb{R}^3$ και $U = \mathrm{Span}(\{v_1 + v_3, v_2\})$. Υπολογίστε μία βάση του U^0.

3. Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος, U ένας υπόχωρος του V και W ένα συμπλήρωμα του U εντός του V. Ορίζουμε τις απεικονίσεις $\rho_U, \rho_W \in \mathcal{L}(V)$, $\rho_U(u+w) = u$ και $\rho_W(u+w) = w$. Εάν $f \in V^*$ αποδείξτε τα παρακάτω:

   (α') $f \circ \rho_U, f \circ \rho_W \in V^*$,

   (β') $f \circ \rho_U \in W^0$ και $f \circ \rho_W \in U^0$,

   (γ') $f = f \circ \rho_W + f \circ \rho_U$,

   (δ') $(U \oplus W)^* = U^0 \oplus W^0$.

4. Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και U, W υπόχωροι του V. Εάν $U^0 = W^0$ δείξτε ότι $U = W$.
   Υπόδειξη: Αποδείξτε αρχικά την πρόταση στην ειδική περίπτωση που $U \leq W$. Στη συνέχεια ανάγετε τη γενική περίπτωση ειδική περίπτωση κάνοντας χρήση της σχέσης $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.