ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2011-2012
Θ. Γαρεφαλάκης

M1212 – Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 8

1. Δίνεται η $L \in \mathcal{L}(K[T]_{\leq 2})$ με τύπο $L(a + bT + cT^2) = c + aT + bT^2$. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές της L και τις διαστάσεις των αντίστοιχων ιδιόχωρων, για $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_7$.

2. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$
Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο πίνακας A να έχει καμία, μία ή δύο (πραγματικές) ιδιοτιμές. Σε κάθε περίπτωση εξετάστε την αλγεβρική και τη γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής.

3. Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος διάστασης 2 και $L \in \mathcal{L}(V)$.
   (α΄) Εάν η L έχει μία ιδιοτιμή λ με γεωμετρική πολλαπλότητα 2, δείξτε ότι ο πίνακας της L ως προς *οποιαδήποτε* βάση $\mathcal{B}$ του V είναι ο λI_n.
   (β΄) Εάν η L έχει δύο διακριτές ιδιοτιμές λ_1, λ_2, δείξτε ότι *υπάρχει* βάση $\mathcal{B}$ του V τέτοια ώστε ο πίνακας της L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ να είναι διαγώνιος.

4. Έστω V ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος και $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ μία βάση του. Ορίζουμε το γραμμικό τελεστή $L \in \mathcal{L}(V)$ με $L(v_1) = -2v_1 - 2v_2 + av_3$, $L(v_2) = v_1 + 3v_2 + bv_3$ και $L(v_3) = 2v_2 + v_3$.
   (α΄) Υπολογίστε $a, b \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε τα $-1, 1$ να είναι ιδιοτιμές του L.
   (β΄) Δείξτε ότι για τιμές των a, b που υπολογίσατε, το σύνολο των ιδιοτιμών του L είναι το $\{-1, 1, 2\}$.
   (γ΄) Βρείτε μία βάση του L ως προς την οποία ο πίνακας του L να είναι διαγώνιος.

5. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
Υπολογίστε πίνακες $P, D \in M_3(\mathbb{R})$, όπου ο P είναι αντιστρέψιμος και ο D είναι διαγώνιος, τέτοιους ώστε $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Υπολογιστε τον πίνακα A^{100}.