**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ RADON-NIKODYM ΚΑΙ KREIN-MILMAN ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ BANACH

**ΜΑΡΙΑ ΕΥΘΥΜΙΟΥ**

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία παρουσιάστηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης την 1/3/2005.
Επιβλέπουσα καθηγήτρια ήταν η Σ. Παπαδοπούλου.
Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι:
Σ. Παπαδοπούλου, Μ. Λάμπρου και Γ. Κωστάκης.

# Περιεχόμενα

# Πρόλογος

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να μελετήσει τα έως τώρα γνωστά αποτελέσματα για την σχέση μεταξύ των ιδιοτήτων Krein-Milman και Radon-Nikodým σε χώρους Banach.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγονται οι έννοιες των διανυσματικών μέτρων και του ολοκληρώματος Bochner, έννοιες απαραίτητες για τον ορισμό της ιδιότητας Radon-Nikodým.

Το 1967 ο M.A. Rieffel εισήγαγε στο [14] την έννοια της αιχμηρότητας και παρουσίασε το πρώτο αποτέλεσμα που συνέδεε την ιδιότητα Radon-Nikodým με γεωμετρικά χαρακτηριστικά των χώρων Banach. Απέδειξε, συγκεκριμένα, την αναγκαιότητα της ιδιότητας Radon-Nikodým για την αιχμηρότητα του χώρου. Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά στην δεύτερη ενότητα του δευτέρου κεφαλαίου.

Το 1973 ο Maynard, στο [10], απέδειξε την ισοδυναμία της ιδιότητας Radon-Nikodým με μία άλλη γεωμετρική ιδιότητα, φαινομενικά ασθενέστερη της αιχμηρότητας, την σ-αιχμηρότητα. Το 1974, οι W.J. Davis και R.R. Phelps στο [12], παρατήρησαν οτι η απόδειξη του Maynard μπορούσε να τροποποιηθεί ώστε να λειτουργήσει και στην περίπτωση της αιχμηρότητας, ολοκληρώνοντας έτσι έναν πρώτο σημαντικό χαρακτηρισμό για την ιδιότητα Radon-Nikodým, την ισοδυναμία της με την αιχμηρότητα. Στην τρίτη ενότητα του δευτέρου κεφαλαίου παρουσιάζουμε αναλυτικά μία απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, λιγότερο περίπλοκη από αυτήν των Davis και Phelps, η οποία παρουσιάστηκε την ίδια χρονιά στο [8] και οφείλεται στον R.E. Huff.

Επίσης το 1974, παρουσιάστηκαν στο [11] δύο αποδείξεις της αναγκαιότητας της ιδιότητας Krein-Milman για την αιχμηρότητα ενός χώρου Banach και επομένως για την ισχύ της ιδιότητας Radon-Nikodým. Η πρώτη απόδειξη ανήκει στον Joram Lindenstrauss, ο οποίος έδειξε κατ΄ ευθείαν οτι η αιχμηρότητα συνεπάγεται την ιδιότητα Krein-Milman, ενώ η δεύτερη, του R.R.Phelps, δείχνει πρώτα οτι όταν ο χώρος είναι αιχμηρός τότε κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο σύνολο είναι η κλειστή, κυρτή θήκη των ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του (και όχι απλά των ακραίων, όπως απαιτεί η ιδιότητα Krein-Milman). Και οι δύο αυτές αποδείξεις αναλύονται στο τρίτο κεφάλαιο.

Από τότε, έχουν βρεθεί κάποιες περιπτώσεις στις οποίες ισχύει η ισοδυναμία των δύο ιδιοτήτων, παραδείγματος χάριν οι δυϊκοί χώροι Banach και τα ισχυρά κανονικά σύνολα, αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζουμε στο τελευταίο κεφάλαιο. Το βασικό όμως ερώτημα, εάν δηλαδή η ιδιότητα Krein-Milman αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την ισχύ της ιδιότητας Radon-Nikodým, παραμένει μέχρι σήμερα αναπάντητο.

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγικές έννοιες

## 1.1 Σύγκλιση χωρίς περιορισμό

**Ορισμός 1.1.1.** *(α) Λέμε οτι η σειρά* $\sum x_i$ *στον χώρο Banach* $X$ *συγκλίνει απολύτως, αν συγκλίνει η αντίστοιχη σειρά πραγματικών αριθμών* $\sum \|x_i\|$.

*(β) Λέμε οτι η σειρά* $\sum x_i$ *του χώρου Banach* $X$ *είναι απολύτως Cauchy, αν η αντίστοιχη σειρά πραγματικών αριθμών* $\sum \|x_i\|$ *είναι Cauchy.*

**Ορισμός 1.1.2.** *Έστω* $\sum x_i$ *σειρά σε κάποιο χώρο Banach* $X$*. Λέμε οτι η σειρά* **συγκλίνει χωρίς περιορισμό** *(***unconditionally***), αν η* $\sum x_{\pi(i)}$ *συγκλίνει με την μετρική που επάγει η νόρμα του* $X$*, για κάθε αναδιάταξη* $\pi$ *του* $\mathbb{N}$.

**Πρόταση 1.1.3.** *Τα εξής είναι ισοδύναμα :*

1. *Υπάρχει* $x \in X$*, τέτοιο ώστε για κάθε* $\varepsilon > 0$*, να υπάρχει* $F \subseteq \mathbb{N}$ *πεπερασμένο, έτσι ώστε για κάθε* $F' \supseteq F$ *πεπερασμένο, να ισχύει*

$$\left\| x - \sum_{i \in F'} x_i \right\| < \varepsilon$$

2. *Η σειρά* $\sum x_i$ *συγκλίνει χωρίς περιορισμό.*

*Απόδειξη.* "(1) $\Longrightarrow$ (2)" Έστω $\pi$ αναδιάταξη του $\mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το (1) υπάρχει $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε $\|x - \sum_{i\in F'} x_i\| < \varepsilon$, για κάθε $F' \supseteq F$ πεπερασμένο. Αφού το $\pi$ είναι αναδιάταξη του $\mathbb{N}$ και το $F$ πεπερασμένο, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n_0)\} \supseteq F$. Αλλά τότε, για κάθε $n > n_0$, $\{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n)\} \supseteq F$, άρα

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)} \right\| < \varepsilon$$

Δηλαδή, η $\sum x_{\pi(i)}$ συγκλίνει στο $x$ για κάθε αναδιάταξη $\pi$ του $\mathbb{N}$.

"(2) $\Longrightarrow$ (1)" Αφού η σειρά συγκλίνει χωρίς περιορισμό, θα υπάρχει $x \in X$, για το οποίο $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = x$. Έστω οτι δεν ισχύει το (1). Τότε, για αυτό το $x \in X$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, να υπάρχει $F' \supseteq F$ πεπερασμένο με

$$\left\| x - \sum_{i\in F'} x_i \right\| \geq \varepsilon$$

Από το οτι $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = x$ παίρνουμε τα ακόλουθα

- Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n_1} x_i \right\| < 1$$

.

Για το $\{1, 2, ..., n_1\}$, όμως, υπάρχει $F_1 \supseteq \{1, 2, ..., n_1\}$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε

$$\left\| x - \sum_{i\in F_1} x_i \right\| \geq \varepsilon$$

- Υπάρχει $n_2 > \max F_1$ με

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n_2} x_i \right\| < 1/2$$

και $F_2 \supseteq \{1, 2, ..., n_2\}$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε

$$\left\| x - \sum_{i\in F_2} x_i \right\| \geq \varepsilon$$

$$\vdots$$

Κατασκευάζουμε έτσι ακολουθία $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ και ακολουθία $E_k = F_k \setminus \{1, 2, ..., n_k\}$ (κάποια από τα $E_k$ πιθανόν να είναι κενά), με $n_k < \min E_k \leq \max E_k < n_{k+1}$ (όταν οι ποσότητες που εμφανίζονται υπάρχουν), τέτοιες ώστε

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n_k} x_i \right\| < \frac{1}{k} \quad \text{και}$$

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n_k} x_i - \sum_{i\in E_k} x_i \right\| \geq \varepsilon$$

Τότε, όμως,

$$\varepsilon \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n_k} x_i - \sum_{i\in E_k} x_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n_k} x_i \right\| + \left\| \sum_{i\in E_k} x_i \right\| < \frac{1}{k} + \left\| \sum_{i\in E_k} x_i \right\|$$

Άρα

$$\left\| \sum_{i\in E_k} x_i \right\| > \varepsilon - \frac{1}{k}$$

Επομένως, για "μεγάλα" $k$, το $\|\sum_{i\in E_k} x_i\|$ δεν είναι "πολύ μικρότερο" από το $\varepsilon$ (π.χ. $> \frac{\varepsilon}{2}$)

Κατασκευάζουμε αναδιάταξη π του $\mathbb{N}$

$$E_1, \{n \in \mathbb{N} \setminus E_1 : n < \max E_1\}, E_2, \{n \in \mathbb{N} \setminus E_2 : \max E_1 < n < \max E_2\},$$

$$..., E_k, \{n \in \mathbb{N} \setminus E_k : \max E_{k-1} < n < \max E_k\}, ...$$

Τότε, η $\sum x_{\pi(i)}$ δεν μπορεί να συγκλίνει, διότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων δεν είναι Cauchy.

($\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_{k_1} \in \mathbb{N} : \min E_{n_{k_1}} > n$ και $\|\sum_{i\in E_{n_{k_1}}} x_i\| > \varepsilon/2$)

**Άτοπο**, διότι η $\sum x_i$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό. □

**Πόρισμα 1.1.4.** *Αν η σειρά $\sum x_i$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό, τότε το όριο της $\sum x_{\pi(i)}$ είναι ίδιο για κάθε αναδιάταξη π του $\mathbb{N}$. Μπορούμε, λοιπόν, στο εξής να λέμε οτι η $\sum x_i$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό στο $x$.*

*Απόδειξη.* Έστω οτι η $\sum x_i$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό. Τότε θα ισχύει το (1) της Πρότασης 1.1.3. Τότε, όμως, η απόδειξη "(1) $\Longrightarrow$ (2)" δίνει το ζητούμενο. □

**Λήμμα 1.1.5.** *Αν η $\sum x_i$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει χωρίς περιορισμό.*

*Απόδειξη.* Έστω οτι η σειρά $\sum x_i$ συγκλίνει απολύτως. Τότε, θα υπάρχει $x \in X$, στο οποίο θα συγκλίνει η σειρά με την μετρική που επάγει η νόρμα του X. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - x \right\| < \varepsilon/2, \quad \text{για κάθε } \ n \geq n_0$$

$$\text{και} \quad \sum_{i=m}^{n} \|x_i\| < \varepsilon/2, \quad \text{για κάθε } \ m, n \geq n_0$$

(αφού θα είναι και απολύτως Cauchy)

Για κάθε $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο έχουμε

$$\left\| \sum_{i\in F} x_i \right\| \leq \sum_{i\in F} \|x_i\| \leq \sum_{i=\min F}^{\infty} \|x_i\|$$

Θεωρούμε $F = \{1, 2, ..., n_0\}$. Τότε για κάθε $F' \supseteq F$ πεπερασμένο έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{i \in F'} x_i \right\| &= \left\| x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i - \sum_{i \in F' \setminus F} x_i \right\| \\
&\leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i \right\| + \left\| \sum_{i \in F' \setminus F} x_i \right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i \in F' \setminus F} \|x_i\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει το (1) της Πρότασης 1.1.3 □

**Ορισμός 1.1.6.** *Λέμε οτι η σειρά $\sum x_i$ είναι* **Cauchy χωρίς περιορισμό** *(***unconditionally Cauchy***), αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε $\| \sum_{F'} x_i \| < \varepsilon$, για κάθε $F' \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο με $F' \cap F = \emptyset$.*

**Πρόταση 1.1.7.** *Μια σειρά $\sum x_i$ στον χώρο Banach $X$ είναι Cauchy χωρίς περιορισμό, αν και μόνο αν συγκλίνει χωρίς περιορισμό.*

*Απόδειξη.* " $\Longrightarrow$ " Έστω οτι η $\sum x_i$ είναι Cauchy χωρίς περιορισμό. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο με

$$\left\| \sum_{i \in F'} x_i \right\| < \varepsilon, \qquad \text{για κάθε } F' \subseteq \mathbb{N} \text{ πεπερασμένο με } F' \cap F = \emptyset$$

Άρα για $n_0 = \max F + 1$, έχουμε οτι για κάθε $m > n \geq n_0$,

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} x_i \right\| < \varepsilon$$

Άρα η $\sum x_i$ είναι Cauchy. Αφού ο X είναι Banach, η σειρά θα συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Θα δείξουμε οτι συγκλίνει στο $x$ χωρίς περιορισμό.

Θεωρούμε $\varepsilon, F$ όπως προηγουμένως. Αφού $\sum x_i = x$, υπάρχει $n_1 > \max F$, τέτοιο ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} x_i - x \right\| < \varepsilon$$

Θέτουμε $F_1 = \{1, 2, ..., n_1\}$. Αφού $F \subseteq F_1$, για κάθε $F'$ με $F' \supseteq F_1$ έχουμε

$$\left\| \sum_{i \in F' \setminus F_1} x_i \right\| < \varepsilon$$

Τότε, για κάθε $F' \supseteq F_1$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i\in F'} x_i - x \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{i\in F'\setminus F_1} x_i - x \right\| \\ &\le \left\| \sum_{i=1}^{n_1} x_i - x \right\| + \left\| \sum_{i\in F'\setminus F_1} x_i \right\| < 2\varepsilon\end{aligned}$$

Άρα ισχύει το (1) της Πρότασης 1.1.3

" $\Longleftarrow$ " Έστω οτι η $\sum x_i$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό στο $x$. Από την Πρόταση 1.1.3, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε για κάθε $F' \supseteq F$ πεπερασμένο,

$$\left\| \sum_{i\in F'} x_i - x \right\| < \varepsilon$$

Έστω $E \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, με $E \cap F = \emptyset$. Τότε

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i\in E} x_i \right\| &= \left\| \sum_{i\in E\cup F} x_i - x + x - \sum_{i\in F} x_i \right\| \\ &\le \left\| x - \sum_{i\in E\cup F} x_i \right\| + \left\| x - \sum_{i\in F} x_i \right\| \quad (E\cup F, F \supseteq F \ \text{ πεπερασμένα}) \\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

Άρα η $\sum x_i$ είναι Cauchy χωρίς περιορισμό. □

**Πρόταση 1.1.8.** *Η $\sum x_i$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό, αν και μόνο αν η $\sum \varepsilon_i x_i$ συγκλίνει για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_i$.*

*Απόδειξη.* " $\Longrightarrow$ " Έστω οτι η $\sum x_i$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό. Από την Πρόταση 1.1.7, για δοσμένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε $\|\sum_{F'} x_i\| < \varepsilon$ για κάθε $F' \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, με $F \cap F' = \emptyset$.

Έστω $n_0 > \max F$. Τότε, για $m > n > n_0$ έχουμε οτι

$$\{n, n+1, ..., m\} \cap F = \emptyset$$

Άρα, αν θεωρήσουμε

$$A_1 = \{i \in \mathbb{N} : n \le i \le m \quad \text{και} \quad \varepsilon_i = 1\} \quad \text{και}$$

$$A_2 = \{i \in \mathbb{N} : n \le i \le m \quad \text{και} \quad \varepsilon_i = -1\}$$

θα έχουμε

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} \varepsilon_i x_i \right\| \le \left\| \sum_{i\in A_1} x_i \right\| + \left\| \sum_{i\in A_2} x_i \right\| < 2\varepsilon$$

Άρα η $\sum \varepsilon_i x_i$ είναι Cauchy στον χώρο Banach X, επομένως συγκλίνει.

" $\Longleftarrow$ " Έστω οτι η $\sum \varepsilon_i x_i$ συγκλίνει για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_i$, αλλά η $\sum x_i$ δεν συγκλίνει χωρίς περιορισμό. Επομένως, δεν είναι ούτε Cauchy χωρίς περιορισμό. Άρα, υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $F_k \subseteq \mathbb{N}, k = 1, 2, ...$ πεπερασμένα, με

$$\left\| \sum_{i \in F_k} x_i \right\| > \varepsilon \quad \text{για κάθε } \ k \ \text{ και } \ \max F_{k-1} < \min F_k$$

Ορίζουμε

$$\nu_i = 1, \text{ για } \ i \in \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \ \text{ και } \ \nu_i = -1, \text{ για } \ i \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

Επίσης,

$$E_k = \{\min F_k, \min F_k + 1, ..., \max F_k\} \supseteq F_k$$

Τότε

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in E_k} x_i + \sum_{i \in E_k} x_i \nu_i \right\| &= \left\| \sum_{i \in F_k} x_i + \sum_{i \in E_k \setminus F_k} x_i + \sum_{i \in F_k} x_i - \sum_{i \in E_k \setminus F_k} x_i \right\| \\ &= 2 \left\| \sum_{i \in F_k} x_i \right\| \geq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Αφού

$$2\varepsilon \leq \left\| \sum_{i \in E_k} x_i + \sum_{i \in E_k} x_i \nu_i \right\| \leq \left\| \sum_{i \in E_k} x_i \right\| + \left\| \sum_{i \in E_k} \nu_i x_i \right\|$$

πρέπει για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να ισχύει

$$\left\| \sum_{i \in E_k} x_i \right\| \geq \varepsilon \ \text{ είτε } \ \left\| \sum_{i \in E_k} \nu_i x_i \right\| \geq \varepsilon$$

$$\text{Αν } \ \left\| \sum_{i \in E_k} x_i \right\| \geq \varepsilon, \ \text{ θέτουμε } \ \varepsilon_i = 1, \ \text{ για όλα τα } \ i \in E_k$$

$$\text{ενώ αν } \ \left\| \sum_{i \in E_k} \nu_i x_i \right\| \geq \varepsilon, \text{θέτουμε } \ \varepsilon_i = \nu_i, \ \text{ για όλα τα } \ i \in E_k$$

(Αν για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ισχύουν και τα δύο, μπορούμε να δουλέψουμε με οποιαδήποτε από τις δυό περιπτώσεις)

$$\text{Για τα } \ i \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \ \text{ θέτουμε } \ \varepsilon_i = 1.$$

Τότε η σειρά $\sum \varepsilon_i x_i$ δεν είναι Cauchy, διότι

$$\text{για κάθε } n \in \mathbb{N}, \text{ υπάρχει } k \in \mathbb{N}, \text{ με } n < \min E_k \text{ και } \left\| \sum_{i \in E_k} \varepsilon_i x_i \right\| \geq \varepsilon$$

Αρα δεν μπορεί να συγκλίνει. □

**Πρόταση 1.1.9.** *Η $\sum x_i$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό, αν και μόνο αν η $\sum x_{n_i}$ συγκλίνει για κάθε υπακολουθία $\{x_{n_i}\}$ της $\{x_i\}$.*

*Απόδειξη.* " $\Longrightarrow$ " Έστω οτι η $\sum x_i$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό και έστω $\{x_{n_i}\}$ υπακολουθία της $\{x_i\}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\| \sum_F x_i \| < \varepsilon$, για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq \mathbb{N}$ με $n_0 < \min F$ (αφού η $\sum x_i$ είναι Cauchy χωρίς περιορισμό)

Έστω $k, l > n_0$. Τότε $n_k, n_l > n_0$, άρα $\| \sum_{i=k}^{l} x_{n_i} \| < \varepsilon$. Άρα η $\{\sum x_{n_i}\}$ είναι Cauchy, οπότε συγκλίνει.

" $\Longleftarrow$ " Έστω οτι η $\sum x_{n_i}$ συγκλίνει για κάθε υπακολουθία $\{x_{n_i}\}$ της $\{x_i\}$ και έστω οτι η $\sum x_i$ δεν συγκλίνει χωρίς περιορισμό. Άρα δεν είναι Cauchy χωρίς περιορισμό. Επομένως, υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και ακολουθία $\{F_i\}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\max F_i < \min F_{i+1}$ και $\| \sum_{i \in F_k} x_i \| \geq \varepsilon$. (Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.1.8," $\Leftarrow$ ")

Κατασκευάζουμε ακολουθία $\{n_i\}$, τέτοια ώστε να εμφανίζονται κατά αύξουσα σειρά τα στοιχεία των $F_1, F_2, ..., F_k, ...$.

Η $\sum x_{n_i}$ δεν μπορεί να είναι Cauchy, άρα δεν συγκλίνει. **Άτοπο**. □

Συνολικά, μπορούμε να πούμε οτι

**Θεώρημα 1.1.10.** *Τα εξής είναι ισοδύναμα :*

1. *Η $\sum x_n$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό.*

2. *Υπάρχει $x \in X$, έτσι ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε για κάθε $F' \supseteq F$ πεπερασμένο, ισχύει*

$$\left\| x - \sum_{i \in F'} x_i \right\| < \varepsilon$$

3. *Η $\sum x_n$ είναι Cauchy χωρίς περιορισμό.*

4. *Η $\sum \varepsilon_i x_i$ συγκλίνει για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_i$.*

5. *Η $\sum x_{n_i}$ συγκλίνει για κάθε υπακολουθία $\{x_{n_i}\}$ της $\{x_i\}$*

## 1.2 Διανυσματικά μέτρα

**Ορισμός 1.2.1.** *Έστω $(S, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω $X$ χώρος Banach. Ένα* **X-μέτρο** *στον $S$ είναι μια απεικόνιση $\tau : \mathcal{A} \longrightarrow X$, τέτοια ώστε*

1. $\tau(\emptyset) = 0$
2. $\tau(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$ *για κάθε ακολουθία $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο συνόλων στην σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$.*

Παρατηρούμε οτι για να ισχύει η (2) πρέπει η σειρά $\sum \tau(A_i)$ να συγκλίνει χωρίς περιορισμό.

**Ορισμός 1.2.2.** *Η* **κύμανση (variation)** *$|\tau|$ του $\tau$ είναι το σ-προσθετικό, μη-αρνητικό μέτρο στον $(S, \mathcal{A})$ με τύπο*

$$|\tau|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} \|\tau(A_i)\| : \{A_i\}_{i=1}^{k} \subseteq \mathcal{A} \ \ \textit{πεπερασμένη διαμέριση του} \ \ A \right\}$$

**Σημείωση 1.2.3.** *Το γεγονός οτι το $|\tau|$ είναι σ-προσθετικό, μπορεί να δειχτεί ως εξής :*

*Έστω $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ξένα ανά δύο στην$\mathcal{A}$.*

1. *Αν για κάποιο $A_{i_0}$ έχουμε $|\tau|(A_{i_0}) = +\infty$, τότε προφανώς*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\tau|(A_i) = +\infty$$

*και*

$$|\tau|(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \|\tau(A_{i_0})\| + \sum_{i \neq i_0} \|\tau(A_i)\| = |\tau|(A_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} \|\tau(A_i)\| = +\infty$$

*Επομένως*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\tau|(A_i) = |\tau|(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = +\infty$$

2. *Αν $|\tau|(A_i) < +\infty$ για όλα τα $i$, τότε*

   (α′) *θεωρούμε ένα $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $A_i$ υπάρχει πεπερασμένη διαμέριση $\{B_i^j\}_{j=1}^{k_i}$ του $A_i$ με*

$$\sum_{j=1}^{k_i} \|\tau(B_i^j)\| > |\tau|(A_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}$$

*οπότε και*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_i}\|\tau(B_i^j)\| \geq \sum_{i=1}^{\infty}|\tau|(A_i) - \varepsilon \qquad (1)$$

*Όμως, αν θεωρήσουμε τις πεπερασμένες διαμερίσεις του* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\mathcal{B}_1 = \{B_1^1, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus B_1^1\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{B_1^1, B_1^2, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus (B_1^1 \cup B_1^2)\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{B}_{k_1+1} = \left\{ B_1^1, ..., B_1^{k_1}, B_2^1, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus (B_1^1 \cup ... \cup B_1^{k_1} \cup B_2^1) \right\}$$

$$\vdots$$

*τότε*

$$\sum_{B\in\mathcal{B}_j}\|\tau(B)\| \leq |\tau|(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i), \qquad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

*Άρα*

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{B\in\mathcal{B}_j}\|\tau(B)\| \leq |\tau|(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

*και*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_i}\|\tau(B_i^j)\| \leq |\tau|(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \qquad (2)$$

*Από τις (1) και (2) έχουμε οτι*

$$|\tau|(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty}|\tau|(A_i) - \varepsilon$$

*Αφού το ε ήταν τυχόν, θα πρέπει*

$$|\tau|(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty}|\tau|(A_i)$$

(β΄) *Θεωρούμε τυχούσα πεπερασμένη διαμέριση* $\{B_j\}_{j=1}^k$ *του* $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$. *Τότε, για κάθε* $i \in \mathbb{N}$ *έχουμε*

$$|\tau|(A_i) \geq \sum_{j=1}^k \|\tau(A_i \cap B_j)\|$$

*Άρα*

$$\sum_{i=1}^\infty |\tau|(A_i) \geq \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^k \|\tau(A_i \cap B_j)\| \qquad (3)$$

*Αφού το ένα άθροισμα έχει πεπερασμένο πλήθος προσθετέων, η σειρά της άθροισης μπορεί να αλλάξει και επομένως η (3) θα γίνει*

$$\sum_{i=1}^\infty |\tau|(A_i) \geq \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^\infty \|\tau(A_i \cap B_j)\| \geq \sum_{j=1}^k \left\| \sum_{i=1}^\infty \tau(A_i \cap B_j) \right\|$$

*και αφού το* $\tau$ *είναι σ-προσθετικό*

$$\sum_{j=1}^k \left\| \sum_{i=1}^\infty \tau(A_i \cap B_j) \right\| = \sum_{j=1}^k \|\tau(B_j)\|$$

*Δηλαδή, για τυχούσα πεπερασμένη διαμέριση* $\{B_j\}_{j=1}^k$ *του* $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ *έχουμε*

$$\sum_{i=1}^\infty |\tau|(A_i) \geq \sum_{j=1}^k \|\tau(B_j)\|$$

*Παίρνοντας supremum στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε στην*

$$\sum_{i=1}^\infty |\tau|(A_i) \geq |\tau|(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)$$

*Τελικά σε κάθε περίπτωση*

$$\sum_{i=1}^\infty |\tau|(A_i) = |\tau|(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)$$

Θα ενδιαφερθούμε κυρίως για μέτρα **φραγμένης κύμανσης** (**of finite variation**), δηλαδή για διανυσματικά μέτρα $\tau$, τέτοια ώστε $|\tau|(S) < \infty$.

**Παραδείγματα**

1. Έστω $S = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ και X τυχών χώρος Banach.

   Για να ορίσουμε ένα X-μέτρο τ στο $\mathbb{N}$, αρκεί να ορίσουμε τα $\tau(\{i\}) = x_i \in X$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ , έτσι ώστε η σειρά $\sum x_i$ να συγκλίνει χωρίς περιορισμό.

   Ένα τέτοιο μέτρο θα είναι φραγμένης κύμανσης, αν και μόνο αν η σειρά συγκλίνει απολύτως, δηλαδή αν $\sum \|x_i\| < \infty$, διότι

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in A}\|x_i\| &= \sum_{i\in A}\|\tau(\{i\})\| \\
&\quad (\{\{i\}\} \text{ είναι η μοναδική μη τετριμμένη διαμέριση του } \{i\}) \\
&= \sum_{i\in A}|\tau|(\{i\}) \\
&\quad (\text{το } |\tau| \text{ είναι σ-προσθετικό από την σημείωση} 1.2.3) \\
&= |\tau|(A), \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

   Επομένως και

$$|\tau|(\mathbb{N}) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\|x_i\|$$

2. Έστω $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ο συνήθης χώρος Lebesgue στο $[0, 1]$ και έστω $X = L_p(0, 1)$, όπου $1 \le p \le \infty$.

   Ορίζουμε $\tau : \mathcal{A} \longrightarrow X$ με $\tau(A) = \chi_A$, για κάθε $A \subseteq [0, 1]$, όπου $\chi_A$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του A.

   Τότε

   (α′) Το τ είναι σ-προσθετικό, αν και μόνο αν $p < \infty$.

   (β′) Το τ είναι φραγμένης κύμανσης, αν και μόνο αν $p = 1$.

   Πράγματι

   (α′) Για $1 \le p < \infty$ το τ είναι μέτρο, διότι
   •$\tau(\emptyset) = \chi_\emptyset = 0 \in L_p(0, 1)$
   • Αν $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ ξένα ανά δύο, τότε

$$\tau(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}$$

   και

$$\sum_{i=1}^\infty \tau(A_i) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^k \chi_{A_i}$$

   Επομένως,

$$\tau(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \tau(A_i) \Longleftrightarrow \|\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty} - \chi_{\bigcup_{i=1}^k A_i}\|_p \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\|\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty}} - \chi_{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}\|_p &= \|\chi_{\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i}\|_p \\ &= \left( \int_{[0,1]} \chi_{\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i} d\mu \right)^{1/p} \\ &\overset{A_i \xi\acute{\epsilon}\nu\alpha}{=} \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} \mu(A_i) \right)^{1/p} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Για $p = \infty$ , το τ δεν είναι σ-προσθετικό, διότι π.χ για

$$A_n = \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], \quad \text{έχουμε}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1]$$

Άρα

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \begin{cases} 1, & \text{στο } (0,1] \\ 0, & \text{στο } 0 \end{cases}$$

Όμως,

$$\left\| \chi_{\bigcup_{n=1}^{k} A_n} - \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \right\|_{\infty} \equiv 1 \nrightarrow 0$$

(β′) " $\Longleftarrow$ " Αν $p = 1$, τότε για κάθε διαμέριση $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ του $[0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \|\tau(A_i)\|_1 &= \sum_{i=1}^{k} \int \chi_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \\ &\overset{A_i \xi\acute{\epsilon}\nu\alpha}{=} \mu(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \mu([0,1]) = 1 < \infty\end{aligned}$$

Άρα

$$|\tau|([0,1]) = 1 < \infty$$

" $\Longrightarrow$ " Αν $1 < p < \infty$, τότε για κάθε διαμέριση $\{A_i^k\}_{i=1}^{k}$ του [0,1] με

$$\mu(A_i^k) = \frac{1}{k}, \quad \text{για κάθε } \ i \in \mathbb{N}$$

έχουμε

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \|\tau(A_i^k)\|_p &= \sum_{i=1}^{k} \left( \int \chi_{A_i^k} d\mu \right)^{1/p} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[ \mu(A_i^k) \right]^{1/p} \\
&= k \cdot \left( \frac{1}{k} \right)^{1/p} = k^{1-1/p} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \\
& \quad (\text{αφού} \quad 1 - \frac{1}{p} > 0)
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων του [0,1] με

$$\sum_{i=1}^{k} \|\tau(A_i^k)\|_p \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Άρα το τ δεν είναι φραγμένης κύμανσης.

**Ορισμός 1.2.4.** *Έστω $\tau$ μέτρο φραγμένης κύμανσης. Το* **ολοκλήρωμα** *ως προς το διανυσματικό μέτρο $\tau$ μιας απλής συνάρτησης*

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

*στον $L_1(|\tau|)$ ορίζεται να είναι το*

$$\int f d\tau = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \tau(A_i) \qquad \in X$$

*και ο ορισμός επεκτείνεται σε τυχούσα $f \in L_1(|\tau|)$ μέσω συνέχειας.*

**Πρόταση 1.2.5.**

$$\left\| \int_S f d\tau \right\| \leq \int_S |f| d|\tau|, \qquad \text{για κάθε} \;\; f \in L_1(|\tau|)$$

*Απόδειξη.* • Αν $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$ , τότε

$$\begin{aligned} \left\| \int_S f d\tau \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \tau(A_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \cdot \|\tau(A_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \cdot |\tau|(A_i) \\ &= \int_S |f| d|\tau| \end{aligned}$$

• Αν $f \in L_1(|\tau|)$ τυχούσα, τότε μπορεί να προσεγγιστεί από $\phi_n \in L_1(|\tau|)$ απλές. Αλλά τότε

$$\left\| \int_S \phi_n d\tau \right\| \leq \int_S |\phi_n| d|\tau|, \quad \text{για κάθε} \ \ n \in \mathbb{N}$$

Επομένως και

$$\left\| \int_S f d\tau \right\| \leq \int_S |f| d|\tau|$$

□

**Πρόταση 1.2.6.** *Το $\{\tau(A) : A \in \mathcal{A}\}$ έχει ασθενώς-συμπαγή κλειστότητα.*

Για την απόδειξη της Πρότασης 1.2.6 θα χρειαστούμε τα εξής :

**Λήμμα 1.2.7.** *Αν A, B χώροι Banach και $f : A \longrightarrow B$ γραμμική, ασθενώς-συνεχής συνάρτηση και το $K \subseteq A$ είναι σχετικά ασθενώς-συμπαγές, τότε το $f(K) \subseteq B$ είναι σχετικά ασθενώς-συμπαγές.*

*Απόδειξη.* Αφού το $K \subseteq A$ είναι σχετικά ασθενώς-συμπαγές, υπάρχει $L$ με $K \subseteq L \subseteq A$ ασθενώς-συμπαγές. Αλλά τότε $f(L) \supseteq f(K)$ και το $f(L)$ είναι ασθενώς-συμπαγές στο B, αφού η $f$ είναι ασθενώς-συνεχής (οπότε στέλνει ασθενώς-συμπαγή σε ασθενώς-συμπαγή). Άρα το $f(K)$ είναι σχετικά ασθενώς-συμπαγές. □

**Λήμμα 1.2.8.** *Το σύνολο $\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$ είναι σχετικά ασθενώς-συμπαγές στον $L_1(|\tau|)$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τον τελεστή

$$id : L_2(|\tau|) \longrightarrow L_1(|\tau|)$$

Αυτός είναι προφανώς γραμμικός και είναι φραγμένος, διότι

$$\|f\|_1 \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2 \cdot |\tau|(S)^{1/2}$$

Άρα

$$\|id\| \leq |\tau|(S)^{1/2}$$

Άρα είναι συνεχής από τον $L_2(|\tau|)$ με την ασθενή τοπολογία στον $L_1(|\tau|)$ με την ασθενή τοπολογία. Από το Λήμμα 1.2.7, αν το $\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$ είναι σχετικά ασθενώς-συμπαγές στον $L_2(|\tau|)$, θα είναι σχετικά ασθενώς-συμπαγές και στον $L_1(|\tau|)$.

Όμως, το $\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$ είναι σχετικά ασθενώς-συμπαγές στον $L_2(|\tau|)$, διότι ο $L_2(|\tau|)$ είναι ανακλαστικός, οπότε η κλειστή μπάλα του είναι συμπαγής με την ασθενή-τοπολογία.

(Στους ανακλαστικούς χώρους, η ασθενής-τοπολογία ταυτίζεται με την ασθενή*-τοπολογία και η κλειστή μπάλα του τυχαίου χώρου Banach X* είναι ασθενώς*-συμπαγής)

Επίσης, αν $A \in \mathcal{A}$, τότε

$$\|\chi_A\|_2 = \left( \int \chi_A d|\tau| \right)^{1/2} = |\tau|(A)^{1/2} \leq |\tau|(S)^{1/2}$$

Δηλαδή, το $\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$ περιέχεται στην κλειστή μπάλα με ακτίνα $|\tau|(S)^{1/2}$, που είναι ασθενώς-συμπαγής.

Άρα το $\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$ είναι σχετικά ασθενώς-συμπαγές στον $L_2(|\tau|)$, άρα και στον $L_1(|\tau|)$. □

**Λήμμα 1.2.9.** *Ο τελεστής $\int_s \cdot\, d\tau : L_1(|\tau|) \longrightarrow X$ είναι γραμμικός και φραγμένος.*

*Απόδειξη.* Ο τελεστής είναι γραμμικός στο σύνολο των απλών συναρτήσεων, επομένως μέσω ορίων και στον $L_1(|\tau|)$.

Είναι φραγμένος, διότι

$$\left\| \int_S f d\tau \right\| \leq \int_S |f| d|\tau| = \|f\|_1$$

Άρα

$$\left\| \int_S \cdot\, d\tau \right\| \leq 1$$

□

*Απόδειξη.* (Πρότασης 1.2.6)

Έχουμε

$$\{\tau(A) : A \in \mathcal{A}\} = \left\{ \int_S \chi_A : A \in \mathcal{A} \right\} = \int_S \left( \{\chi_A : A \in \mathcal{A}\} \right) d\tau$$

Δηλαδή, το $\{\tau(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι εικόνα του σχετικά ασθενώς-συμπαγούς συνόλου $\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$ μέσω του συνεχούς, γραμμικού (άρα και ασθενώς-συνεχούς ) τελεστή $\int_S \cdot\, d\tau$. Από το Λήμμα 1.2.7 θα είναι σχετικά ασθενώς-συμπαγές. □

**Ορισμός 1.2.10.** *Ένα μέτρο $\tau$ φραγμένης κύμανσης λέγεται* **απολύτως συνεχές** *ως προς ένα βαθμωτό σ-πεπερασμένο μέτρο $\mu$ (και θα το συμβολίζουμε $\tau << \mu$) αν ισχύει ένα από τα εξής:*

1. $|\tau| << \mu$
2. *Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$, τότε $\tau(A) = 0$*
3. *Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$, τότε $|\tau|(A) < \varepsilon$*

**Σημείωση 1.2.11.** *Τα (1), (2), (3) είναι ισοδύναμα. (Η αποδειξη γίνεται εύκολα με χρήση των ορισμών και των αντίστοιχων ιδιοτήτων των βαθμωτών μέτρων)*

**Σημείωση 1.2.12.**

$$\tau << |\tau|$$

## 1.3 Ολοκλήρωση διανυσματικών συναρτήσεων

Έστω $(S, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και X χώρος Banach.

**Ορισμός 1.3.1.** *Κάθε διανυσματική συνάρτηση $x(s)$ από τον $S$ στον $X$, η οποία παίρνει πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών τιμών και κάθε τιμή διαφορετική του μηδενός σε ένα μ-μετρήσιμο σύνολο πεπερασμένου μέτρου, λέγεται* **απλή συνάρτηση**.

**Ορισμός 1.3.2.** *Η γραφή*

$$g(s) = \sum_{j=1}^{m} g_j \chi_{S_j}(s)$$

*όπου $g_j \in X$ διαφορετικά ανά δύο και $\chi_{S_j}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $S_j$, θα λέγεται* **κανονική αναπαράσταση** *της απλής συνάρτησης $g(s)$, αν τα $S_j$ είναι ανά δύο ξένα, μ-μετρήσιμα σύνολα πεπερασμένου μέτρου.*

Όπως στην περίπτωση των βαθμωτών συναρτήσεων, κάθε απλή διανυσματική συνάρτηση έχει κανονική αναπαράσταση και η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής για βαθμωτές απλές συναρτήσεις.

**Ορισμός 1.3.3.** *Αν $g(s)$ είναι μια απλή συνάρτηση στο $S$, με κανονική αναπαράσταση*

$$g(s) = \sum_{j=1}^{m} g_j \chi_{S_j}(s)$$

*τότε το* **ολοκλήρωμα** *της $g(s)$ ως προς το $\mu$ ορίζεται να είναι το διάνυσμα*

$$\int g(s) d\mu = \sum_{j=1}^{m} g_j \mu(S_j)$$

**Βασικές ιδιότητες**

1. Προφανώς το ολοκλήρωμα αυτό είναι γραμμικό στον διανυσματικό χώρο όλων των απλών συναρτήσεων.

2. $\| \int g(s)d\mu\| \leq \int \|g(s)\|d\mu$, για κάθε απλή συνάρτηση $g$.

   *Απόδειξη.*

$$\|g(s)\| = \left\| \sum_{j=1}^{m} g_j \chi_{S_j}(s) \right\| = \sum_{j=1}^{m} \|g_j\| \chi_{S_j}(s) \quad (*)$$

   για κάθε $s \in S$. Άρα,

$$\left\| \int g(s)d\mu \right\| \overset{\text{ορς}}{=} \left\| \sum_{j=1}^{m} g_j \mu(S_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{m} \|g_j\| \mu(S_j) \overset{(*)}{=} \int \|g(s)\|d\mu$$

□

Για την απόδειξη του επόμενου Θεωρήματος, θα χρειαστούμε ένα αποτέλεσμα για το ολοκλήρωμα Lebesgue, του οποίου η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [5] (σελ. 55, Θεώρημα 2.25).

**Λήμμα 1.3.4.** *Αν η $\{f_n\}$ είναι ακολουθία πραγματικών, $\mu$-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, για τις οποίες $\sum \int |f_n| d\mu < \infty$, τότε η $\sum f_n$ συγκλίνει $\mu$-σχεδόν παντού σε κάποια πραγματική, $\mu$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f$ και $\sum \int f_n d\mu = \int f d\mu$.*

**Θεώρημα 1.3.5.** *Αν μια ακολουθία $\{x_n(t)\}$ απλών διανυσματικών συναρτήσεων στο $S$, ικανοποιεί την*

$$\int \|x_n(t) - x_m(t)\| d\mu \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

*τότε υπάρχει μοναδική διανυσματική συνάρτηση $x(t)$, τέτοια ώστε οι $\|x(t)\|, \|x_n(t) - x(t)\|$ να είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες και*

$$\int \|x(t) - x_n(t)\| d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

*(Θεωρούμε ίσες συναρτήσεις που διαφέρουν σε σύνολο μέτρου 0.)*

*Απόδειξη.* 1. Έστω $\{x_n(t)\}$ ακολουθία απλών συναρτήσεων που ικανοποιεί την υπόθεση του Θεωρήματος. Τότε

$$\Big\| \|x_n(t) - x_m(t)\| \Big\|_1 \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Συνεπώς, υπάρχει υπακολουθία $\{x_{n_k}(t)\}$ της $\{x_n(t)\}$, τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big\| \|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\| \Big\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \int \|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\| d\mu < \infty$$

Δηλαδή, οι $\|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\|$ είναι ολοκληρώσιμες και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int \|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\| d\mu < \infty$$

Άρα, απο το Λήμμα 1.3.4, η $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k=1}}(t) - x_{n_k}(t)\|$ είναι μ-ολοκληρώσιμη, άρα και η $\|x_{n_1}(t)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\|$ είναι μ-ολοκληρώσιμη. Επομένως πεπερασμένη για μ-σχεδόν όλα τα $t \in S$.

Τώρα, (ξέρουμε οτι αν $\sum \|f_n(t)\| < \infty$, τότε η $\sum f_n(t)$ συγκλίνει στον χώρο Banach X) η διανυσματική σειρά

$$x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)]$$

συγκλίνει για αυτές τις τιμές του $t$ για τις οποίες η αντίστοιχη σειρά των νορμών είναι πεπερασμένη, δηλαδή για μ-σχεδόν όλα τα $t \in S$.

Έστω

$$x(t) = \begin{cases} x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)], & \text{για τα } t \in S \text{ για τα οποία} \\ & \text{η σειρά συγκλίνει} \\ 0, & \text{για όλα τα υπόλοιπα } t \in S \end{cases}$$

2. Αφού $x(t) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t)$ μ-σχεδόν παντού, θα πρέπει

$$\|x(t)\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}(t)\| \text{ και}$$

$$\|x(t) - x_n(t)\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}(t) - x_n(t)\| \text{ μ-σχεδόν παντού για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Επομένως, οι $\|x_n(t)\|, \|x(t) - x_n(t)\|$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες, σαν όριο $\mathcal{A}$-μετρήσιμων συναρτήσεων.

3. Αφού

$$\begin{aligned}
x(t) - x_{n_p}(t) &= x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty}[x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)] - x_{n_p}(t) \\
&= x_{n_1}(t) + [x_{n_2}(t) - x_{n_1}(t)] + ... + \\
&+ [x_{n_p}(t) - x_{n_{p-1}}(t)] + \\
&+ \sum_{k=p}^{\infty}[x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)] - x_{n_p}(t) \\
&= \sum_{k=p}^{\infty}[x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)]
\end{aligned}$$

έχουμε οτι

$$\|x(t) - x_{n_p}(t)\| = \left\| \sum_{k=p}^{\infty}[x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)] \right\| \stackrel{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επίσης

$$\int \|x_n(t) - x_{n_p}(t)\| d\mu \stackrel{n,p\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

διότι

$$\int \|x_n(t) - x_m(t)\| d\mu \stackrel{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Άρα

$$\int \|x(t) - x_n(t)\| d\mu \leq \int \|x_n(t) - x_{n_p}(t)\| d\mu + \int \|x(t) - x_{n_p}(t)\| d\mu \stackrel{n,p\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Έχουμε, λοιπόν, οτι οι $\|x(t)\|, \|x(t) - x_n(t)\|$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες και

$$\int \|x(t) - x_n(t)\| d\mu \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. Έστω οτι υπάρχει $y(t)$ με τις ίδιες ιδιότητες.

Τότε

$$\int \|y(t) - x_n(t)\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Άρα

$$\int \|x(t) - y(t)\| d\mu \leq \int \|x_{n_k}(t) - x(t)\| d\mu + \int \|x_{n_k}(t) - y(t)\| d\mu \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Συνεπώς, $\int \|x(t) - y(t)\| d\mu = 0$, οπότε $\|x(t) - y(t)\| = 0$ μ-σχεδόν παντού. Επομένως, $x(t) = y(t)$ για μ-σχεδόν όλα τα $t \in S$.

$\square$

**Ορισμός 1.3.6.** *Αν η $\{x_n(t)\}$ είναι ακολουθία απλών διανυσματικών συναρτήσεων στον $S$, τέτοια ώστε $\int \|x_n(t)-x_m(t)\|d\mu \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, τότε απο το Θεώρημα 1.3.5 υπάρχει μοναδική $x(t)$ στον $S$ τέτοια ώστε $\int \|x_n(t)-x(t)\|d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

*Ονομάζουμε* **ολοκλήρωμα Bochner** *της $x(t)$ ως προς το $\mu$, το*

$$\int x(t)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int x_n(t)d\mu$$

**Σημείωση 1.3.7.** *Παρατηρούμε οτι με τις υποθέσεις του παραπάνω Θεωρήματος ισχύει*

$$\begin{aligned}\left\| \int x_n(t)d\mu - \int x_m(t)d\mu \right\| &= \left\| \int [x_n(t) - x_m(t)]d\mu \right\| \\ &\leq \int \|x_n(t) - x_m(t)\|d\mu \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

*Δηλαδή, η $\{\int x_n(t)d\mu\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον χώρο Banach X, επομένως συγκλίνει.*

**Σημείωση 1.3.8.** *Το στοιχείο $\lim_{n\to\infty} \int x_n(t)d\mu$ είναι μοναδικά καθορισμένο από την $x(t)$.*

*Πράγματι, αν $\{x_n(t)\}, \{y_n(t)\}$ είναι δύο ακολουθίες απλών συναρτήσεων τέτοιες ώστε,*

$$\lim_{n\to\infty} \int \|x(t) - x_n(t)\|d\mu = 0 \qquad \textit{και}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int \|x(t) - y_n(t)\|d\mu = 0$$

*τότε*

$$\begin{aligned}\left\| \int x_n(t)d\mu - \int y_n(t)d\mu \right\| &= \left\| \int [x_n(t) - y_n(t)]d\mu \right\| \\ &\leq \int \|x_n(t) - y_n(t)\|d\mu \\ &\leq \int \|x_n(t) - x(t)\|d\mu + \int \|y_n(t) - x(t)\|d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

*Δηλαδη, $\lim_{n\to\infty} \int x_n(t)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int y_n(t)d\mu$.*

**Ορισμός 1.3.9.** *Μια διανυσματική συνάρτηση $x(t)$ στο $S$ λέγεται* **Bochner-ολοκληρώσιμη**, *αν υπάρχει ακολουθία $\{x_n(t)\}$ απλών συναρτήσεων στο $S$, τέτοια ώστε*

$$\int \|x_n(t)-x_m(t)\|d\mu \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \textit{ και } x_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t), \textit{ για } \mu\textit{-σχεδόν όλα τα } t \in S.$$

*Τότε*

$$\int x(t)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int x_n(t)d\mu$$

*Συμβολίζουμε το σύνολο των Bochner-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με* $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}(S, \mathcal{A}, \mu; X)$

*Προφανώς, ο* $\mathcal{B}^1$ *είναι* $\mathbb{C}$*-διανυσματικός χώρος και το ολοκλήρωμα Bochner είναι γραμμικό στον* $\mathcal{B}^1$.

*Στην περίπτωση* $X = \mathbb{C}$, *ο* $\mathcal{B}^1 = \mathcal{L}^1(S, \mathcal{A}, \mu)$ *είναι ο χώρος όλων των μιγαδικών* $\mu$*-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.*

**Θεώρημα 1.3.10.** *Αν* $x(t) \in \mathcal{B}^1$, *τότε η* $\|x(t)\|$ *είναι* $\mu$*-ολοκληρώσιμη και*

$$\left\| \int x(t) d\mu \right\| \leq \int \|x(t)\| d\mu$$

*Απόδειξη.* Αφού $x(t) \in \mathcal{B}^1$, υπάρχει ακολουθία $\{x_n(t)\}$ απλών συναρτήσεων, τέτοια ώστε

$$\int \|x(t) - x_n(t)\| d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\int \|x(t) - x_n(t)\| d\mu < \varepsilon$$

Αφού η $x_n(t)$ είναι απλή, θα πρέπει $\int \|x_n(t)\| d\mu < \infty$, οπότε και

$$\int \|x(t)\| d\mu \leq \int \|x(t) - x_n(t)\| d\mu + \int \|x_n(t)\| d\mu < \varepsilon + \int \|x_n(t)\| d\mu < \infty$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \left| \int \|x(t)\| d\mu - \int \|x_n(t)\| d\mu \right| &\leq \int \left| \|x(t)\| - \|x_n(t)\| \right| d\mu \\ &\leq \int \|x(t) - x_n(t)\| d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Άρα

$$\int \|x(t)\| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \|x_n(t)\| d\mu \quad (*)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \left\| \int x(t) d\mu \right\| &= \left\| \lim_{n\to\infty} \int x_n(t) d\mu \right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\| \int x_n(t) d\mu \right\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \int \|x_n(t)\| d\mu \\ &\overset{(*)}{=} \int \|x(t)\| d\mu \end{aligned}$$

□

**Θεώρημα 1.3.11.** *Ο $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{B}^1$ είναι χώρος Banach με τη νόρμα*

$$\|x\| = \int \|x(t)\| d\mu$$

*Απόδειξη.* Προφανώς η έκφραση που ορίστηκε είναι νόρμα (έχουμε ταυτίσει τις συναρτήσεις που είναι ίσες μ-σχεδόν παντού). Αρκεί, λοιπόν, να δειχτεί η πληρότητα του χώρου.

Έστω $\{y_n(t)\}$ ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{B}^1$ με την μετρική που επάγει η νόρμα. Δηλαδή,

$$\int \|y_n(t) - y_m(t)\| d\mu \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Από τον ορισμό της ολοκληρωσιμότητας Bochner και το Θεώρημα 1.3.5, για κάθε $y_n(t)$ υπάρχει απλή συνάρτηση $x_n(t)$ τέτοια ώστε

$$\int \|y_n(t) - x_n(t)\| d\mu < \frac{1}{2^n}$$

Επίσης, για την ακολουθία $\{x_n(t)\}$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} & \int \|x_n(t) - x_m(t)\| d\mu \leq \\ \leq \quad & \int \|x_n(t) - y_n(t)\| d\mu + \int \|x_m(t) - y_m(t)\| d\mu + \int \|y_n(t) - y_m(t)\| d\mu \\ \leq \quad & \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} + \int \|y_n(t) - y_m(t)\| d\mu \overset{n,m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Αφού οι $x_n(t)$ είναι απλές, από το Θεώρημα 1.3.5 υπάρχει $x(t) \in \mathcal{B}^1$, τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \int \|x(t) - x_n(t)\| d\mu = 0$$

Αλλά τότε

$$\int \|x(t) - y_n(t)\| d\mu \leq \int \|x(t) - x_n(t)\| d\mu + \int \|y_n(t) - x_n(t)\| d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Άρα η $\{y_n(t)\}$ συγκλίνει στην $x(t)$ με αυτήν τη μετρική. □

**Θεώρημα 1.3.12. (Το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για το ολοκλήρωμα Bochner)**

*Έστω $y_n(t) \in \mathcal{B}^1$ τέτοιες ώστε*

1. *$\|y_n(t)\| \leq g(t)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάποια $g(t)$ μ-ολοκληρώσιμη στο $S$.*

2. *$y_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t)$ μ-σχεδόν παντού*

*Τότε $x(t) \in \mathcal{B}^1$ και $\lim_{n\to\infty} \int \|x(t) - y_n(t)\| d\mu = 0$*

*(Άρα και $\int x(t) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int y_n(t) d\mu$)*

*Απόδειξη.* Αφού

$$y_n(t) - x(t) = \lim_{m\to\infty}[y_n(t) - y_m(t)], \quad \text{μ-σχεδόν παντού}$$

έχουμε οτι

$$\|y_n(t) - x(t)\| = \lim_{m\to\infty}\|y_n(t) - y_m(t)\|, \text{μ-σχεδόν παντού.}$$

Άρα η $\|x(t) - y_n(t)\|$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

Επίσης, αφού $\|y_n(t)\| \le g(t)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε οτι

$$\|y_n(t) - x(t)\| \le \|y_n(t)\| + \lim_{m\to\infty}\|y_m(t)\| \le 2g(t), \quad \text{μ-σχεδόν παντού}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n(t) - x(t)\| = 0, \quad \text{μ-σχεδόν παντού.}$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για βαθμωτές συναρτήσεις [5], έχουμε για την $\|y_n(t) - x(t)\|$ οτι

$$\int \|y_n(t) - x(t)\| d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Αφού ο $\mathcal{B}^1$ είναι πλήρης με τη νόρμα του Θεωρήματος 1.3.11, υπάρχει $y(t) \in \mathcal{B}^1$ με $\int \|y_n(t) - y(t)\| d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Τότε $x(t) = y(t)$ μ-σχεδόν παντού, άρα $x(t) \in \mathcal{B}^1$.

Τέλος,

$$\left\| \int x(t)d\mu - \int y_n(t)d\mu \right\| = \left\| \int [x(t) - y_n(t)]d\mu \right\| \le \int \|x(t) - y_n(t)\| d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Άρα

$$\int x(t)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int y_n(t)d\mu$$

□

**Ορισμός 1.3.13.** *Έστω $X$ χώρος Banach και $(S, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Μια συνάρτηση $x(t)$ από τον $S$ στον $X$ λέγεται* **ασθενώς $\mathcal{A}$-μετρήσιμη***, όταν για κάθε $x^* \in X^*$, η βαθμωτή συνάρτηση $x^*(x(t))$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.*

*Η $x(t)$ λέγεται* **ισχυρά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη** *, όταν υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων που συγκλίνει ισχυρά στην $x(t)$ μ-σχεδόν παντού στο $S$.*

**Ορισμός 1.3.14.** *Η $x(t)$ λέγεται* **διαχωρισίμων τιμών***, αν το πεδίο τιμών της $x(S) = \{x(t) : t \in S\}$, είναι διαχωρίσιμο.*

*Η $x(t)$ λέγεται* **μ-σχεδόν διαχωρισίμων τιμών***, αν υπάρχει $\mathcal{A}$-μετρήσιμο σύνολο $S_0$ με $\mu(S_0) = 0$, τέτοιο ώστε το $x(S \setminus S_0)$ να είναι διαχωρίσιμο.*

**Θεώρημα 1.3.15. (B. J. Pettis 1938)**

*Αν ο $(S, \mathcal{A}, \mu)$ είναι σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου, τότε η $x(t)$ είναι ισχυρά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, αν και μόνο αν είναι ασθενώς $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και μ-σχεδόν διαχωρισίμων τιμών.*

**Λήμμα 1.3.16.** *Κάθε απλή $x_n(t)$ είναι ασθενώς $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.*

*Απόδειξη.* Έστω

$$x_n(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}(t), \alpha_j \in X$$

η κανονική αναπαράσταση της $x_n(t)$.

Έστω $x^* \in X^*$. Τότε

$$x^*(x_n(t)) = \sum_{j=1}^{m} x^*(\alpha_j)\chi_{A_j}(t) = x^*(\alpha_{j_0}) = c_{j_0}$$

αν $t \in A_{j_0}$. Δηλαδή, η $x^*(x_n(t)) = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}(t)$ είναι απλή, με $c_j \in \mathbb{C}$ και $A_j \in \mathcal{A}$. Αρα η $x^*(x_n(t))$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, για κάθε $x^* \in X^*$. $\square$

*Απόδειξη.* (Θεωρήματος 1.3.15)

" $\Longrightarrow$ " Έστω $x(t)$ ισχυρά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχουν $x_n(t), n = 1, 2, \ldots$ απλές και $S_0 \in \mathcal{A}$ με $\mu(S_0) = 0$ τέτοια ώστε $\|x_n(t) - x(t)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, για κάθε $t \in S \setminus S_0$.

Έστω $x^* \in X^*$. Τότε $x^*(x(t)) = \lim_{n\to\infty} x^*(x_n(t))$, για κάθε $t \in S \setminus S_0$, αφού το $x^*$ είναι συνεχές συναρτησιοειδές. Άρα η $x^*(x(t))$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη βαθμωτή, σαν όριο $\mathcal{A}$-μετρήσιμων βαθμωτών. Επομένως, η $x(t)$ είναι ασθενώς $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

Αφού οι $x_n(t)$ είναι απλές, τα $x_n(S)$ είναι πεπερασμένα σύνολα, άρα το $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n(S)$ είναι αριθμήσιμο. Επομένως, η $\|\cdot\|$-κλειστότητά του είναι διαχωρίσιμο σύνολο. Όμως τότε, το $x(S \setminus S_0) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n(S)}$ θα είναι επίσης διαχωρίσιμο.

" $\Longleftarrow$ "

1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε το $x(S)$ διαχωρίσιμο. Μπορούμε να κάνουμε κάτι τέτοιο, διότι υπάρχει $S_0 \in \mathcal{A}$ με $\mu(S_0) = 0$, τέτοιο ώστε το $x(S \setminus S_0)$ να είναι διαχωρίσιμο. Επομένως, μπορούμε να δουλεύουμε με μια συνάρτηση ίση μ-σχεδόν παντού με την αρχική, με διαχωρίσιμο πεδίο τιμών.

2. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε οτι ο X είναι διαχωρίσιμος, αφού μπορουμε να δουλεύουμε στον χώρο Banach $Y = \overline{span(x(S))} \subseteq X$.

3. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A = \{t \in S, \|x(t)\| \leq \alpha\}$$

$$\text{και} \quad A(x^*) = \{t \in S, |x^*(x(t))| \le \alpha\}, \quad x^* \in X^*$$

Έστω $t \in A$. Τότε, αν $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$, έχουμε $\|x(t)\| \le \alpha$, άρα

$$|x^*(x(t))| \le \|x^*\| \cdot \|x(t)\| \le 1 \cdot \alpha = \alpha$$

Συνεπώς, $t \in A(x^*)$.

Επομένως, $A \subseteq \bigcap_{\|x^*\|=1} A(x^*)$.

Έστω $t \in \bigcap_{\|x^*\|=1} A(x^*)$. Τότε $|x^*(x(t))| \le \alpha$ για κάθε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$. Γνωρίζουμε, από Πόρισμα του Θεωρήματος Hahn-Banach, οτι υπάρχει $x_0^* \in X^*$, τέτοιο ώστε $\|x_0^*\| = 1$ και $x_0^*(x(t)) = \|x(t)\|$. Άρα $\|x(t)\| \le \alpha$. Επομένως, $t \in A$.

Επομένως, $\bigcap_{\|x^*\|=1} A(x^*) \subseteq A$.

Τελικά,

$$A = \bigcap_{\|x^*\|=1} A(x^*)$$

**Λήμμα:** Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Τότε υπάρχει $\{x_j^*\} \subseteq X^*$, με $\|x_j^*\| \le 1$, τέτοια ώστε για κάθε $x_0^* \in X^*$ με $\|x_0^*\| \le 1$, να υπάρχει $\{x_{j_k}^*\}$ υπακολουθία της $\{x_j^*\}$ με $x_{j_k}^*(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0^*(x)$, για κάθε $x \in X$.

(Η απόδειξη του παραπάνω λήμματος μπορεί να βρεθεί στο [7], Λήμμα 7.5.6)

Έστω $\{x_j^*\} \subseteq X^*$ η ακολουθία του λήμματος.

Τότε προφανώς $\bigcap_{j=1}^{\infty} A(x_j^*) \supseteq \bigcap_{\|x^*\|\le 1} A(x^*)$

και από την επιλογή των $x_j^*$, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A(x_j^*) \subseteq \bigcap_{\|x^*\|\le 1} A(x^*)$.

Επομένως, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A(x_j^*) = \bigcap_{\|x^*\|\le 1} A(x^*)$.

Τελικά,

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A(x_j^*)$$

Αφού η $x(t)$ είναι ασθενώς $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, οι $x_j^*(x(t))$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες. Άρα τα $A(x_j^*)$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμα , οπότε το $\bigcap_{j=1}^{\infty} A(x_j^*)$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμο, επομένως το $A = \{t \in S : \|x(t)\| \le \alpha\}$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Τελικά, η $\|x(t)\|$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη βαθμωτή.

4. Αφού το $x(S)$ είναι διαχωρίσιμο, μπορεί να καλυφθεί από αριθμήσιμο πλήθος ανοικτών σφαιρών σταθερής ακτίνας.

Έστω $\{S_{j,n}\}_{j=1}^{\infty}$ ακολουθία ανοικτών σφαιρών με ακτίνα μικρότερη του $\frac{1}{n}$, η οποία καλύπτει το $x(S)$ και έστω $x_{j,n}$ το κέντρο της σφαίρας $S_{j,n}$.

Στο βήμα 3 αποδείξαμε οτι αν μια συνάρτηση $y(t)$ είναι ασθενώς $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και διαχωρισίμων τιμών, τότε η $\|y(t)\|$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη βαθμωτή συνάρτηση. Αφού η $x(t)$ είναι ασθενώς $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη και διαχωρισίμων τιμών, το ίδιο θα ισχύει και για τις $x(t) - x_{j,n}$. Άρα και οι $\|x(t) - x_{j,n}\|$ θα είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες βαθμωτές. Επομένως, το

$$T_{j,n} = \{t \in S : x(t) \in S_{j,n}\}$$

δηλαδή η αντίστροφη εικόνα του $[0, \frac{1}{n})$, μέσω της μετρήσιμης $\|x(t) - x_{j,n}\|$, είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμο σύνολο.

Αφού η $\{S_{j,n}\}_{j=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $x(S)$, έχουμε

$$S = \bigcup_{j=1}^{\infty} T_{j,n}$$

5. Κατασκευάζουμε την $\{y_n(t)\}$, που θα μας δώσει την ισχυρή $\mathcal{A}$-μετρησιμότητα, ως εξής :

   Θέτουμε

   $$x_n(t) = x_{i,n}, \quad \text{για} \quad t \in \{T_{i,n} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} T_{j,n}\}, \quad \text{όπου} \quad \bigcup_{j=1}^{0} T_{j,n} = \emptyset$$

   Οι συναρτήσεις αυτές είναι καλά ορισμένες, αφού

   $$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{T_{i,n} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} T_{j,n}\}$$

   και τα σύνολα της ένωσης είναι ξένα.

   Τώρα, για κάθε $t \in S$, αν $i_0 = \min\{i : t \in T_{i,n}\}$, έχουμε

   $$\|x(t) - x_n(t)\| = \|x(t) - x_{i_0,n}\| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

   αφού $t \in T_{i_0,n}$. Δηλαδή $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ ισχυρά.

   Κάθε $x_n(t)$ είναι ισχυρά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, αφού

   $$x_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i,n} \chi_{T_{i,n} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} T_{j,n}}(t)$$

   και τα σύνολα $T_{i,n} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} T_{j,n}$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμα.

   Άρα κάθε $x_n(t)$ είναι το ισχυρό όριο των μερικών αθροισμάτων, που είναι απλές συναρτήσεις.

6. Έστω οτι $\mu(S) < \infty$.

   Θέτουμε
   $$A_{i,n} = T_{i,n} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} T_{j,n}$$
   Αφού $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i,n}$ ένωση ξένων συνόλων, έχουμε
   $$\mu(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{i,n}) < \infty, \quad \text{άρα}$$
   $$\text{για κάθε} \;\; n \in \mathbb{N}, \; \text{υπάρχει} \;\; i_n \in \mathbb{N} \; \text{τέτοιο ώστε} \quad \sum_{i=i_n}^{\infty} \mu(A_{i,n}) < \frac{1}{2^n}$$
   Για κάθε $t \in S \setminus \bigcup_{i=i_n}^{\infty} A_{i,n}$ έχουμε οτι
   $$\left\| x_n(t) - \sum_{i=1}^{i_n-1} x_{i,n}\chi_{A_{i,n}}(t) \right\| = 0$$
   αφού τα $A_{i,n}$ είναι ξένα.

   Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ , υπάρχει $y_n(t)$ απλή (η $\sum_{i=1}^{i_n-1} x_{i,n}\chi_{A_{i,n}}(t)$) τέτοια ώστε $x_n(t) = y_n(t)$ εκτός του συνόλου $\bigcup_{i=i_n}^{\infty} A_{i,n} := B_n$, με $\mu(B_n) < \frac{1}{2^n}$.

   Θέτουμε $B = \limsup B_n$.

   Τότε, αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$, από το 1ο Λημμα των Borel-Cantelli, θα πρέπει $\mu(B) = \mu(\limsup(B_n)) = 0$

   Θεωρούμε την ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{y_n(t)\}$.

   Τότε, για κάθε $t \in S \setminus B$, έχουμε οτι
   $$\|x(t) - x_n(t)\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \; \text{αφού} \;\; x_n(t) \longrightarrow x(t) \; \text{ισχυρά}$$
   $$\text{και} \;\; \|x_n(t) - y_n(t)\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{διότι} \;\; t \notin \limsup B_n$$
   δηλαδή $x_n(t) - y_n(t) = 0$ τελικά.

   Επομένως, για κάθε $t \in S \setminus B$, έχουμε οτι
   $$\|x(t) - y_n(t)\| \leq \|x(t) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - y_n(t)\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
   όπου οι $y_n(t)$ είναι απλές και $\mu(B) = 0$. Άρα η $x(t)$ είναι ισχυρά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

7. Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, υπάρχουν $S_1, ..., S_n, ...$ ξένα ανά δύο, τέτοια ώστε $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ και $\mu(S_i) < \infty$.

Αφού $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i,n}$ και τα $A_{i,n}$ είναι ξένα ανά δύο, έχουμε

$$S_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} (S_j \cap A_{i,n})$$

και τα $S_j \cap A_{i,n}$ είναι ξένα ανά δύο.

Αφού $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ ισχυρά στο $S$, θα πρέπει $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ ισχυρά σε κάθε $S_j$.

Αφού $\mu(S_j) < \infty$, κατασκευάζουμε για κάθε $j \in \mathbb{N}$ ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{y_n^j(t)\}_{n=1}^{\infty}$ με $y_n^j(t) \longrightarrow x(t)$ ισχυρά σχεδόν παντού στο $S_j$, όπως στο βήμα 6, θεωρώντας $B_j$ τα αντίστοιχα σύνολα μέτρου 0, στα οποία δεν ισχύει η σύγκλιση. Επεκτείνουμε τις $y_n^j(t)$ σε ολόκληρο το $S$, δίνοντάς τους την τιμή 0 εκτός του $S_j$ (διατηρώντας τον συμβολισμό $y_n^j(t)$) και θεωρούμε την

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^{n} y_n^j(t)$$

Τότε η $y_n(t)$ είναι απλή, ως πεπερασμένο άθροισμα απλών, και για κάθε $t \in S \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ υπάρχει $j_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $t \in S_{j_0}$ και $t \notin S_j$ για $j \neq j_0$.

Άρα, για $n \geq j_0$,

$$\|y_n(t) - x(t)\| = \|y_n^{j_0}(t) - x(t)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

αφού $y_n^{j_0}(t) \longrightarrow x(t)$ ισχυρά στο $S_{j_0}$. Όμως, $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = 0$, άρα $y_n(t) \longrightarrow x(t)$ ισχυρά σχεδόν παντού στο $S$ και οι $y_n(t)$ είναι απλές.

Άρα η $x(t)$ είναι ισχυρά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

□

**Θεώρημα 1.3.17.** *Η $x(t)$ είναι Bochner $\mu$-ολοκληρώσιμη, αν και μόνο αν είναι ισχυρα $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και η $\|x(t)\|$ είναι $\mu$-ολοκληρώσιμη.*

*Απόδειξη.* " $\Longrightarrow$ " Αν η $x(t)$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη, τότε, όπως στο Θεώρημα 1.3.10 ,

$$\int \|x(t)\| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \|x_n(t)\| d\mu < \infty$$

όπου $\{x_n(t)\}$ εΙναι η ακολουθία απλών συναρτήσεων που δίνει ο ορισμός της Bochner ολοκληρωσιμότητας.

" $\Longleftarrow$ " Αφού η $x(t)$ είναι ισχυρά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, υπάρχουν $\{x_n(t)\}$ απλές συναρτήσεις, έτσι ώστε $\|x_n(t) - x(t)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ για μ-σχεδόν όλα τα $t \in S$.

Έστω

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t), & \text{αν } \|x_n(t)\| \leq \|x(t)\| \cdot (1 + \frac{1}{n}) \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Τότε η $y_n(t)$ είναι απλή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\begin{aligned} \|y_n(t)\| &\leq \|x(t)\| \cdot (1 + \frac{1}{n}) \\ &\leq 2\|x(t)\|, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και για όλα τα } t \in S \end{aligned}$$

Επίσης, αν $t \in S$ με

$$\|x_n(t) - x(t)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για $n \geq n_0$ να έχουμε

$$\|x_n(t)\| \leq \|x(t)\| \cdot (1 + \frac{1}{n}) \text{ είτε } x(t) = 0$$

Αλλά τότε, για $n \geq n_0$

$$\|y_n(t) - x(t)\| = \|x_n(t) - x(t)\| \text{ είτε } \|y_n(t) - x(t)\| = 0$$

Σε κάθε περίπτωση,

$$\|y_n(t) - x(t)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Από την υπόθεση η $\|x(t)\|$ είναι μ-ολοκληρώσιμη. Επομένως, από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, η $x(t)$ είναι Bochner μ-ολοκληρώσιμη και μάλιστα

$$\int x(t)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int y_n(t)d\mu$$

□

**Θεώρημα 1.3.18.** *Έστω $T$ φραγμένος, γραμμικός τελεστής από τον χώρο Banach $X$ στον χώρο Banach $Y$, δηλαδή $T \in C(X,Y)$.*

*Αν $x(t)$ είναι μια Bochner μ-ολοκληρώσιμη συνάρτηση με τιμές στον $X$, τότε η $T[x(t)]$ είναι Bochner μ-ολοκληρώσιμη με τιμές στον $Y$.*

*Επιπλέον $\int T[x(t)]d\mu = T\left[\int x(t)d\mu\right]$.*

*Απόδειξη.* Αφού η $x(t)$ είναι Bochner μ-ολοκληρώσιμη, υπάρχει ακολουθία απλών που συγκλίνει ισχυρά στην $x(t)$ μ-σχεδόν παντού. Άρα η $x(t)$ είναι ισχυρά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.17, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{y_n(t)\}$, τέτοια ώστε

$$\|y_n(t)\| \leq \|x(t)\| \cdot (1 + \frac{1}{n}) \quad \text{και}$$

$$\|y_n(t) - x(t)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{μ-σχεδόν παντού}$$

Αφού ο T είναι γραμμικός και οι $y_n(t)$ απλές, έχουμε

$$\int T[y_n(t)]d\mu = T\left( \int y_n(t)d\mu \right), \quad \text{για καθε} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Επίσης, αφού ο T είναι φραγμένος (άρα συνεχής συνάρτηση)

$$\|T[y_n(t)]\| \leq \|T\| \cdot \|y_n(t)\| \leq 2\|T\| \cdot \|x(t)\|$$

$$\text{και} \;\; \|T[y_n(t)] - T[x(t)]\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mu\text{-σχεδόν παντού}$$

Από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, η $T[x(t)]$ είναι Bochner μ-ολοκληρώσιμη και μάλιστα

$$\begin{aligned}
\int T[x(t)]d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int T[y_n(t)]d\mu \\
&\stackrel{y_n \text{απλές}}{=} \lim_{n\to\infty} T\left( \int y_n(t)d\mu \right) \\
&\stackrel{\text{T συνεχής}}{=} T\left( \lim_{n\to\infty} \int y_n(t)d\mu \right) \\
&= T\left[ \int x(t)d\mu \right]
\end{aligned}$$

□

# Κεφάλαιο 2

# Η ισοδυναμία της αιχμηρότητας και της RNP

## 2.1 Ορισμοί

Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε την πρώτη βασική ιδιότητα των χώρων Banach που θα μας απασχολήσει.

**Ορισμός 2.1.1.** *Ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο σύνολο $K$ σε ένα χώρο Banach $X$ έχει την ιδιότητα* **Radon-Nikodym** *(***RNP***), αν ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα :*

*Έστω $(S, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω $\tau$ ένα $X$-μέτρο και $\mu$ ένα βαθμωτό μέτρο πιθανότητας στον $(S, \mathcal{A})$. Υποθέτουμε οτι το $\tau$ είναι απολύτως συνεχές ως προς το $\mu$ και οτι $\tau(A)/\mu(A) \in K$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) \neq 0$. Τότε υπάρχει $f \in \mathcal{B}^1(\mu, X)$, τέτοια ώστε*

$$\tau(A) = \int_A f d\mu, \qquad \text{για κάθε } \ A \in \mathcal{A} \quad (*)$$

**Ορισμός 2.1.2.** *Θα λέμε οτι ο χώρος Banach $X$ έχει την RNP αν η μοναδιαία μπάλα του $X$ έχει την RNP.*

**Σημείωση 2.1.3.**
1. *Παρατηρούμε οτι ένα κλειστό, κυρτό υποσύνολο ενός συνόλου με την RNP θα έχει επίσης αυτήν την ιδιότητα. Επομένως, κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου με την RNP θα έχει επίσης την RNP.*
2. *Αφού το $K$ είναι φραγμένο, η υπόθεση οτι $\tau(A)/\mu(A) \in K$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, σημαίνει ειδικότερα οτι το $\tau$ είναι φραγμένης κύμανσης.*

*Απόδειξη.* Έστω $\{A_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{A}$ πεπερασμένη διαμέριση του $S$ με $\mu(A_i) \neq 0$ για $i = 1, 2, \dots$ . Τότε από την υπόθεση, υπάρχουν $x_i \in K$, τέτοια ώστε $\tau(A_i) = \mu(A_i)x_i$, άρα

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \|\tau(A_i)\| &\leq \max_{x\in K}\|x\| \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) = \max_{x\in K}\|x\|\mu(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \\ &= \mu(S)\max_{x\in K}\|x\| = \max_{x\in K}\|x\| \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} |\tau|(S) &= \sup\left\{ \sum \|\tau(A_i)\| : \{A_i\} \text{ πεπερασμένη διαμέριση του } S \right\} \\ &\leq \max_{x\in K}\|x\| < \infty \end{aligned}$$

□

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να εξεταστεί η σχέση της RNP με μία γεωμετρική ιδιότητα του χώρου (την αιχμηρότητα), η οποία θα οριστεί στη συνέχεια.

Στο εξής Κ θα είναι ένα μη κενό υποσύνολο του χώρου Banach X. Θα συμβολίζουμε με

1. $B(x,\varepsilon)$ την κλειστή μπάλα κέντρου $x$ και ακτίνας $\varepsilon$ του χώρου
2. $\overline{K}$ την $\|\cdot\|$-κλειστότητα του συνόλου Κ
3. $\overline{\text{conv}}(K)$ την $\|\cdot\|$-κλειστή, κυρτή θήκη του συνόλου Κ
4. $M(K)$ το $\sup\{\|x\| : x \in K\}$
5. $M(f,K)$ το $\sup\{f(x) : x \in K\}$, για $f \in X^*$

**Ορισμός 2.1.4.** *Αν* $\|f\| = 1$ *και* $\alpha > 0$, *ορίζουμε*

$$S(f,\alpha,K) = \{x : x \in K \quad \text{και} \quad f(x) \geq M(f,K) - \alpha\}$$

*Ένα τέτοιο σύνολο λέγεται **φέτα (slice)** του K.*

**Ορισμός 2.1.5.** *Έστω X χώρος Banach και F γραμμικός υπόχωρος του* $X^*$ *που διαχωρίζει τα σημεία του X.*

1. *Ενα σημείο* $x \in K \subseteq X$ *λέγεται **ακραίο σημείο** του κυρτού συνόλου K **(extreme point)** αν δεν είναι εσωτερικό σημείο ευθύγραμμου τμήματος του K. Το σύνολο τών ακραίων σημείων ενός συνόλου K, θα συμβολίζεται στο εξής με* $ex(K)$.
2. *Ένα υποσύνολο A του X λέγεται **F-αιχμηρό (F-dentable)**, αν για κάθε* $\varepsilon > 0$, *υπάρχει* $x \in A$, *τέτοιο ώστε το x να μην ανήκει στην σ(X,F)-κλειστή, κυρτή θήκη του* $A \setminus B(x,\varepsilon)$ .

3. *Εάν $F = X^*$, τότε λέμε οτι το $A$ είναι* ***αιχμηρό (dentable)****.*

4. *Ένα σημείο $x \in A \subseteq X$ λέγεται* ***F-αιχμηρό σημείο*** *του $A$ (**F-denting point**), αν για κάθε $\varepsilon > 0$, το $x$ δεν ανήκει στην σ(X,F)-κλειστή, κυρτή θήκη του $A \setminus B(x, \varepsilon)$.*

5. *Αν $F = X^*$, τότε το $x$ λέγεται* ***αιχμηρό σημείο (denting point)*** *του $A$.*

**Πρόταση 2.1.6.** *Ένα υποσύνολο $A$ του $X$ είναι F-αιχμηρό, αν και μονο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φέτα $S(f, \alpha, A)$ του $A$ διαμέτρου μικρότερης του $\varepsilon$, όπου $f \in F$.*

*Απόδειξη.* " $\Longrightarrow$ " Έστω οτι το A είναι F-αιχμηρό και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $x \in A$, τέτοιο ώστε το $x$ να μην είναι στην σ(X,$F$)-κλειστή,κυρτή θήκη του $A \setminus B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, την οποία θα συμβολίζουμε B.

Προφανώς,

$$A \setminus B \subseteq B(x, \frac{\varepsilon}{2})$$

Αφού ο F διαχωρίζει τα σημεία του X, είναι γνωστό οτι $(X, \sigma(X, F))^* = F$, άρα υπάρχει $f \in F$ με $\|f\| = 1$, το οποίο διαχωρίζει το $x$ απο το B. Δηλαδή, υπάρχει $f \in F$ με $\|f\| = 1$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ και $f(y) \leq 0$, για κάθε $y \in B$. Τότε, $M(f, A) > 0$. Θεωρούμε $\alpha = M(f, A)/2$, οπότε

$$\begin{aligned} S(f, \alpha, A) &= \left\{ y \in A : f(y) \geq M(f, A) - \alpha \right\} \\ &= \left\{ y \in A : f(y) \geq \frac{M(f, A)}{2} \right\} \subseteq A \setminus B \end{aligned}$$

αφού $M(f, A)/2 > 0$ και $S(f, \alpha, A) \neq \emptyset$.

Επιπλέον,

$$\operatorname{diam} S(f, \alpha, A) \leq \operatorname{diam}(A \setminus B) \leq \operatorname{diam} B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \leq \varepsilon$$

" $\Longleftarrow$ " Αν $\varepsilon > 0$, από την υπόθεση υπάρχει φέτα $S(f, \alpha, A)$ του A, διαμέτρου μικρότερης του $\varepsilon$. Δηλαδή, υπάρχει $f \in F$ με $\|f\| = 1$ και $\alpha > 0$, τέτοια ώστε

$$\operatorname{diam} S(f, \alpha, A) < \varepsilon$$

Έστω $x \in A$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq M(f, A) - \frac{\alpha}{2} \quad (\text{οπότε} \ \ x \in S(f, \alpha, A))$$

Τότε

$$S(f, \alpha, A) \subseteq B(x, \varepsilon) \quad (\text{αφού} \ \ \operatorname{diam} S(f, \alpha, A) < \varepsilon)$$

Άρα

$$A \setminus S(f, \alpha, A) \supseteq A \setminus B(x, \varepsilon)$$

και το $A \setminus S(f,\alpha,A)$ είναι κυρτό. Επομένως,

$$A \setminus S(f,\alpha,A) \supseteq \text{conv}(A \setminus B(x,\varepsilon))$$

Αρκεί λοιπόν να δειχτεί οτι το $x$ δεν ανήκει στην σ(X,F)-κλειστή κυρτή θήκη του $A \setminus S(f,\alpha,A)$. Αλλά, αν $y \in A \setminus S(f,\alpha,A)$, τότε

$$f(y) < M(f,A) - \alpha$$

επομένως

$$|f(y) - f(x)| = f(x) - f(y) \geq M(f,A) - \frac{\alpha}{2} - M(f,A) + \alpha = \frac{\alpha}{2} > 0$$

Αφού

$$f \in F \text{ και } |f(y) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ για κάθε } y \in A \setminus S(f,\alpha,A)$$

το $x$ δεν προσεγγίζεται από στοιχεία του $A \setminus S(f,\alpha,A)$ ως προς την σ(X,F) τοπολογία. Άρα το $x$ δεν ανήκει στην σ(X,F)-κλειστότητα του $A \setminus S(f,\alpha,A)$, που περιέχει την σ(X,F)-κλειστή κυρτή θήκη του $A \setminus B(x,\varepsilon)$. □

Στο εξής, όποτε κρίνεται απαραίτητο, θα χρησιμοποιούμε τον παραπάνω χαρακτηρισμό της αιχμηρότητας αντί του ορισμού, χωρις ιδιαίτερο σχόλιο.

## 2.2 Η αιχμηρότητα ως ικανή συνθήκη για την RNP

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την απόδειξη ενός σημαντικού αποτελέσματος του M.A. Rieffel, το οποίο μπορεί να βρεθεί στο [14] και το οποίο διατυπώνεται ως εξής :

**Θεώρημα 2.2.1.** *(Rieffel, 1967 [14])*
*Έστω $(S,\mathcal{A},\mu)$ σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $X$ χώρος Banach. Έστω $\tau$ ένα διανυσματικό μέτρο φραγμένης κύμανσης στην $\mathcal{A}$ με τιμές στον $X$, το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το $\mu$. Αν τοπικά το $\tau$ έχει σχεδόν αιχμηρή μέση τιμή, τότε υπάρχει μια $f : S \longrightarrow X$ Bochner-ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε*

$$\tau(E) = \int_E f d\mu, \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{A} \quad \textbf{(RN)}$$

**Ορισμός 2.2.2.** *Λέμε οτι το διανυσματικό μέτρο $\tau$ έχει* **τοπικά σχεδόν αιχμηρή μέση τιμή** *, αν για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) < \infty$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $F \subseteq E$ με $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ και το*

$$A_F = \{\tau(F')/\mu(F') : F' \subseteq F, \mu(F') > 0\}$$

*είναι αιχμηρό.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1 θα χρειαστούμε τα ακόλουθα :

**Πρόταση 2.2.3.** *Έστω $K$ υποσύνολο ενός χώρου Banach. Αν το $\overline{\text{conv}}(K)$ είναι αιχμηρό, τότε και το $K$ είναι αιχμηρό.*

*Απόδειξη.* Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το $\overline{\text{conv}}(K)$ είναι αιχμηρό, υπάρχει $b' \in \overline{\text{conv}}(K)$ με

$$b' \in \overline{\text{conv}}\left(\overline{\text{conv}}(K) \setminus B(b', \varepsilon/2)\right) =: Q$$

Αφού $b' \in \overline{\text{conv}}(K) \setminus Q$ και το $Q$ είναι κλειστό και κυρτό, δεν μπορεί να περιέχει το K. (Αν είχαμε $K \subseteq Q$, τότε $\overline{\text{conv}}(K) \subseteq Q$, οπότε $\overline{\text{conv}}(K) \setminus Q = \emptyset$. Αλλά $b' \in \overline{\text{conv}}(K) \setminus Q$). Αφού $K \not\subseteq Q$, υπάρχει $b \in K \setminus Q$.

Τότε $b \in B(b', \varepsilon/2)$, διότι

$$b \notin Q \Longrightarrow b \notin \overline{\text{conv}}(K) \setminus B(b', \varepsilon/2) \overset{b \in K}{\Longrightarrow} b \in B(b', \varepsilon/2)$$

Άρα

$$\begin{aligned} & B(b, \varepsilon) \supseteq B(b', \varepsilon/2) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad & K \setminus B(b, \varepsilon/2) \subseteq K \setminus B(b', \varepsilon/2) \subseteq \overline{\text{conv}}(K) \setminus B(b', \varepsilon/2) \subseteq \\ \subseteq \quad & \overline{\text{conv}}\left(\overline{\text{conv}}(K) \setminus B(b', \varepsilon/2)\right) = Q \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$K \setminus B(b, \varepsilon) \subseteq Q \Longrightarrow \overline{\text{conv}}(K \setminus B(b, \varepsilon)) \subseteq Q$$

Αλλά

$$b \notin Q \Longrightarrow b \notin \overline{\text{conv}}(K \setminus B(b, \varepsilon))$$

Αφού το $\varepsilon$ ήταν τυχόν, το K είναι αιχμηρό. □

**Πρόταση 2.2.4.** *Κάθε σχετικά $\|\cdot\|$-συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι αιχμηρό.*

*Απόδειξη.* 1. Έστω οτι το $K \neq \emptyset$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές και κυρτό. Από το Θεώρημα Krein-Milman έχουμε οτι $K = \overline{\text{conv}}(ex(K))$. Άρα το K έχει ακραία σημεία. Έστω $b$ ακραίο σημείο του K και έστω $\varepsilon > 0$.

Τότε προφανώς $b \notin \overline{K \setminus B(b, \varepsilon)}$

Αν είχαμε

$$b \in \overline{\text{conv}}(K \setminus B(b, \varepsilon)) \subseteq K$$

θα έπρεπε

$$b \in ex\left(\overline{\text{conv}}(K \setminus B(b, \varepsilon))\right)$$

Όμως, τα ακραία σημεία του $\overline{\text{conv}}(K \setminus B(b, \varepsilon))$ είναι όλα στοιχεία του $\overline{K \setminus B(b, \varepsilon)}$ από πόρισμα του Θεωρήματος Krein-Milman

(Αν $H = \overline{\text{conv}}(L)$, τότε $ex(H) \subseteq L$).

Επομένως,

$$b \notin \overline{\text{conv}}(K \setminus B(b, \varepsilon))$$

Άρα το $b$ είναι αιχμηρό σημείο του K. Επομένως το K είναι αιχμηρό.

2. Έστω K σχετικά $\|\cdot\|$-συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach. Τότε, υπάρχει $A \supseteq K$, $\|\cdot\|$-συμπαγές. Άρα και το $\overline{\text{conv}}(A)$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές και $\overline{\text{conv}}(A) \supseteq \overline{\text{conv}}(K)$. Αφού το $\overline{\text{conv}}(K)$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστό υποσύνολο του $\|\cdot\|$-συμπαγούς $\overline{\text{conv}}(A)$ , θα είναι επίσης $\|\cdot\|$-συμπαγές. Δηλαδή, το $\overline{\text{conv}}(K)$ είναι $\|\cdot\|$ -συμπαγές και κλειστό. Από το πρώτο βήμα θα είναι αιχμηρό. Άρα από την Πρόταση 2.2.3 και το K θα είναι αιχμηρό.

$\square$

**Πόρισμα 2.2.5.** *Αν το $K$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές και κυρτό, τότε τα ακραία σημεία του $K$ είναι αιχμηρά σημεία του $K$.*

*Απόδειξη.* Από το πρώτο βήμα της παραπάνω απόδειξης. $\square$

**Ορισμός 2.2.6.** *Δεδομένου ενός $b \in X$ και ενός $\varepsilon > 0$, λέμε οτι ένα σύνολο $E \in \mathcal{A}$ είναι* **(b,ε)-αγνό** *(***(b,ε)-pure***) για το $\tau$ ως προς το $\mu$, αν*

$$\tau(F)/\mu(F) \in B(b, \varepsilon), \quad \text{για κάθε } \; F \subseteq E \;\; \text{με} \;\; 0 < \mu(F) < \infty$$

**Λήμμα 2.2.7.** *Έστω $(S, \mathcal{A}, \mu)$ σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $\tau$ ένα διανυσματικό μέτρο στην $\mathcal{A}$ με τιμές στον $X$, που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.1, και έστω $\varepsilon > 0$ και $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) > 0$ δοσμένα. Τότε, υπάρχουν $F \subseteq E$ και $b \in X$, τέτοια ώστε $\mu(F) > 0$ και το $F$ να είναι $(b, \varepsilon)$-αγνό.*

*Απόδειξη.* Αφού ο χώρος είναι σ-πεπερασμένος, υπάρχει $E' \subseteq E$ με $0 < \mu(E') < \infty$.

Από την υπόθεση, υπάρχει $E_d \subseteq E' \subseteq E$ με $\mu(E_d) > 0$ και το $A_{E_d}$ να είναι αιχμηρό.

Για το δοσμένο $\varepsilon > 0$ , αφού το $A_{E_d}$ είναι αιχμηρό, υπάρχει $b \in A_{E_d}$, τέτοιο ώστε

$$b \notin \overline{\text{conv}} \left( A_{E_d} \setminus B(b, \varepsilon) \right) := Q$$

Αφού $b \in A_{E_d}$ , υπάρχει $F_0 \subseteq E_d$ με $0 < \mu(F_0) < \infty$, τέτοιο ώστε

$$b = \tau(F_0)/\mu(F_0)$$

Αν το $F_0$ είναι $(b, \varepsilon)$-αγνό, τότε τελειώσαμε.

Έστω οτι το $F_0$ δεν είναι $(b, \varepsilon)$-αγνό.

Τότε, υπάρχει $F \subseteq F_0$ με $0 < \mu(F) < \infty$ και $\tau(F)/\mu(F) \notin B(b, \varepsilon)$.

Αλλά, $F \subseteq F_0 \subseteq E_d$ και $\mu(F) > 0$, επομένως, από τον ορισμό του $A_{E_d}$, έχουμε
$$\tau(F)/\mu(F) \in A_{E_d}$$
Άρα
$$\tau(F)/\mu(F) \in A_{E_d} \setminus B(b,\varepsilon) \subseteq Q$$
Τελικά , αφού το $F_0$ δεν είναι $(b,\varepsilon)$-αγνό, υπάρχει $F \subseteq F_0$ με $0 < \mu(F) < \infty$ και $\tau(F)/\mu(F) \in Q$.

• Έστω $k_1 \geq 2$ ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο υπάρχει $E_1 \subseteq F_0$ με $\mu(E_1) \geq 1/k_1$ και $\tau(E_1)/\mu(E_1) \in Q$.

Έστω $F_1 = F_0 \setminus E_1$

Τότε, $\mu(F_1) > 0$

Πράγματι, αν είχαμε $\mu(F_1) = 0$, θα έπρεπε και $\tau(F_1) = 0$, αφού $\tau << \mu$. Οπότε,
$$\mu(F_0) \overset{E_1,F_1 \text{ξένα}}{=} \mu(E_1) + \mu(F_1) = \mu(E_1)$$
και
$$\tau(F_0) \overset{E_1,F_1 \text{ξένα}}{=} \tau(E_1) + \tau(F_1) = \tau(E_1)$$
Αλλά τότε
$$b = \frac{\tau(F_0)}{\mu(F_0)} = \frac{\tau(E_1)}{\mu(E_1)} \in Q$$
**Άτοπο**, διότι $b \notin Q$.

Αν το $F_1$ είναι $(b,\varepsilon)$-αγνό, τότε τελειώσαμε.

Έστω οτι δεν είναι $(b,\varepsilon)$-αγνό.

•Έστω $k_2 \geq 2$ ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο υπάρχει $E_2 \subseteq F_1$ με $\mu(E_2) \geq 1/k_2$ και $\tau(E_2)/\mu(E_2) \in Q$.

Τότε $k_2 \geq k_1$, αφού $F_1 = F_0 \setminus E_1 \subseteq F_0$ και ο $k_1$ ήταν ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο υπάρχει $E_1 \subseteq F_0$ με $\mu(E_1) \geq 1/k_1$ και $\tau(E_1)/\mu(E_1) \in Q$.

Επίσης, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, αφού $E_2 \subseteq F_1 = F_0 \setminus E$.

Έστω $F_2 = F_1 \setminus E_2$

$\vdots$

Συνεχίζοντας έτσι, κατασκευάζουμε ακολουθία $\{E_i\}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $F_0$ (πιθανώς πεπερασμένη) και μια αύξουσα ακολουθία $\{k_i\}$ ακεραίων (πιθανώς πεπερασμένη) με την ιδιότητα
$$\frac{\tau(E_i)}{\mu(E_i)} \in Q \quad \text{και} \quad \mu(E_i) \geq \frac{1}{k_i}, \quad \text{για κάθε } i$$
• Επίσης, αν
$$E' \subseteq F_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i \ \text{ και } \ \tau(E')/\mu(E') \in Q$$
τότε
$$\mu(E') < 1/(k_n - 1)$$

Πράγματι, αφού

$$E' \subseteq F_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i = F_n \quad \text{και} \quad \tau(E')/\mu(E') \in Q$$

αν είχαμε

$$\mu(E') \geq 1/(k_n - 1), \quad \text{τότε θα έπρεπε} \quad k_n - 1 \geq k_{n+1} \geq k_n, \quad \textbf{άτοπο}$$

• Αφού το $F_0$ έχει πεπερασμένο μέτρο και τα $E_i$ είναι ξένα ανά δύο, θα πρέπει

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leq \mu(F_0) < \infty$$

Άρα $\mu(E_i) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Αλλά τότε

$$\frac{1}{k_i} \leq \mu(E_i) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow k_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

• Έστω $E_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ και $F = F_0 \setminus E_0$.
Τότε

1. $\mu(F) > 0$

   διότι αν είχαμε $\mu(F) = 0$, θα έπρεπε και $\tau(F) = 0$, αφού $\tau << \mu$. Άρα

$$\begin{aligned}
\frac{\tau(F_0)}{\mu(F_0)} &= \frac{\tau(F) + \tau(E_0}{\mu(F) + \mu(E_0)} \\
&= \frac{\tau(E_0)}{\mu(E_0)} \\
&= \frac{\tau(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)}{\mu(E_0)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(E_i)}{\mu(E_0)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau(E_i)}{\mu(E_0)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\tau(E_i)}{\mu(E_i)} \cdot \frac{\mu(E_i)}{\mu(E_0)} \right)
\end{aligned}$$

   Όμως,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(E_i)}{\mu(E_0)} = \frac{\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)}{\mu(E_0)} = \frac{\mu(E_0)}{\mu(E_0)} = 1$$

   και

$$\frac{\tau(E_i)}{\mu(E_i)} \in Q, \quad \text{για κάθε} \quad i$$

**Λήμμα** : Αν $Q$ κλειστό και κυρτό, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$, $q_i \in Q$ και η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i q_i$ συγκλίνει, τότε $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i q_i \in Q$.

Πράγματι ,

αν θεωρήσουμε $\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, τότε $\alpha_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Επίσης, αφού το $Q$ είναι κυρτό, $q_i \in Q$ και

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i/\alpha_n = 1/\alpha_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \alpha_n/\alpha_n = 1$$

θα πρέπει

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha_n} q_i = \frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i \in Q, \quad \text{για καθε } \ n \in \mathbb{N}$$

Έστω οτι $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} b \in X$.

Τότε $\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot b$.

Αφού $\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i \in Q$ και το $Q$ είναι κλειστό, θα πρέπει $b \in Q$.$\diamondsuit$

Αφού το $Q$ είναι κλειστό και κυρτό, από το παραπάνω λήμμα θα πρέπει το $b = \tau(F_0)/\mu(F_0)$ να είναι επίσης στοιχείο του $Q$. **Άτοπο** διότι το $b$ επιλέχτηκε έτσι ώστε να μην είναι στοιχείο του $Q$.

2. Το $F$ είναι $(b,\varepsilon)$-αγνό (οπότε είναι το ζητούμενο), διότι αν υπάρχει $F' \subseteq F$ με $\mu(F') > 0$ και $\tau(F')/\mu(F') \in Q$, τότε έχουμε δείξει οτι θα πρέπει

$$\mu(F') < \frac{1}{k_n - 1}, \quad \text{για κάθε } \ n \in \mathbb{N}$$

Αλλά $k_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Επομένως, $\mu(F') = 0$, **άτοπο**. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο $F' \subseteq F$.

Άρα, για κάθε $F' \subseteq F$ με $\mu(F') > 0$ , έχουμε

$$\frac{\tau(F')}{\mu(F')} \notin Q \Longrightarrow \frac{\tau(F')}{\mu(F')} \in B(b,\varepsilon)$$

$\square$

**Θεώρημα 2.2.8.** *Έστω $(S, \mathcal{A}, \mu)$ σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $\tau$ ένα διανυσματικό μέτρο στην $\mathcal{A}$ με τιμές στον $X$, που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.1. Τότε, δεδομένου ενός $\varepsilon > 0$, υπάρχουν (πιθανώς πεπερασμένες) ακολουθίες $\{b_i\}$ και $\{E_i\}$ στοιχείων του $X$ και της $\mathcal{A}$ αντιστοίχως, τέτοιες ώστε το $E_i$ είναι $(b_i, \varepsilon)$-αγνό για κάθε $i$ και $S = \bigcup E_i$.*

*Απόδειξη.* 1. Έστω οτι $\mu(S) < \infty$.

Έστω $k_1$ ο μικρότερος ακέραιος (τουλάχιστον 2), τέτοιος ώστε να υπάρχει $b_1 \in X$ και $E_1 \subseteq S$ με το $E_1$ να είναι $(b_1, \varepsilon)$-αγνό και $\mu(E_1) \geq 1/k_1$.

(Από το Λήμμα 2.2.7 , για το δοσμένο $\varepsilon$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $b_1$ και ένα $E_1$ με τις παραπάνω ιδιότητες.)

Έστω $k_2$ ο μικρότερος ακέραιος (τουλάχιστον 2), τέτοιος ώστε να υπάρχει $b_2 \in X$ και $E_2 \subseteq S \setminus E_1$ με το $E_2$ να είναι $(b_2, \varepsilon)$-αγνό και $\mu(E_2) \geq 1/k_2$.

$$\vdots$$

Κατασκευάζουμε έτσι ακολουθίες

$\{E_i\}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $S$

$\{b_i\}$ στοιχείων του X και

$\{k_i\}$ αύξουσα ακεραίων

τέτοιες ώστε το $E_i$ να είναι $(b_i, \varepsilon)$-αγνό και $\mu(E_i) \geq 1/k_i$, για κάθε $i$

Επίσης, αν $F \subseteq S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ και το $F$ είναι $(b, \varepsilon)$-αγνό για κάποιο $b \in X$, τότε $\mu(F) < 1/(k_n - 1)$ (από την ελαχιστότητα των $k_n$) και αφού $\mu(S) < \infty$ και τα $E_i$ είναι ξένα με $\mu(E_i) \geq 1/k_i$, θα πρέπει

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leq \mu(S) < \infty \quad &\Longrightarrow \quad \mu(E_i) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{k_i} \leq \mu(E_i) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Longrightarrow \quad k_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty
\end{aligned}$$

Έστω $E = S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

(α′) $\mu(E) = 0$

Έστω οτι $\mu(E) > 0$. Τότε από το Λήμμα 2.2.7, υπάρχουν $F \subseteq E$ και $b \in X$, τέτοια ώστε $\mu(F) > 0$ και το $F$ να είναι $(b, \varepsilon)$-αγνό. Αλλά τότε $F \subseteq E = S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, όπως δείχτηκε, $\mu(F) < 1/(k_n - 1)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $k_n \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, θα πρέπει $\mu(F) = 0$, που είναι **αντίφαση**.

(β′) Αφού $\mu(E) = 0$ , μπορούμε να θεωρήσουμε μία νέα $\{E'_i\}$, όπου $E'_1 = E_1 \cup E$ και $E'_n = E_n$, για κάθε $n \geq 2$.

Τότε τα $E'_n$ είναι $(b_n, \varepsilon)$-αγνά για $n \geq 2$ και το $E'_1$ είναι $(b_1, \varepsilon)$-αγνό, διότι αν $F \subseteq E'_1$ με $\mu(F) > 0$, έχουμε

$$F = (F \cap E_1) \cup (F \cap E) \Longrightarrow \begin{cases} \mu(F) = \mu(F \cap E_1) + \mu(F \cap E) \\ \tau(F) = \tau(F \cap E_1) + \tau(F \cap E) \end{cases}$$

Αλλά $F \cap E \subseteq E$ και $\mu(E) = 0$. Άρα $\mu(F \cap E) = 0$ και αφού $\tau << \mu$, θα πρέπει $\tau(F \cap E) = 0$.

Επομένως, $\tau(F) = \tau(F \cap E_1)$ και $\mu(F) = \mu(F \cap E_1)$.

Αφού $\mu(F) > 0$ και $\mu(F \cap E) = 0$, πρέπει $\mu(F \cap E_1) > 0$ . Αλλά $F \cap E_1 \subseteq E_1$ , το οποίο είναι $(b_1, \varepsilon)$-αγνό. Άρα

$$\frac{\tau(F)}{\mu(F)} = \frac{\tau(F \cap E_1)}{\mu(F \cap E_1)} \in B(b_1, \varepsilon)$$

Αφού το $F \subseteq E_1'$ ήταν τυχόν με $\mu(F) > 0$, το $E_1'$ είναι $(b_1, \varepsilon)$-αγνό.

Τώρα, κάθε $E_i'$ είναι $(b_i, \varepsilon)$-αγνό και $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i'$, δηλαδή το ζητούμενο.

2. Αφού ο $S$ είναι σ-πεπερασμένος, υπάρχουν $A_i \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_i) < \infty$ και $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

   Από το πρώτο βήμα, για κάθε $i$, υπάρχουν $\{E_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{b_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$, με $A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{i,n}$ και κάθε $E_{i,n}$ να είναι $(b_{i,n}, \varepsilon)$-αγνό.

   Άρα ο $S$ γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση συνόλων (των $E_{i,n}$) , τέτοιων ώστε κάθε $E_{i,n}$ να είναι $(b_{i,n}, \varepsilon)$-αγνό.

$\square$

**Ορισμός 2.2.9.** *Ένα* **κατευθυνόμενο** *(***directed***) σύνολο* $\Pi$ *είναι ένα σύνολο με μερική διάταξη τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος* $\pi_1, \pi_2$ *στοιχείων του* $\Pi$ *, υπάρχει* $\pi_3 \in \Pi$ *με την ιδιότητα* $\pi_1 \leq \pi_3$ *και* $\pi_2 \leq \pi_3$.

*Απόδειξη.* (**Θεωρήματος 2.2.1**)

1. Έστω

$$\Pi = \{\pi : \quad \pi \;=\; \text{συλλογή πεπερασμένου πλήθους ξένων στοιχείων της } \mathcal{A} \text{ αυστηρά θετικού πεπερασμένου μέτρου}\}$$

   δηλαδή σύνολο στοιχείων της μορφής

$$\pi = \{F_1, ..., F_n : \quad F_i \in \mathcal{A}, \quad 0 < \mu(F_i) < \infty\}$$

   Τότε το $\Pi$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο (μέχρι συνόλων μέτρου 0), με διάταξη

$$\begin{aligned} \pi_1 \geq \pi \iff \quad & \text{για κάθε } F \in \pi, \text{ υπάρχει } F_i \in \pi_1 \\ & \text{με } F = (\bigcup F_i) \cup F_0, \\ & \text{όπου } F_0 \text{ είναι ένα σύνολο μέτρου 0} \end{aligned}$$

2. Για κάθε $\pi \in \Pi$ ορίζουμε

$$f_\pi = \sum_{E \in \pi} \frac{\tau(E)}{\mu(E)} \cdot \chi_E$$

Οι $f_\pi$ είναι απλές ολοκληρώσιμες, αφού τα στοιχεία του $\pi$ είναι πεπερασμένα το πλήθος και με πεπερασμένα μέτρα.

3. Οι $f_\pi$ σχηματίζουν ένα δίκτυο Cauchy ως προς την μετρική που επάγεται από την νόρμα του $L_1$.

Δηλαδή,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \pi_0 \in \Pi \quad : \pi \geq \pi_0 \Longrightarrow \|f_\pi - f_{\pi_0}\|_1 < \varepsilon$$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$.

Αφού το $|\tau|$ είναι πεπερασμένο μέτρο, υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) < \infty$ και $|\tau|(S \setminus E) < \varepsilon/3$.

Επίσης, αφού $\tau << \mu$, θα πρέπει και $|\tau| << \mu$. Από το (3) του ορισμού της απόλυτης συνέχειας

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad \mu(F) < \delta \Longrightarrow |\tau|(F) < \varepsilon/6$$

Από το Θεώρημα 2.2.8, υπάρχουν ακολουθίες $\{E_i\}$ και $\{b_i\}$ (πιθανώς πεπερασμένες), στοιχείων της $\mathcal{A}$ και του X αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

το $E_i$ να είναι $(b_i, \frac{\varepsilon}{6\mu(E)})$-αγνό για κάθε $i$ και $E = \bigcup E_i$ (ξένη ένωση όπως στην κατασκευή που εμφανίζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.8).

Αφού $\mu(E) < \infty$ , θα έχουμε και $\mu(E_i) < \infty, \quad \forall i$.

Επίσης, αφού $\mu(E) < \infty$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

αν $E_0 = E \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i$, τότε $\mu(E_0) < \delta$.

Αν $\mu(E_0) > 0$, θέτουμε $\pi_0 = \{E_i, 0 \leq i \leq n\}$.

(Θεωρούμε οτι $\mu(E_i) > 0$, διότι διαφορετικά μπορούμε να θεωρήσουμε νέα ακολουθία $\{E_i'\}$ με

$$E = \bigcup E_i' \quad \text{και} \quad E_1' = \left( \bigcup_{\mu(E_i)=0} E_i \right) \cup E_{i_0}$$

όπου το $i_0 \in \mathbb{N}$ είναι ο πρώτος ακέραιος με $\mu(E_{i_0}) > 0$.)

Αν $\mu(E_0) = 0$, θέτουμε $\pi_0 = \{E_i, 1 \leq i \leq n\}$.

Τότε για $\pi \geq \pi_0$ έχουμε οτι για κάθε $E_i \in \pi_0$, υπάρχει $\{F_k^i\} \subseteq \pi$ με $E_i = (\bigcup_k F_k^i) \cup F_0^i$, για κάποιο σύνολο $F_0^i$ μέτρου 0.

Άρα

$$\|f_\pi - f_{\pi_0}\|_1 = \left\| \sum_{F\in\pi} \frac{\tau(F)}{\mu(F)}\chi_F - \sum_{i=0 \text{ή} 1}^{n} \frac{\tau(E_i)}{\mu(E_i)}\chi_{E_i} \right\|_1$$

Έστω $\pi_1 \subseteq \pi$ με $F \in \pi_1 \iff F \neq F_k^i$. Τότε

$$\begin{aligned}
\|f_\pi - f_{\pi_0}\|_1 &= \int \left\| \sum_{F\in\pi} \frac{\tau(F)}{\mu(F)}\chi_F - \sum_{i=0 \text{ή} 1}^{n} \frac{\tau(E_i)}{\mu(E_i)}\chi_{E_i} \right\| d\mu \\
&\leq \int \left( \sum_{F\in\pi_1} \frac{\|\tau(F)\|}{\mu(F)}\chi_F + \sum_{i,k} \left\| \frac{\tau(F_k^i)}{\mu(F_k^i)} - \frac{\tau(E_i)}{\mu(E_i)} \right\| \cdot\chi_{F_k^i} \right) d\mu \\
&= \sum_{F\in\pi_1} \frac{\|\tau(F)\|}{\mu(F)}\mu(F) + \sum_{i,k} \left\| \frac{\tau(F_k^i)}{\mu(F_k^i)} - \frac{\tau(E_i)}{\mu(E_i)} \right\| \mu(F_k^i) \\
&= \sum_{F\in\pi_1} \|\tau(F)\| + \sum_{i,k} \left\| \frac{\tau(F_k^i)}{\mu(F_k^i)} - \frac{\tau(E_i)}{\mu(E_i)} \right\| \mu(F_k^i) \quad (*)
\end{aligned}$$

Αλλά,

$$F \in \pi_1 \Longrightarrow \mu(F\cap E) = 0 \Longrightarrow |\tau|(F\cap E) = 0$$

Άρα

$$\begin{aligned}
|\tau|\left(\bigcup_{F\in\pi_1} F\right) &= |\tau|\left( (\bigcup_{F\in\pi_1} F)\cap E \right) + |\tau|\left( (\bigcup_{F\in\pi_1} F)\cap (S\setminus E) \right) \\
&= |\tau|\left( (\bigcup_{F\in\pi_1} F)\cap (S\setminus E) \right) \leq |\tau|(S\setminus E) < \varepsilon/3
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{F\in\pi_1} \|\tau(F)\| \leq \sum_{F\in\pi_1} |\tau(F)| \overset{F \text{ ξένα}}{=} |\tau|(\bigcup_{F\in\pi_1} F) < \varepsilon/3 \quad (1)$$

Εξ άλλου

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,k} \left\| \frac{\tau(F_k^i)}{\mu(F_k^i)} - \frac{\tau(E_i)}{\mu(E_i)} \right\| \mu(F_k^i) \leq \\
\leq\ & \sum_{i,k} \left\| \frac{\tau(F_k^i)}{\mu(F_k^i)} - b_i \right\| \mu(F_k^i) + \sum_{i,k} \left\| \frac{\tau(E^i)}{\mu(E^i)} - b_i \right\| \mu(F_k^i) \\
& (\text{τα } E_i \text{ είναι } (b_i, \varepsilon/6\mu(E)) - \text{αγνά και } F_k^i \subseteq E_i \text{ με } 0 < \mu(F_k^i) < \infty) \\
\leq\ & \frac{\varepsilon}{6\mu(E)} \sum_{i,k} \mu(F_k^i) + \frac{\varepsilon}{6\mu(E)} \sum_{i,k} \mu(F_k^i) \\
=\ & \frac{\varepsilon}{3\mu(E)} \sum_{i,k} \mu(F_k^i) \\
& (\text{ τα } F_k^i \text{ είναι ξένα υποσύνολα του E}) \\
\leq\ & \frac{\varepsilon}{3\mu(E)} \mu(E) = \varepsilon/3 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Από τις (*), (1) και (2) έχουμε τελικά οτι

$$\|f_\pi - f_{\pi_0}\|_1 < 2\varepsilon/3 < \varepsilon$$

4. Αφού το δίκτυο $\{f_\pi\}_{\pi\in\Pi}$ είναι Cauchy, υπάρχει $f$ ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε $\|f_\pi - f\|_1 \longrightarrow 0$.

   Τότε θα έχουμε επίσης και οτι

$$\int_E f_\pi d\mu \longrightarrow \int_E f d\mu, \quad \text{για κάθε } \ E \in \mathcal{A}$$

5. Θα δείξουμε οτι $\tau(E) = \int_E f d\mu$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$.

   Αν $\mu(E) = 0$, τότε και $\tau(E) = 0$ και προφανώς $\int_E f d\mu = 0$. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει το ζητούμενο.

   Αν $0 < \mu(E) < \infty$, θεωρούμε $\pi_0 = \{E\}$

   Τότε, για $\pi \geq \pi_0$, το E γράφεται $(E = \bigcup_i F_i) \cup F_0$, για κάποια $F_i \in \pi$

και κάποιο $F_0$ με $\mu(F_0) = 0$, οπότε

$$\begin{aligned}
\int_E f_\pi d\mu &= \int \sum_{F \in \pi} \frac{\tau(F)}{\mu(F)} \chi_{E \cap F} d\mu \\
&= \sum_i \frac{\tau(F_i)}{\mu(F_i)} \mu(F_i) \\
&= \sum_i \tau(F_i) \\
&\overset{F_i \text{ ξένα}}{=} \tau(\bigcup_i F_i) \\
&= \tau(F_0 \cup (\bigcup_i F_i)) \\
&= \tau(E)
\end{aligned}$$

Αφού $\tau(E) = \int_E f_\pi d\mu, \quad \forall \pi \geq \pi_0$ ϑα πρέπει και

$$\tau(E) = \lim_\pi \int_E f_\pi d\mu = \int_E f d\mu$$

Αν $\mu(E) = \infty$ , τότε υπάρχουν $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ ένα ανά δύο με $0 < \mu(F_i) < \infty$, τέτοια ώστε $E = \bigcup_{i=1}^\infty F_i$ (αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο).

Από το προηγούμενο βήμα

$$\begin{aligned}
&\tau(\bigcup_{i=1}^\infty F_i) = \int_{\bigcup_{i=1}^\infty F_i} f d\mu, \quad \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \\
\Longrightarrow \quad &\lim_{k\to\infty} \tau(\bigcup_{i=1}^\infty F_i) = \lim_{k\to\infty} \int_{\bigcup_{i=1}^\infty F_i} f d\mu \Longrightarrow \\
\Longrightarrow \quad &\tau(E) = \tau(\bigcup_{i=1}^\infty F_i) = \int_E f d\mu
\end{aligned}$$

Τελικά ισχύει το ζητούμενο για κάθε $E \in \mathcal{A}$.

□

Με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1, εξασφαλίζουμε την ισχύ του πορίσματος που ακολουθεί και το οποίο αποτελεί το πρώτο βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου.

**Πόρισμα 2.2.10.** *Αν ο $X$ είναι χώρος Banach, τέτοιος ώστε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $X$ να είναι αιχμηρό, τότε ο $X$ έχει την RNP.*

*Απόδειξη.* Έστω $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και έστω τ ένα X-μέτρο φραγμένης κύμανσης και απολύτως συνεχές ως προς το μ, για τα οποία έχουμε $\tau(E)/\mu(E) \in B(0,1)$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$. Τότε, προφανώς το

$$A_F = \{\tau(F')/\mu(F') : F' \subseteq F, \mu(F) > 0\}$$

είναι φραγμένο, επομένως από την υπόθεση και αιχμηρό. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.1, συνεπώς ο X έχει την RNP. □

## 2.3 Η αιμηρότητα ως αναγκαία συνθήκη για την RNP

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με την απόδειξη του R.E. Huff για την ισχύ και του αντιστρόφου :

**Θεώρημα 2.3.1.** *(Huff, 1974 [8])*
*Ένας χώρος Banach X έχει την RNP, αν και μόνο αν κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι αιχμηρό.*

*Απόδειξη.* " $\Longrightarrow$ " Το Πόρισμα 2.2.10 του Rieffel.
" $\Longleftarrow$ " Θα υποθέσουμε οτι ο X περιέχει μη αιχμηρό, φραγμένο υποσύνολο K και θα αποδείξουμε οτι τότε ο X δεν έχει την RNP.

1. Αφού το K δεν είναι αιχμηρό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

   $$x \in K \Longrightarrow x \in \overline{\text{conv}}(K \setminus B(x, \varepsilon))$$

   Έστω $S = [0,1)$ και μ το μέτρο Lebesgue στην σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ όλων των Borel υποσυνόλων του $[0,1)$.

   Θα ορίσουμε με επαγωγή ακολουθία διαμερίσεων του $[0,1)$

   $\pi_n = \{I_1^n, ..., I_{p_n}^n\}$ ημιανοικτών διαστημάτων και μία αντίστοιχη ακολουθία απλών συναρτήσεων με πεδίο τιμών στο K

   $$f_n = \sum_{i=1}^{p_n} x_i^n \cdot \chi_{I_i^n}$$

   για τις οποίες θα ισχύουν τα εξής

   (α′) Η $\pi_{n+1}$ είναι εκλέπτυνση της $\pi_n$ για όλα τα $n = 0, 1, 2, ...$

   (β′) Η $\mathcal{A}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\bigcup_{n=0}^{\infty} \pi_n$

   (γ′) $\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \geq \varepsilon$, για όλα τα $n$ και όλα τα $t \in [0,1)$

   (δ′) $\left\| \int_{I_i^n} (f_n - f_{n+k}) d\mu \right\| < \frac{1}{2^n} \mu(I_i^n)$
   για όλα τα $n, k \in \mathbb{N}$ και όλα τα $i = 1, ..., p_n$.

(ε′) $\tau(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$.

2. Ας υποθέσουμε οτι υπάρχουν τέτοιες ακολουθίες $\{\pi_n\}$ και $\{f_n\}$.

   Αφού το K είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

   $\|x\| \leq M$, για κάθε $x \in K$.

   Τότε, για κάθε $E \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_E \|f_n\| d\mu &= \int_E \left\| \sum_{i=1}^{p_n} x_i^n \cdot \chi_{I_i^n} \right\| d\mu \\
&= \int \left\| \sum_{i=1}^{p_n} x_i^n \cdot \chi_{I_i^n \cap E} \right\| d\mu \\
&\leq \int \sum_{i=1}^{p_n} \|x_i^n \chi_{I_i^n \cap E}\| d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{p_n} \int \|x_i^n \chi_{I_i^n \cap E}\| d\mu \\
&\leq M \sum_{i=1}^{p_n} \int \|\chi_{I_i^n \cap E}\| d\mu \quad (\text{αφού } \ x_i^k \in K) \\
&= M \sum_{i=1}^{p_n} \mu(I_i^n \cap E) \\
&= M \cdot \mu \left( \bigcup_{i=1}^{p_n} (I_i^n \cap E) \right) \quad (\text{αφού τα } \ I_i^n \cap E \ \text{ είναι ξένα}) \\
&\leq M \cdot \mu(E) \qquad (*)
\end{aligned}$$

   οπότε

$$\begin{aligned}
\|\tau(E)\| &\overset{(\varepsilon')}{=} \lim_{n\to\infty} \left\| \int_E f_n d\mu \right\| \\
&\leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \int_E \|f_n\| d\mu \\
&\overset{(*)}{\leq} M \cdot \mu(E)
\end{aligned}$$

   Επομένως, το τ είναι φραγμένης κύμανσης (αφού το μ είναι φραγμένο), απολύτως συνεχές ως προς το μ και $\tau(E)/\mu(E) \in B(0, M)$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$.

   Αν ο X έχει την RNP, υπάρχει $g \in \mathcal{B}^1(\mu, X)$, τέτοια ώστε

$$\tau(E) = \int_E g d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Έστω

$$g_n = \sum_{i=1}^{p_n} \left( \frac{1}{\mu(I_i^n)} \int_{I_i^n} g d\mu \right) \cdot \chi_{I_i^n} = \sum_{i=1}^{p_n} \left( \frac{\tau(I_i^n)}{\mu(I_i^n)} \right) \cdot \chi_{I_i^n}$$

Τότε, από την Σημείωση 2.3.4

$$\int_S \|g - g_n\| d\mu \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επομένως, η $\{g_n\}$ είναι Cauchy στον $\mathcal{B}^1(\mu, X)$. Τότε, όμως,

$$\begin{aligned}
\int_S \|f_n - g_n\| d\mu &= \int_S \left\| \sum_{i=1}^{p_n} x_i^n \chi_{I_i^n} - \sum_{i=1}^{p_n} \frac{\tau(I_i^n)}{\mu(I_i^n)} \chi_{I_i^n} \right\| d\mu \\
&= \int_S \left\| \sum_{i=1}^{p_n} \left( x_i^n - \frac{\tau(I_i^n)}{\mu(I_i^n)} \right) \cdot \chi_{I_i^n} \right\| d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{p_n} \left( \int_{I_i^n} \left\| x_i^n - \frac{\tau(I_i^n)}{\mu(I_i^n)} \right\| d\mu \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p_n} \left\| x_i^n - \frac{\tau(I_i^n)}{\mu(I_i^n)} \right\| \mu(I_i^n) \\
&= \sum_{i=1}^{p_n} \| x_i^n \cdot \mu(I_i^n) - \tau(I_i^n) \| \\
&\stackrel{(\varepsilon')}{=} \sum_{i=1}^{p_n} \left\| x_i^n \cdot \mu(I_i^n) - \lim_{k\to\infty} \int_{I_i^n} f_k d\mu \right\| \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \left\| x_i^n \cdot \mu(I_i^n) - \int_{I_i^n} f_k d\mu \right\| \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \left\| \int_{I_i^n} f_n d\mu - \int_{I_i^n} f_k d\mu \right\| \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \left\| \int_{I_i^n} (f_n - f_k) d\mu \right\| \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \left\| \int_{I_i^n} (f_n - f_{n+k}) d\mu \right\| \\
&\stackrel{(\delta')}{\leq} \sum_{i=1}^{p_n} \frac{1}{2^n} \mu(I_i^n) \\
&= \frac{1}{2^n} \mu([0,1)) = \frac{1}{2^n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_S \|f_n - g\| d\mu \leq \int_S \|f_n - g_n\| d\mu + \int_S \|g_n - g\| d\mu \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επομένως, και η $\{f_n\}$ είναι Cauchy στον $\mathcal{B}^1(\mu, X)$. **Αντίφαση**, διότι από το (γ′), $\int_S \|f_n - f_{n+1}\| d\mu \geq \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τελικά, ο X δεν μπορεί να έχει την RNP.

3. Μένει να κατασκευαστούν $\{\pi_n\}, \{f_n\}$ που να ικανοποιουν τις (α′)-(ε′).

   Έστω $\pi_0 = \{[0,1)\}$, $x_0^1 \in K$ και $f_0 = x_0^1 \chi_{[0,1)}$.

   Έστω οτι έχουν οριστεί

   $\pi_n = \{I_1^n, ..., I_{p_n}^n\}$ διαμέριση του $[0,1)$ από ημιανοικτά διαστήματα και $f_n = \sum_{i=1}^{p_n} x_i^n \chi_{I_i^n}$, όπου $x_i^n \in K, i = 1, ..., p_n$.

   Από την επιλογή του $\varepsilon$, αφού $x_i^n \in K$, υπάρχουν $y_1^{(i)}, ..., y_{q_i}^{(i)} \in K$ και $a_1^{(i)}, ..., a_{q_i}^{(i)}$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με

   $$\sum_{j=1}^{q_i} a_j^{(i)} = 1 \text{ και } \|y_j^{(i)} - x_i^n\| \geq \varepsilon \text{ και } \|x_i^n - \sum_{j=1}^{q_i} a_j^{(i)} y_j^{(i)}\| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

   Αφού δεν απαιτούμε τα $y_j^{(i)}$ να είναι διακριτά, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε οτι

   $$a_j^{(i)} < \frac{1}{n+1}, \quad \forall j \in \{1, ..., q_i\}$$

   (Αν κάποιο είναι μεγαλύτερο από $1/(n+1)$ , μπορούμε να θεωρήσουμε καινούργια γραφή του αθροίσματος, "σπάζοντας " τον όρο $a_j^{(i)} y_j^{(i)}$ σε $s$ όρους $y_j^{(i)} a_j^{(i)}/s + ... + y_j^{(i)} a_j^{(i)}/s$ .)

   Στη συνέχεια θεωρούμε διαμέριση $J_1^{(i)}, ..., J_{q_i}^{(i)}$ του $I_i^n$ σε ημιανοικτά διαστήματα τέτοια ώστε

   $$\mu(J_j^{(i)}) = a_j^{(i)} \mu(I_i^n), \ j = 1, ..., q_i \text{ και}$$

   $$\pi_{n+1} = \{J_j^{(i)}, i = 1, ..., p_n, j = 1, ..., q_i\}$$

   Ορίζουμε

   $$f_{n+1} = \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{j=1}^{q_i} y_j^{(i)} \chi_{J_j^{(i)}}$$

   Οι $\{\pi_n\}, \{f_n\}$, που ορίστηκαν παραπάνω επαγωγικά, ικανοποιούν τις (α′)-(ε′).

   (α′) Προφανές, από τον ορισμό της $\pi_{n+1}$.

   (β′) Αν $\sigma(\bigcup_{i=0}^{\infty} \pi_i)$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\bigcup_{i=0}^{\infty} \pi_i$, τότε προφανώς,

   $$\mathcal{A} \supseteq \sigma(\bigcup_{i=0}^{\infty} \pi_i)$$

Επίσης, από την επιλογή των $a_j^{(i)}$, έχουμε οτι

$$\begin{aligned}\max\{\mu(I_i^{n+1}), i=1,...,p_{n+1}\} &= \max\{a_j^{(i)}\mu(I_i^n), j=1,...,q_i, i=1,...,p_n\}\\ &< \frac{1}{n+1}\max\{\mu(I_i^n), i=1,...,p_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\max\{\mu(I_i^n), i=1,...,p_n\}=0$$

Για να δείξουμε οτι $\mathcal{A}\supseteq\sigma(\bigcup_{i=0}^{\infty}\pi_i)$, αρκεί να δείξουμε οτι κάθε $[a,b)\subseteq[0,1)$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\bigcup_{i=1}^{\infty}\pi_i$.

Έστω $[a,b)\subseteq[0,1)$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\pi_{n_1}$ και $i_1,...,i_{n_1}$ διαδοχικοί, τέτοιοι ώστε

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_{i_k}^{n_1}=[a,b) \text{ και } I_{i_1-1}^{n_1}\cap[0,a)\neq\emptyset \text{ και } I_{i_{n_1}}^{n_1}\cap[b,1)\neq\emptyset$$

Τότε το $I_1:=\bigcup_{k=1}^{n_1}I_{i_k}^{n_1}$ είναι κάποιο $[a_1,b_1)$, πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\pi_{n_1}$.

Αφού $\lim_{n\to\infty}\max\{\mu(I_i^n), i=1,...,p_n\}=0$, μπορούμε να διαλέξουμε $n_1$ αρκετά μέγάλο ώστε

$$\max\{\mu(I_i^{n_1}), i=1,...,p_{n_1}\}<\frac{b-a}{4}$$

Τότε $\mu(I_1)>\frac{b-a}{2}$, διότι αν ήταν μικρότερο θα μπορούσαμε να προσθέσουμε στην ένωση το $I_{i_1-1}^{n_1}$ ή το $I_{i_{n_1}+1}^{n_1}$.

Αν $a_1=a$ και $b_1=b$, τότε τελειώσαμε.

Αν $b_1\neq b$, τότε όπως πριν, υπάρχει $\pi_{n_2}$ και $I_{2,1}$ πεπερασμάνη ένωση στοιχείων της $\pi_{n_2}$, τέτοια ώστε

$$I_{2,1}\subseteq[b_1,b) \text{ και } \mu(I_{2,1})>\frac{b-b_1}{2}$$

Αν $a_1\neq a$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την $\pi_{n_2}$, τέτοια ώστε να υπάρχει $I_{2,2}$ πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\pi_{n_2}$ με

$$I_{2,2}\subseteq[a,a_1) \text{ και } \mu(I_{2,1})>\frac{a_1-a}{2}$$

(θεωρούμε το $n_2$ αρκετά μεγάλο ώστε να συμβαίνουν και τα δύο)

Έστω $I_2=I_{2,1}\cup I_{2,2}$. Τότε

$$\mu(I_2)>\frac{\mu([a,b)\setminus[a_1,b_1))}{2}$$

$$\vdots$$

Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε $\{I_n\}$ ακολουθία ξένων, πεπερασμένων ενώσεων στοιχείων της $\bigcup_{i=0}^{\infty} \pi_i$, τέτοια ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [a,b)$.

(γ′) Έστω $t \in [0,1)$. Τότε, για σταθερό $n$, υπάρχει $i \in \{1,...,p_n\}$, τέτοιο ώστε $t \in I_i^n$. Άρα $f_n(t) = x_i^n$. Επίσης, υπάρχει $j \in \{1,...,q_i\}$ τέτοιο ώστε $t \in J_j^{(i)}$. Άρα $f_{n+1}(t) = y_j^{(i)}$. Αλλά τότε

$$\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| = \|x_i^n - y_j^{(i)}\| \geq \varepsilon$$

(δ′)

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{I_i^n} (f_n - f_{n+1}) d\mu \right\| &= \left\| \int_{I_i^n} \left( \sum_{j=1}^{p_n} x_j^n \chi_{I_j^n} - \sum_{j=1}^{p_n} \sum_{k=1}^{q_j} y_k^{(j)} \chi_{J_k^{(j)}} \right) d\mu \right\| \\
&= \left\| \int_{I_i^n} \left( x_i^n - \sum_{j=1}^{q_i} y_j^{(i)} \chi_{J_j^{(i)}} \right) d\mu \right\| \\
&= \left\| x_i^n \cdot \mu(I_i^n) - \sum_{j=1}^{q_i} y_j^{(i)} \mu(J_j^{(i)}) \right\| \\
&= \left\| x_i^n \mu(I_i^n) - \sum_{j=1}^{q_i} y_j^{(i)} a_j^{(i)} \mu(I_i^n) \right\| \\
& \quad \text{(από την κατασκευή των } J_j^{(i)}\text{)} \\
&= \mu(I_i^n) \left\| x_i^n - \sum_{j=1}^{q_i} y_j^{(i)} a_j^{(i)} \right\| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} \mu(I_i^n) \\
& \quad \text{(από την επιλογή των } y_j^{(i)} a_j^{(i)}\text{)}
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\left\| \int_{I_i^n} (f_n - f_{n+1}) d\mu \right\| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \mu(I_i^n), \quad \text{για κάθε} n, i \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Έστω $J \subseteq \{1, ..., p_n\}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\bigcup_{i\in J} I_i^n} (f_n - f_{n+1}) d\mu \right\| &\overset{\text{ξένη ένωση}}{=} \left\| \sum_{i\in J} \int_{I_i^n} (f_n - f_{n+1}) d\mu \right\| \\
&\leq \sum_{i\in J} \left\| \int_{I_i^n} (f_n - f_{n+1}) d\mu \right\| \\
&\overset{(1)}{\leq} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i\in J} \mu(I_i^n) \\
&\overset{\text{ξένη ένωση}}{=} \frac{1}{2^{n+1}} \mu(\bigcup_{i\in J} I_i^n) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Τελικά, για κάθε $i, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{I_i^n} (f_n - f_{n+k}) d\mu \right\| &= \left\| \int_{I_i^n} \sum_{s=1}^{k} (f_{n+s-1} - f_{n+s}) d\mu \right\| \\
&= \left\| \sum_{s=1}^{k} \int_{I_i^n} (f_{n+s-1} - f_{n+s}) d\mu \right\| \\
&\leq \sum_{s=1}^{k} \left\| \int_{I_i^n} (f_{n+s-1} - f_{n+s}) d\mu \right\| \\
&= \sum_{s=1}^{k} \left\| \int_{\bigcup_{I_i^{n+s} \subseteq I_i^n} I_i^{n+s}} (f_{n+s-1} - f_{n+s}) d\mu \right\| \\
&\overset{(2)}{\leq} \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{2^{n+s+1}} \mu(\bigcup_{I_i^{n=s} \subseteq I_i^n} I_i^{n+s}) \\
&= \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{2^{n+s+1}} \mu(I_i^n) \\
&\quad (\text{η } \pi_{n+s} \text{ είναι εκλέπτυνση της } \pi_n) \\
&= \frac{1}{2^n} \mu(I_i^n) \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{2^{s+1}} < \frac{1}{2^n} \mu(I_i^n),
\end{aligned}$$

(ε′) Έστω $\mathcal{A}_1$ η άλγεβρα που παράγεται από την $\bigcup_{n=0}^{\infty} \pi_n$. Τότε κάθε $E \in \mathcal{A}_1$ γράφεται ως πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\bigcup_{n=0}^{\infty} \pi_n$ και αφού κάθε $\pi_{n+1}$ είνα εκλέπτυνση της $\pi_n$, μπορούμε να θεωρήσουμε οτι το E γράφεται ως πεπερασμένη ένωση στοιχείων κάποιας $\pi_{n(E)}$.

Τότε, από το (γ′), έχουμε οτι

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E (f_n - f_{n+k}) d\mu \right\| &= \left\| \int_{\bigcup_{I_i^{n(E)} \subseteq E} I_i^{n(E)}} (f_n - f_{n+k}) d\mu \right\| \\
&\le \frac{1}{2^{n+1}} \mu\Big( \bigcup_{I_i^{n(E)} \subseteq E} I_i^{n(E)} \Big) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \mu(E) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Επομένως η $\{\int_E f_n d\mu\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον χώρο Banach X. Άρα υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$, για κάθε $E \in \mathcal{A}_1$.
Από την Σημείωση 2.3.5, για να δείξουμε οτι υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$ (δηλαδή το ζητούμενο), αρκεί να δείξουμε οτι οι συνολοσυναρτήσεις $\int f_n d\mu$ είναι αριθμήσιμα προσθετικές και οτι η αριθμήσιμη προσθετικότητά τους είναι ομοιόμορφη ως προς τα $n$.
Αλλά είναι αριθμήσιμα προσθετικές, διότι

$$\int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f_n d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f_n d\mu$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\{E_i\}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων της $\mathcal{A}$.
Επίσης, η αριθμήσιμη προσθετικότητα είναι ομοιόμορφη ως προς τα $n$, διότι :

$$\left\| \int_E f_n d\mu \right\| \le \int_E \|f_n\| d\mu \le M \cdot \mu(E), \quad \text{για κάθε} \quad E \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$$

αφού οι $f_n$ παίρνουν τιμές από το K. Αλλά τότε, αν $E = \bigcup_{i=0}^\infty E_i$, όπου τα $E_i$ είναι ξένα ανά δύο

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f_n d\mu - \int_E f_n d\mu \right\| &= \left\| \int_{E \setminus \bigcup_{i=1}^\infty E_i} f_n d\mu \right\| \\
&\le M \cdot \mu(E \setminus \bigcup_{i=1}^\infty E_i) \\
&= M \cdot \mu\Big( \bigcup_{i=k+1}^\infty E_i \Big) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Επομένως, αν $\varepsilon_1 > 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για $k \ge k_0$ να έχουμε

$$\left\| \int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f_n d\mu - \int_E f_n d\mu \right\| < \varepsilon_1, \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

□

**Πόρισμα 2.3.2.** *Έστω $\mu$ το μέτρο Lebesgue στην $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{A}$ των Borel υποσυνόλων του $[0,1]$. Ένας χώρος Banach $X$ έχει την RNP , αν και μόνο αν για κάθε $\mu$-συνεχές μέτρο $\tau : \mathcal{A} \longrightarrow X$ φραγμένης κύμανσης, υπάρχει $g \in \mathcal{B}^1(\mu, X)$ τέτοιο ώστε*

$$\tau(E) = \int_E g d\mu, \text{ για κάθε } E \in \mathcal{A}$$

*Απόδειξη.* Για το " $\Longrightarrow$ " : Αν δεν έχει την RNP, μπορεί να βρεθεί αντιπαράδειγμα στην $\mathcal{A}$ με το $\mu$. □

**Πόρισμα 2.3.3.** *Ένας χώρος Banach $X$ έχει την RNP, αν και μόνο αν κάθε κλειστός, διαχωρίσιμος υπόχωρος του $X$ έχει την RNP.*

*Απόδειξη.* Για το " $\Longleftarrow$ " : Αν υπάρχει Y διαχωρίσιμος υπόχωρος του X, που δεν έχει την RNP, από το Θεώρημα 2.3.1, υπάρχει $K \subseteq Y \subseteq X$ φραγμένο, μη αιχμηρό. Άρα από το ίδιο Θεώρημα ο X δεν έχει την RNP. □

**Σημείωση 2.3.4.** *Έστω*

$$\pi_n = \{I_1^n, ..., I_{p_n}^n\}$$

$$\Pi_n = \sigma(\pi_n)$$

$$\mathcal{B} = \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n)$$

1. *Έστω $g, f$ Bochner ολοκληρώσιμες και έστω*

$$g_n = \sum_{i=1}^{p_n} \left( \frac{1}{\lambda(I_i^n)} \int_{I_i^n} g d\lambda \right) \cdot \chi_{I_i^n}$$

$$f_n = \sum_{i=1}^{p_n} \left( \frac{1}{\lambda(I_i^n)} \int_{I_i^n} f d\lambda \right) \cdot \chi_{I_i^n}$$

*Τότε*

$$\begin{aligned}
\int \|g_n - f_n\| d\lambda &= \int \left\| \sum_{i=1}^{p_n} \left( \frac{1}{\lambda(I_i^n)} \int_{I_i^n} (g-f) d\lambda \right) \cdot \chi_{I_i^n} \right\| d\lambda \\
&= \int \sum_{i=1}^{p_n} \frac{1}{\lambda(I_i^n)} \left\| \int_{I_i^n} (g-f) d\lambda \right\| \chi_{I_i^n} d\lambda \\
&= \sum_{i=1}^{p_n} \frac{1}{\lambda(I_i^n)} \left\| \int_{I_i^n} (g-f) d\lambda \right\| \cdot \lambda(I_i^n) \\
&= \sum_{i=1}^{p_n} \left\| \int_{I_i^n} (g-f) d\lambda \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p_n} \int_{I_i^n} \|g-f\| d\lambda \\
&= \int \|g-f\| d\lambda
\end{aligned}$$

*Δηλαδή, για κάθε* $g, f$ *Bochner ολοκληρώσιμες και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

$$\int \|g_n - f_n\| d\lambda \leq \int \|g - f\| d\lambda$$

2. *Έστω* $\varepsilon > 0$ *και έστω οτι υπάρχει*

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{E_i}$$

*με* $E_i \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n$, *τέτοια ώστε* $\int \|g - \phi\| d\lambda < \varepsilon/2$.

*Αφού τα* $E_i$ *είναι πεπερασμένα το πλήθος και* $\Pi_{n+1} \supseteq \Pi_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *θα υπάρχει άλγεβρα* $\Pi_{n_0}$, *τέτοια ώστε* $E_i \in \Pi_{n_0}$, *για κάθε* $i \in \{1, ..., k\}$.

*Τότε, όμως,* $\phi = \phi_n$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *(όπως ορίστηκε στο (1) )*

*Έστω* $n \geq n_0$. *Τότε*

$$\begin{aligned}
\int \|g - g_n\| d\lambda &\leq \int \|g - \phi\| d\lambda + \int \|\phi - g_n\| d\lambda \\
&= \int \|g - \phi\| d\lambda + \int \|\phi_n - g_n\| d\lambda \\
&\overset{(1)}{\leq} 2 \int \|g - \phi\| d\lambda < \varepsilon
\end{aligned}$$

*Άρα*

$$\int \|g - g_n\| d\lambda \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

3. *Αρκεί, λοιπόν, να δειχτεί οτι υπάρχει* $\phi = \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{E_i}$ *με* $E_i \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n$, *τέτοια ώστε* $\int \|g - \phi\| d\lambda < \varepsilon/2$.

   *Αφού ο* $X$ *έχει την* RNP *, η* $g$ *είναι Bochner ολοκληρώσιμη , άρα υπάρχει*

$$\phi^1 = \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{A_i} \quad \text{με} \quad \int \|g - \phi^1\| d\lambda < \varepsilon/8$$

   *για κάποια* $A_i \subseteq [0,1)$ *μετρήσιμα.*

   *Τότε, όμως, είναι γνωστό οτι για κάθε* $A_i$, *υπάρχει* $B_i$ *ένωση ημιανοικτών διαστημάτων με*

$$\lambda(A_i \triangle B_i) < \frac{\varepsilon}{8kM}$$

   *(όπου* $M = \sup_{x \in K} \|x\|$*)*

   *Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε τα* $B_i$ *ξένα ανά δύο και να ορίσουμε την*

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{B_i}$$

   *Τότε*

$$\begin{aligned}
\int \|\phi^1 - \phi^2\| d\lambda &= \int \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{A_i} - \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{B_i} \right\| d\lambda \\
&= \int \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i (\chi_{A_i} - \chi_{B_i}) \right\| d\lambda \\
&\leq \int \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| \chi_{A_i \triangle B_i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| \lambda(A_i \triangle B_i) \\
&\leq M \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{8kM} \\
&= \frac{\varepsilon}{8}
\end{aligned}$$

   *Επομένως*

$$\begin{aligned}
\int \|g - \phi^2\| d\lambda &\leq \int \|g - \phi^1\| d\lambda + \int \|\phi^1 - \phi^2\| d\lambda \\
&< \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

*Αφού η $\mathcal{B} = \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n)$ είναι η Borel σ-άλγεβρα στο $[0,1)$ από την υπόθεση, κάθε στοιχείο στην $\mathcal{B}$ προσεγγίζεται από στοιχείο της $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n$. Επομένως, για κάθε $B_i$ (στοιχείο της $\mathcal{B}$ αφού είναι ένωση διαστημάτων), υπάρχει $E_i \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n$ τέτοιο ώστε*

$$\lambda(B_i \triangle E_i) < \frac{\varepsilon}{4kM}$$

*Θεωρούμε τελικά*

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{E_i}$$

*Τότε, $\int \|\phi^2 - \phi\| d\lambda < \varepsilon/4$ και*

$$\begin{aligned} \int \|\phi - g\| d\lambda &\leq \int \|\phi - \phi^2\| d\lambda + \int \|\phi^2 - g\| d\lambda \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \end{aligned}$$

*Επομένως, η $\phi$ είναι η ζητούμενη.*

**Σημείωση 2.3.5.** *Έστω $\Sigma$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $S$ και $\Sigma_1$ υποάλγεβρα της $\Sigma$, που παράγει την σ-άλγεβρα $\Sigma$. Έστω $\{\mu_n\}$ ακολουθία αριθμήσιμα προσθετικών συνολοσυναρτήσεων, με τιμές στον χώρο Banach $X$. Υποθέτουμε οτι η αριθμήσιμη προσθετικότητα αυτών είναι ομοιόμορφη ως προς τα $n$ και οτι υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \mu_n(E)$, για κάθε $E \in \Sigma_1$. Τότε υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \mu_n(E)$, για κάθε $E \in \Sigma$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\Sigma_2$ η οικογένεια όλων των $E \in \Sigma$, για τα οποία υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \mu_n(F \cap E)$ για κάθε $F \in \Sigma_1$.

Έστω $\Sigma_3$ η οικογένεια όλων των $E \in \Sigma_2$, για τα οποία $E \cap F \in \Sigma_2$ για κάθε $F \in \Sigma_2$.

• Η $\Sigma_3$ είναι άλγεβρα, αφού

1. Αν $F_1, F_2 \in \Sigma_3$, τότε $F_1 \cap F_2 \in \Sigma_3$. Πράγματι

   $$F_1, F_2 \in \Sigma_3 \Longrightarrow \{F_1 \in \Sigma_3 \ \text{ και } \ F_2 \in \Sigma_2\} \Longrightarrow F_1 \cap F_2 \in \Sigma_2$$

   Αφού $F_2 \in \Sigma_3$, για κάθε $F \in \Sigma_2$, έχουμε $F_2 \cap F \in \Sigma_2$, οπότε, αφού $F_1 \in \Sigma_3$ έχουμε $F_1 \cap F_2 \cap F \in \Sigma_2$.

2. Αν $F_1 \in \Sigma_3$, τότε $S \setminus F_1 \in \Sigma_3$. Πράγματι

   $F_1 \in \Sigma_3 \Longrightarrow F_1 \in \Sigma \Longrightarrow S \setminus F_1 \in \Sigma$

   Επίσης, $F_1 \in \Sigma_3 \Longrightarrow F_1 \in \Sigma_2$, άρα υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \mu_n(F_1 \cap F)$, για κάθε $F \in \Sigma_1$.

   Αλλά το $\lim_{n\to\infty} \mu_n(F)$ υπάρχει για κάθε $F \in \Sigma_1$ από την υπόθεση.

Άρα για κάθε $F \in \Sigma_1$ υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n \Big( (S \setminus F_1) \cap F \Big) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(F) - \lim_{n\to\infty} \mu_n(F_1 \cap F)$$

Άρα $S \setminus F_1 \in \Sigma_2$.

Έστω $F \in \Sigma_2$ και $E \in \Sigma_1$. Τότε

$$\begin{aligned} & F \cap E = \Big( (S \setminus F_1) \cap F \cap E \Big) \cup \Big( F_1 \cap F \cap E \Big) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow\quad & \mu_n(F \cap E) = \mu_n((S \setminus F_1) \cap F \cap E) + \mu_n(F_1 \cap F \cap E), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Longrightarrow\quad & \mu_n((S \setminus F_1) \cap F \cap E) = \mu_n(F \cap E) - \mu_n(F_1 \cap F \cap E), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Longrightarrow\quad & \lim_{n\to\infty} \mu_n((S \setminus F_1) \cap F \cap E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(F \cap E) - \lim_{n\to\infty} \mu_n(F_1 \cap F \cap E) \end{aligned}$$

Τα δύο τελευταία όρια υπάρχουν, το πρώτο διότι $F \in \Sigma_2, E \in \Sigma_1$ και το δεύτερο διότι $F_1 \cap F \in \Sigma_2$ (αφού $F_1 \in \Sigma_3$) και $E \in \Sigma_1$.

Άρα για κάθε $F \in \Sigma_2$ έχουμε $(S \setminus F_1) \cap F \in \Sigma_2$. Επομένως $S \setminus F_1 \in \Sigma_3$.

3. Αν $F_1, F_2 \in \Sigma_3$ , με $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, τότε $F_1 \cup F_2 \in \Sigma_3$.

   Πράγματι, αν $E \in \Sigma_1$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n((F_1 \cup F_2) \cap E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(F_1 \cap E) + \lim_{n\to\infty} \mu_n(F_2 \cap E)$$

   που υπάρχουν, αφού $F_1, F_2 \in \Sigma_2$, άρα $F_1 \cup F_2 \in \Sigma_2$.

   Επίσης, για κάθε $F \in \Sigma_2, E \in \Sigma_1$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mu_n((F_1 \cup F_2) \cap F \cap E) &= \lim_{n\to\infty} [\mu_n(F_1 \cap F \cap E) + \mu_n(F_2 \cap F \cap E)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_n(F_1 \cap F \cap E) + \lim_{n\to\infty} \mu_n(F_2 \cap F \cap E) \end{aligned}$$

   τα οποία υπάρχουν, αφού $F_1, F_2 \in \Sigma_3$. Επομένως, $F_1 \cup F_2 \in \Sigma_3$.

• Η $\Sigma_3$ είναι σ-άλγεβρα.

Πράγματι, αν $\{F_k\}$ ακολουθία ξένων στοιχείων της $\Sigma_3$ με $\bigcup_{k=1}^\infty F_k = F$ και $E_1 \in \Sigma_1, E \in \Sigma_2$, τότε

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m \mu_n(F_k \cap E \cap E_1) = \mu_n(F \cap E \cap E_1)$$

ομοιόμορφα ως προς τα $n$, από την υπόθεση.

Επίσης, το $\lim_{n\to\infty} \mu_n(F_k \cap E \cap E_1)$ υπάρχει για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αφού $F_k \in \Sigma_3, E_1 \in \Sigma_1, E \in \Sigma_2$. Άρα , από γνωστή ιδιότητα των ορίων, υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \mu_n(F \cap E \cap E_1)$. Τελικά $F \in \Sigma_3$.

• $\Sigma_3 = \Sigma$ (αφού $\Sigma_3 \supseteq \Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_3 \supseteq \Sigma = \sigma(\Sigma_1)$). Επομένως, η $\Sigma$ έχει την ζητούμενη ιδιότητα.

□

# Κεφάλαιο 3

# Η αιχμηρότητα ως ικανή συνθήκη για την KMP

## 3.1 Ορισμοί

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείχτηκε η ισοδυναμία της αιχμηρότητας και της RNP στους χώρους Banach. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε οτι οι παραπάνω ιδιότητες του χώρου είναι ικανές συνθήκες για την ισχύ μίας άλλης γεωμετρικής ιδιότητας του χώρου, της KMP, η οποία ορίζεται ως εξής

**Ορισμός 3.1.1.** *Λέμε οτι ένας χώρος Banach $X$ έχει την ιδιότητα* **Krein-Milman (KMP)***, αν κάθε φραγμένο, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $X$ είναι η κλειστή, κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του.*

Στις δύο αποδείξεις που ακολουθούν θα κάνουμε χρήση ενός διαχωριστικού Θεωρήματος, γεωμετρικής απόδοσης του Θεωρήματος Hahn-Banach, του οποίου η απόδειξη μπορεί να βρεθεί σε πολλά κείμενα (π.χ. στο [4], σελ. 417)

**Θεώρημα 3.1.2.** *Έστω $A$, $B$ κυρτά υποσύνολα ενός πραγματικού Hausdorff τοπολογικού, διανυσματικού χώρου $X$ και έστω οτι το εσωτερικό του $B$ είναι μη κενό και ξένο προς το $A$. Τότε τα $A$, $B$ μπορούν να διαχωριστούν από ένα υπερεπίπεδο. Δηλαδή, υπάρχει συνεχές, γραμμικό συναρτησιοειδές $f$ στο $X$, όχι το μηδενικό, τέτοιο ώστε $\sup(A) \leq \inf(B)$.*

Ένα άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 3.1.2, που θα χρησιμοποιήσουμε στο εξής είναι το

**Πόρισμα 3.1.3.** *Αν το $K$ είναι ένα κυρτό υποσύνολο ενός πραγματικού Hausdorff τοπολογικού διανυσματικού χώρου $X$, με μη κενό εσωτερικό και αν το $x$ είναι ένα σημείο στο σύνορο του $K$, τότε υπάρχει υπερεπίπεδο που* **στηρίζει (supports)** *το $K$ στο $x$, δηλαδή, υπάρχει συνεχές, γραμμικό συναρτησιοειδές $f \not\equiv 0$ στο $X$, τέτοιο ώστε $f(x) = \sup f(K)$.*

*Ένα τέτοιο $f$ λέγεται* **συναρτησιοειδές στήριξης (support functional)** *του $K$ και το $x$ λέγεται* **σημείο στήριξης (support point)** *του $K$.*

Από τον παραπάνω ορισμό, φαίνεται εύκολα οτι αν το $f$ είναι ένα συναρτησιοειδές του K , τότε κάθε θετικό πολλαπλάσιο του $f$ είναι επίσης συναρτησιοειδές-φορέας του K.

Στην συνέχεια, θα συμβολίζουμε

$$U = \{x, \|x\| \leq 1\}$$

και αν $f \in X^*$, θα θεωρούμε

$$\|f\| = \sup f(U)$$

## 3.2 Η απόδειξη του J. Lindenstrauss

Στην απόδειξη του κύριου θεωρήματος του Lindenstrauss θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός οτι

**Πρόταση 3.2.1.** *Τα συναρτησιοειδή στήριξης ενός φραγμένου συνόλου στον χώρο Banach $X$ είναι πυκνά στον δυϊκό χώρο $X^*$.*

Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης θα χρειαστούμε τα εξής :

**Ορισμός 3.2.2.** *Θα λέμε οτι ένα υποσύνολο $K$ του $X$ είναι* **κυρτός κώνος**, *αν το $K$ είναι κυρτό σύνολο και $\lambda y \in K$, όποτε $y \in K$ και $\lambda > 0$.*

*Αν το $Y$ είναι ένα σύνολο που περιέχει το σημείο $y_0$ και αν ο $K$ είναι κυρτός κώνος τέτοιος ώστε το $K + y_0$ να είναι ξένο προς το $Y \setminus \{y_0\}$, τότε λέμε οτι το $K + y_0$* **στήριξης** *το $Y$ στο $y_0$.*

Έστω οτι ο K είναι κυρτός κώνος με μη κενό εσωτερικό, οτι το $C$ είναι κυρτό και οτι το $K + x_0$ στηρίζει το $C$ στο $x_0$ . Τότε, από το θεώρημα 3.1.2, υπάρχει μη μηδενικό $g \in X^*$, τέτοιο ώστε $\sup g(C) \leq \inf g(K + x_0)$.

Αφού το $x_0$ είναι στοιχείο και του $K + x_0$ αλλά και του $C$, εύκολα φαίνεται οτι

$$\sup g(C) = g(x_0) = \inf g(K + x_0)$$

δηλαδή, το $g$ φέρει το $C$ στο $x_0$.

Έτσι, για να δείξουμε την ύπαρξη σημείων στήριξης και συναρτησιοειδών στήριξης για το $C$, αρκεί να βρούμε κώνους στήριξης του $C$ με μη κενά εσωτερικά.

Οι κώνοι που θα χρησιμοποιούμε είναι της παρακάτω μορφής:

$$K(f, k) = \{x : \|x\| \leq kf(x)\}$$

όπου $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και $k > 0$.

Προφανώς, τα $K(f, K)$ είναι κλειστοί, κυρτοί κώνοι.

Επιπλέον, αν $k > 1$, τότε το εσωτερικό του $K(f, k)$ είναι μη κενό.

Πράγματι, αφού $\|f\| = 1$ και $0 < 1/k < 1$, υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $f(x) > 1/k$. Δηλαδή, $\|x\| < k \cdot f(x)$. Αφού οι $f, \|\cdot\|$ είναι συνεχείς, υπάρχει περιοχή $V$ του $x$, τέτοια ώστε για κάθε $y \in V$ να έχουμε $\|y\| < kf(y)$ .

**Λήμμα 3.2.3.** *Έστω $K$ ένα κλειστό υποσύνολο του χώρου Banach $X$ και έστω $f \in X^*$ με νόρμα 1, φραγμένο στο $K$ και $k > 0$. Αν $z \in K$, τότε υπάρχει σημείο $x_0 \in K$, τέτοιο ώστε $x_0 \in K(f,k) + z$ και το $K(f,k) + x_0$ να στηρίζει το $K$ στο $x_0$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε μερική διάταξη στο K μέσω του $K(f,k)$. Δηλαδή,

$$x \succ y \Longleftrightarrow x - y \in K(f,k) \overset{\text{ορς}}{\Longleftrightarrow} \|x - y\| \leq kf(x-y)$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$Z = \{x \in K : x \succ z\} = K \cap (K(f,k) + z)$$

και $W$ ένα ολικώς διατεταγμένο υποσύνολο του Z. Τότε το σύνολο

$$\{f(x) : x \in W\}$$

είναι φραγμένο, μονότονο δίκτυο πραγματικών αριθμών (αν χρησιμοποιήσουμε το $W$ σαν κατευθυνόμενο δίκτυο δεικτών), οπότε συγκλίνει στο supremum του. Επομένως θα είναι δίκτυο Cauchy και αφού

$$\text{αν } \ x, y \in W, \quad \text{τότε } \ \|x - y\| \leq k[f(x) - f(y)]$$

θα πρέπει και το $W$ να είναι δίκτυο Cauchy στο Z.

Αφού $Z = K \cap (K(f,k) + z)$ και αφού το $K(f,k)$ είναι κλειστό, θα πρέπει και το Z να είναι κλειστό και επομένως το $W$ θα συγκλίνει σε ένα στοιχείο $y \in Z$. Λόγω συνέχειας της $f$ και της νόρμας, έχουμε οτι $y \succ x$, για κάθε $x \in W$. Δηλαδή, το $W$ θα έχει άνω φράγμα στο Z.

Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα του Zorn στο Z, καταλήγουμε στο οτι θα υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο, έστω το $x_0$ στο Z.

Τώρα φαίνεται εύκολα οτι το $K(f,k) + x_0$ θα στηρίζει το K στο $x_0$. □

**Πρόταση 3.2.4.** *Αν το $K$ είναι κυρτό, κλειστό υποσύνολο του χώρου Banach $X$, τότε τα σημεία στήριξης του $K$ είναι πυκνά στο σύνορο του $K$.*

*Απόδειξη.* Αν το $z$ είναι ενα σημείο στο σύνορο του K και $\eta > 0$, διαλέγουμε $y \in X \setminus K$ τέτοιο ώστε $\|y - z\| < \eta/2$ και διαλέγουμε $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και $\sup f(K) \leq f(y)$. (Μπορούμε να κάνουμε κάτι τέτοιο εφαρμόζοντας το Θεώρμα 3.1.2 σε οποιαδήποτε κυρτή περιοχή του $y$, η οποία είναι ξένη προς το κλειστό σύνολο K)

Από το Λήμμα 3.2.3, υπάρχει $x_0$ στο K με $x_0 \in K(f,2)+z$ και τέτοιο ώστε το $K(f,2) + x_0$ να στηρίζει το K στο $x_0$. Εφαρμόζοντας ξανά το Θεώρημα 3.1.2 στα $K, K(f,2) + x_0$, δείχνουμε οτι το $x_0$ είναι σημείο στήριξης του K.

Επιπλέον, αφού $x_0 - z \in K(f,2)$ και $x_0 \in K$, ϑα πρέπει

$$\|x_0 - z\| \leq 2[f(x_0) - f(z)] \leq 2[f(y) - f(z)] \leq 2\|y - z\| < \eta$$

□

**Λήμμα 3.2.5.** *Έστω $\eta > 0$, $\|f\| = \|g\| = 1$ και οτι για κάθε $x$ με $f(x) = 0$ και $\|x\| = 1$ έχουμε $|g(x)| \leq \eta/2$. Τότε είτε $\|f-g\| \leq \eta/2$, είτε $\|f+g\| \leq \eta/2$.*

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα Hahn-Banach, μπορούμε να διαλέξουμε $h \in X^*$ τέτοιο ώστε $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in f^{-1}(0)$ και $\|h\| = \sup |g(U) \cap f^{-1}(0)|$.

Τότε, από την υπόθεση, $\|h\| \leq \eta/2$.

Επίσης, αφού η $g - h$ μηδενίζεται στο $f^{-1}(0)$, υπάρχει $\delta \in \mathbb{R}$, για το οποίο $g - h = \delta f$.

Τότε $\|g - \delta f\| = \|h\| \leq \eta/2$ (1).

Έστω οτι $\delta > 0$.

• Αν $\delta \geq 1$, τότε $1/\delta \leq 1$, οπότε,

$$\begin{aligned}
\|g - f\| &= \|(1 - \frac{1}{\delta})g + \frac{1}{\delta}(g - \delta f)\| \\
&\leq (1 - \frac{1}{\delta})\|g\| + \frac{1}{\delta}\|g - \delta f\| \\
&= 1 - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta}\|g - \delta f\| \\
&\leq 1 - \frac{1}{\delta} + \|g - \delta f\|, \quad (2)
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\delta = \|\delta f\| \leq \|g\| + \|g - \delta f\| = 1 + \|g - \delta f\|$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{\delta} &\leq 1 - (1 + \|g - \delta f\|)^{-1} \\
&= \|g - \delta f\| \cdot (1 + \|g - \delta f\|)^{-1} \\
&\leq \|g - \delta f\|, \quad (3)
\end{aligned}$$

Άρα

$$\|g - f\| \overset{(2),(3)}{\leq} 2\|g - \delta f\| \overset{(1)}{\leq} \eta$$

• Αν $0 \leq \delta \leq 1$, τότε

$$\begin{aligned}
\|g - f\| &\leq \|g - \delta f\| + \|(1 - \delta)f\| \\
&= \|g - \delta f\| + 1 - \delta \\
&= \|g - \delta f\| + \|g\| - \|\delta f\| \\
&\leq 2\|g - \delta f\| \overset{(1)}{\leq} \eta
\end{aligned}$$

• Αν $\delta < 0$, χρησιμοποιώντας το $-\delta f$ στη ίδια απόδειξη, δείχνουμε οτι

$$\|g + f\| \leq \eta$$

□

**Λήμμα 3.2.6.** *Έστω $0 < \eta < 1$, $\|f\| = \|g\| = 1$ και $k > 1 + 2/\eta$. Αν το $g$ είναι μη αρνητικό στο $K(f,k)$, τότε $\|f - g\| \leq \eta$.*

*Απόδειξη.* Διαλέγουμε $x \in X$, τέτοιο ώστε $\|x\| = 1$ και $f(x) > k^{-1}(1+2/\eta)$. Έστω, επίσης, $y' \in X$, τέτοιο ώστε $f(y') = 0$ και $\|y'\| < 2/\eta$. Τότε

$$\|x \pm y'\| \leq 1 + \frac{2}{\eta} < kf(x) = kf(x \pm y')$$

οπότε $x \pm y' \in K(f,k)$ και επομένως $g(x \pm y') \geq 0$. Τότε, όμως,

$$|g(y')| \leq g(x) \leq \|x\| = 1$$

Έχουμε, λοιπόν, οτι αν $f(y) = 0$ και $\|y\| \leq 1$, τότε $|g(y)| < \eta/2$ (για $y = \eta y'/2$), άρα από το Λήμμα 3.2.5 θα πρέπει

$$\|f + g\| \leq \eta \;\text{ είτε }\; \|f - g\| \leq \eta$$

Διαλέγουμε $z \in X$ με $\|z\| = 1$ και $f(z) > \max(k^{-1}, \eta)$. Τότε $z \in K(f,k)$, οπότε $g(z) \geq 0$ και επομένως

$$\|f + g\| \geq (f + g)(z) > \eta$$

Άρα αναγκαστικά $\|f - g\| \leq \eta$, δηλαδή το ζητούμενο. □

**Θεώρημα 3.2.7.** *Έστω $C$, $K$ υποσύνολα του χώρου Banach $X$, τέτοια ώστε το $C$ να είναι κλειστό και κυρτό και το $K$ φραγμένο, μη κενό. Αν $\eta > 0$ και $f \in X^*$ με νόρμα 1, ώστε $\sup f(C) < \inf f(K)$, τότε υπάρχει $g \in X^*$ με $\|g\| = 1$ και $x_0 \in C$ για τα οποία $\|f - g\| \leq \eta$ και $g(x_0) = \sup g(C) < \inf g(K)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\gamma = \sup f(C), \delta = \inf f(K)$ και έστω β τέτοιο ώστε $\gamma < \beta < \delta$. Θεωρούμε την περιοχή $V$ του K που ορίζεται ως $V = K + (\delta - \beta)U$. Το $V$ είναι φραγμένο σύνολο και αφού $\inf f(U) = -1$,

$$\inf f(V) = \inf f(K) - (\delta - \beta) = \beta$$

Έστω $\alpha = 1 + 2/\eta$ και έστω $z \in C$, τέτοιο ώστε $\gamma - f(z) < (2\alpha)^{-1}(\beta - \gamma)$. Θεωρούμε

$$M > \max\left\{ 2^{-1}(\beta - \gamma), \sup\{\|y - z\|, y \in V\} \right\}$$

και $k = 2\alpha M(\beta - \gamma)^{-1}$ (Παρατηρούμε οτι τότε $k > \alpha > 1$).

Από το Λήμμα 3.2.3, μπορούμε να διαλέξουμε ένα σημείο $x_0 \in C$, τέτοιο ώστε το $K(f,k)+x_0$ να στηρίζει το $C$ στο $x_0$ και $x_0 - z \in K(f,k)$. Θα δείξουμε οτι $V \subseteq K(f,k)+x_0$.

Πράγματι, αν $y \in V$, τότε

$$\begin{aligned}
\|y+x_0\| &\leq \|y-z\| + \|x_0-z\| \\
&< M + \|x_0-z\| \\
&\leq M + kf(x_0-z) \\
&\leq M + k[\gamma - f(z)] \\
&< M + k(2\alpha)^{-1}(\beta-\gamma) \\
&= 2M \\
&< 2\alpha M \\
&= k(\beta-\gamma) \\
&\leq kf(y-x_0)
\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 3.1.2, υπάρχει $g \in X^*$ με $\|g\| = 1$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}
\sup g(C) &= g(x_0) \\
&\leq \inf g(K(f,k)+x_0) \\
&\leq \inf g(V) \\
&= \inf g(K) - (\delta - \beta) \\
&< \inf g(K)
\end{aligned}$$

Αφού $\inf g(K(f,k)) \geq 0$ και $k > 1 + 2/\eta$, από το Λήμμα 3.2.6, προκύπτει οτι $\|f-g\| \leq \eta$. □

Τώρα, η Πρόταση 3.2.1 είναι άμεσο Πόρισμα του Θεωρήματος 3.2.7.

**Θεώρημα 3.2.8.** *(***Lindenstrauss, 1974 [11]***)*

*Αν κάθε φραγμένο υποσύνολο του χώρου Banach X είναι αιχμηρό και αν το K είναι ένα φραγμένο, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X, τότε το K είναι η κλειστή, κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του.*

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε

$$F(g,K) = \{x \in K, g(x) = M(g,K)\}$$

μία **πλευρά στήριξης** (**support face**) του K, όπου $g \in X^*$ με νόρμα 1.

**Λήμμα**: Κάθε φέτα $S(f,\alpha,K)$ του K περιέχει μία μη κενή πλευρά στήριξης του K.

Πράγματι, για $0 < \delta < \frac{\alpha}{2M(K)}$ και $g \in X^*$ με $\|g\| = 1$ τέτοια ώστε $\|f - g\| < \delta$, έχουμε

$$F(g, K) \subseteq S(f, \alpha, K)$$

αφού αν $x \in F(g, K)$, τότε $g(x) = M(g, K)$. Επίσης, για $y \in K$ με

$$f(y) \geq M(f, K) - \frac{\alpha}{2}$$

έχουμε

$$\|g(y) - f(y)\| \leq \|g - f\| \, \|y\| < \delta\|y\| < \frac{\alpha}{2M(K)} M(K) = \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g(y) \geq f(y) - \frac{\alpha}{2} \geq M(f, K) - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = M(f, K) - \alpha$$

οπότε

$$g(x) = M(g, K) \geq g(y) \geq M(f, K) - \alpha$$

δηλαδή $x \in S(f, \alpha, K)$ (απο την Πρόταση 3.2.1 υπάρχει πάντα τέτοιο $g$).$\diamondsuit$

Έστω $S(f, \alpha, K)$ φέτα του K και $F_1 = F(g, K) \subseteq S(f, \alpha, K)$ μη κενή πλευρά στήριξης του K.

Αφού το $F_1$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X (ως υποσύνολο του K), από την υπόθεση θα είναι αιχμηρό. Άρα θα υπάρχει φέτα του $F_1$ διαμέτρου μικρότερης του 1, οπότε από το αρχικό επιχείρημα θα υπάρχει μη κενή πλευρά στήριξης $F_2 = F(g_1, F_1)$ του $F_1$, που θα περιέχεται σε αυτήν τη φέτα.

Προφανώς $\operatorname{diam} F_2 < 1$

Επαγωγικά, κατασκευάζουμε έτσι ακολουθία $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ τέτοιων συνόλων (πλευρών στήριξης του K) με

$$\operatorname{diam} F_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Λόγω της πληρότητας του χώρου, η τομή αυτών θα είναι ένα μονοσύνολο $\{x\}$ με $x \in S(f, \alpha, K)$. Αυτο το $x$ θα είναι ακραίο σημείο του K (άρα το K εχει ακραία σημεία).

Πράγματι,

αν $x = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta$ για κάποια $\alpha, \beta \in K$ και $\lambda \in (0, 1)$, τότε

$$\begin{aligned} g_n(x) &= M(g_n, K) = \lambda g_n(\alpha) + (1 - \lambda) g_n(\beta) \\ &\leq \lambda M(g_n, K) + (1 - \lambda) M(g_n, K) = M(g_n, K) \end{aligned}$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$g_n(\alpha) = g_n(\beta) = M(g_n, K), \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

Δηλαδή, τα $\alpha, \beta$ είναι στοιχεία τομής των $F_n$, επομένως $\alpha = \beta = x$ ( αφου $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$ ).

Προφανώς $\overline{\text{conv}}(ex(K)) \subseteq K$ ( Το Κ είναι κλειστό και κυρτό). Άρκεί, λοιπόν, να δειχτεί οτι $\overline{\text{conv}}(ex(K)) \supseteq K$.

Έστω όχι.Έστω, δηλαδή, οτι υπάρχει $x \in K \setminus \overline{\text{conv}}(ex(K))$. Τότε, αφού το $\overline{\text{conv}}(ex(K))$ είναι κλειστό, υπάρχει $g \in X^*$ με

$$g(x) > 0 \ \text{ και } \ g(y) \leq 0, \ \text{ για κάθε } \ y \in \overline{\text{conv}}(ex(K))$$

Τότε, όμως, η φέτα $S(g, \alpha, K)$, όπου

$$\alpha = M(g, K) - g(x) + \frac{g(x)}{2} > 0$$

περιέχει το $x$, διότι

$$g(x) \geq M(g, K) - \alpha = M(g, K) - M(g, K) + g(x) - \frac{g(x)}{2} = \frac{g(x)}{2}$$

Απο το προηγούμενο επιχείρημα θα πρέπει να περιέχει και ακραίο σημείο του Κ, **άτοπο**. □

## 3.3 Η απόδειξη του R.R. Phelps

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μία διαφορετική προσέγγιση του ίδιου αποτελέσματος, η οποία δόθηκε επίσης το 1974 από τον R.R. Phelps.

**Λήμμα 3.3.1.** *Έστω $T$ ισομορφισμός του $X$ (δηλαδη, $T : X \longrightarrow X$, γραμμικός, δισυνεχής, ένα προς ένα και επί) και έστω $S(f, \alpha, K)$ μία φέτα του $K$ διαμέτρου $d$. Τότε το $T[S(f, \alpha, K)]$ είναι φέτα του $TK$ διαμέτρου το πολυ $d\|T\|$.*

*Απόδειξη.* Έστω $T^*$ ο συζυγής τελεστής του Τ και έστω $f^* = (T^*)^{-1} f$.

Τότε,

$$\begin{aligned} f^* = (T^*)^{-1} f &\implies T^* f^* = (T^*)(T^*)^{-1} f \\ &\implies T^* f^* = f \\ &\implies f^* \circ T = f \end{aligned}$$

Δηλαδή, $f^*(Tx) = f(x)$, για κάθε $x \in K$.

Επομένως, $M(f, K) = M(f^*, TK)$.

Τότε όμως

$$\begin{aligned} T[S(f, \alpha, K)] &= T[\{x \in K : f(x) > M(f, K) - \alpha\}] \\ &= \{Tx \in TK : f^*(Tx) > M(f^*, TK) - \alpha\} \\ &= S(f^*, \alpha, TK) \end{aligned}$$

που είναι φέτα του ΤΚ.

Έστω $d'$ η διάμετρος του $T[S(f,\alpha,K)]$. Τότε

$$\begin{aligned} d' &= \sup\{\|x-y\| : x,y \in T[S(f,\alpha,K)]\} \\ &= \sup\{\|Tx-Ty\| : x,y \in S(f,\alpha,K)\} \\ &\leq \sup\{\|T\|\cdot\|x-y\| : x,y \in S(f,\alpha,K)\} \\ &= \|T\|\cdot\sup\{\|x-y\| : x,y \in S(f,\alpha,K)\} \\ &= d\cdot\|T\| \end{aligned}$$

□

**Λήμμα 3.3.2.** *Έστω οτι κάθε φραγμένο υποσύνολο του $X$ είναι αιχμηρό και έστω $g \in X^*$ με $\|g\| = 1$. Αν $\varepsilon > 0$ και το $K \setminus g^{-1}(0)$ είναι μη κενό, τότε υπάρχει φέτα του $K$ διαμέτρου μικρότερης του $\varepsilon$, ξένη προς το σύνολο $D = K \cap g^{-1}(0)$.*

*Απόδειξη.* Έστω οτι $D \neq \emptyset$. (Αν $D = \emptyset$, τότε $K \setminus g^{-1}(0) = K$, οπότε όλα είναι προφανή).

Αφού $K \setminus g^{-1}(0) \neq \emptyset$, υπάρχει $z \in K \setminus g^{-1}(0)$. Υποθέτουμε οτι $g(z) > 0$ (η απόδειξη στην περίπτωση $g(z) < 0$ θα είναι ανάλογη).

Έστω $r = \frac{1}{g(z)}$.

1. Για $x \in D$ ορίζουμε $T_x : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$T_x y = y - 2rg(y)(z-x), \quad \text{για κάθε} \;\; y \in X$$

Τότε, για κάθε $x \in D$

(α′) Ο $T_x$ είναι γραμμικός (προφανώς) και φραγμένος,διότι

$$\begin{aligned} \|T_x y\| = \|y - 2rg(y)(z-x)\| &\leq \|y\| + 2r\|g(y)\|\cdot\|z-x\| \\ &\leq \|y\| + 2r\|g\|\cdot\|y\|\cdot\|z-x\| \\ &\overset{\|g\|=1}{=} \|y\|\cdot[1 + 2r(\|z\| + \|x\|)] \\ &\leq \|y\|\cdot[1 + 2r(M(K) + M(K))] \\ &= \|y\|\cdot(1 + 4rM(K)) \end{aligned}$$

Άρα

$$\|T_x\| \leq 1 + 4rM(K) \equiv \mathbf{M}$$

(το οποίο δεν εξαρτάται ούτε από το $x$)

(β′) $T_x^{-1} = T_x$, αφού

$$\begin{aligned}
T_x(T_x y) &= \\
&= T_x y - 2rg(T_x y)(z-x) \\
&= y - 2rg(y)(z-x) - 2rg(y - 2rg(y)(z-x))(z-x) \\
&= y - 2rg(y)(z-x) - 2rg(z-x) + \\
&\quad +2rg(2rg(y)(z-x))(z-x) \\
&= y - 2rg(y)(z-x) - 2rg(y)(z-x) + \\
&\quad +4r^2 g(y)(g(z)-g(x))(z-x) \\
&\overset{g(x)=0}{=} y - 2rg(z-x) - 2rg(y)(z-x) + 4r^2 g(y)g(z)(z-x) \\
&\overset{g(z)=r^{-1}}{=} y - 4rg(y)(z-x) + 4rg(y)(z-x) \\
&= y
\end{aligned}$$

Άρα $T_x^2 = id$, οπότε $T_x^{-1} = T_x$.

(γ′) $T_x z = 2x - z$ , αφού

$$\begin{aligned}
T_x z &= y - 2\frac{g(z)}{g(z)}(z-x) \\
&= z - 2z + 2x \\
&= 2x - z
\end{aligned}$$

(δ′) $T_x y = y$, για κάθε $y \in g^{-1}(0)$ ,αφού

$$\begin{aligned}
T_x y &= y - 2\frac{g(y)}{g(z)}(z-x) \\
&\overset{g(y)=0}{=} y
\end{aligned}$$

Επομένως, ο $T_x$ είναι ανάκλαση του X μέσω του υπερεπιπέδου $g^{-1}(0)$ κατά μήκος της ευθείας που περνάει από το 0 και ορίζεται από το $z - x$.

2. Έστω $K_1 = \{K\} \cup \{T_x K, x \in D\}$
και $C = \overline{\mathrm{conv}} \bigcup \{L, L \in K_1\}$

Το κλειστό, κυρτό σύνολο C είναι φραγμένο, διότι για $x \in D$,

$$M(T_x K) \le \|T_x\| \cdot M(K) \le \mathbf{M} \cdot M(K)$$

Άρα

$$M(C) \le \mathbf{M} \cdot M(K)$$

Για $x \in D$ , έχουμε

$$T_x z = 2x - z \Longrightarrow x = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} T_x z$$

Άρα το $x$ είναι μέσο ευθύγραμμου τμήματος του $C$ (αφού $z, T_x z \in C$, που είναι κυρτό) με μήκος

$$\begin{aligned} \|z - T_x z\| &= \|z - z + 2rg(z)(z-x)\| \\ &= 2\|z - x\| \\ &\overset{\|g\|=1}{\geq} 2|g(z-x)| \\ &= 2|g(z) - g(x)| \\ &= 2|g(z)| \\ &\overset{g(z)>0}{=} 2g(z) > 0 \end{aligned}$$

Αφού, από την υπόθεση, το φραγμένο $C$ είναι αιχμηρό, υπάρχει φέτα $S(f, \alpha, C)$ του $C$ διαμέτρου $d$, όπου $d < \min\{\frac{\varepsilon}{\mathbf{M}}, g(z)\}$ , για το $\varepsilon$ που δόθηκε στην εκφώνηση.

Τώρα, $M(f, C) = M(f, \bigcup\{L, L \in K_1\})$, διοτι

για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $y_1 \in C$ τέτοιο ώστε $f(y_1) > M(f, C) - \frac{\delta}{2}$.

Αφού $y_1 \in C = \overline{\text{conv}} \bigcup\{L, L \in K_1\}$, υπάρχει $y_2 \in \text{conv}(\bigcup\{L, L \in K_1\})$ με $\|y_1 - y_2\| < \frac{\delta}{2}$

οπότε

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq \|f\| \cdot \|y_1 - y_2\| \overset{\|f\|=1}{<} \|y_1 - y_2\| < \frac{\delta}{2}$$

` Αρα,

$$f(y_2) > f(y_1) - \frac{\delta}{2} > M(f, C) - \delta$$

Δηλαδή, υπάρχει $y_2 \in \text{conv}(\bigcup\{L, L \in K_1\})$ με $f(y_2) > M(f, C) - \delta$.

Αφού, $y_2 \in \text{conv}(\bigcup\{L, L \in K_1\})$, υπάρχουν $w_1, ..., w_n \in \bigcup\{L, L \in K_1\}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ τέτοια ώστε

$$y_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$$

Άρα,

$$f(y_2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(w_i) > M(f, C) - \delta$$

οπότε θα υπάρχει $w_{i_0} \in \bigcup\{L, L \in K_1\}$ με

$$f(w_{i_0}) > M(f, C) - \delta$$

(διαφορετικά θα είχαμε

$$f(y_2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(w_i) \leq (M(f, C) - \delta) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = M(f, C) - \delta \quad ,\textbf{άτοπο})$$

Άρα το $M(f, C)$ προσεγγίζεται από στοιχεία της $\bigcup\{L, L \in K_1\}$.

Επομένως, υπάρχει $L_0 \in K_1$ τέτοιο ώστε $M(f, L_0) > M(f, C) - \alpha$ (για το δοσμένο α). Τότε

$$\beta = M(f, L_0) - [M(f, C) - \alpha] > 0$$

(οπότε μπορούμε να μιλάμε για φέτα).

Επίσης, αφού $L_0 \subseteq C$, αν $x \in S(f, \beta, L_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &> M(f, L_0) - \beta \\ &= M(f, L_0) - M(f, L_0) + M(f, C) - \alpha \\ &= M(f, C) - \alpha \end{aligned}$$

Δηλαδή, $x \in S(f, \alpha, C)$. Άρα $S(f, \beta, L_0) \subseteq S(f, \alpha, C)$. Επομένως, $\operatorname{diam} S(f, \beta, L_0) \leq d = \operatorname{diam} S(f, \alpha, C)$

3. Το $S(f, \alpha, C) \cap D = \emptyset$, διότι αν υπήρχε $x \in S(f, \alpha, C) \cap D$, τότε, αφού $x \in D$, είναι μέσο ευθύγραμμου τμήματος του $C$ (έχει δειχτεί), οπότε κάποιο από τα δύο άκρα αυτού του ευθύγραμμου τμήματος θα έπρεπε να είναι επίσης στοιχείο της $S(f, \alpha, C)$ .

   (Έχουμε

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}T_x z \quad &\Longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2}f(T_x z) \\ &\Longrightarrow \quad f(z) + f(T_x z) \geq 2M(f, C) - 2\alpha \\ &\Longrightarrow \quad f(z) \geq M(f, C) - \alpha \ \text{ ή } \ f(T_x z) \geq M(f, C) - \alpha \quad ) \end{aligned}$$

   Δηλαδή, τα $x, z$ ή τα $x, T_x z$ είναι και τα δύο στοιχεία της $S(f, \alpha, C)$.

   Όμως

$$\|z - x\| = \|T_x z - x\| \geq g(z)$$

   **αντίφαση**, διότι επιλέξαμε $d < g(z)$. Άρα $S(f, \alpha, C) \cap D = \emptyset$.

   Άρα και $S(f, \beta, L_0) \cap D = \emptyset$ $(L_0 \in \{K\} \cup \{T_x K, x \in D\} = K_1)$.

4. (α′) Αν $L_0 = C$, τότε τελειώσαμε.

(β′) Αν $L_0 = T_x K$, για κάποιο $x \in D$, τότε από το Λήμμα 3.3.1 ,για $T = T_x^{-1}$, αφού $S(f, \beta, L_0)$ είναι φέτα του $L_0 = T_x K$ , διαμέτρου το πολύ ίσης με $d$ , το $T_x^{-1} S(f, \beta, T_x K)$ είναι φέτα του $T_x^{-1} T_x K = K$, διαμέτρου το πολύ

$$\|T_x^{-1}\| \cdot d \overset{T_x^{-1} = T_x}{=} \|T_x\| \cdot d \leq \mathbf{M} \cdot d = \mathbf{M} \cdot \min \left\{ \frac{\varepsilon}{\mathbf{M}}, g(z) \right\} \leq \varepsilon$$

Επιπλέον, η φέτα του K, $T_x^{-1} S(f, \beta, T_x K)$, έχει κενή τομή με το $D$, αφού αν $y \in D$, τότε

$$y \notin S(f, \beta, T_x K) \Longrightarrow y = T_x^{-1} y$$

(αφού $y \in D$ , έχουμε $T_x^{-1} \Big|_D = id$) που δεν ανήκει στο $T_x^{-1} S(f, \beta, T_x K)$.

□

**Θεώρημα 3.3.3.** *Έστω οτι κάθε φραγμένο υποσύνολο του $X$ είναι αιχμηρό και οτι το $K$ είναι φραγμένο, κλειστό και κυρτό. Τότε το $K$ είναι η κλειστή, κυρτή θήκη των αιχμηρών σημείων του.*

*Απόδειξη.* 1. Αρκεί να δειχτεί οτι κάθε φέτα του K περιέχει αιχμηρό σημείο του K. Πράγματι, τότε :

(α′) $dp(K) = \{x \in K : x$ αιχμηρο σημείο του K$\} \neq \emptyset$

(β′) $\overline{\text{conv}}(dp(K)) \subseteq K$ , αφού το K είναι κλειστό και κυρτό.

(γ′) $K \subseteq \overline{\text{conv}}(dp(K))$

διότι διαφορετικά, θα υπήρχε $x \in K \setminus \overline{\text{conv}}(dp(K))$. Αλλα τότε, αφού το $\overline{\text{conv}}(dp(K))$ είναι κλειστό, από το Θεώρημα 3.1.2, υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$, που διαχωρίζει τα $x, \overline{\text{conv}}(dp(K))$ . Αυτό το $f$ ορίζει φέτα $S$ του K, με $x \in S$. Από την υπόθεση, υπάρχει στοιχείο στο σύνολο $S \cap dp(K)$, **άτοπο**, διότι $S \cap \overline{\text{conv}}(dp(K)) = \emptyset$ εκ κατασκευής του $S$.

2. Έστω $S(g, \beta, K)$ φέτα του K. Υποθέτουμε οτι το σημείο $0 \in X$ περιέχεται στο υπερεπίπεδο $\{x \in X : g(x) = M(g, K) - \beta\}$, οπότε , αφού το $g$ είναι γραμμικό, αυτό το υπερεπίπεδο είναι το $g^{-1}(0)$ (με μετατόπιση του K).

Έστω $K_1 = S(g, \beta, K)$. Από το Λήμμα 3.3.2, υπάρχει $K_2$, φέτα της $K_1$, με $K_2 \cap (K_1 \cap g^{-1}(0)) = \emptyset$ και διάμετρο μικρότερη του $\frac{1}{2}$.

⋮

Υπάρχει φέτα $K_n$, φέτα του $K_{n-1}$ με $K_n \subsetneq K_{n-1}$ και διάμετρο μικρότερη του $\frac{1}{2}$.

$\vdots$

Κατασκευάζουμε, έτσι ακολουθία $\{K_n\}$ από φέτες του K, με $K_n \subsetneq K_{n-1}$ και $\operatorname{diam} K_n \longrightarrow 0$. Τότε $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_n = \{x\}$, για κάποιο $x \in K$. Αυτό το $x$ είναι αναγκαστικά αιχμηρό σημείο του K, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ , υπάρχει φέτα του K με διάμετρο μικρότερη του $\varepsilon$, τέτοια ώστε το $x$ να είναι στοιχείο της.

Αλλά τότε, το $x$ είναι αιχμηρό σημείο του K και $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$. Συνεπώς, $x \in K_1 = S(g, \beta, K)$, που ήταν τυχούσα φέτα του K.

□

**Λήμμα 3.3.4.** *Έστω $F$ γραμμικός υπόχωρος του $X^*$ και έστω οτι κάθε φραγμένο, σ(X,F)-κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X είναι η σ(X,F)-κλειστή, κυρτή θήκη των $F$-αιχμηρών σημείων του. Επιπλέον, υποθέτουμε οτι η $S(f, \alpha, K)$ είναι φέτα του φραγμένου, σ(X, F)-κλειστού, κυρτού συνόλου K, με $f \in F$ και $0 < \varepsilon < 1$. Τότε, υπάρχει φέτα $S(g, \beta, K)$, διαμέτρου μικρότερης του $\varepsilon$, τέτοια ώστε $g \in F$, $\|g - f\| < \varepsilon$ και $S(g, \beta, K) \subseteq S(f, \alpha, K)$.*

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε οτι το υπερεπίπεδο

$$H = \{x \in X : f(x) = M(f, K) - \alpha\}$$

περιέχει το 0, δηλαδή οτι $H = f^{-1}(0)$ (μεταφέροντας το K όπως μας επιτρέπει το Λήμμα 3.3.1).

Τότε $M(f, K) = \alpha > 0$ $(f(0) = 0)$.

Έστω $M = M(K)$ και έστω $K_1$ η σ(X, $F$)-κλειστή, κυρτή θήκη του $S(f, \alpha, K) \cup (\lambda U \cap H)$, όπου $\lambda > \frac{2M}{\varepsilon}$.

Το $K_1$ είναι και φραγμένο, οπότε, από την υπόθεση είναι η σ(X,$F$)-κλειστή, κυρτή θήκη των $F$-αιχμηρών σημείων του.

Αφού $M(f, K) > 0$, το $K_1 \setminus H$ είναι μη κενό, άρα υπάρχει $F$-αιχμηρό σημείο στο $K_1 \setminus H$.

Άρα υπάρχει φέτα $S(g, \beta, K_1)$ διαμέτρου μικρότερης του $\varepsilon$, ξένη προς το $\lambda U \cap H$, με $g \in F$. Τότε, όμως,

$$M(g, K_1) \overset{(1)}{=} M(g, S(f, \alpha, K)) \overset{(2)}{=} M(g, K)$$

Πράγματι,

(1) $M(g, S(f, \alpha, K)) \le M(g, K_1)$, αφού $S(f, \alpha, K) \subseteq K_1$.

Ισχύει η ισότητα, διότι διαφορετικά, αφού $M(g, K_1) = M(g, S(g, \beta, K_1)$, θα υπήρχε

$$z \in K_1 \setminus H \quad \text{με} \quad g(z) > g(x), \quad \text{για κάθε} \;\; x \in S(f, \alpha, K)$$

Επομένως, θα υπήρχε φέτα $S(g, \gamma, K_1)$ με $\gamma < \beta$, ξένη προς το $S(f, \alpha, K) \cup H$.

Αυτή θα είχε $F$-αιχμηρό σημείο στο

$$K_1 \setminus \{x \in K_1 : g(x) = M(g, K_1) - \gamma\}$$

οπότε αυτό θα ήταν και $F$-αιχμηρό σημείο του $K_1$, άρα από το (*) στο $S(f, \alpha, K) \cup H$.

(*)Τα $F$-αιχμηρά σημεία του $K_1$ είναι στοιχεία του $S(f, \alpha, K) \cup (\lambda U \cap H)$, διότι αν το $z$ είναι $F$ -αιχμηρό σημείο του $K_1$ με $z \notin S(f, \alpha, K) \cup (\lambda U \cap H)$, τότε υπάρχει υπερεπίπεδο που τα διαχωρίζει, οπότε η σ(X, $F$)-κλειστή, κυρτή θήκη του $S(f, \alpha, K) \cup (\lambda U \cap H)$ δεν περιέχει το $z$, **άτοπο**.

(2) $M(g, S(f, \alpha, K)) \leq M(g, K)$
αφού $S(f, \alpha, K) \subseteq K$ και η ισότητα ισχύει , διότι το $S(g, \beta, S(f, \alpha, K)) \subseteq S(f, \alpha, K_1)$ είναι μη κενό.
(υπάρχει $z$, $F$-αιχμηρό σημείο του $K_1$ στο $K_1 \setminus H$, άρα από το (*) στο $S(f, \alpha, K)$, το οποίο έχει

$$g(z) \geq M(g, K_1) - \beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g(z) \geq M(g, S(f, \alpha, K)) - \beta$$

άρα $z \in S(g, \beta, S(f, \alpha, K))$.)
Άρα στο $K \setminus S(f, \alpha, K) \subseteq K \setminus S(g, \beta, S(f, \alpha, K))$, έχουμε

$$g(x) < M(g, K_1) - \beta, \quad \text{για κάθε} \quad x$$

Επομένως, $M(g, K) = M(g, S(f, \alpha, K))$.
Τελικά, θα πρέπει

$$S(g, \beta, S(f, \alpha, K)) = S(g, \beta, K)$$

που είναι φέτα του K διαμέτρου μικρότερης του $\varepsilon$ και περιέχεται στην $S(f, \alpha, K)$.

Μένει να δειχτεί οτι $\|f - g\| < \varepsilon$.
Έστω $z \in S(g, \beta, K)$ με

$$g(z) > M(g, K_1) - \beta \geq M(g, \lambda U \cap H) \geq 0$$

Αφού το $\lambda U \cap H$ είναι συμμετρικό, θα πρέπει

$$g(\lambda U \cap H) \subseteq [-g(z), g(z)]$$

Αλλά τότε, αφού το $g$ είναι γραμμικό, έχουμε

$$g(U \cap H) = g(U \cap f^{-1}(0)) \subseteq [-\frac{g(z)}{\lambda}, \frac{g(z)}{\lambda}]$$

Από το Λήμμα 3.2.5, για $\eta = 2g(z)/\lambda$,

$$\|f - g\| \leq \frac{2g(z)}{\lambda}, \quad \text{είτε} \quad \|f + g\| \leq \frac{2g(z)}{\lambda}$$

Στην πρώτη περίπτωση,

$$\|f-g\| \leq \frac{2g(z)}{\lambda} \leq \frac{2\|g\|\cdot\|z\|}{\lambda} \overset{\|g\|=1}{\leq} \frac{2M}{\lambda} < \varepsilon$$

από την επιλογή του λ. Οπότε προκύπτει το ζητούμενο.
Στην δεύτερη περίπτωση,

$$z \in S(g,\beta,K) \subseteq S(f,\alpha,K) \quad \text{και} \quad M(f,K)=\alpha \Longrightarrow f(z) \geq 0$$

Αρα,

$$\|f+g\| \geq (f+g)(\frac{z}{\|z\|}) = f(\frac{z}{\|z\|}) + g(\frac{z}{\|z\|}) \geq g(z)\cdot\frac{1}{\|z\|} \geq \frac{g(z)}{M}(**)$$

Όμως, από την υπόθεση

$$\begin{aligned} \|f+g\| \leq \frac{2g(z)}{\lambda} \quad & \overset{(**)}{\Longrightarrow} \quad \frac{g(z)}{M} \leq \frac{2g(z)}{\lambda} \\ & \Longrightarrow \quad \lambda < 2M \\ & \overset{2M/\varepsilon<\lambda}{\Longrightarrow} \quad \frac{2M}{\varepsilon} \leq 2M \\ & \Longrightarrow \quad \varepsilon \geq 1 \end{aligned}$$

**άτοπο**, αφού $0 < \varepsilon < 1$ εξ υποθέσεως.
Επομένως, η δεύτερη περίπτωση δεν μπορεί να συμβεί. □

**Ορισμός 3.3.5.** *Έστω $X$ χώρος Banach και $F$ γραμμικός υπόχωρος του $X^*$ που διαχωρίζει τα σημεία του $X$.*

1. *Ένα σημείο $x \in A \subseteq X$ λέγεται* **εκτεθειμένο σημείο** *(***exposed point***) του $A$, αν υπάρχει $f \in X^*$, τέτοιο ώστε $f(x) > f(y)$, για κάθε $y \in A$ διαφορετικό από το $x$. Λέμε, τότε, οτι το συναρτησιοειδές $f \in F$* ***εκθέτει*** *το $x$.*

2. *Ενα σημείο $x \in A \subseteq X$ λέγεται* ***F-ισχυρά εκτεθειμένο σημείο (F-strongly exposed point)*** *του $A$, αν υπάρχει $f \in F$ νόρμας 1, τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\alpha > 0$, έτσι ώστε η φέτα $S(f,\alpha,A)$ να περιέχει το $x$ και να έχει διάμετρο μικρότερη του $\varepsilon$. Λέμε, τότε, οτι το συναρτησιοειδές $f \in F$* ***εκθέτει ισχυρά*** *το $x$.*

3. *Αν $F = X^*$,τότε το $x$ λέγεται απλά* ***ισχυρά εκτεθειμένο σημείο*** *του $A$* ***(strongly exposed point)****.*

**Λήμμα 3.3.6. (Bishop)** *Έστω $X$ χώρος Banach , $F$ ένας $\|\cdot\|$-κλειστός υπόχωρος του δυϊκού χώρου $X^*$ και $K$ φραγμένο, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $X$. Έστω οτι για κάθε φέτα $S(f,\alpha)$ του $K$, όπου $f \in F$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ , υπάρχει φέτα $S(g,\beta)$ διαμέτρου μικρότερης του $\varepsilon$, τέτοια ώστε $g \in$*

*$F$, $S(g,\beta) \subseteq S(f,\alpha)$ και $\|f-g\| < \varepsilon$. Τότε κάθε φέτα $S(f,\alpha)$ του $K$, με $f \in F$, περιέχει σημείο του $K$, το οποίο είναι ισχυρά εκτεθειμένο από ένα συναρτησιοειδές του $F$.*

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε $M(f)$ το $M(f,K)$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι $M(K)=1$. Έστω $S(f,\alpha)$ φέτα του K, όπου $f \in F$.

Θέτουμε $f = g_0$ και $\alpha = \beta_0$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση κατασκευάζουμε επαγωγικά ακολουθία $\{g_\kappa\}$ στοιχείων του $F$ νόρμας 1 (για να έχει νόημα ο όρος "φέτα") και θετικών, πραγματικών αριθμών $\{\beta_\kappa\}$ τέτοιων ώστε :

1. $\|g_{\kappa+1} - g_\kappa\| < \frac{\beta_\kappa}{2^\kappa}$
2. $\beta_{\kappa+1} < \frac{\beta_\kappa}{2^\kappa}$
3. $\operatorname{diam} S(g_\kappa, \beta_\kappa) < \frac{\beta_\kappa}{2^\kappa}$
4. $S(g_{\kappa+1}, \beta_{\kappa+1}) \subseteq S(g_\kappa, \beta_\kappa)$

Τότε, για κάθε $\kappa, j \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g_{\kappa+j} - g_\kappa\| &\leq \sum_{r=1}^{j} \|g_{\kappa+r} - g_{\kappa+r-1}\| \\
&\overset{\text{υπόθ.}}{<} \sum_{r=1}^{j} \frac{\beta_{\kappa+r-1}}{2^{\kappa+r-1}} \\
&= \frac{1}{2^{\kappa-1}} \sum_{r=1}^{j} \frac{\beta_{\kappa+r-1}}{2^r} \\
&< \frac{1}{2^{\kappa-1}} \sum_{r=1}^{j} \frac{\beta_\kappa}{2^r} \\
&= \frac{\beta_\kappa}{2^{\kappa-1}} \sum_{r=1}^{j} \frac{1}{2^r} \\
&< \frac{\beta_\kappa}{2^{\kappa-1}}
\end{aligned}$$

Αφού η $\{\beta_\kappa\}$ είναι φθίνουσα, η $\{g_\kappa\}$ θα είναι Cauchy και επομένως θα συγκλίνει σε κάποιο $g$ του κλειστού $F$ με $\|g\| = 1$ (αφού $\|g_\kappa\| = 1, \forall \kappa$).

Επιπλέον, η φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων $\{S(g_\kappa, \beta_\kappa)\}$ θα έχει μη κενή τομή, ένα μονοσύνολο $\{x_0\}$ με $x_0 \in S(f,\alpha)$
(αφού $\operatorname{diam} S(g_\kappa, \beta_\kappa) < \frac{\beta_\kappa}{2^\kappa} \longrightarrow 0$).

Θα δείξουμε οτι το $x_0$ είναι ισχυρά εκτεθειμένο από το $g$.

Πράγματι,

$$\|g_{\kappa+j} - g_\kappa\| < \frac{1}{2^{\kappa-1}}\beta_\kappa, \quad \text{για κάθε } \kappa, j \in \mathbb{N}$$

Άρα
$$\|g - g_\kappa\| \leq \frac{1}{2^{\kappa-1}}\beta_\kappa, \quad \text{για κάθε} \quad \kappa \in \mathbb{N}$$
Συνεπώς, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in K$
$$\begin{aligned} |g(x) - g_\kappa(x)| &\leq \|g - g_\kappa\| \cdot \|x\| \\ &\overset{M(K)=1}{\leq} \frac{1}{2^{\kappa-1}}\beta_\kappa \quad (1) \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $x \in K$ έχουμε
$$\begin{aligned} M(g) \geq g(x) \geq g_\kappa(x) - \frac{1}{2^{\kappa-1}}\beta_\kappa \Longrightarrow \\ \Longrightarrow M(g) \geq M(g_\kappa) - \frac{1}{2^{\kappa-1}}\beta_\kappa \Longrightarrow \\ \Longrightarrow M(g) \geq M(g_\kappa) - \frac{1}{2^2}\beta_\kappa, \forall \kappa \geq 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Επιπλέον, αν $x \in S(g, \frac{\beta_\kappa}{4})$, για $\kappa \geq 3$, τότε
$$\begin{aligned} (1) \Longrightarrow g_\kappa(x) &\geq g(x) - \frac{1}{2^2}\beta_\kappa \\ &\overset{x\in S(g,\frac{\beta_\kappa}{4})}{\geq} M(g) - \frac{\beta_\kappa}{4} - \frac{1}{2^2}\beta_\kappa \\ &= M(g) - \frac{\beta_\kappa}{2} \\ &\overset{(2)}{\geq} M(g_\kappa) - \frac{1}{2^2}\beta_\kappa - \frac{\beta_\kappa}{2} \\ &= M(g_\kappa) - 3/4 \cdot \beta_\kappa \\ &\geq M(g_\kappa) - \beta_\kappa \end{aligned}$$

Δηλαδή, $x \in S(g_\kappa, \beta_\kappa)$.

Άρα, $S(g, \frac{\beta_\kappa}{4}) \subseteq S(g_\kappa, \beta_\kappa)$ για $\kappa \geq 3$.

Επομένως,
$$\emptyset \neq \bigcap_{\kappa\in\mathbb{N}} S(g, \frac{\beta_\kappa}{4}) \subseteq \bigcap_{\kappa\in\mathbb{N}} S(g_\kappa, \beta_\kappa) = \{x_0\}$$
Συνεπώς
$$\bigcap_{\kappa\in\mathbb{N}} S(g, \frac{\beta_\kappa}{4}) = \{x_0\}$$
και
$$\operatorname{diam} S(g, \frac{\beta_\kappa}{4}) \leq \operatorname{diam} S(g, \beta_\kappa) \overset{\kappa\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε η $S(g, \frac{\beta_\kappa}{4})$ να έχει διάμετρο μικρότερη του $\varepsilon$ και να περιέχει το $x_0$.

Άρα το $x_0$ εκτίθεται ισχυρά από την $g$. $\square$

**Πρόταση 3.3.7.** *Έστω X χώρος Banach και F ένας $\|\cdot\|$-κλειστός υπόχωρος του $X^*$, ο οποιός διαχωρίζει τα σημεία του X. Υποθέτουμε οτι κάθε φραγμένο, σ(X,F)-κλειστό, κυρτό υποσύνολο του X είναι η σ(X,F)-κλειστή, κυρτή θήκη των F-αιχμηρών σημείων του. Τότε, κάθε τέτοιο σύνολο είναι η σ(X,F)-κλειστή, κυρτή θήκη των F-ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του.*

*Απόδειξη.* Έστω K ένα τέτοιο σύνολο. Από το Λήμμα 3.3.4, για κάθε φέτα $S(f,\alpha,K)$ με $f \in F$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $S(g,\beta,K) \subseteq S(f,\alpha,K)$, με $g \in F$, διαμέτρου μικρότερης του $\varepsilon$, τέτοια ώστε $\|g - f\| < \varepsilon$. Από το Λήμμα 3.3.6, κάθε φέτα $S(f,\alpha,K)$ με $f \in F$ περιέχει $F$-ισχυρά εκτεθειμένο σημείο του K. Έστω $se(K) \neq \emptyset$ το σύνολο των $F$ -ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του K και $\overline{se}(K)$ η σ(X,$F$)-κλειστή, κυρτή θήκη του. Προφανώς $\overline{se}(K) \subseteq K$. Έστω οτι δεν ισχύει η ισότητα. Τότε, θα υπάρχει $x \in K \setminus \overline{se}(K)$. Απο το Θεώρημα 3.1.2 , υπάρχει $f \in F$ που διαχωρίζει τα $\{x\}, \overline{se}(K)$. Αλλά, τότε, θα υπάρχει φέτα του K που περιέχει το $x$, ξένη προς το K. **Άτοπο**, αφού θα πρέπει να περιέχει στοιχείο του $se(K)$. □

**Θεώρημα 3.3.8.** *Έστω X χώρος Banach. Κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι αιχμηρό αν και μόνο αν κάθε φραγμένο , κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X είναι η κλειστή, κυρτή θήκη των ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του.*

*Απόδειξη.* " $\Longrightarrow$ " Από το Θεώρημα 3.3.3, κάθε φραγμένο, κλειστό και κυρτό είναι η κλειστή, κυρτή θήκη των αιχμηρών σημείων του και από την πρόταση 3.3.7 για $F = X^*$, των ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του.

" $\Longleftarrow$ " Κάθε φραγμένο σύνολο θα έχει ισχυρά εκτεθειμένα σημεία, αρα και αιχμηρά σημεία. □

**Πόρισμα 3.3.9.** *Έστω X χώρος Banach και έστω οτι κάθε φραγμένο ασθενώς*-κλειστό υποσύνολο του $X^*$ είναι η ασθενώς*-κλειστή, κυρτή θήκη των ασθενώς*-αιχμηρών σημείων του. Τότε το ίδιο συμβαίνει για τα ασθενώς*-ισχυρά εκτεθειμένα σημεία του.*

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 3.3.7 για $F \subseteq X^{**}$ τη φυσιολογική εμβύθιση του X στον $X^{**}$. □

Το σημαντικότερο, όμως, για εμάς πόρισμα του θεωρήματος 3.3.8, είναι ακριβώς το θεώρημα 3.2.8, το οποίο πλέον ανάγεται στην

**Πρόταση 3.3.10.** *Αν το K είναι κυρτό υποσύνολο του χώρου Banach X, τότε τα εκτεθειμένα σημεία του K είναι και ακραία σημεία του.*

*Απόδειξη.* Έστω $x$ εκτεθειμένο σημείο του K και έστω οτι

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b, \quad \text{για κάποια } a, b \in K \setminus \{x\} \text{ και } \lambda \in (0,1)$$

Έστω οτι το $f \in X^*$ εκθέτει το $x$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \\ &< \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x) = f(x) \end{aligned}$$

**Άτοπο**, άρα $a = b = x$, οπότε $x \in ex(K)$. $\square$

# Κεφάλαιο 4

# Το ανοικτό πρόβλημα

Δείξαμε μέχρι στιγμής οτι η ιδιότητα Radon-Nikodým συνεπάγεται την ιδιότητα Krein-Milman. Γεννάται, λοιπόν, εύλογα το ερώτημα εάν τελικά ισχύει η ισοδυναμία των δύο ιδιοτήτων και, στην περίπτωση που δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο, εάν μπορούμε τουλάχιστον να χαρακτηρίσουμε τους χώρους Banach στους οποίους ισχύει.

Από το 1974, που δόθηκε η απόδειξη της πρώτης κατεύθυνσης έως και σήμερα το ερώτημα αυτό παραμένει αναπάντητο, αν και έχει αποδειχτεί οτι σε ορισμένους χώρους έχουμε πράγματι την ισοδυναμία. Παραδείγματος χάριν

Το 1975, από τους Huff και Morris στο [9] για δυϊκούς χώρους Banach.
Το 1981, από τους Bourgain και Talagrand στο [3] για δίκτυα Banach.
Το 1985, από τον Schachermayer στο [15] για χώρους X, οι οποίοι είναι ισομορφικοί με τους $X \oplus X$.
Το 1987, επίσης από τον Schachermayer στο [16] για ισχυρά κανονικά σύνολα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε αναλυτικά το αποτέλεσμα των Huff και Morris για δυϊκούς χώρους.

## 4.1 Η απάντηση σε δυϊκούς χώρους

**Θεώρημα 4.1.1.** *(R.E. Huff, P.D. Morris, 1975 [9])*
*Κάθε δυϊκός χώρος Banach με την ιδιότητα Krein-Milman έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.*

Για την αποδειξη του Θεωρήματος αυτού θα χρειαστεί να ορίσουμε κάποιες καινούργιες έννοιες.

**Ορισμός 4.1.2.** *Έστω $\mu$ ένα Borel μέτρο στον τοπικά συμπαγή, Hausdorff τοπολογικό χώρο $X$ και $E$ ένα Borel υποσύνολο του $X$. Θα λέμε οτι το $\mu$ είναι*

1. **εξωτερικά κανονικό** *στο E, αν*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq E, \quad \text{ανοικτό}\}$$

2. **εσωτερικά κανονικό** *στο E, αν*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, \quad \text{συμπαγές}\}$$

3. **κανονικό**, *αν είναι εξωτερικά και εσωτερικά κανονικό σε όλα τα Borel σύνολα.*

4. **μέτρο Radon**, *αν είναι πεπερασμένο σε όλα τα συμπαγή σύνολα, εξωτερικά κανονικό σε όλα τα Borel σύνολα και εσωτερικά κανονικό σε όλα τα ανοικτά σύνολα.*

**Ορισμός 4.1.3.** *Ένα σύνολο $E$ θα λέγεται* **σύνολο Baire**, *αν είναι στοιχείο της σ-άλγεβρας που παράγεται από το σύνολο $C_C(X)$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων του $X$ οι οποίες έχουν συμπαγή φορέα (δηλαδή, της μικρότερης σ-άλγεβρας ως προς την οποία κάθε στοιχείο του $C_C(X)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση).*

**Ορισμός 4.1.4.** *Ένα υποσύνολο $K$ του συνόλου $L$ λέγεται* **ακραίο** *(***extremal***) υποσύνολο του $L$, αν για κάθε $x \in K$, που μπορεί να γραφεί $x = ty + (1-t)z$, για κάποια $y, z \in L$ και κάποιον πραγματικό αριθμό $0 < t < 1$, θα πρέπει $y, z \in K$.*

**Λήμμα 4.1.5.** *Αν το σύνολο $K$ είναι ακραίο υποσύνολο του $L$, τότε κάθε ακραίο σημείο του $K$ είναι ακραίο και στο $L$.*

*Απόδειξη.* Έστω οτι το $x$ είναι ακραίο σημείο του K και έστω $y, z \in L$ και $0 < t < 1$, τέτοια ώστε $x = ty + (1-t)z$. Τότε, αφού το K είναι ακραίο υποσύνολο του $L$, θα πρέπει $y, z \in K$. Όμως, το $x$ είναι ακραίο σημείο του K, οπότε $y = z = x$, το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

**Ορισμός 4.1.6.** *Ένας χώρος Banach $X$ θα λέγεται* **injective**, *αν για οποιονδήποτε χώρο Banach $Z$, κάθε τελεστής $T$ από κάθε υπόχωρο του $Z$ στον $X$ έχει επέκταση σε έναν τελεστή $\tilde{T} : Z \longrightarrow X$, τέτοιον ώστε $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.*

**Ορισμός 4.1.7.** *Ένας χώρος $K$ λέγεται* **ακραία μη συνεκτικός** *(***extremely disconected***), αν κάθε ανοικτό υποσύνολό του έχει ανοικτή κλειστότητα.*

**Σημείωση 4.1.8.** *Εργασίες των Nachbin, Goodner, Kelley και Hasumi χαρακτηρίζουν τους πραγματικούς και μιγαδικούς injective χώρους ως τους χώρους $C(K)$, όπου το $K$ είναι ακραία μη συνεκτικός, συμπαγής χώρος Hausdorff ([20], σελ. 123-125).*

*Αποδεικνύεται οτι κάθε πραγματικός χώρος $L^\infty(\mu)$, όπου το $\mu$ είναι πεπερασμένο, είναι ένας injective χώρος.*

**Ορισμός 4.1.9.** *Αν $\Delta$ είναι το σύνολο του Cantor, τοτε* **δυαδικά διαστήματα** *του $\Delta$ θα λέμε τα στοιχεία της ακολουθίας $A_1 = \Delta, A_2 = \Delta \cap [0, 1/3], A_3 = \Delta \cap [2/3, 1], A_4 = \Delta \cap [0, 1/9], A_5 = \Delta \cap [2/9, 1/3], \ldots$ .*

*Με αυτόν τον τρόπο, η $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία απο υποσύνολα του $\Delta$, τα οποία είναι ανοικτά και κλειστά, με δείκτες $n$, τέτοιους ώστε το $A_n$ να είναι η ξένη ένωση των $A_{2n}$ και $A_{2n+1}$. Έτσι, για κάθε $k = 1, 2, \ldots$, το $\Delta$ είναι η ξένη ένωση των $\{A_m, 2^k \leq m < 2^{k+1}\}$.*

Θα χρειαστούμε επίσης δύο αποτελέσματα, των Uhl και Stegall, τα οποία δίνουμε χωρίς αποδείξεις, αφού αυτές ξεφεύγουν από τον σκοπό αυτής της εργασίας.

**Θεώρημα 4.1.10.** *(J.J. Uhl Jr., 1971 [19])*
*Αν ο $X$ είναι χώρος Banach, τέτοιος ώστε κάθε κλειστός διαχωρίσιμος υπόχωρος του $X$ να είναι γραμμικά ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο ενός διαχωρίσιμου δυϊκού χώρου, τότε ο $X$ έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.*

**Πόρισμα 4.1.11.** *(Phillips, 1943 [13])*
*Κάθε ανακλαστικός χώρος Banach έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.*

**Πόρισμα 4.1.12.** *Αν ο $X$ είναι χώρος Banach τέτοιος ώστε κάθε διαχωρίσιμος υπόχωρος του $X$ να έχει διαχωρίσιμο δυϊκό, τότε ο $X^*$ έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.*

**Θεώρημα 4.1.13.** *(***C.Stegall, [17]***)*
*Έστω οτι ο $X$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, για τον οποίο ο $X^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος. Δεδομένου ενός $\varepsilon > 0$, υπάρχουν*

1. *Ένα υποσύνολο $\Delta$ της μοναδιαίας σφαίρας του $X^*$, το οποίο είναι ασθενώς*-ομοιομορφικό με το σύνολο του Cantor*

2. *Μία ακολουθία $\{x_n\}$ στο $X$, με $\|x_n\| < 1+\varepsilon$ για όλα τα $n$, για την οποία*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n - \chi_{A_n}\| < \varepsilon$$

*όπου ο $T : X \longrightarrow C(\Delta)$ είναι ο τελεστής εκτίμησης (δηλαδή με τύπο $(Tx)(x^*) = x^*(x)$) και τα $A_n$ είναι οι ομοιομορφικές εικόνες των δυαδικών διαστημάτων του συνόλου του Cantor.*

*Απόδειξη.* (**του Θεωρήματος 4.1.1**)
Έστω X χώρος Banach. Υποθέτουμε οτι ο δυϊκός χώρος $X^*$ δεν έχει την RNP. Θα αποδείξουμε οτι τότε υπάρχει υποσύνολο K του $X^*$, το οποίο είναι μη κενό, φραγμένο, $\|\cdot\|$-κλειστό και κυρτό, αλλα δεν έχει ακραία σημεία.

Αφού ο $X^*$ δεν έχει την RNP, από το Πόρισμα 4.1.12, ο X θα έχει κάποιον διαχωρίσιμο υπόχωρο $Y$, τέτοιον ώστε ο $Y^*$ να μην είναι διαχωρίσμος. Εφαρμόζουμε στον $Y$ το Θεώρημα 4.1.13 για $\varepsilon = 1/2$.

Έστω μ το μέτρο Radon στο $\Delta$, με $\mu(A_n) = 2^{-k}$ για $2^k \leq n < 2^{k+1}$.

Για κάθε $n$, ορίζουμε μέτρο Radon στο $\Delta$, $\mu_n$, μέσω της σχέσης

$$\mu_n(E) = \frac{\mu(E \cap A_n)}{\mu(A_n)}$$

για κάθε σύνολο Baire E.

Ο τελεστής T μπορεί να θεωρηθεί απεικόνιση του $Y$ στον $L^\infty(\Delta)$. Αφού ο $L^\infty(\Delta, \mu)$ είναι *injective*, ο T θα επεκτείνεται σε έναν φραγμένο τελεστή (τον οποίο θα συνεχίζουμε να συμβολίζουμε T) από ολόκληρο τον X στον $L^\infty(\Delta, \mu)$. Τα $\mu_n$ μπορούν να θεωρηθούν στοιχεία του $L^\infty(\Delta, \mu)^*$. Τώρα, για κάθε $n$, ορίζουμε

$$x_n^* = T^*(\mu_n) \in X^*$$

και τα σύνολα

$$C = \overline{\text{conv}}^*(\{\mu_n\}) \subseteq L^\infty(\Delta, \mu)$$

$$D = \overline{\text{conv}}^*(\{x_n^*\}) \subseteq X^*$$

$$K = \{z^* \in D : z^*(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

όπου $\{x_n\}$ είναι η ακολουθία που δίνει το Θεώρημα 4.1.13 και $\overline{\text{conv}}^*$ θα συμβολίζουμε την ασθενώς*-κλειστή, κυρτή θήκη.

Τα $C, D$ είναι και τα δύο ασθενώς*-συμπαγή, κυρτά σύνολα και $D = T^*(C)$ (από τον ορισμό αυτών των συνόλων).

Θα δείξουμε οτι το K είναι μη κενό, φραγμένο, $\|\cdot\|$-κλειστό και κυρτό, αλλά δεν έχει ακραία σημεία.

Το γεγονός οτι το K είναι φραγμένο και κυρτό είναι προφανές. Το οτι είναι $\|\cdot\|$-κλειστό προκύπτει εύκολα από το οτι η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι φραγμένη.

Θα δείξουμε οτι το K είναι μη κενό.

Για κάθε $n, m$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} |x_n^*(x_m)| &= |\mu_n(Tx_m)| \leq |\mu_n(Tx_m - \chi_{A_m})| + |\mu_n(\chi_{A_m})| \\ &\leq \|Tx_m - \chi_{A_m}\| + \frac{\mu(A_n \cap A_m)}{\mu(A_n)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Επομένως, το K περιέχει την ακολουθία $\{x_n^*\}$.

Μένει να δειχτεί οτι το K δεν έχει ακραία σημεία.

Θα δείξουμε πρώτα οτι το K είναι ακραίο υποσύνολο του $D$. Πράγματι, για κάθε $n, m$

$$x_n^*(x_m) = \mu_n(Tx_m - \chi_{A_m}) + \mu_n(\chi_{A_m}) \geq -\|Tx_m - \chi_{A_m}\|$$

Έτσι

$$z^*(x_m) \geq -\|Tx_m - \chi_{A_m}\|, \text{ για κάθε } z^* \in D = \overline{\text{conv}}^*(\{x_n^*\}) \text{ και για κάθε } m$$

οπότε

$$\liminf z^*(x_m) \geq 0, \quad \text{για κάθε } z^* \in D \quad (*)$$

Υποθέτουμε, τώρα, οτι τα $z_1^*, z_2^*$ είναι στοιχεία του $D$, τέτοια ώστε $z^* = 1/2(z_1^* + z_2^*) \in K$. Τότε

$$\limsup z_1^*(x_m) \leq 2 \limsup z^*(x_m) - \liminf z_2^*(x_m) \leq 0$$

αφού $z^* \in K$ και αφού $z_2^* \in D$, οπότε ισχύει η (*). Άρα το $z_1^*$ (και ομοίως το $z_2^*$ ) είναι στοιχείο του K. Επομένως το K είναι ακραίο στο $D$.

Για να συμπληρωθεί η απόδειξη, αρκεί πλέον, από το Λήμμα 4.1.5, να δειχθεί οτι αν το $z^*$ είναι ακραίο σημείο του $D$, τότε το $z^*$ δεν είναι στοιχείο του K.

Το σύνολο $C \cap (T^*)^{-1}(z^*)$ είναι ακραίο στο $C$ και μη κενό, αφού $T^*(C) = D$. Συνεπώς, υπάρχει ακραίο σημείο β του $C$ για το οποίο $T^*(\beta) = z^*$. Το β είναι στην ασθενή*-κλειστότητα $W$ της $\{\mu_n\}$, όμως είναι εύκολο να δεικτεί από τον ορισμό των $\mu_n$ οτι $\mu_n = 1/2(\mu_{2n} + \mu_{2n+1})$, για κάθε $n$. Άρα $\beta \in W \setminus \{\mu_n\}$. Αφού το $\mu_n(\chi_{A_m})$ είναι είτε 0, είτε 1, για $n \geq m$, θα πρέπει και το $\beta(\chi_{A_m})$ να είναι είτε 0, είτε 1, για κάθε $m$. Όμως,

$$1 = \beta(\chi_{A_1}) = \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} \beta(\chi_{A_m}), \quad \text{για κάθε} \quad k$$

οπότε $\beta(\chi_{A_m}) = 1$, για άπειρα το πλήθος $m$. Όμως, για τα $m$ για τα οποία $\beta(\chi_{A_m}) = 1$, έχουμε

$$z^*(x_m) = \beta(Tx_m) = \beta(\chi_{A_m}) + \beta(Tx_m - \chi_{A_m}) > 1 - \varepsilon = 1/2$$

Έτσι, το $z^*$ δεν είναι στοιχείο του K και η απόδειξη είναι πλήρης. □

# Βιβλιογραφία


[1] BENYAMINI, Y. and LINDENSTRAUSS, J.: *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Vol **1** Amer. Math. Soc. (2000)

[2] BISHOP, E. and PHELPS, R.R.: *The support functionals of a convex set*, Proc. Symp. in Pure Math. Vol **7**(Convexity), Amer. Math. Soc., 27-35 (1963)

[3] BOURGAIN, J. and TALAGRAND, M.: *Dans un espace de Banach réticulé solide, la propriété de Radon-Nikodým et celle de Krein-Milman sont équivalentes*, Proc. Amer. Math. Soc., **81**, 93-96 (1981)

[4] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.: *Linear Operators*, Part I, Interscience, New York (1958)

[5] FOLLAND, G.B.: *Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, Wiley-Interscience Pub. (1999)

[6] HABALA, P., HAJEK, P. and ZIZLER, V.: *Introduction to Banach Spaces*, Vol **1**, MatFizPress, Univ. Karlovy, Prague (1996)

[7] HILLE, E.: *Methods in Classical and Functional Analysis*, Addison-Wesley Pub. Co. (1972)

[8] HUFF, R.E.: *Dentability and the Radon-Nikodým Property*, Duke Math. J. 41, 111-114 (1974)

[9] HUFF, R.E. and MORRIS, P.D.: *Dual Spaces with the Krein-Milman Property have the Radon-Nikodým Property*, Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol **49**, Number 1 (May 1975)

[10] MAYNARD, H: *A geometric characterization of Banach spaces possesing the Radon-Nikodým property*, Trans. Amer. Math. Soc., **185**, 493-500 (1973)

[11] PHELPS, R.R.: *Dentability and extreme points in Banach Spaces*, Journal of Functional Analysis **16**, 78-90 (1974)

[12] PHELPS, R.R. and DAVIS, W.J.: *The Radon-Nikodým property and dentable sets in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **45**, 119-122 (1974)

[13] PHILLIPS, R.S.: *On weakly compact subsets of a Banach space*, Amer. J. Math, **65**, 108-136 (1943)

[14] RIEFFEL, M.A.: *Dentable subsets of Banach Spaces, with Application to a Radon-Nikodým Theorem*, Proceedings of the Conference of Functional Analysis, Thompson Book Co., Washington (1967)

[15] SCHACHERMAYER, W.: *For a Banach space isomorphic to its square the Radon-Nikodým property and the Krein-Milman property are equivalent*, Studia Math., **81**, 329-339 (1985)

[16] SCHACHERMAYER, W.: *The Radon-Nikodým Property and the Krein-Milman Property are equivalent for strongly regular sets*, Transactions of the Amer. Math. Soc., Vol **303**, Number 2 (October 1987)

[17] STEGALL, C.: *The Radon-Nikodým Property in Conjugate Banach Spaces*, Transactions of the Amer. Math. Soc. **206**, 213-223 (1975)

[18] UHL, J.J.Jr.: *The Radon-Nikodým Theorem and the mean convergence of Banach Space valued martingales*, Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol **21**, 139-144 (1969)

[19] UHL, J.J.Jr.: *A note on the Radon-Nikodým property for Banach Spaces*, Rev. Roumaine Mat. Pures Appl., **17**, 113-115 (1972)

[20] DAY, M.M.: *Normed Linear Spaces*, third edition, Ergebnisse, Vol **21**, Springer Verlag (1973)