

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών “ Μαθηματικά και Εφαρμογές ”



ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ
ΠΟΛΥΣΤΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
SAINT-VENANT

Καφούσας Χ. Κωνσταντίνος

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	5
1 Εξισώσεις Navier-Stokes και συστήματα Saint-Venant	7
1.1 Υδροστατικό μοντέλο με ιξώδες	9
1.2 Το κλασσικό υδροστατικό μοντέλο	10
1.3 Το πολυστρωματικό σύστημα Saint-Venant	11
1.4 Το πολυστρωματικό μοντέλο Saint-Venant	12
2 Μέθοδοι επίλυσης και διακριτοποίηση	17
2.1 Χαλαρωτικά σχήματα	17
2.2 Πεπερασμένοι όγκοι	20
2.3 Το ημιδιακριτό σχήμα	21
2.3.1 Το upwind σχήμα	21
2.3.2 Το σχήμα MUSCL	22
2.3.3 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες	24
2.4 Το πλήρως διακριτό σχήμα	25
3 Αριθμητικά αποτελέσματα	29
3.1 Σχήμα ενός στρώματος με επίπεδο βυθό	29
3.1.1 Περίπτωση θραύσης φράγματος (Dam-break flow)	30
3.1.2 Λύση σταθερής κατάστασης (Lake at rest)	35
3.2 Σχήμα ενός στρώματος με μη τετριμένο βυθό	38
3.2.1 Λύση σταθερής κατάστασης	38
3.2.2 Λύση σταθερής ροής	40

4 • Α.Ε. ΤΩΝ ΠΟΛΥΣΤΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ SAINT-VENANT

3.3	Πολυστρωματικό σχήμα	45
3.3.1	Σύγκριση με μονοστρωματικά μοντέλα Saint-Venant	45
3.3.2	Συμπεριφορά του πολυστρωματικού μοντέλου	48
	Συμπεράσματα	55
	Βιβλιογραφία	56

Εισαγωγή

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η αριθμητική επίλυση των πολυστρωματικών εξισώσεων Saint-Venant. Το κλασσικό σύστημα Saint-Venant είναι μία προσέγγιση των εξισώσεων ασυμπίεστων ροών Navier-Stokes για ρηχά νερά. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν διάφορες γεωφυσικές ροές σε ποτάμια, λίμνες, ακτές, ωκεανούς, ατμόσφαιρα κλπ. Η αποδοτικότητά τους καθώς και το χαμηλό υπολογιστικό τους κόστος, τις κάνουν να χρησιμοποιούνται πολύ συχνά.

Στην εργασία αυτή θα γίνει ανάλυση και επαναπροσέγγιση των εξισώσεων Navier-Stokes με την υπόθεση των ρηχών νερών και θα παρουσιαστεί ένα πολυστρωματικό τύπου μοντέλο Saint-Venant, το οποίο θα διευρύνει την εγγυρότητα του σχήματος, ενώ ταυτόχρονα διατηρεί την υπολογιστική αποδοτικότητά του κλασσικού συστήματος. Διακριτοποιώντας το κάθετο κομμάτι, προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial h_\alpha U_\alpha}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial h_\alpha U_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_\alpha U_\alpha^2 + g \frac{h_\alpha \sum_{\beta=1}^M h_\beta}{2} \right) \\ &= \frac{g \left(\sum_{\beta=1}^M \right)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{h_\alpha}{\sum_{\beta=1}^M} + 2\mu \frac{U_{\alpha+1} - U_\alpha}{h_{\alpha+1} + h_\alpha} - 2\mu \frac{U_\alpha - U_{\alpha-1}}{h_\alpha + h_{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

όπου $(h_\alpha, h_\alpha U_\alpha)(t, x)$ είναι το διάνυσμα των διατηρητικών μεταβλητών, ύψος ρευστού και ορμή αντίστοιχα, ενώ U_α είναι η ταχύτητα. Ο δείκτης α αντιστοιχεί στο στρώμα του

ρευστού, έτσι $\alpha \pm 1$ είναι τα γειτονικά στρώματα του α , πάνω και κάτω. M είναι ο συνολικός αριθμός των στρωμάτων, μ ο συντελεστής ιξώδους, δηλαδή της τριβής μεταξύ του ρευστού που βρίσκεται σε γειτονικά στρώματα και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Με το μοντέλο αυτό αξιοποιείται επαρκώς η πληροφορία από την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας και μπορούμε να αναπαράγουμε με περισσότερη ακρίβεια διάφορα φαινόμενα όταν ο συντελεστής τριβής του βυθού δεν είναι αρκετά μικρός, όπως σε περιπτώσεις θραύσης φραγμάτων. Το αριθμητικό σχήμα, όπως και στην περίπτωση του συστήματος Saint-Venant, πρέπει να ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες ευστάθειας, να είναι σύμφωνο με φυσικούς νόμους και να διατηρεί τις σταθερές καταστάσεις ([3], [4]). Δηλαδή:

1. να διατηρεί το ύψος θετικό $h_\alpha \geq 0$,
2. να διατηρεί την ολική ορμή $\sum_\alpha h_\alpha U_\alpha$ όταν $\mu = 0$,
3. οι επιμέρους καταστάσεις σε κάθε στρώμα να είναι συνεπείς με το κλασσικό μονοστρωματικό σύστημα Saint Venant όταν $\mu = 0$,
4. να διατηρεί τις σταθερές καταστάσεις (steady states).

Για την αριθμητική επίλυση του συστήματος θα χρησιμοποιηθούν κλασσικές χαλαρωτικές μέθοδοι (relaxation methods), μαζί με μία Runge Kutta μέθοδο ([14], [1]) που παρέχει τους μηχανισμούς χρονικής εξέλιξης. Είναι εξαιρετικά χαμηλού υπολογιστικού κόστους και αποτελεσματικές όπως δείχνουν τα αριθμητικά παραδείγματα.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής. Στο πρώτο κεφάλαιο θα γίνει παρουσίαση του μοντέλου ρηχών υδάτων, καθώς και του αντίστοιχου πολυστρωματικού μοντέλου. Το ημιδιακριτό, το πλήρως διακριτό σχήμα καθώς και η ανάλυση των χαλαρωτικών μεθόδων θα γίνει στο κεφάλαιο 2. Τέλος στο κεφάλαιο 3 παρατείνονται μία σειρά πειραματικών εφαρμογών και παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα των μεθόδων.

Κεφάλαιο 1

Εξισώσεις Navier-Stokes και συστήματα Saint-Venant

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει η παρουσίαση των πρώτων βημάτων παραγωγής των μοντέλων Saint-Venant από τις εξισώσεις Navier-Stokes, όπως και μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της απώλειας ενέργειας, μίας βασικής ιδιότητας των εξισώσεων αυτών.

Θεωρούμε τις κλασσικές εξισώσεις Navier-Stokes ελεύθερης επιφάνειας, ([6], [9]),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.0.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \quad (1.0.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = -g + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad (1.0.3)$$

με

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq z \leq h(t, x),$$

όπου $u(t, x, z)$ είναι η οριζόντια ταχύτητα, $w(t, x, z)$ η κάθετη ταχύτητα, $p(t, x, z)$ η πίεση, $h(t, x)$ το ύψος του ρευστού, g η βαρύτητα και ο συντελεστής μ σχετίζεται με το ιξώδες. Για απλότητα, θεωρούμε την περίπτωση επίπεδου βυθού, στον οποίο θεωρούμε

μια συνθήκη μη διαπέρασης και εκτιμούμε την τριβή μέσω ενός συντελεστή κ

$$w(t, x, 0) = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial z}(t, x, 0) = \kappa u(t, x, 0). \quad (1.0.4)$$

Στην ελεύθερη επιφάνεια θεωρούμε μια συνθήκη ασυμπίεστότητας,

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} + p \frac{\partial h}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \text{στο } z = h(t, x), \quad (1.0.5)$$

$$p - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \mu \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \text{στο } z = h(t, x), \quad (1.0.6)$$

και την κινηματική συνοριακή συνθήκη,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u(t, x, z = h(t, x)) \frac{\partial h}{\partial x} - w(t, x, z = h(t, x)) = 0. \quad (1.0.7)$$

Το ενδιαφέρον τώρα επικεντρώνεται στις ροές ρηχών νερών. Εισάγουμε δύο χαρακτηριστικές διαστάσεις H και L , η κάθετη και η οριζόντια αντίστοιχα. Οι ροές σε ρηχά νερά χαρακτηρίζονται από το γεγονός πως η H είναι πολύ μικρή σε σχέση με την L . Οπότε και μπορεί να γίνει και η υπόθεση ρηχών νερών, να οριστεί δηλαδή μια μικρή παράμετρος $\epsilon = \frac{H}{L}$. Έτσι μπορούμε να ξαναγράψουμε τις (1.0.1)-(1.0.3) σαν ένα αδιάστατο σύστημα Navier-Stokes,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.0.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \quad (1.0.9)$$

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = -g + \epsilon^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (1.0.10)$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\nu = \mu/(UL)$ είναι η αδιάστατη μορφή του συντελεστή ιξώδους και πως σε όλες τις αδιάστατες εξισώσεις το g δεν δηλώνει την επιτάχυνση της βαρύτητας αλλά τον αριθμό Froude, $F_r = \frac{g}{LU}$. Η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη της (1.0.4) για το βυθό είναι

$$w(t, x, 0) = 0, \quad \frac{\nu}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial z}(t, x, 0) = \gamma u(t, x, 0), \quad (1.0.11)$$

όπου $\gamma = \kappa/U$ η αδιάστατη μορφή του συντελεστή τριβής. Οι συνοριακές συνθήκες για την ελεύθερη επιφάνεια (1.0.5)-(1.0.6) γίνονται

$$\frac{\nu}{\epsilon^2} \frac{\partial u}{\partial z} + p \frac{\partial h}{\partial x} - 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \nu \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \text{στο } z = h(t, x), \quad (1.0.12)$$

$$p - 2\nu \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} + \epsilon^2 \nu \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \text{στο } z = h(t, x). \quad (1.0.13)$$

Η κινηματική συνθήκη (1.0.7) παραμένει ως έχει.

1.1 Υδροστατικό μοντέλο με ιξώδες

Απλοποιούμε το σύστημα (1.0.1)-(1.0.3) διατηρώντας τους όρους μηδενικής και πρώτης τάξης ως προς ϵ και παίρνουμε το υδροστατικό μοντέλο με ιξώδες,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g + \epsilon^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad (1.1.3)$$

με

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq z \leq h(t, x).$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι ίδιες με αυτές του αδιάστατου συστήματος Navier-Stokes. Ο λόγος για τον οποίο κρατήσαμε τον όρο δεύτερης τάξης στο δεξί μέλος, καθώς και στην συνοριακή συνθήκη για την ελεύθερη επιφάνεια, είναι διότι είναι απαραίτητος για την απώλεια ενέργειας. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα και κόστος αυτού του μοντέλου παραμένουν όμοια με των εξισώσεων Navier-Stokes. Ένας τρόπος να απλοποιήσουμε παραπάνω το μοντέλο είναι αλλάζοντας κλίμακα στους συντελεστές

ιξώδους και τριβής, πράγμα που φαίνεται να συμφωνεί με τη φυσική σκοπιά. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να εφαρμόσουμε αυτή την αλλαγή κλίμακας ([5]). Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την

$$\nu = \epsilon\nu_0, \quad \gamma = \epsilon\gamma_0. \quad (1.1.4)$$

1.2 Το κλασσικό υδροστατικό μοντέλο

Θεωρούμε το σύστημα (1.0.8)-(1.0.10) και την μορφή (1.1.4) για τους όρους ιξώδους και τριβής. Κρατώντας μόνο τους όρους μηδενικής τάξης παίρνουμε το κλασσικό υδροστατικό μοντέλο,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\nu_0}{\epsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad (1.2.3)$$

όπου

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq z \leq h(t, x).$$

Αφού απλοποιήσουμε και τους όρους στις συνοριακές συνθήκες (1.0.11)-(1.0.13) έχουμε

$$w(t, x, 0) = 0, \quad (1.2.4)$$

$$\frac{\nu_0}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial z}(t, x, 0) = \gamma_0 u(t, x, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(t, x, h(t, x)) = 0, \quad (1.2.5)$$

$$p(t, x, h(t, x)) = 0. \quad (1.2.6)$$

Το σύστημα συνδέεται ακόμα με την κινητική συνοριακή συνθήκη (1.0.7). Λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες για την πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια (1.2.6), η (1.2.3) γίνεται

$$p(t, x, z) = g(h(t, x) - z). \quad (1.2.7)$$

1.3 Το πολυστρωματικό σύστημα Saint-Venant

Τώρα μπορούμε να παράγουμε το μοντέλο Saint-Venant . Αυτό θα επιτευχθεί αναλύοντας τα υδροστατικά μοντέλα που έχουν ήδη παρουσιαστεί. Στο [12] προσεγγίζονται τα μονοστρωματικά μοντέλα Saint-Venant και ορίζοντας την μέση ταχύτητα,

$$U(t, x) = \frac{1}{h(t, x)} \int_0^h u(t, x, z) dz,$$

πηγαίνουμε από το υδροστατικό μοντέλο (1.2.1)-(1.2.3) και το υδροστατικό μοντέλο με ιξώδες (1.1.1)-(1.1.3) μαζί με την (1.1.4) στο κλασσικό (μονοστρωματικό) σύστημα Saint-Venant με τριβή,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} = 0, \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial(hU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -\kappa U, \quad (1.3.2)$$

και το σύστημα Saint-Venant με ιξώδες και τριβή,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} = 0, \quad (1.3.3)$$

$$\frac{\partial(hU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -\frac{\kappa}{1 + \frac{\kappa h}{3\mu}} U + 4\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (1.3.4)$$

με ασυμπτωτική ανάλυση και προσέγγιση σε τάξεις $O(\epsilon)$ και $O(\epsilon^2)$ των εξισώσεων Navier-Stokes αντίστοιχα. Περισσότερες λεπτομέρειες πάνω σε αυτό το θέμα μπορούν να βρεθούν στα [12], [9].

Παρατηρούμε πως το κλασσικό σύστημα Saint-Venant (1.3.1)-(1.3.2) δίνει την ακριβή λύση του υδροστατικού συστήματος (1.2.1)-(1.2.3), όταν δεν υπάρχει τριβή στον βυθό ($\gamma_0 = 0$). Πράγματι, μπορούμε να επιλέξουμε,

$$u(t, x, z) = U(t, x), \quad w(t, x, z) = -z \frac{\partial U}{\partial x}, \quad p(t, x, z) = g(h(t, x) - z),$$

όπου $(h, U)(t, x)$ είναι η λύση του κλασσικού συστήματος Saint-Venant (1.3.1)-(1.3.2). Επίσης το ίδιο συμβαίνει και με τα μοντέλα με ιξώδες. Η λύση $(h_v, U_v)(t, x)$ του μοντέλου Saint-Venant με ιξώδες (1.3.3)-(1.3.4), χωρίς τριβή βυθού, δίνει λύση για το υδροστατικό σύστημα με ιξώδες (1.1.1)-(1.1.3) αν και μόνο αν ισχύει και η ισότητα

$$4 \frac{\partial}{\partial x} \left(h_v \frac{\partial U_v}{\partial x} \right) = 3 h_v \frac{\partial^2 U_v}{\partial x^2}.$$

Τώρα θα περάσουμε σε μία περισσότερο λεπτομερή προσέγγιση. Ειδικότερα επιθυμούμε να κρατήσουμε πληροφορία για το κάθετο μέρος της ταχύτητας, όπως είχαμε αναφερθεί στην αρχή.

1.4 Το πολυστρωματικό μοντέλο Saint-Venant

Θεωρούμε το υδροστατικό μοντέλο (1.2.1)-(1.2.3). Αρχικά διακριτοποιούμε τη μεταβλητή z . Έστω για κάποιο $M \in \mathbb{N}$ ορίζουμε M ενδιάμεσα ύψη νερού τέτοια ώστε

$$0 = H_0(t, x) \leq H_1(t, x) \leq H_2(t, x) \leq \dots \leq H_{M-1}(t, x) \leq H_M(t, x) = h(t, x).$$

Για κάθε στρώμα ορίζουμε το ύψος του ρευστού ως

$$h_\alpha = H_\alpha(t, x) - H_{\alpha-1}(t, x), \quad \forall \alpha = 1 \dots M,$$

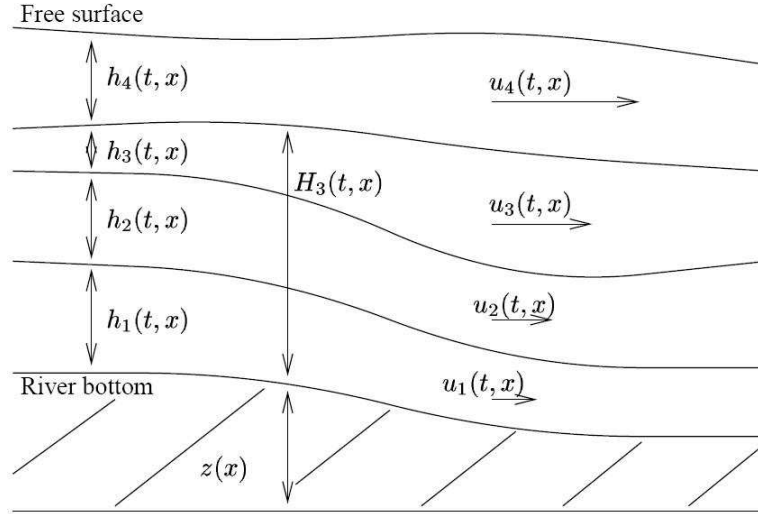
και την μέση ταχύτητα

$$U_\alpha(t, x) = \frac{1}{h_\alpha(t, x)} \int_{H_{\alpha-1}}^{H_\alpha} u(t, x, z) dz, \quad \forall \alpha = 1 \dots M.$$

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$H_\alpha(t, x) = \sum_{j=1}^{\alpha} h_j(t, x),$$

Στην εικόνα 1 φαίνεται γραφικά ένα παράδειγμα τεσσάρων στρωμάτων, τα ύψη και οι ταχύτητες όπως ορίστηκαν παραπάνω.



Εικόνα 1 : Πολυστρωματική προσέγγιση

Τότε το πολυστρωματικό σύστημα Saint-Venant που ορίζεται από

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1 U_1}{\partial x} = 0, \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial h_1 U_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) + g h_1 \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\beta=1}^M h_\beta = 2\mu \frac{U_2 - U_1}{h_2 + h_1} - \kappa U_1, \quad (1.4.2)$$

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial h_\alpha U_\alpha}{\partial x} = 0, \quad (1.4.3)$$

$$\frac{\partial h_\alpha U_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_\alpha U_\alpha^2) + g h_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\beta=1}^M h_\beta = 2\mu \frac{U_{\alpha+1} - U_\alpha}{h_{\alpha+1} + h_\alpha} - 2\mu \frac{U_\alpha - U_{\alpha-1}}{h_\alpha + h_{\alpha-1}}, \quad (1.4.4)$$

$$\gamma_{i\alpha} \quad \alpha = 2, \dots, M-1,$$

$$\frac{\partial h_M}{\partial t} + \frac{\partial h_M U_M}{\partial x} = 0, \quad (1.4.5)$$

$$\frac{\partial h_M U_M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_M U_M^2) + g h_M \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\beta=1}^M h_\beta = -2\mu \frac{U_M - U_{M-1}}{h_M + h_{M-1}}, \quad (1.4.6)$$

προέρχεται από ασυμπτωτική προσέγγιση τάξης $O(\epsilon)$ μαζί με την κάθετη διακριτοποίηση του υδροστατικού μοντέλου και κατ' επέκταση, των εξισώσεων Navier-Stokes.

Για την απόδειξη ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [3]. Το σύστημα (1.4.1)-(1.4.6) έχει δύο βασικά μειονεκτήματα. Αρχικά, σε αντίθεση με την μονοστρωματική περίπτωση, οι όροι πίεσης δεν είναι σε διατηρητική μορφή και έτσι ο ορισμός τους δεν είναι προφανής όταν παρουσιάζονται κρουστικά κύματα. Επιπλέον το σύστημα δεν είναι υπερβολικό. Για να ξεπεράσουμε αυτά τα προβλήματα κάνουμε τη διάσπαση

$$gh_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) = \frac{1}{2} gh_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) + \frac{1}{2} gh_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right),$$

και προσθαφαιρώντας τον όρο

$$\frac{1}{2} g \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) \frac{\partial h_\alpha}{\partial x},$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} gh_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) &= \\ &= \frac{1}{2} gh_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) + \frac{1}{2} g \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) \frac{\partial h_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} gh_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) - \frac{1}{2} g \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) \frac{\partial h_\alpha}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} \left(h_\alpha \sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) + \frac{1}{2} g \frac{\left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right)^2}{\left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right)^2} \left(h_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) - \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) \frac{\partial h_\alpha}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} \left(h_\alpha \sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) - \frac{g \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_\alpha}{\sum_{\beta=1}^M h_\beta} \right). \end{aligned}$$

Έτσι, οδηγούμαστε σε ένα μερικώς διαφορετικό σχήμα,

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial(h_1 U_1)}{\partial x} = 0, \quad (1.4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h_1 U_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_1 U_1^2 + g \frac{h_1 \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right)}{2} \right) = \\ = \frac{g \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_1}{\sum_{\beta=1}^M h_\beta} \right) + 2\mu \frac{U_2 - U_1}{h_2 + h_1} - \kappa U_1, \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(h_\alpha U_\alpha)}{\partial x} = 0, \quad (1.4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h_\alpha U_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_\alpha U_\alpha^2 + g \frac{h_\alpha \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right)}{2} \right) = \\ = \frac{g \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_\alpha}{\sum_{\beta=1}^M h_\beta} \right) + 2\mu \left(\frac{U_{\alpha+1} - U_\alpha}{h_{\alpha+1} + h_\alpha} - \frac{U_\alpha - U_{\alpha-1}}{h_\alpha + h_{\alpha-1}} \right), \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

$\gamma_{\alpha} \quad \alpha = 2, \dots, M-1,$

$$\frac{\partial h_M}{\partial t} + \frac{\partial(h_M U_M)}{\partial x} = 0, \quad (1.4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h_M U_M)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_M U_M^2 + g \frac{h_M \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right)}{2} \right) = \\ = \frac{g \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_M}{\sum_{\beta=1}^M h_\beta} \right) - 2\mu \frac{U_M - U_{M-1}}{h_M + h_{M-1}}. \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Το παραπάνω σχήμα διατηρεί τις θετικές τιμές του ύψους, καθώς και τις σταθερές καταστάσεις. Επίσης το ομογενές σύστημα είναι υπερβολικό και το άθροισμα του ύψους και της ορμής σε κάθε στρώμα είναι μιας πρώτης τάξης προσέγγιση του κλασσικού συστήματος Saint-Venant.

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί σαν ένα σύστημα νόμων διατήρησης με πηγαίους όρους,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{u}_\alpha) = \mathbf{S}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, M, \quad (1.4.13)$$

με

$$\mathbf{u}_\alpha = \begin{pmatrix} h_\alpha \\ q_\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}_\alpha) = \begin{pmatrix} q_\alpha \\ (q_\alpha^2/h_\alpha) + \frac{1}{2}gh_\alpha \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) \end{pmatrix},$$

όπου

$$q_\alpha = h_\alpha U_\alpha,$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g(\sum_{\beta=1}^M h_\beta)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_1}{\sum_{\beta=1}^M h_\beta} \right) + 2\mu \frac{(q_2/h_2)-(q_1/h_1)}{h_2+h_1} - \kappa(q_1/h_1) - g \left(\sum_{\beta=1}^M h_\beta \right) Z' \end{pmatrix},$$

για $\alpha = 2, \dots, M-1$,

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g(\sum_{\beta=1}^M h_\beta)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_\alpha}{\sum_{\beta=1}^M h_\beta} \right) + 2\mu \left(\frac{(q_{\alpha+1}/h_{\alpha+1})-(q_\alpha/h_\alpha)}{h_{\alpha+1}+h_\alpha} - \frac{(q_\alpha/h_\alpha)-(q_{\alpha-1}/h_{\alpha-1})}{h_\alpha+h_{\alpha-1}} \right) \end{pmatrix},$$

και

$$\mathbf{S}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g(\sum_{\beta=1}^M h_\beta)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_M}{\sum_{\beta=1}^M h_\beta} \right) - 2\mu \frac{(q_M/h_M)-(q_{M-1}/h_{M-1})}{h_M+h_{M-1}} \end{pmatrix}.$$

Όπου $Z = Z(x)$ είναι η εξίσωση που περιγράφει το βυθό. Αυτή είναι και η τελική μορφή του μοντέλου που θα πρέπει να επιλυθεί με τις μεθόδους που παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο. Τονίζουμε ότι οι διατηρητικές μεταβλητές είναι οι h_α και q_α .

Κεφάλαιο 2

Μέθοδοι επίλυσης και διακριτοποίηση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος (1.4.13). Θα επιλέξουμε χαλαρωτικά σχήματα, χρησιμοποιώντας πεπερασμένους όγκους. Ακολουθεί παρουσίαση των χαλαρωτικών μεθόδων και ύστερα η λεπτομερής χωρική και χρονική διακριτοποίηση του (1.4.13).

2.1 Χαλαρωτικά σχήματα

Για απλότητα, αρχικά θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για το βαθμωτό μονοδιάστατο νόμο διατήρησης,

$$\begin{aligned}u_t + f(u)_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Το χαλαρωτικό σχήμα που παρουσιάζεται και στο [13] είναι

$$\begin{aligned}u_t + v_x &= 0, \\v_t + c^2 u_x &= -\frac{1}{\epsilon}(v - f(u)),\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ομαλοποίηση του (2.1.1) με τον κυματικό τελεστή,

$$u_t + f(u)_x = -\epsilon(u_{tt} - c^2 u_{xx}) + O(\epsilon^2). \quad (2.1.3)$$

Εάν ισχύει η συνθήκη $|f'(u)| < c$ τότε με μια ασυμπτωτική ανάλυση βλέπουμε πως το χαλαρωτικό σχήμα (2.1.2) δίνει το (2.1.1) όταν $\epsilon \rightarrow 0$. Στην περίπτωση νόμων διατήρησης με πηγαίους όρους,

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= s(u), & x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

το χαλαρωτικό σχήμα ([7]) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} u_t + v_x &= s(u), \\ v_t + c^2 u_x &= -\frac{1}{\epsilon}(v - f(u)), \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

που δίνει την ομαλοποίηση του (2.1.4),

$$u_t + f(u)_x = s(u) + \epsilon s(u)_t - \epsilon(u_{tt} - c^2 u_{xx}) + O(\epsilon^2). \quad (2.1.6)$$

Δεν περιμένουμε ότι το (2.1.5) θα διατηρεί τις σταθερές καταστάσεις του (2.1.4), εκτός και αν υπάρχουν ειδικές δομές που να το επιτρέπουν, όπως θα δούμε παρακάτω. Οι τάξεις σφαλμάτων είναι $O(\epsilon)$ γι' αυτό και θα επιλέξουμε αρκετά μικρό ϵ .

Ακολουθώντας αυτή την ιδέα, εφαρμόζουμε στον νόμο διατήρησης (1.4.13) το χαλαρωτικό σχήμα και παίρνουμε ένα μεγαλύτερο σύστημα,

$$h_{\alpha,t} + v_{\alpha,x} = S_{\alpha,1}(h_\alpha, q_\alpha), \quad (2.1.7)$$

$$q_{\alpha,t} + w_{\alpha,x} = S_{\alpha,2}(h_\alpha, q_\alpha), \quad (2.1.8)$$

$$v_{\alpha,t} + c_{\alpha,1}^2 h_{\alpha,x} = -\frac{1}{\epsilon}(v_\alpha - F_1(h_\alpha, q_\alpha)), \quad (2.1.9)$$

$$w_{\alpha,t} + c_{\alpha,2}^2 q_{\alpha,x} = -\frac{1}{\epsilon}(w_\alpha - F_2(h_\alpha, q_\alpha)), \quad (2.1.10)$$

και θέτοντας

$$\mathbf{u}_\alpha = \begin{bmatrix} h_\alpha \\ q_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_\alpha = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ w_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\alpha = \begin{bmatrix} c_{\alpha,1} & 0 \\ 0 & c_{\alpha,2} \end{bmatrix}, \quad (2.1.11)$$

το σύστημα (2.1.7)-(2.1.10) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\alpha,t} + \mathbf{v}_{\alpha,x} &= \mathbf{S}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha), \\ \mathbf{v}_{\alpha,t} + \mathbf{C}_\alpha^2 \mathbf{u}_{\alpha,x} &= \frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{F}(\mathbf{u}_\alpha)), \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

όπου τώρα $\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{C}_\alpha \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως ο \mathbf{C} έχει θετικές ιδιοτιμές $c_j > 0$ για $j = 1, 2$ και έτσι το (2.1.12) μπορεί να ξαναγραφεί σαν

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_\alpha \\ \mathbf{v}_\alpha \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\alpha \\ \mathbf{v}_\alpha \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) \\ -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{F}(\mathbf{u}_\alpha)) \end{bmatrix}. \quad (2.1.13)$$

Ο νόμος διατήρησης έχει τώρα αντικατασταθεί από ένα γραμμικό υπερβολικό σύστημα, με πηγαίο όρο για τον οποίο $\mathbf{v}_\alpha \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{u}_\alpha)$ καθώς $\epsilon \rightarrow 0$. Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να δειχθεί πως λύσεις του (2.1.13) προσεγγίζουν λύσεις του αρχικού νόμου διατήρησης ([8], [15], [16], [18], [20]).

Για συστήματα η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται προκειμένου να έχουμε σύγκλιση είναι για κάθε ιδιοτιμή λ_α της $\mathbf{F}'(\mathbf{u}_\alpha)$

$$|\lambda_\alpha| \leq c_{\alpha,max}, \quad (2.1.14)$$

όπου $c_{\alpha,max} = \max_j c_{\alpha,j}$, $j = 1, 2$. Έτσι εγγυώμαστε πως οι χαρακτηριστικές ταχύτητες του (2.1.13) είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλες, όσο αυτές του αρχικού προβλήματος. Επιλέγουμε λοιπόν κατάλληλα τις σταθερές $c_{\alpha,1}$, $c_{\alpha,2}$ ώστε να ισχύει η (2.1.14).

Για τη υλοποίηση της μεθόδου θα χρησιμοποιηθούν σχήματα πεπερασμένων όγκων. Θεωρούμε μια ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος στο οποίο μελετάμε το πρόβλημα κάθε φορά, έστω $[a, b]$, με $N-1$ εσωτερικά σημεία. Έτσι ορίζουμε $\widetilde{\Delta x} = (b-a)/N =$

$x_{i+1} - x_i$ με $x_i = a + i\widetilde{\Delta x}$, $i = 0, \dots, N$. Προφανώς $x_0 = a$, $x_N = b$. Η διαμέριση στο χρόνο, καθώς και το χρονικό βήμα $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ θα οριστούν παρακάτω.

2.2 Πεπερασμένοι όγκοι

Για το σχήμα πεπερασμένων όγκων, εφαρμόζουμε στον διαμερισμό που παρουσιάστηκε παραπάνω ένα νέο, στον οποίο κόμβοι είναι τα μέσα των κελιών του προηγούμενου διαμερισμού. Έτσι ορίζουμε:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 0, \dots, N - 1,$$

και $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. Προφανώς $\Delta x = \widetilde{\Delta x}$ όταν ο διαμερισμός είναι ομοιόμορφος.

Η προσεγγιστική λύση στον κόμβο x_i και στο χρόνο t^n ορίζεται ως $\mathbf{u}_{\alpha,i}^n$ και είναι ο προσεγγιστικός μέσος όρος της \mathbf{u} στο κελί $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ και στο στρώμα α . Η προσεγγιστική σημειακή τιμή της \mathbf{u} στον κόμβο $x_{i+\frac{1}{2}}$, στον χρόνο t^n και στο στρώμα α ορίζεται ως $\mathbf{u}_{\alpha,i+\frac{1}{2}}^n$. Σκοπός είναι δοσμένων των σημειακών τιμών $\mathbf{u}_{\alpha,i}^n$ να πάρουμε τις καινούριες $\mathbf{u}_{\alpha,i}^{n+1}$, $i = 0, \dots, N$.

Για τον υπολογισμό των αρχικών δεδομένων από τις αρχικές συνθήκες χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας ολοκλήρωσης του Gauss 5 σημείων,

$$\int_0^1 g(s) ds \approx \sum_{j=1}^5 w_j g(\xi_j), \quad (2.2.1)$$

με

$$\xi_1 = 0.046910077030668, \quad w_1 = 0.118463442528095, \quad (2.2.2)$$

$$\xi_2 = 0.230765344947159, \quad w_2 = 0.239314335249683, \quad (2.2.3)$$

$$\xi_3 = 0.500000000000000, \quad w_3 = 0.284444444444444, \quad (2.2.4)$$

$$\xi_4 = 0.769234655052841, \quad w_4 = 0.239314335249683, \quad (2.2.5)$$

$$\xi_5 = 0.953089922969332, \quad w_5 = 0.118463442528095, \quad (2.2.6)$$

και χρησιμοποιώντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών.

2.3 Το ημιδιακριτό σχήμα

Ορίζουμε το ημιδιακριτό σχήμα του (2.1.12):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_{\alpha,i} + \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{v}_{\alpha,i+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{\alpha,i-\frac{1}{2}}) = \mathbf{S}_{\alpha}(\mathbf{u}_{\alpha,i}), \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_{\alpha,i} + \frac{1}{\Delta x} \mathbf{C}_{\alpha}^2 (\mathbf{u}_{\alpha,i+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{\alpha,i-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{\epsilon} (\mathbf{v}_{\alpha,i} - \mathbf{F}(\mathbf{u}_{\alpha,i})), \quad (2.3.2)$$

του οποίου το γραμμικό υπερβολικό κομμάτι έχει χαρακτηριστικές ταχύτητες:

$$\mathbf{v}_{\alpha} \pm \mathbf{C}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$$

Το πρώτης τάξης upwind σχήμα υπολογίζει τις τιμές $u_{i\pm 1/2}$ ανάλογα με την κατεύθυνση της ροής, δηλαδή με το πρόσημο των χαρακτηριστικών ταχυτήτων του ρευστού στον κόμβο x_i . Στο σχήμα MUSCL, παρεμβάλλουμε στις σταθερές τιμές της λύσης ένα πρώτης τάξης κατά τμήματα γραμμικό πολυώνυμο, ώστε να πάρουμε μία τάξη ακρίβειας περισσότερη στο χώρο. Ο χωρισμός των ροών γίνεται με τον ίδιο τρόπο με αυτόν του upwind λαμβάνοντας όμως υπόψη και τους νέους όρους από την παρεμβολή. Επίσης με την επιλογή κατάλληλων περιοριστικών συναρτήσεων υπολογίζουμε την τιμή της παραγώγου κοντά σε σημεία όπου αυτή θεωρητικά δεν ορίζεται, [4], [7], [10].

2.3.1 Το upwind σχήμα

Με βάση τα παραπάνω, η πρώτης τάξης upwind προσέγγιση των $\mathbf{v}_{\alpha} \pm \mathbf{C}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$ είναι:

$$(\mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{C}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha})_{i+\frac{1}{2}} = (\mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{C}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha})_i, \quad (2.3.3)$$

$$(\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{C}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha})_{i+\frac{1}{2}} = (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{C}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha})_{i+1}. \quad (2.3.4)$$

Λύνοντας ως προς $u_{\alpha,i+1/2}$ και $v_{\alpha,i+1/2}$ τις (2.3.3) και (2.3.4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\alpha,i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{\alpha,i} + \mathbf{u}_{\alpha,i+1}) - \frac{1}{2}\mathbf{C}_\alpha^{-1}(\mathbf{v}_{\alpha,i+1} - \mathbf{v}_{\alpha,i}), \\ \mathbf{v}_{\alpha,i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{\alpha,i} + \mathbf{v}_{\alpha,i+1}) - \frac{1}{2}\mathbf{C}_\alpha(\mathbf{u}_{\alpha,i+1} - \mathbf{u}_{\alpha,i}).\end{aligned}$$

Έτσι αντικαθιστώντας τις τιμές των $\mathbf{u}_{\alpha,i\pm\frac{1}{2}}$ και $\mathbf{v}_{\alpha,i\pm\frac{1}{2}}$ στις (2.3.1) και (2.3.2) κατασκευάζουμε την πρώτης τάξης upwind ημιδιακριτή προσέγγιση του χαλαρωτικού μας σχήματος:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_{\alpha,i} + \frac{1}{2\Delta x}(\mathbf{v}_{\alpha,i+1} - \mathbf{v}_{\alpha,i-1}) - \frac{1}{2\Delta x}\mathbf{C}_\alpha(\mathbf{u}_{\alpha,i+1} - 2\mathbf{u}_{\alpha,i} + \mathbf{u}_{\alpha,i-1}) &= \mathbf{S}_\alpha(\mathbf{u}_{\alpha,i}), \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_{\alpha,i} + \frac{1}{2\Delta x}\mathbf{C}_\alpha^2(\mathbf{u}_{\alpha,i+1} - \mathbf{u}_{\alpha,i-1}) - \frac{1}{2\Delta x}\mathbf{C}_\alpha(\mathbf{v}_{\alpha,i+1} - 2\mathbf{v}_{\alpha,i} + \mathbf{v}_{\alpha,i-1}) &= -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v}_{\alpha,i} - \mathbf{F}(\mathbf{u}_{\alpha,i})).\end{aligned}$$

2.3.2 Το σχήμα MUSCL

Για να κατασκευάσουμε ένα σχήμα δεύτερης τάξης ακρίβειας στο χώρο, παρεμβάλλουμε στις σταθερές προσεγγίσεις ένα κατά τμήματα γραμμικό πολυώνυμο το οποίο όταν εφαρμόζεται στην k -οστή συνιστώσα του $\mathbf{v}_\alpha \pm \mathbf{C}_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ δίνει αντίστοιχα:

$$(v_\alpha + c_{\alpha,k}u_\alpha)_{i+\frac{1}{2}} = (v_\alpha + c_{\alpha,k}u_\alpha)_i + \frac{1}{2}\Delta x s_{\alpha,i}^+, \quad (2.3.5)$$

$$(v_\alpha - c_{\alpha,k}u_\alpha)_{i+\frac{1}{2}} = (v_\alpha - c_{\alpha,k}u_\alpha)_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta x s_{\alpha,i+1}^-, \quad (2.3.6)$$

όπου u_α , v_α είναι οι k -οστές συνιστώσες των \mathbf{u}_α και \mathbf{v}_α αντίστοιχα. Οι κλίσεις s_α^\pm στο i -οστό κελί ορίζονται από:

$$s_{\alpha,i}^\pm = \frac{1}{\Delta x}(v_{\alpha,i+1} \pm c_{\alpha,k}u_{\alpha,i+1} - v_{\alpha,i} \mp c_{\alpha,k}u_{\alpha,i})\phi(\theta_{\alpha,i}^\pm),$$

με

$$\theta_{\alpha,i}^\pm = \frac{v_{\alpha,i} \pm c_{\alpha,k}u_{\alpha,i} - v_{\alpha,i-1} \mp c_{\alpha,k}u_{\alpha,i-1}}{v_{\alpha,i+1} \pm c_{\alpha,k}u_{\alpha,i+1} - v_{\alpha,i} \mp c_{\alpha,k}u_{\alpha,i}},$$

και ϕ μια περιοριστική συνάρτηση (limiter function, [17]) η οποία ικανοποιεί:

$$0 \leq \phi(\theta) \leq \min\text{mod}(2, 2\theta).$$

Υπάρχουν διάφορες τέτοιες συναρτήσεις περιορισμού, όπως:

- MinMod (MM) :

$$\phi(\theta) = \max(0, \min(1, \theta)),$$

- VanLeer (VL) :

$$\phi(\theta) = \frac{|\theta| + \theta}{1 + |\theta|},$$

- Monotonized Central (MC) :

$$\phi(\theta) = \max(0, \min((1 + \theta)/2, 2, 2\theta)),$$

με τους δύο τελευταίους να συμπεριφέρονται καλύτερα στα διαστήματα στα οποία παρουσιάζονται ασυνέχειες, αφού δεν μειώνουν την κλίση τόσο συχνά όσο ο MM.

Όπως και πριν λύνοντας τις (2.3.5) και (2.3.6) παίρνουμε:

$$u_{\alpha, i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{\alpha, i} + u_{\alpha, i+1}) - \frac{1}{2c_{\alpha, k}}(v_{\alpha, i+1} - v_{\alpha, i}) + \frac{\Delta x}{4c_{\alpha, k}}(s_{\alpha, i}^+ + s_{\alpha, i+1}^-),$$

$$v_{\alpha, i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_{\alpha, i} + v_{\alpha, i+1}) - \frac{c_{\alpha, k}}{2}(u_{\alpha, i+1} - u_{\alpha, i}) + \frac{\Delta x}{4}(s_{\alpha, i}^+ - s_{\alpha, i+1}^-),$$

και συνεπώς, αντικαθιστώντας στις (2.3.1) και (2.3.2) το ημιδιακριτό σχήμα δεύτερης τάξης στο χώρο είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha, i} + \frac{1}{2\Delta x}(v_{\alpha, i+1} - v_{\alpha, i-1}) - \frac{c_{\alpha, k}}{2\Delta x}(u_{\alpha, i+1} - 2u_{\alpha, i} + u_{\alpha, i-1}) -$$

$$-\frac{1}{4}(s_{\alpha, i+1}^- - s_{\alpha, i}^- + s_{\alpha, i-1}^+ - s_{\alpha, i}^+) = S_{\alpha, k}(u_{\alpha, i}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{\alpha, i} + \frac{c_{\alpha, k}^2}{2\Delta x}(u_{\alpha, i+1} - u_{\alpha, i-1}) - \frac{c_{\alpha, k}}{2\Delta x}(v_{\alpha, i+1} - 2v_{\alpha, i} + v_{\alpha, i-1}) +$$

$$+\frac{c_{\alpha, k}}{4}(s_{\alpha, i+1}^- - s_{\alpha, i}^- - s_{\alpha, i-1}^+ + s_{\alpha, i}^+) = -\frac{1}{\epsilon}(v_{\alpha, i} - F_k(u_{\alpha, i})),$$

με $S_{\alpha,k}$ και F_k να είναι οι k -οστές συνιστώσες των S και F αντίστοιχα. Παρατηρούμε πως στην περίπτωση στην οποία $s^\pm = 0$ ή $\phi = 0$, το σχήμα MUSCL είναι ακριβώς το upwind σχήμα πρώτης τάξης.

2.3.3 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Όπως είπαμε προηγουμένως, οι αρχικές προσεγγίσεις υπολογίζονται μέσω του κανόνα ολοκλήρωσης του Gauss (2.2.1). Ορίζουμε:

$$h_{\alpha,i}^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} h_{0,\alpha}(x) dx,$$

και

$$U_{\alpha,i}^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U_{0,\alpha}(x) dx.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $x = s \Delta x + x_{i-\frac{1}{2}}$, η οποία μεταφέρει το διάστημα $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ στο $[0,1]$ και $dx = \Delta x ds$ παίρνουμε:

$$h_{\alpha,i}^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} h_{0,\alpha}(x) dx = \int_0^1 h_{0,\alpha}(\Delta x s + x_{i-\frac{1}{2}}) ds \approx \sum_{j=1}^5 w_j h_{0,\alpha}(\Delta x \xi_j + x_{i-\frac{1}{2}}).$$

Όμοια:

$$U_{\alpha,i}^0 \approx \sum_{j=1}^5 w_j U_{0,\alpha}(\Delta x \xi_j + x_{i-\frac{1}{2}}),$$

με w_j και ξ_j , $j = 1, \dots, 5$ όπως ορίστηκαν στις (2.2.2)-(2.2.6).

Έτσι αρχικοποιούμε και τις q_α , v_α , w_α ως:

$$q_{\alpha,i}^0 = h_{\alpha,i}^0 U_{\alpha,i}^0,$$

$$v_{\alpha,i}^0 = q_{\alpha,i}^0,$$

$$w_{\alpha,i}^0 = \frac{(q_{\alpha,i}^0)^2}{h_{\alpha,i}^0} + g \frac{h_{\alpha,i}^0 (\sum_{j=1}^M h_{j,i}^0)}{2},$$

για $i = 0, \dots, N$.

Οι συνοριακές συνθήκες για τα v_α , w_α είναι $\mathbf{v}_{\alpha,bound} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{\alpha,bound})$ όπου $\mathbf{u}_{\alpha,bound}$ είναι οι συνοριακές συνθήκες που υποθέτουμε για το \mathbf{u} . Δηλαδή:

$$v_{\alpha,bound} = q_{\alpha,bound},$$

$$w_{\alpha,bound} = \frac{(q_{\alpha,bound})^2}{h_{\alpha,bound}} + g \frac{h_{\alpha,bound} (\sum_{j=1}^M h_{j,bound})}{2}.$$

2.4 Το πλήρως διακριτό σχήμα

Για τη διακριτοποίηση στο χρόνο, θα χρησιμοποιηθεί μια δεύτερης τάξης Runge Kutta μέθοδος ([14]), η οποία διαχειρίζεται τους πηγαίους και άκαμπτους όρους με δύο έμμεσα βήματα, ενώ με δύο άμεσα βήματα τους όρους ροών. Γνωρίζοντας τις τιμές \mathbf{u}^n , \mathbf{v}^n , ο αλγόριθμος έχει ως εξής: για κάθε στρώμα α και κόμβο i

$$\mathbf{u}^{n,1} = \mathbf{u}^n, \tag{2.4.1}$$

$$\mathbf{v}^{n,1} = \mathbf{v}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\mathbf{v}^{n,1} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,1})), \tag{2.4.2}$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{n,1} - \Delta t D_+ \mathbf{v}^{n,1} + \Delta t \mathbf{S}(\mathbf{u}^{n,1}), \tag{2.4.3}$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{n,1} - \Delta t \mathbf{C}^2 D_+ \mathbf{u}^{n,1}, \tag{2.4.4}$$

$$\mathbf{u}^{n,2} = \mathbf{u}^{(1)}, \tag{2.4.5}$$

$$\mathbf{v}^{n,2} = \mathbf{v}^{(1)} - \frac{\Delta t}{\epsilon} (\mathbf{v}^{n,2} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,2})) - \frac{2\Delta t}{\epsilon} (\mathbf{v}^{n,1} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,1})), \tag{2.4.6}$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{n,2} - \Delta t D_+ \mathbf{v}^{n,2} + \Delta t \mathbf{S}(\mathbf{u}^{n,2}), \tag{2.4.7}$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{n,2} - \Delta t \mathbf{C}^2 D_+ \mathbf{u}^{n,2}, \tag{2.4.8}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{(2)}), \tag{2.4.9}$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{(2)}), \tag{2.4.10}$$

όπου

$$D_+ \mathbf{w}_i = \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}}).$$

Στις (2.4.2) και (2.4.6), οι τιμές $\mathbf{v}^{n,1}$ και $\mathbf{v}^{n,2}$ υπολογίζονται ακριβώς,

$$\mathbf{v}^{n,1} = \frac{\mathbf{v}^n - \frac{\Delta t}{\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,1})}{(1 - \frac{\Delta t}{\epsilon})},$$

$$\mathbf{v}^{n,2} = \frac{\mathbf{v}^{(1)} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,2}) - \frac{2\Delta t}{\epsilon} (\mathbf{v}^{n,1} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n,1}))}{(1 + \frac{\Delta t}{\epsilon})},$$

Για λόγους ευστάθειας, η επιλογή του Δt επιβάλλεται να είναι για το upwind,

$$c_{max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

και για το MUSCL,

$$c_{max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2},$$

όπου

$$c_{max} = \max\left(\max_{1 \leq \alpha \leq M} c_{\alpha,1}, \max_{1 \leq \alpha \leq M} c_{\alpha,2}\right),$$

Έτσι οι επιλογές είναι για το upwind,

$$\Delta t = CFL c_{max} \Delta x, \quad 0 < CFL \leq 1,$$

και για το MUSCL,

$$\Delta t = \frac{1}{2} CFL c_{max} \Delta x, \quad 0 < CFL \leq 1,$$

Ο υπολογισμός των νέων ταχυτήτων $U_{\alpha,i}^{n+1}$, $i = 0, \dots, N$ γίνεται με την επίλυση του $M \times M$ τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος,

$$\begin{bmatrix} a_{1,i} & b_{1,i} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{2,i} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{M-1,i} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{M,i} & a_{M,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,i}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{M,i}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1,i}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{M,i}^{n+1} \end{bmatrix},$$

όπου

$$a_{1,i} = h_{1,i}^{n+1} + \frac{2\mu\Delta t^n}{h_{1,i}^{n+1} + h_{2,i}^{n+1}} + \kappa\Delta t^n,$$

$$a_{\alpha,i} = h_{\alpha,i}^{n+1} + 2\mu\Delta t^n \left(\frac{1}{h_{\alpha,i}^{n+1} + h_{\alpha+1,i}^{n+1}} + \frac{1}{h_{\alpha,i}^{n+1} + h_{\alpha-1,i}^{n+1}} \right), \quad \alpha = 2, \dots, M-1,$$

$$a_{M,i} = h_{M,i}^{n+1} + \frac{2\mu\Delta t^n}{h_{M,i}^{n+1} + h_{M-1,i}^{n+1}},$$

$$b_{\alpha,i} = -\frac{2\mu\Delta t^n}{h_{\alpha,i}^{n+1} + h_{\alpha+1,i}^{n+1}}, \quad \alpha = 1, \dots, M-1,$$

$$c_{\alpha,i} = -\frac{2\mu\Delta t^n}{h_{\alpha,i}^{n+1} + h_{\alpha-1,i}^{n+1}}, \quad \alpha = 2, \dots, M,$$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα ελέγξουμε τις μεθόδους, ως προς την αποτελεσματικότητά τους σε μία σειρά προβλημάτων αναφοράς (benchmark problems).

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικά αποτελέσματα

Θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των αριθμητικών σχημάτων για διάφορους αριθμούς στρωμάτων, συμπεριλαμβάνοντας και την μονοστρωματική περίπτωση. Τα προβλήματα αυτά είναι κλασσικές εφαρμογές οι οποίες χρησιμοποιούνται για να διαπιστωθεί η εγγυρότητα και η αξιοπιστία του. Κύρια προβλήματα αναφοράς είναι η θραύση φράγματος (dam-break) και η λύση σταθερής κατάστασης (steady state solution ή lake at rest state). Για σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις ακριβείς λύσεις ελέγξτε τα [2], [11], [19], [1].

3.1 Σχήμα ενός στρώματος με επίπεδο βυθό

Αρχικά θα εξετάσουμε την κλασσική περίπτωση του μονοστρωματικού μοντέλου. Θα παρουσιάσουμε την συμπεριφορά του σχήματος σε επίπεδο βυθό, στις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω. Οι φυσικές παράμετροι του προβλήματος είναι $\kappa = 0$, $g = 9.8$, ενώ μ δεν χρησιμοποιείται σε αυτή την περίπτωση.

3.1.1 Περίπτωση θραύσης φράγματος (Dam-break flow)

Θεωρούμε το πρόβλημα θραύσης φράγματος σε ένα παραλληλόγραμμο κανάλι με επίπεδο βυθό, $Z=0$. Υπολογίζουμε τη λύση σε ένα κανάλι μήκους 2000 μέτρων (διάστημα $[0,2000]$) στο χρόνο 50 δευτερολέπτων από την στιγμή που σπάει το φράγμα και αρχικές συνθήκες:

$$u(x, 0) = 0,$$

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_1 & x \leq 0, \\ h_0 & x > 0, \end{cases}$$

με $h_1 > h_0$. Αυτό είναι το ομογενές πρόβλημα *Riemann*. Το φράγμα σπάει στο χρόνο $t = 0$ το οποίο δημιουργεί ένα χροστικό κύμα (*shock – wave*) το οποίο κινείται δεξιά, καθώς και ένα κύμα αραιώσης (*rarefaction – wave*) το οποίο κινείται προς τα αριστερά. Το ύψος h_1 διατηρείται σταθερό στα 10 μέτρα ενώ το h_0 διαφοροποιείται σε κάθε ένα από τα παρακάτω προβλήματα:

1. υποκρίσιμη ροή (*subcritical flow*) :

όταν ο λόγος h_0/h_1 είναι μεγαλύτερος από 0.5. Στο πείραμά μας παίρνουμε $h_0/h_1 = 0.5$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα γραφήματα 3.1 και 3.2.

2. μετακρίσιμη ροή (*transcritical flow*) :

Ο λόγος h_0/h_1 είναι μικρότερος από 0.5. Εδώ επιλέγουμε $h_0/h_1 = 0.05$. Δυσκολεύει η αναπαράσταση του χροστικού κύματος, ενώ το κύμα αραιώσης παραμένει *subcritical* (γραφήματα 3.3 και 3.4).

3. υπερκρίσιμη ροή (*supercritical flow*) :

για πολύ μικρές τιμές του h_0/h_1 . Στο πείραμα $h_0/h_1 = 0.005$. Και τα δύο κύματα είναι δύσκολο να αναπαραστούν ακριβώς (γραφήματα 3.5 και 3.6).

Οι τιμές των ϵ και CFL είναι $\epsilon = 10^{-4}$, $CFL = 0.5$, ενώ οι τιμές των c_1 , c_2 υπολογίζονται σε κάθε χρονικό βήμα όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Στα αποτελέσματα των γραφημάτων 3.1 και 3.2 φαίνεται πως το σχήμα *MUSCL* υπερέχει σημαντικά του σχήματος πρώτης τάξης, τόσο στο *shock* όσο και στο κύμα αραίωσης, στο οποίο παρατηρείται αρκετή παραπάνω διάχυση. Η ακρίβεια κοντά στην περιοχή της ασυνέχειας είναι πολύ μεγαλύτερη στο σχήμα *MUSCL*, τόσο με 100, όσο και με 200 σημεία διαμερισμού, με ελάχιστα από αυτά να βρίσκονται στην περιοχή του *shock*. Η διάχυση του *upwind* σχήματος διατηρείται και στα επόμενα (3.3, 3.4, 3.5, 3.6) γραφήματα, με το *MUSCL*, χρησιμοποιώντας τον *MC limiter*, όπως αναμενόταν, να έχει την καλύτερη προσέγγιση. Ειδικά στα *shock* της τελευταίας περίπτωσης, διακρίνεται καθαρά η αδυναμία του *upwind* να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις του προβλήματος. Αυτά είναι αρκετά ενθαρρυντικά αποτελέσματα, ειδικά χωρίς την επιλογή ενός πιο λεπτού διαμερισμού, καθώς αναμένεται υψηλή απόδοση του αλγορίθμου σε πιο απαιτητικά προβλήματα.

Figure 3.1 Dam break flow, subcritical case, 100 grid points, $c_1 = 5$, $c_2 = 12$

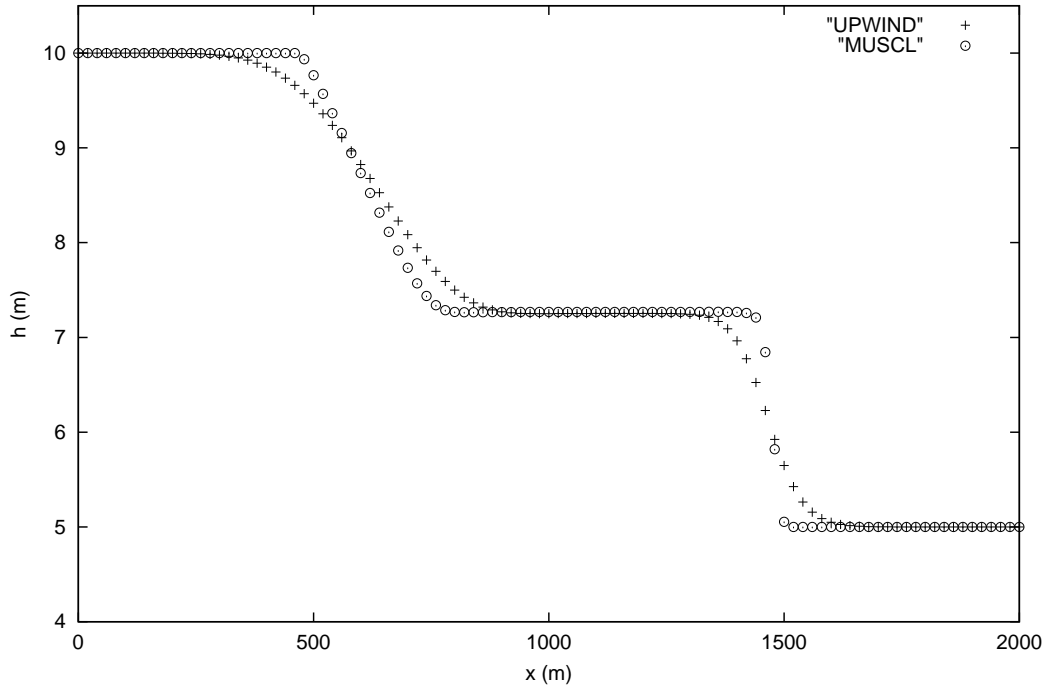


Figure 3.2 Dam break flow, subcritical case, 200 grid points, $c_1 = 5$, $c_2 = 12$

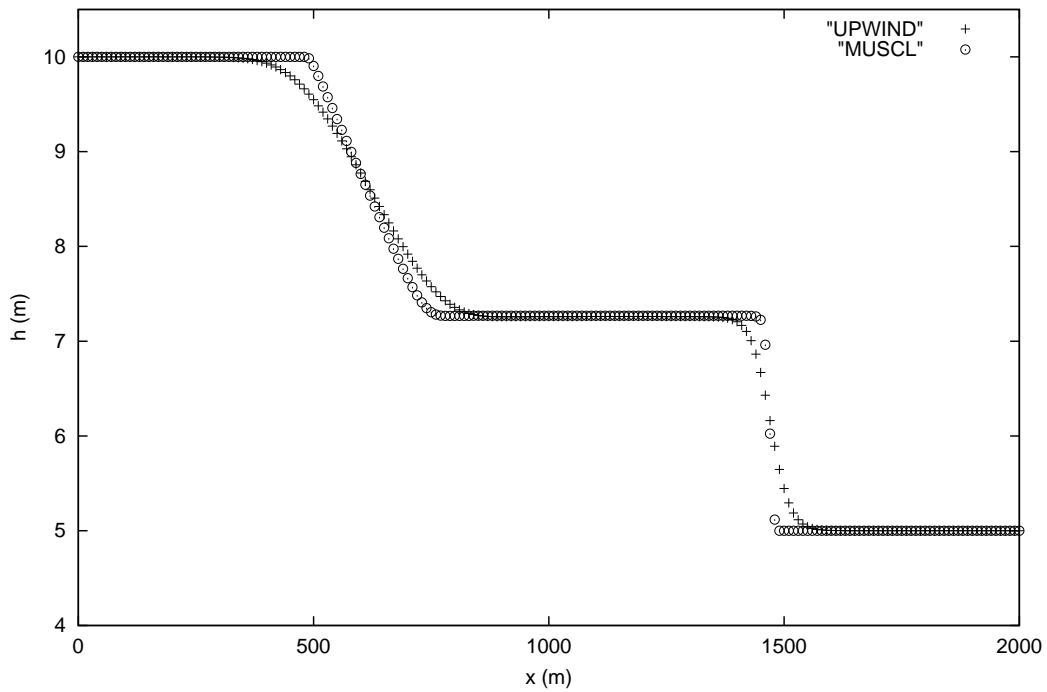


Figure 3.3 Dam break flow, transcritical case, 100 grid points, $c_1 = 6$, $c_2 = 16$

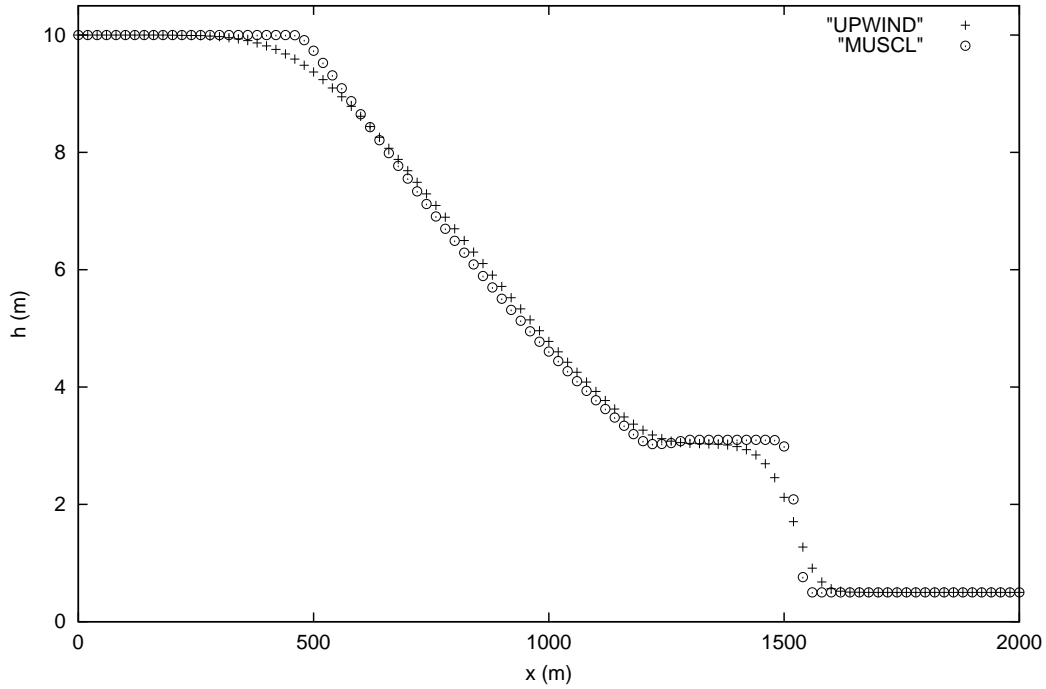


Figure 3.4 Dam break flow, transcritical case, 200 grid points, $c_1 = 6$, $c_2 = 16$

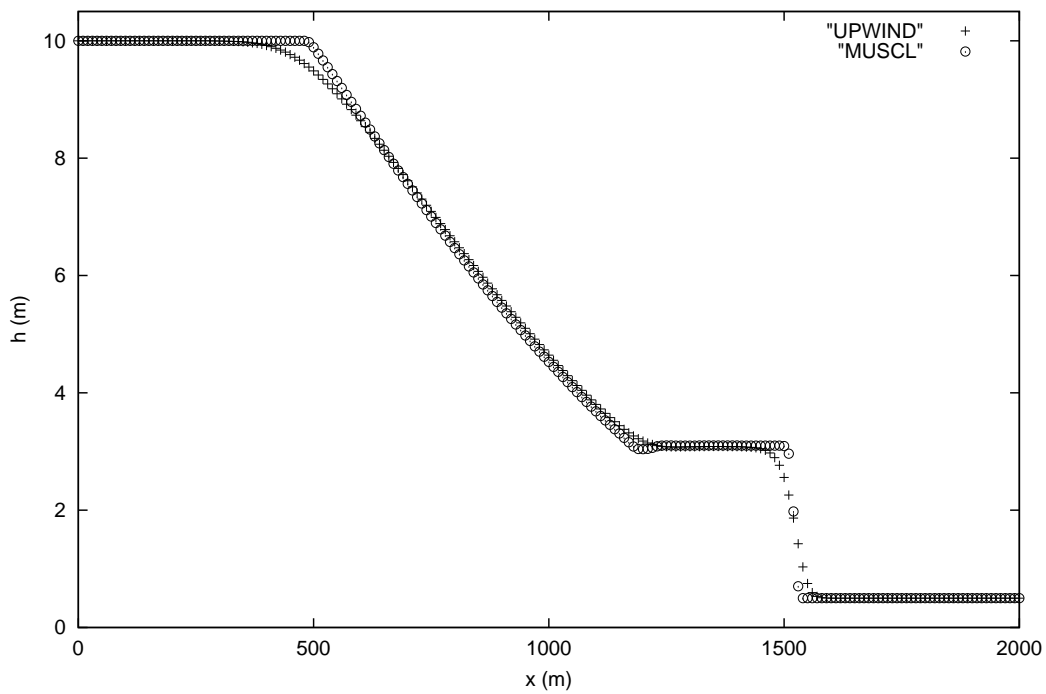


Figure 3.5 Dam break flow, supercritical case, 100 grid points, $c_1 = 12$, $c_2 = 18$

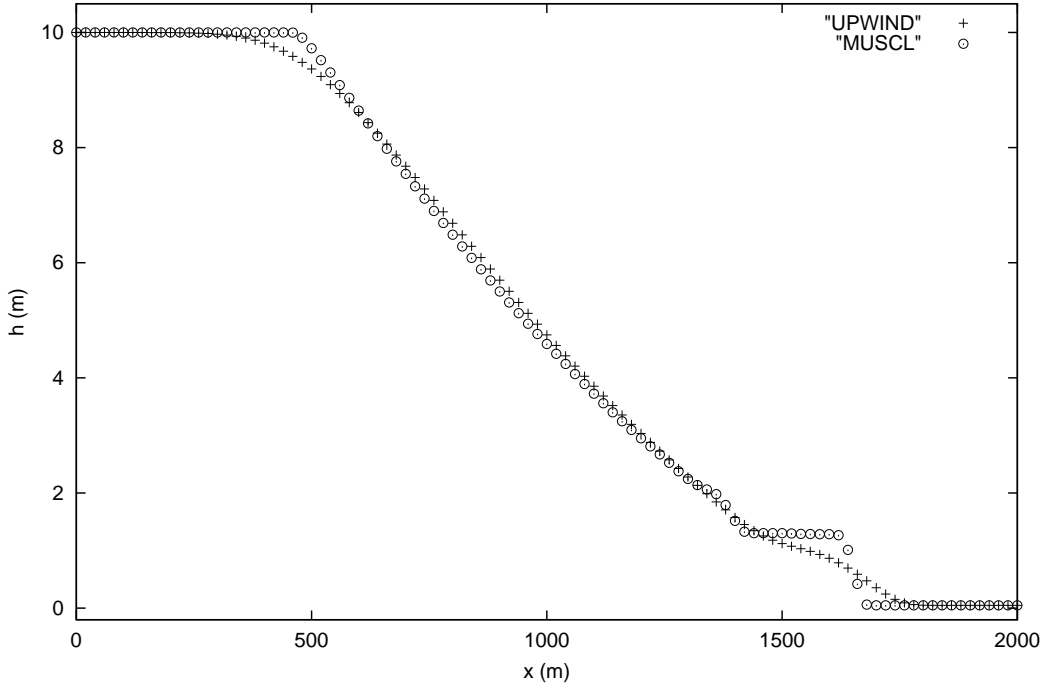
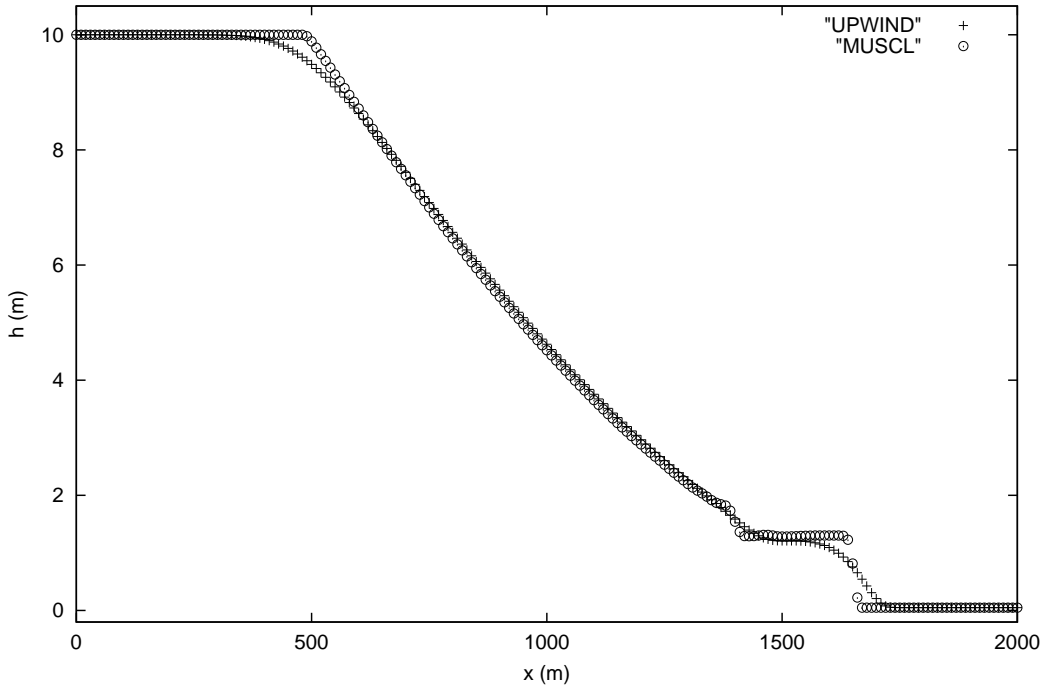


Figure 3.6 Dam break flow, supercritical case, 200 grid points, $c_1 = 12$, $c_2 = 18$



3.1.2 Λύση σταθερής κατάστασης (Lake at rest)

Θεωρούμε το κανάλι όπως και πριν με αρχικές συνθήκες τώρα:

$$u(x, 0) = 0, \quad h(x, 0) = H_0 = 10.$$

Σε αυτή την περίπτωση οι ακριβής λύση του προβλήματος είναι $h(t, x) = H_0$, $u(t, x) = 0$, $\forall t > 0$. Τα αποτελέσματα σε χρόνο 200 δευτερολέπτων ήταν, τόσο στο *upwind* όσο και στο *MUSCL (MC limiter)*, ιδανικά. Η κατάσταση παρέμεινε όπως αρχικά ήταν αναμενόμενο. Οι νόρμες σφαλμάτων για το ύψος και την ορμή μετρήθηκαν:

$$\begin{aligned} \|h_{upwind} - H_0\|_{L_1} &= 9.308E - 3, & \|q_{upwind}\|_{L_1} &= 9.225E - 2 \\ \|h_{MUSCL} - H_0\|_{L_1} &= 2.029E - 3, & \|q_{MUSCL}\|_{L_1} &= 1.969E - 2. \end{aligned}$$

Η περίπτωση επίπεδου βυθού δέν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρά μόνο σαν αρχική επαλήθευση της διατήρησης των σταθερών καταστάσεων. Περισσότερα σχόλια θα γίνουν στην περίπτωση ανομοιομορφης κατάστασης του βυθού.

Ακολουθούν τα γραφήματα του ύψους και της ορμής. Συγκεκριμένα οι εικόνες 3.7 και 3.8, αναφέρονται στο *upwind* σχήμα, ενώ οι 3.9, 3.10 στο σχήμα *MUSCL*.

Figure 3.7 Lake at rest, 100 grid points

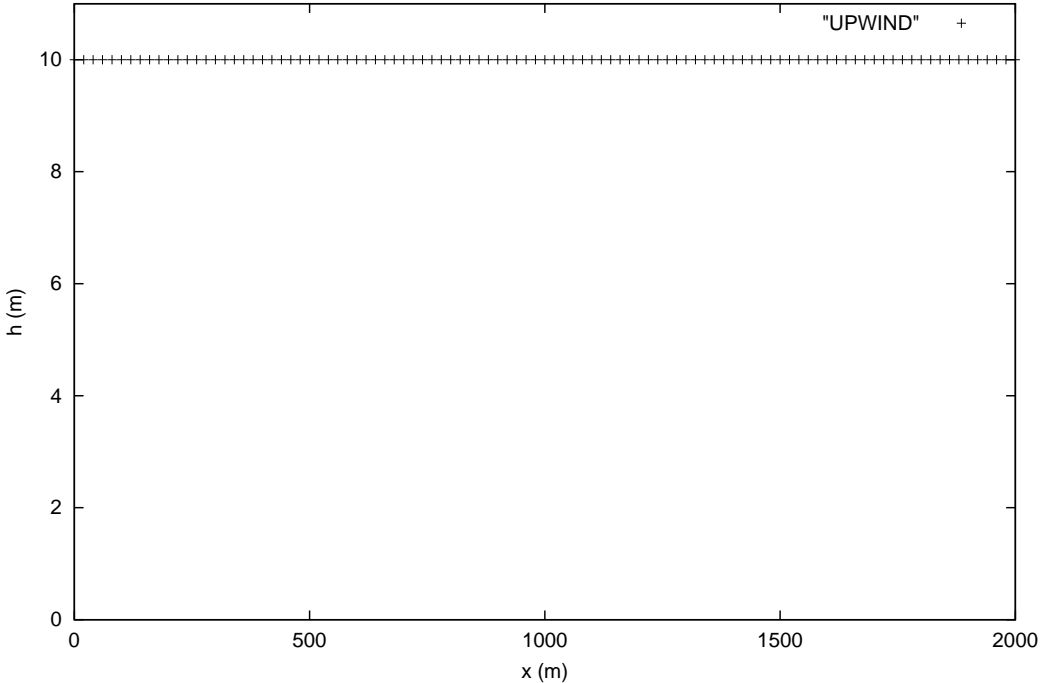


Figure 3.8 Lake at rest, 100 grid points

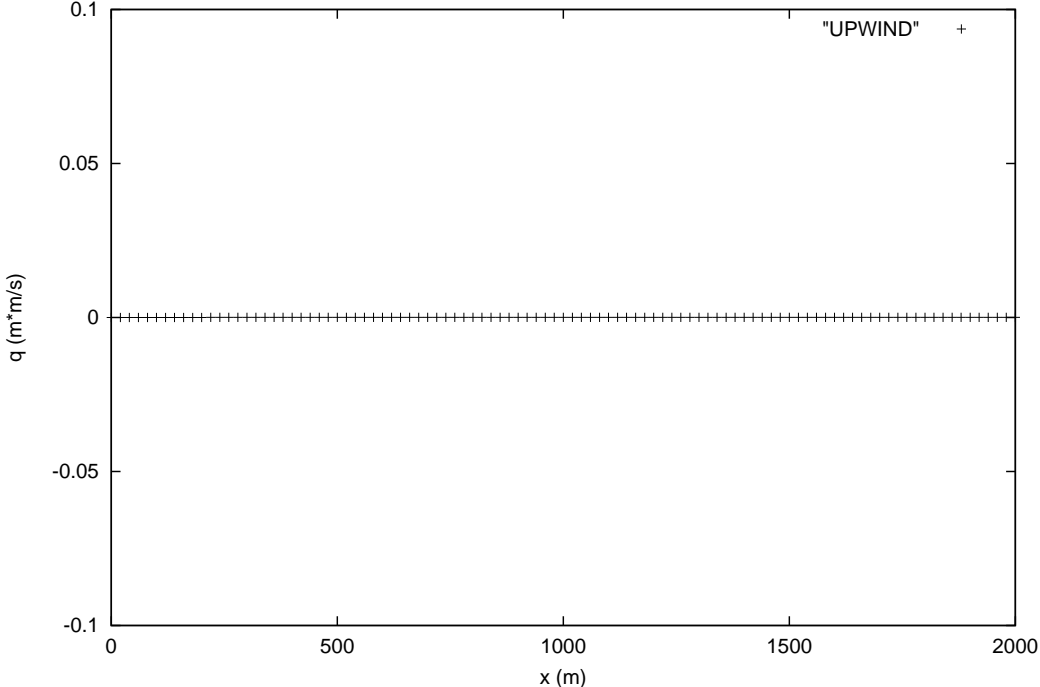


Figure 3.9 Lake at rest, 100 grid points

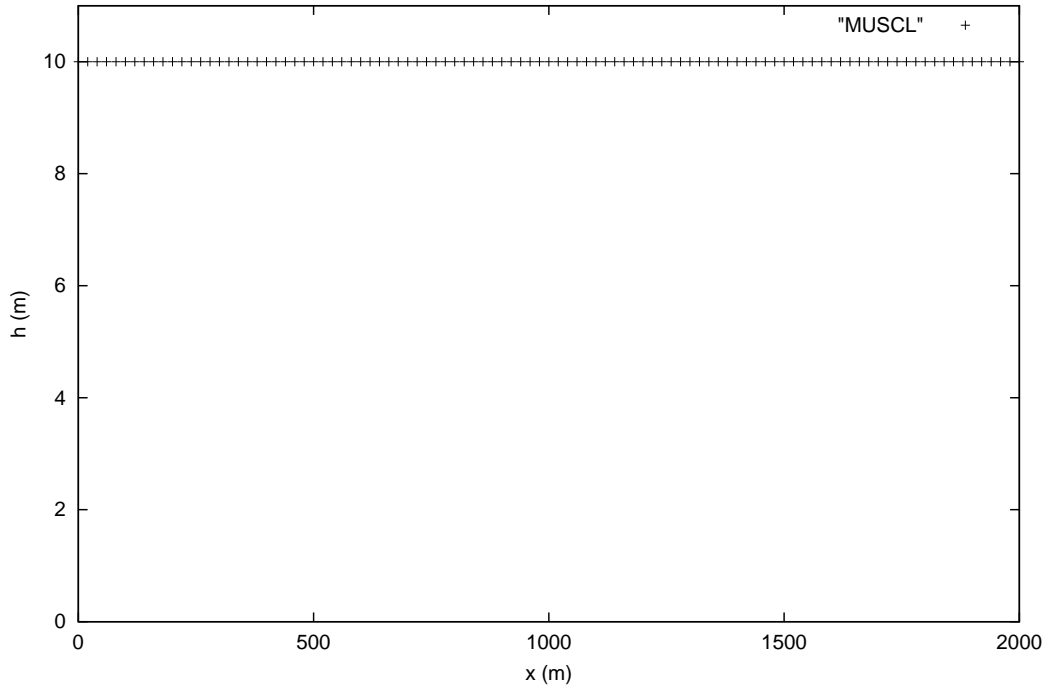
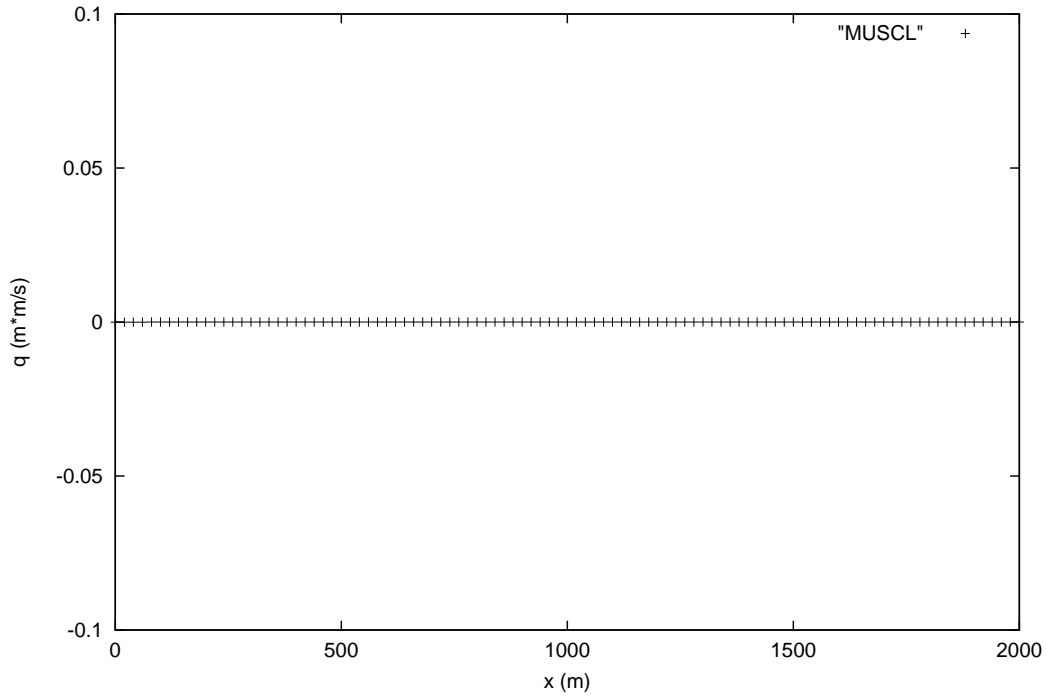


Figure 3.10 Lake at rest, 100 grid points



3.2 Σχήμα ενός στρώματος με μη τετριμένο βυθό

Σε αυτό το μέρος θα δούμε τη συμπεριφορά του σχήματος σε περιπτώσεις μη τετριμένου βυθού, $Z \neq 0$. Γενικά θα έχουμε αρχική συνθήκη για το ύψος:

$$h(x, 0) + Z(x) = H_0,$$

όπου $Z(x)$ είναι η εξίσωση της επιφάνειας του βυθού. Θα ελεγχθούν τόσο οι σταθερές καταστάσεις, όσο και καταστάσεις ροών.

3.2.1 Λύση σταθερής κατάστασης

Θεωρούμε το πρόβλημά μας με αρχικές συνθήκες:

$$u(x, 0) = 0, \quad h(x, 0) + Z(x) = H_0,$$

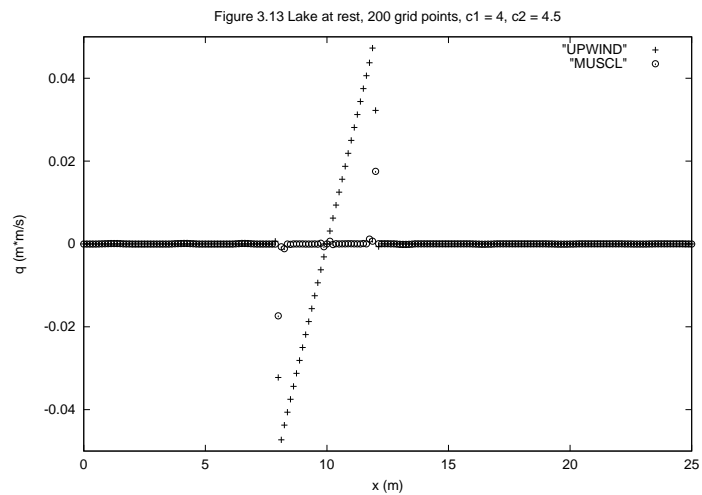
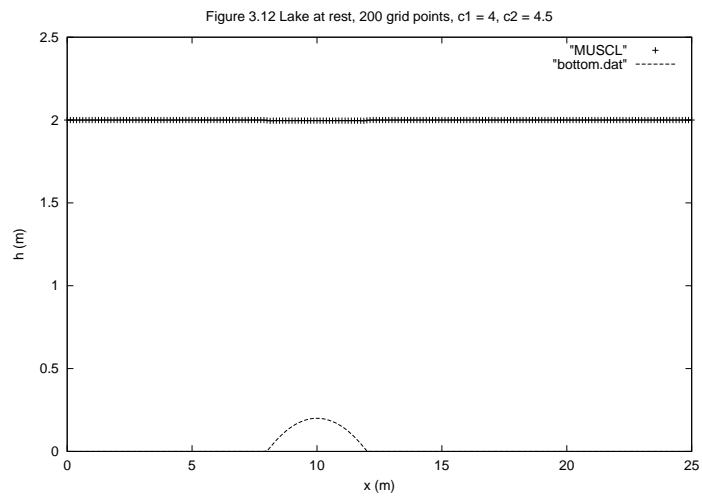
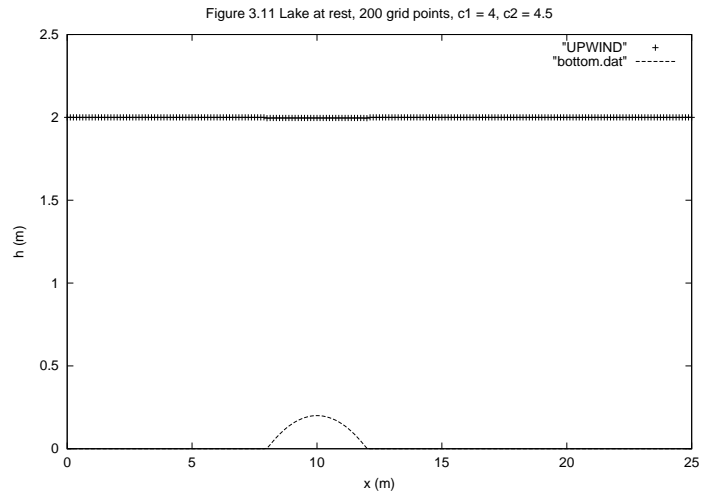
με

$$Z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2, & 8 \leq x \leq 12, \\ 0, & \text{αλλιως,} \end{cases}$$

σε κανάλι μήκους 25 μέτρων και $H = 2$ μέτρα, $\epsilon = 10^{-5}$ και $CFL = 0.5$. Ο χρόνος που υπολογίστηκε η λύση είναι τα 200 δευτερόλεπτα, με 200 σημεία διαμερισμού. Οι τιμές των c_1 και c_2 διατηρήθηκαν σταθερές $c_1 = 4$, $c_2 = 4.5$. Για το σχήμα *MUSCL* χρησιμοποιήθηκε ο *MC limiter*. Η ακριβής λύση είναι:

$$h(t, x) + Z(x) = H_0, \quad u(t, x) = 0, \quad \forall t > 0.$$

Η διαφορά των δύο σχημάτων γίνεται περισσότερο αντιληπτή στο γράφημα των ορμών (εικόνα 3.13) όπου στο σχήμα δεύτερης ικανοποιεί πολύ καλύτερα την σταθερή κατάσταση. Για να γίνει και ποιοτικός έλεγχος, θα ακολουθήσει και πίνακας με τις νόρμες σφαλμάτων του ύψους και της ορμής. Στα γραφήματα 3.11 και 3.12 φαίνεται η σταθερή κατάσταση για το κάθε σχήμα.



Στους παρακάτω πίνακες δίνονται τα σφάλματα υπολογισμένα στην L_1 νόρμα και οι τάξεις, καθώς μεταβάλλεται ο συντελεστής ϵ . Οι μετρήσεις έγιναν για τιμές του ϵ τέτοιες ώστε $O(\epsilon) \neq \Delta t$ αφού υπάρχει ο περιορισμός $\Delta t \gg \epsilon$ για τα χαλαρωτικά σχήματα.

Για το upwind :

ϵ	L_1 error for h	$Rate(h)$	L_1 error for q	$Rate(q)$
$1.E - 1$	$7.816E - 2$	—	$6.835E - 1$	—
$8.E - 2$	$5.418E - 2$	1.642	$5.829E - 1$	0.713
$6.E - 2$	$3.237E - 2$	1.790	$4.734E - 1$	0.723
$4.E - 2$	$1.513E - 2$	1.875	$3.553E - 1$	0.707

και για το MUSCL :

ϵ	L_1 error for h	$Rate(h)$	L_1 error for q	$Rate(q)$
$1.E - 1$	$7.315E - 2$	—	$5.960E - 1$	—
$8.E - 2$	$6.301E - 2$	0.668	$5.016E - 1$	0.772
$6.E - 2$	$3.014E - 2$	2.563	$3.784E - 1$	0.979
$4.E - 2$	$2.003E - 2$	1.007	$2.586E - 1$	0.938

3.2.2 Λύση σταθερής ροής

Όπως και στο προηγούμενο πείραμα θεωρούμε το ίδιο κανάλι με τον ίδιο βυθό. Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$u(x, 0) = 0, \quad h(x, 0) + Z(x) = H_0,$$

με τον ίδιο διαμερισμό και τελικό χρόνο υπολογισμού 200 δευτερόλεπτα. Ανάλογα με τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες η ροή μπορεί να είναι υποκρίσιμη και μετακρίσιμη με ή χωρίς κρουστικό κύμα. Σε όλες τις περιπτώσεις η CFL συνθήκη είναι σταθερή $CFL = 0.5$, ενώ για τα σχήματα δεύτερης τάξης χρησιμοποιήθηκε ο MC limiter .

1. Υποκρίσιμη (subcritical) ροή:

Υποθέτουμε Dirichlet συνοριακή συνθήκη $q = 4.42m^2/s$ για το αριστερό άκρο και Neumann ($\frac{\partial q}{\partial x} = 0$) για το δεξί για την ορμή, και για το ύψος Neumann ($\frac{\partial h}{\partial x} = 0$) για το αριστερό και Dirichlet $h = 2m$ για το δεξί. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $\epsilon = 1.E - 5$, $c_1 = 4$ και $c_2 = 7$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα γραφήματα 3.14, 3.15 και 3.16.

2. Μετακρίσιμη (transcritical) ροή χωρίς shock :

Υποθέτουμε Dirichlet συνοριακή συνθήκη $q = 1.53m^2/s$ για το αριστερό άκρο και Neumann για το δεξί για την ορμή, και για το ύψος Neumann για το αριστερό και Dirichlet $h = 0.66m$ για το δεξί, μόνο στην περίπτωση που η ροή είναι subcritical . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $\epsilon = 1.E - 5$, $c_1 = 5$ και $c_2 = 5$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα γραφήματα 3.17 και 3.18.

3. Μετακρίσιμη (transcritical) ροή με shock :

Υποθέτουμε Dirichlet συνοριακή συνθήκη $q = 0.18m^2/s$ για το αριστερό άκρο και Neumann για το δεξί για την ορμή, και για το ύψος Neumann για το αριστερό και Dirichlet $h = 0.33m$ για το δεξί. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $\epsilon = 1.E - 6$, $c_1 = c_2 = 5$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα γραφήματα 3.19 και 3.20.

Σε αυτά τα προβλήματα διακρίνεται η αδυναμία του upwind να διατηρησει την ορμή σε σταθερά επίπεδα, ειδικά στην περιοχή όπου ο βυθός δεν έχει ομαλή πρώτη παράγωγο. Τα αποτελέσματά του στην μετακρίσιμη ροή με shock αποκλίνουν σημαντικά από την ακριβή λύση, σε αντίθεση με το MUSCL το οποίο δίνει πολύ ικανοποιητικές προσεγγίσεις.

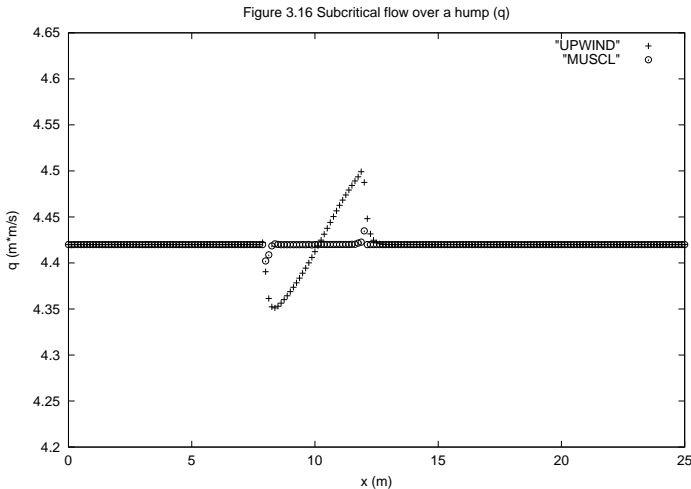
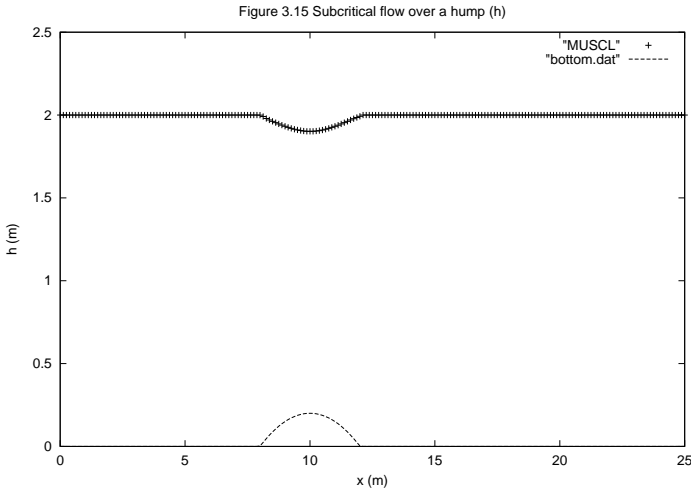
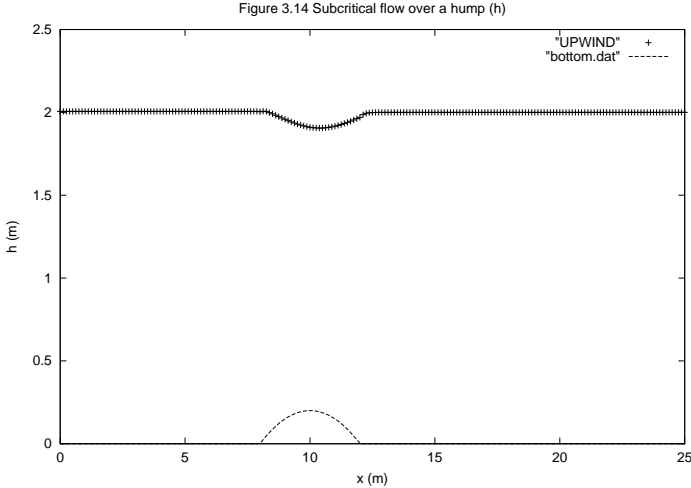


Figure 3.17 Transcritical flow over a hump (h)

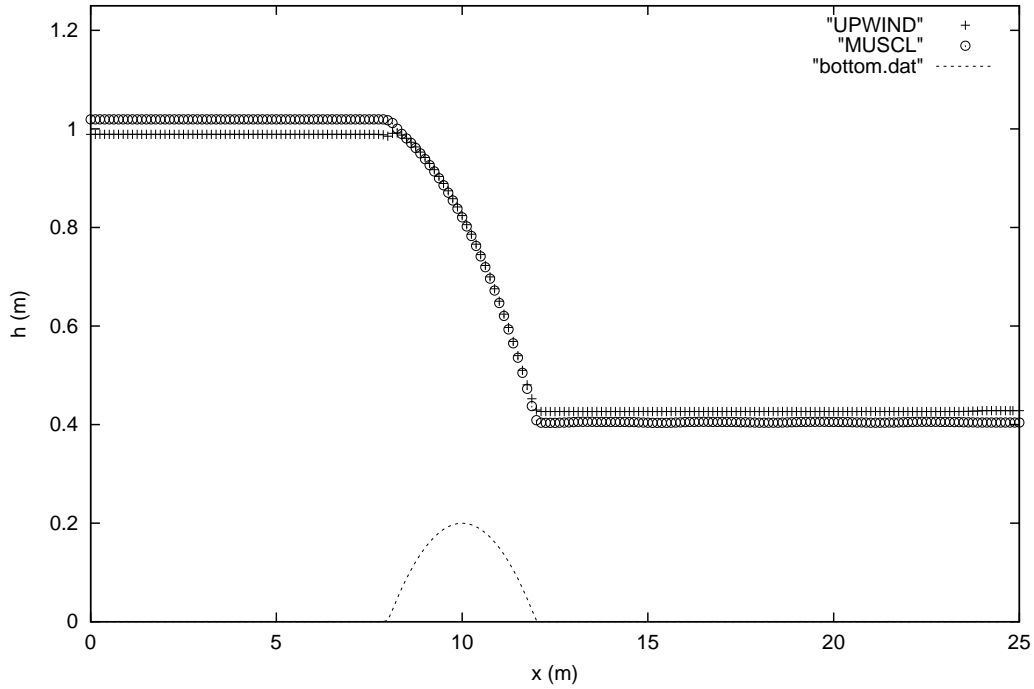


Figure 3.18 Transcritical flow over a hump (q)

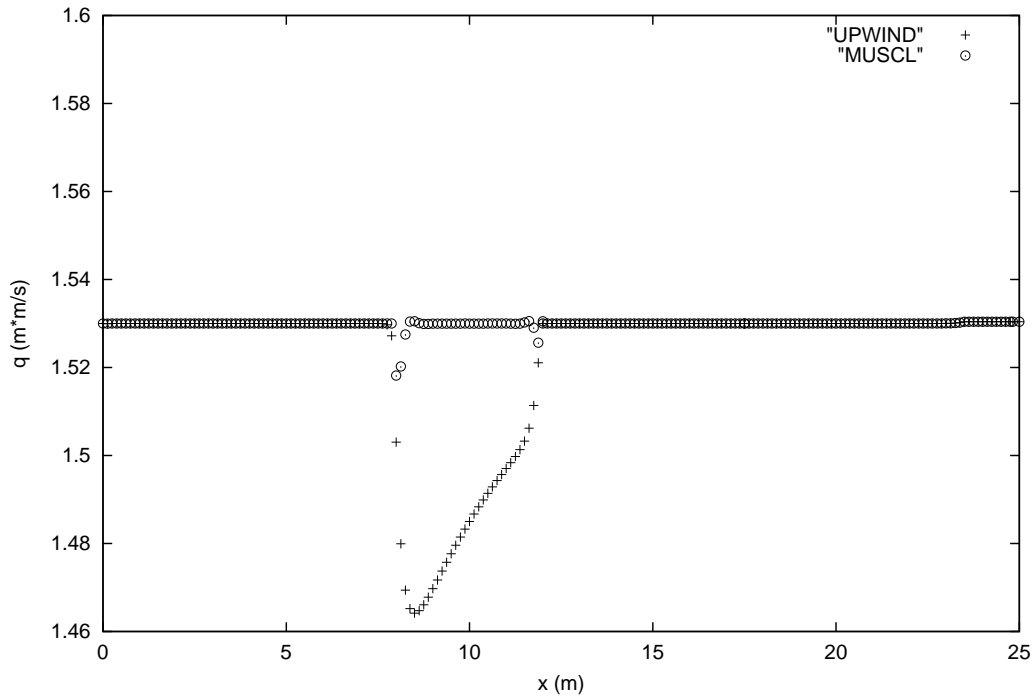


Figure 3.19 Transcritical flow over a hump with shock (h)

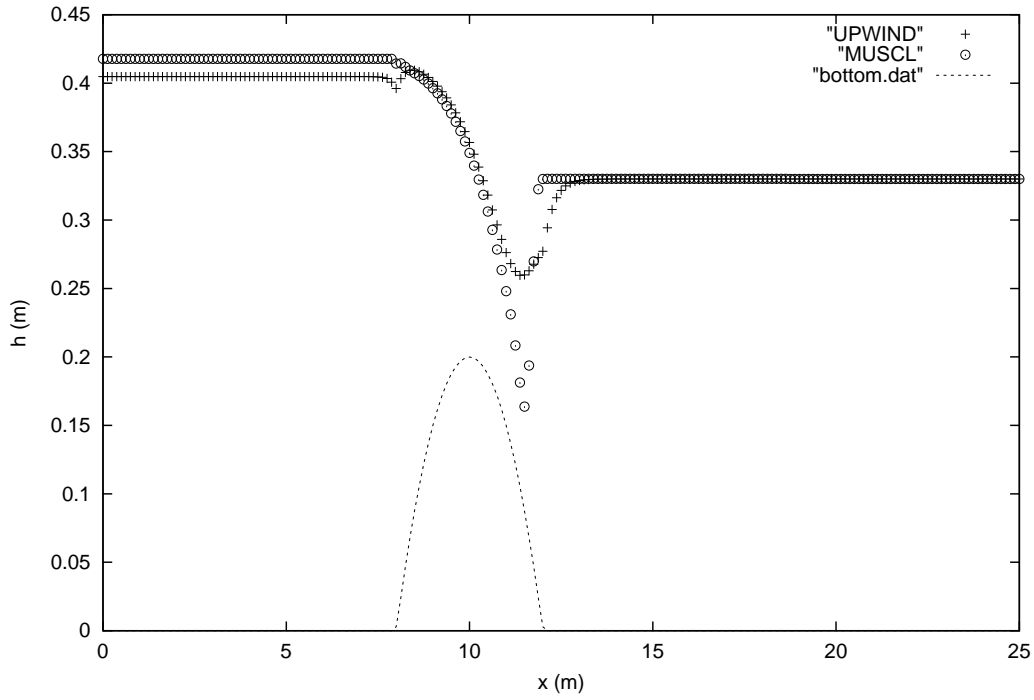
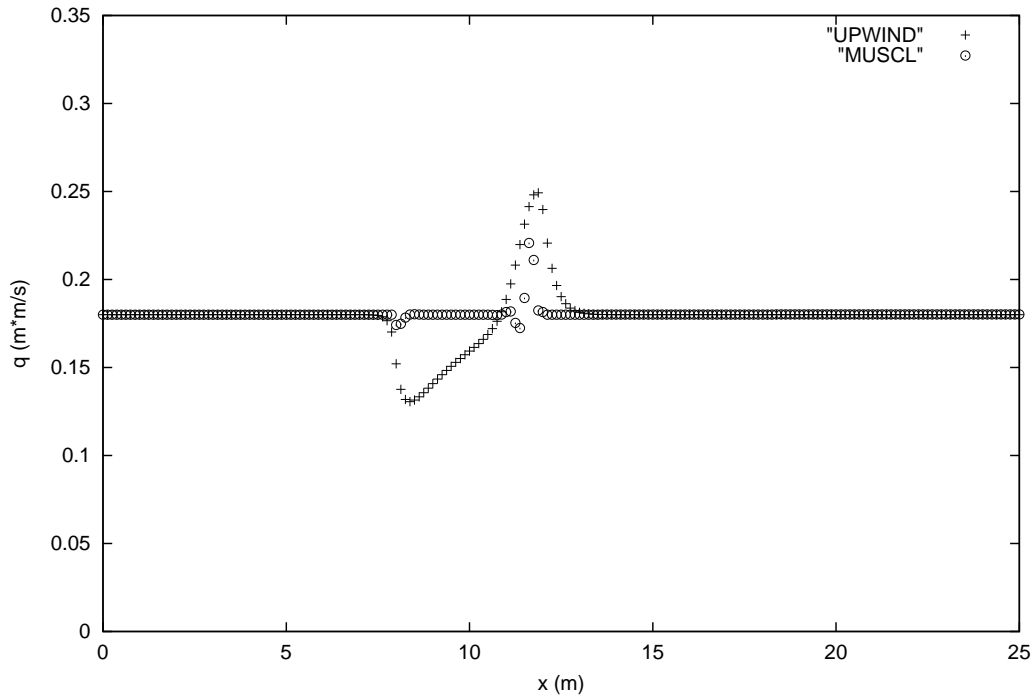


Figure 3.20 Transcritical flow over a hump with shock(q)



3.3 Πολυστρωματικό σχήμα

Θεωρούμε τη περίπτωση θραύσης φράγματος σε επίπεδο βυθό. Θα συγκρίνουμε το μονοστρωματικό (ομογενές και μη ομογενές) σχήμα με το πολυστρωματικό. Το κανάλι έχει μήκος 120 μέτρα (διάστημα $[-60,60]$), με αρχικές συνθήκες,

$$h(x, 0) = \begin{cases} 2, & \text{αν } x < 0, \\ 1, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases}$$

$$u(x, 0) = 0,$$

Οι κύριες παράμετροι για όλα τα πειράματα είναι $\mu = 0.01$, $g = 2$ και $\kappa = 0.1$ για το μη ομογενές και $\kappa = 0$ για το ομογενές σύστημα. Οι παράμετροι c_1 , c_2 υπολογίζονται σε κάθε χρονικό βήμα, $CFL = 0.5$, και $\epsilon = 1.E - 5$. Για το σχήμα δεύτερης τάξης χρησιμοποιήθηκε ο *MC limiter*. Ο χρόνος υπολογισμού είναι 14 δευτερόλεπτα, με 200 σημεία διαμερισμού.

3.3.1 Σύγκριση με μονοστρωματικά μοντέλα Saint-Venant

Εδώ επαληθεύουμε πως η τριβή στο βυθό έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της μέσης ταχύτητας της ροής. Ορατή είναι επίσης η διαφορά μεταξύ μονοστρωματικού και πολυστρωματικού σχήματος (10 στρωμάτων), και η αδυναμία του πρώτου να αναπαραστήσει τη ροή. Επίσης το πολυστρωματικό σχήμα είναι πολύ κοντά με τη λύση του Saint-Venant συστήματος με ιξώδες, το οποίο και περιγράφει καλύτερα τις εξισώσεις Navier-Stokes (δείτε [3]). Στα γραφήματα 3.21 και 3.22 παρουσιάζονται τα ύψη και οι ταχύτητες για τα τρία σχήματα, χρησιμοποιώντας το upwind σχήμα και στα 3.23 και 3.24 τα αντίστοιχα του MUSCL .

Figure 3.21 Free surface Various Saint-Venant models

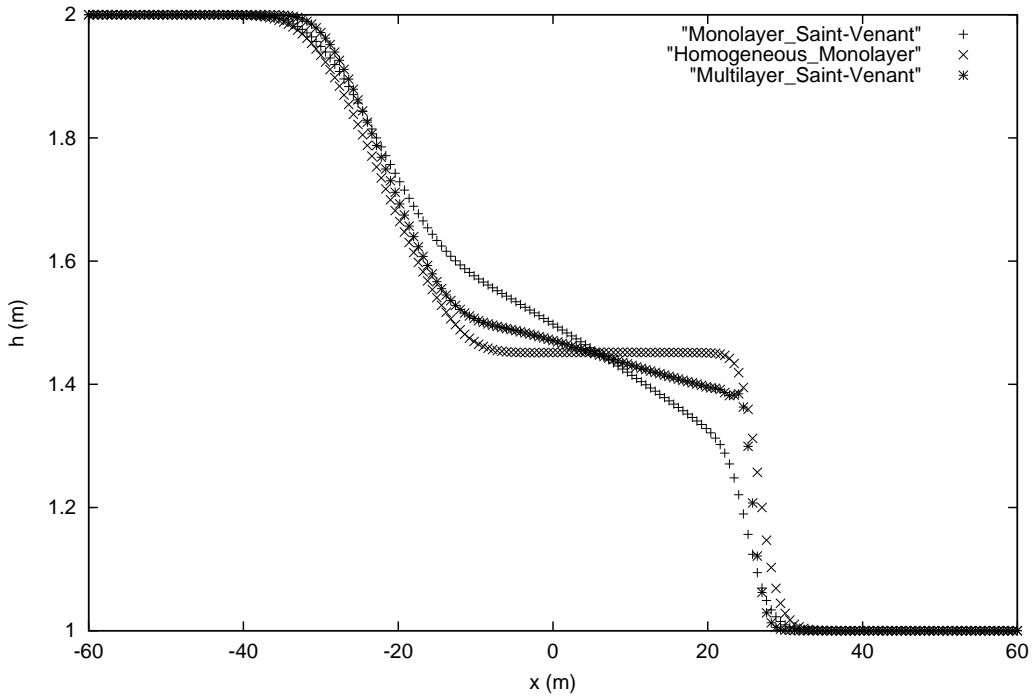


Figure 3.22 Velocity Various Saint-Venant models

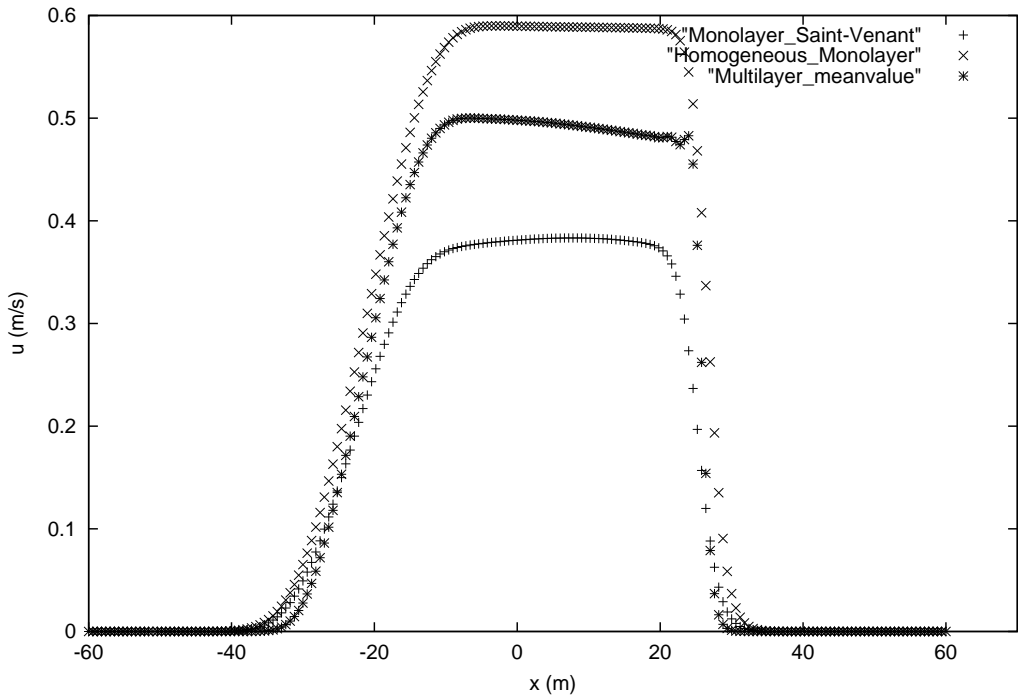


Figure 3.23 Free surface Various Saint-Venant models

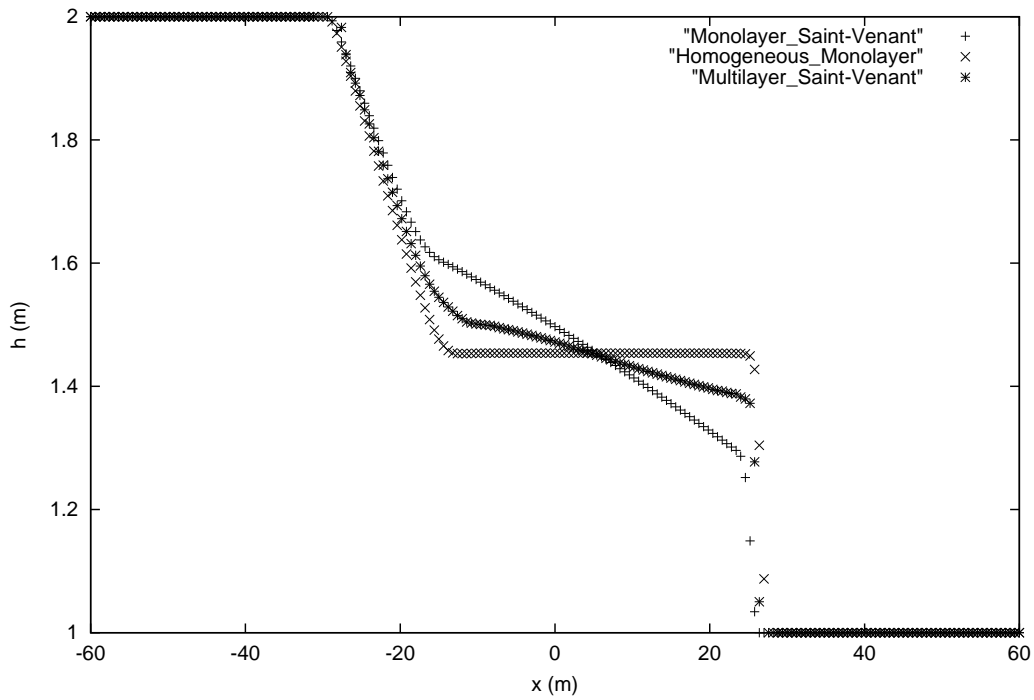
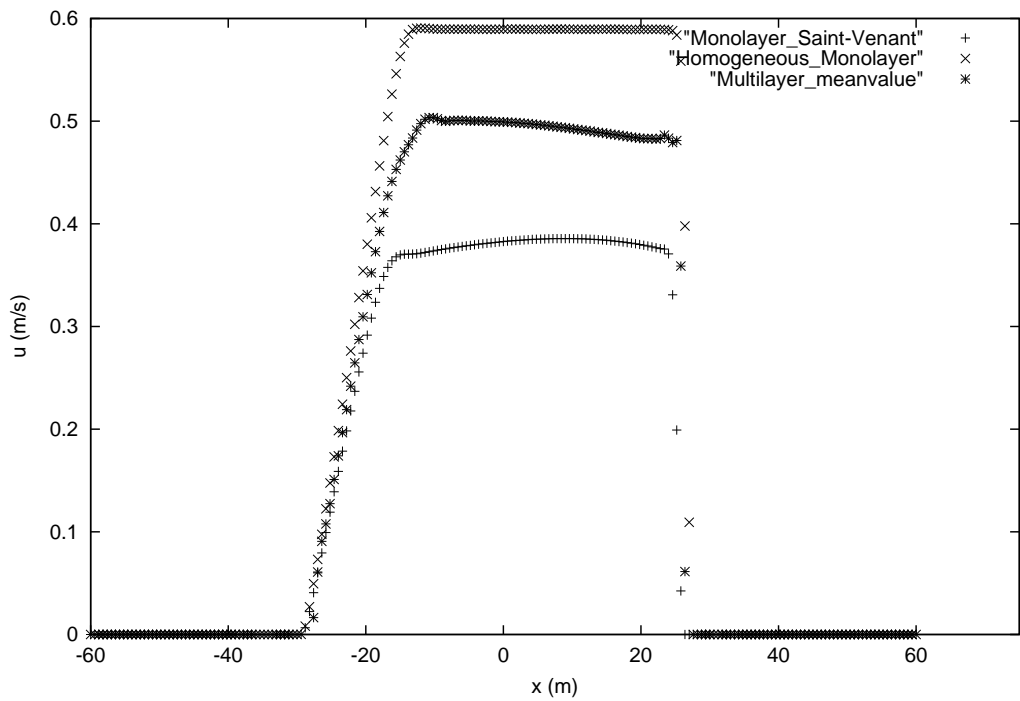


Figure 3.24 Velocity Various Saint-Venant models



3.3.2 Συμπεριφορά του πολυστρωματικού μοντέλου

Εδώ θα μελετήσουμε την εξέλιξη κάθε στρώματος (10 συνολικά). Αρχικά παρουσιάζονται οι ταχύτητες κάθε στρώματος (γράφημα 3.25 για upwind και 3.28 για MUSCL) οι οποίες συμφωνούν με τις υποθέσεις. Η τριβή στο βυθό κάνει τα κατώτερα στρώματα να κινούνται πιο αργά σε σχέση με τα υψηλότερα. Παρατηρούμε πως το σχήμα μπορεί να υπολογίζει μεγάλες διαφορές μεταξύ των στρωμάτων στο βυθό και στην επιφάνεια. Στα γραφήματα 3.26, 3.27 (upwind) και 3.29, 3.30 (MUSCL) φαίνονται τα ύψη. Παρατηρούμε στη συμπεριφορά τους πως τα κατώτερα στρώματα λόγω των χαμηλών ταχυτήτων μένουν πίσω από τα ανώτερα, τα οποία κινούνται σχεδόν με τον ίδιο ρυθμό. Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και στην περίπτωση δύο στρωμάτων στα γραφήματα 3.31, 3.32, 3.33 (upwind) και 3.34, 3.35, 3.36 (MUSCL).

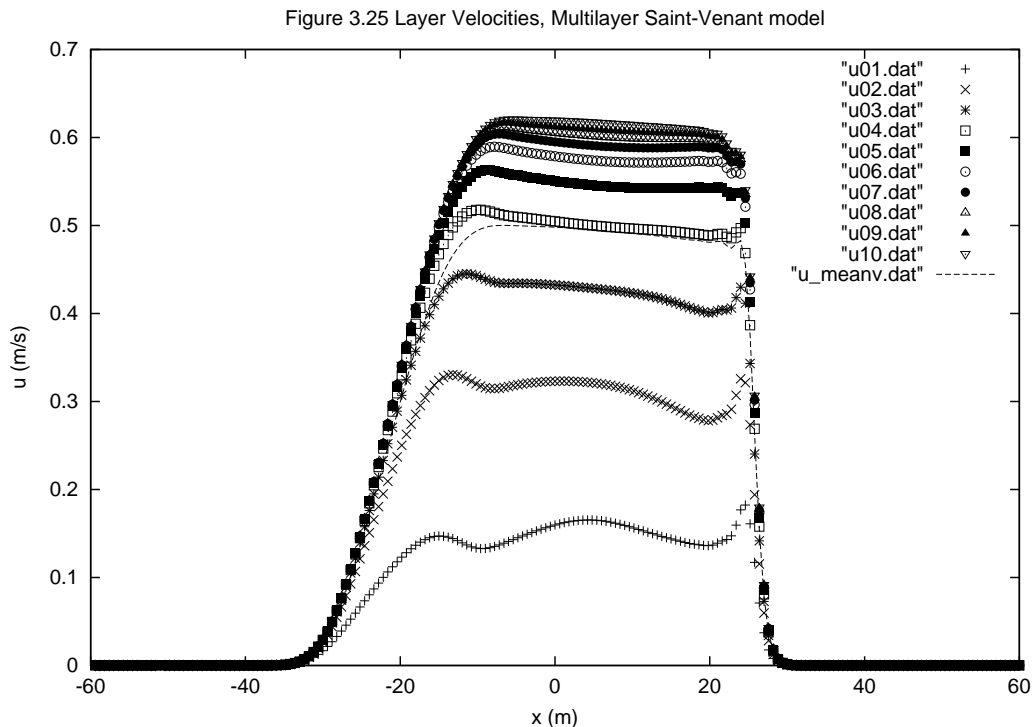


Figure 3.26 Layer Heights, Multilayer Saint-Venant model

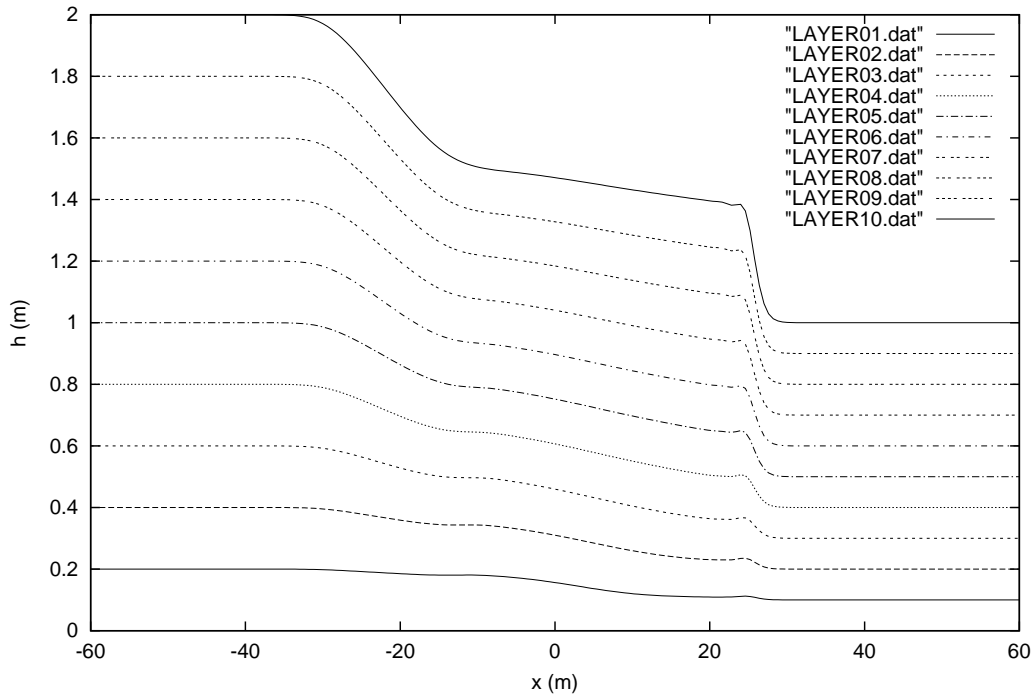


Figure 3.27 Layer Heights, Multilayer Saint-Venant model

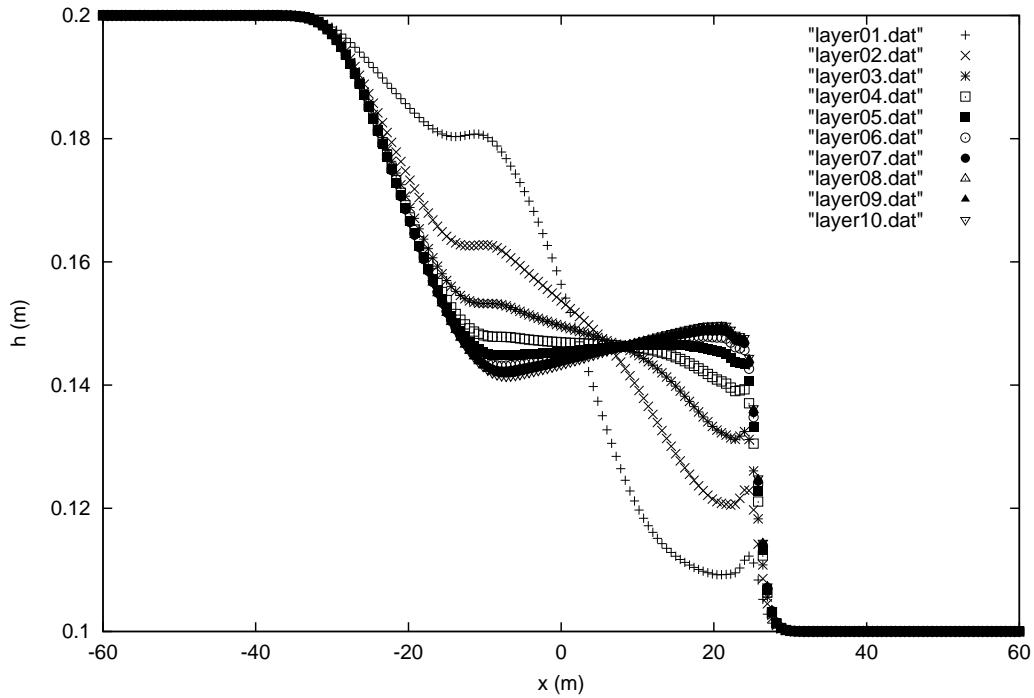


Figure 3.28 Layer Velocities, Multilayer Saint-Venant model

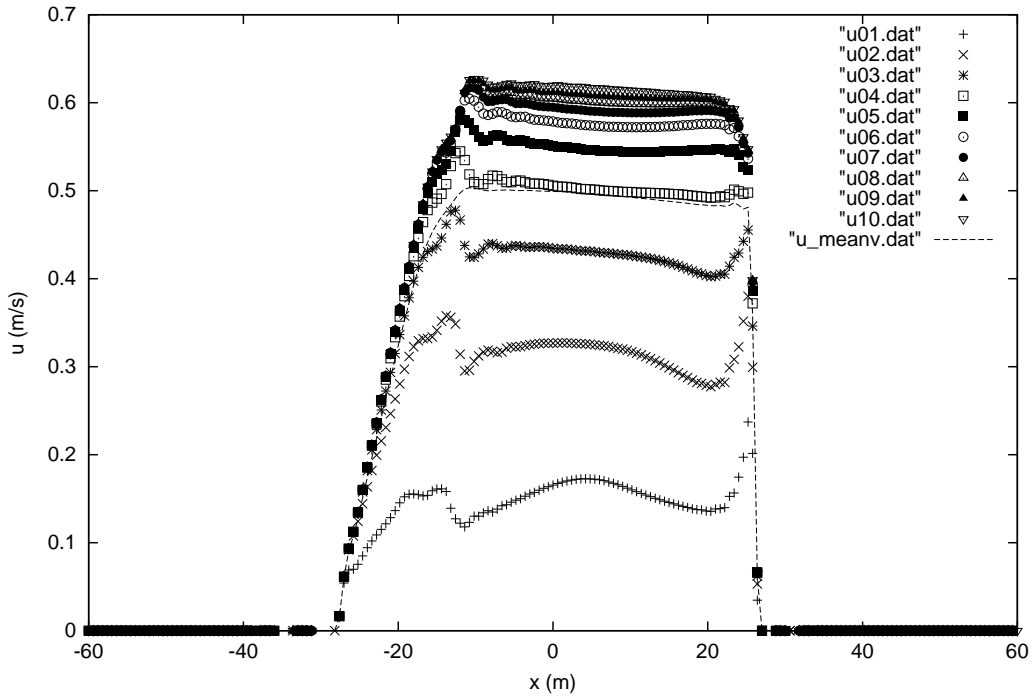


Figure 3.29 Layer Heights, Multilayer Saint-Venant model

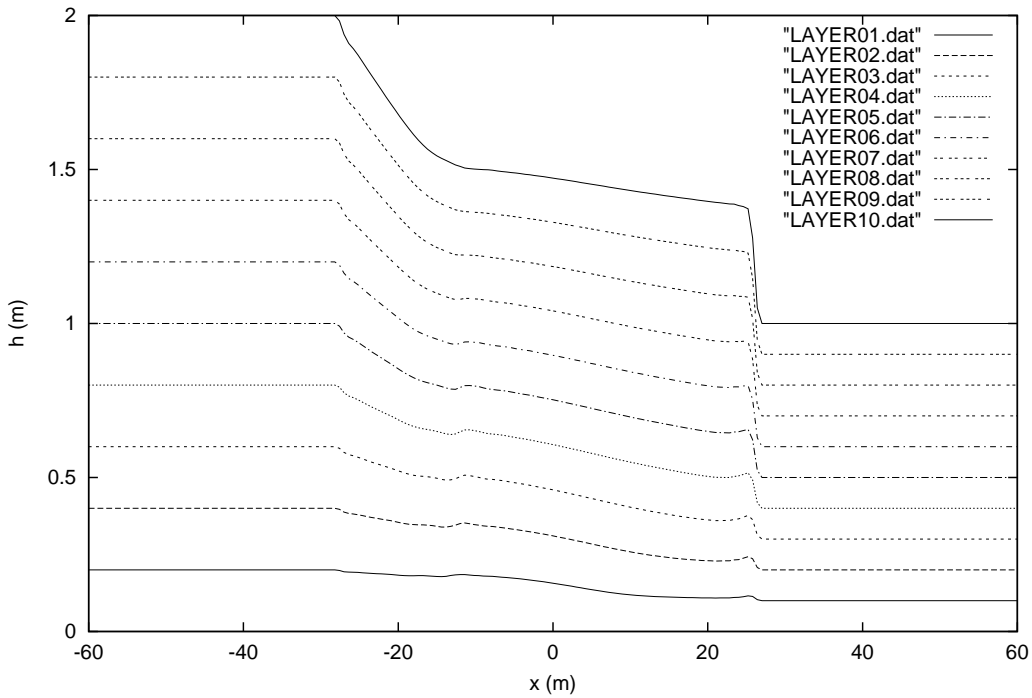


Figure 3.30 Layer Heights, Multilayer Saint-Venant model

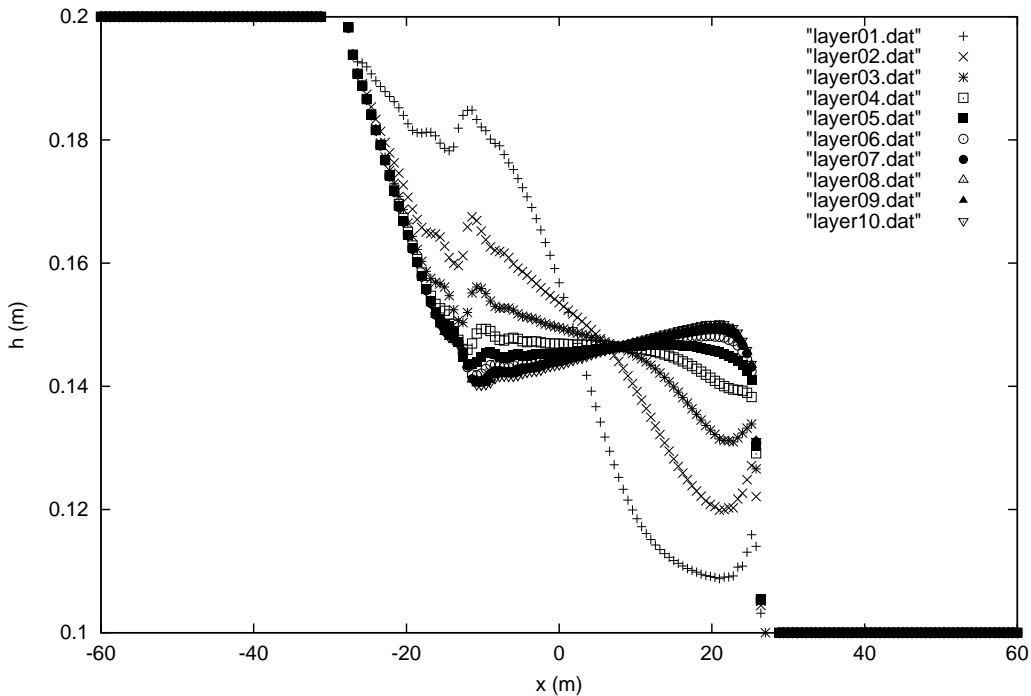
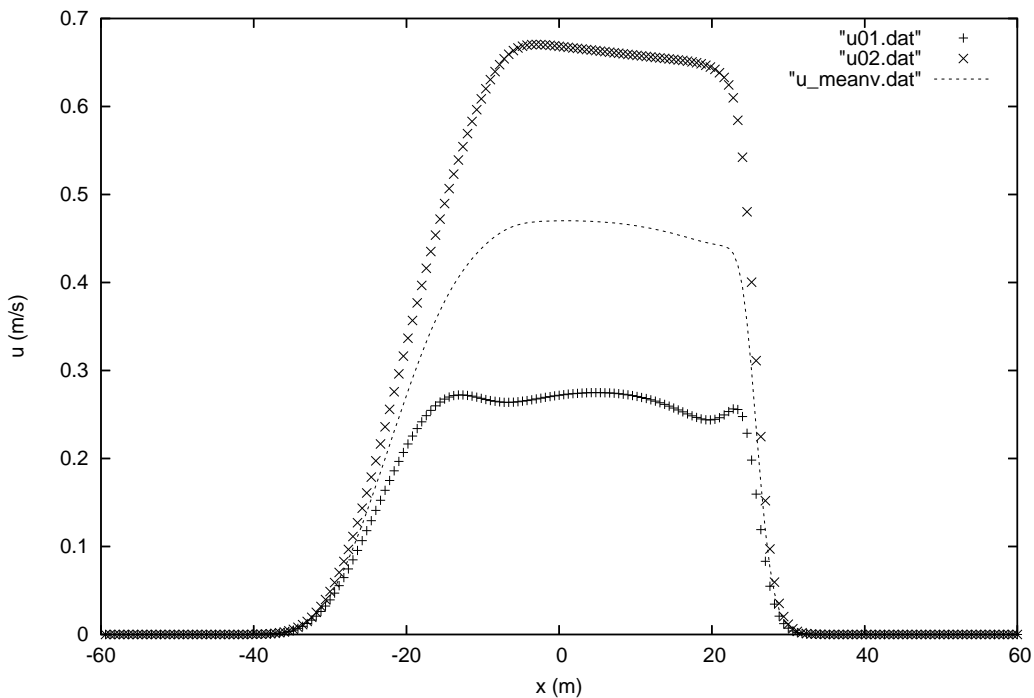


Figure 3.31 Layer velocities, Multilayer Saint-Venant model



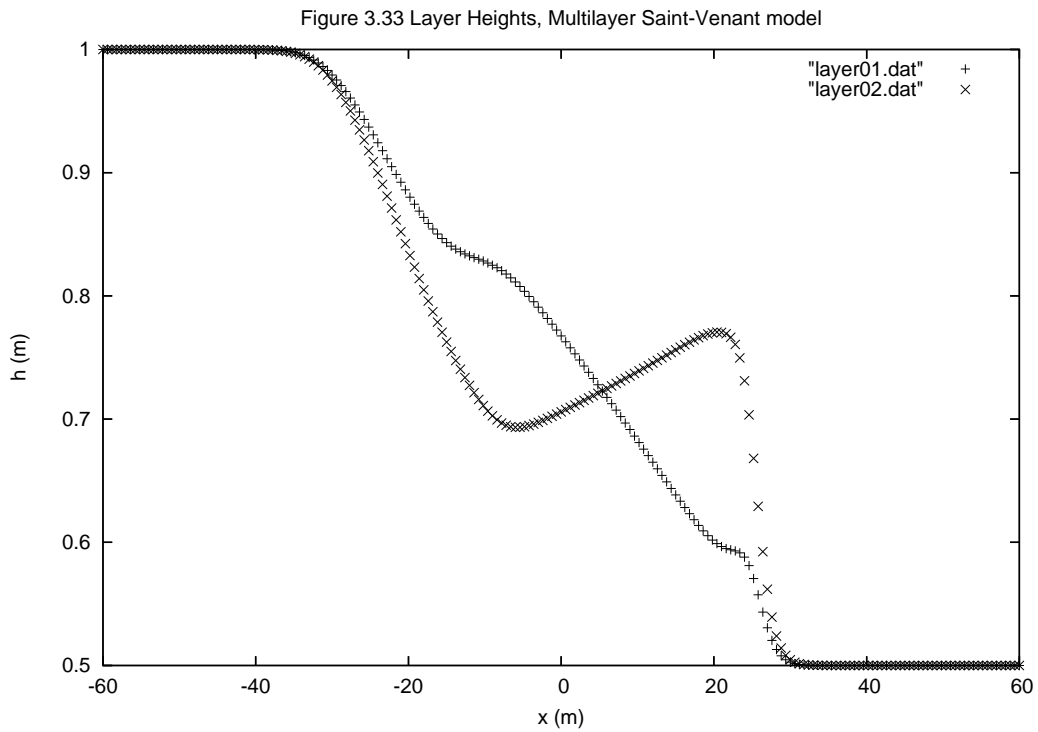
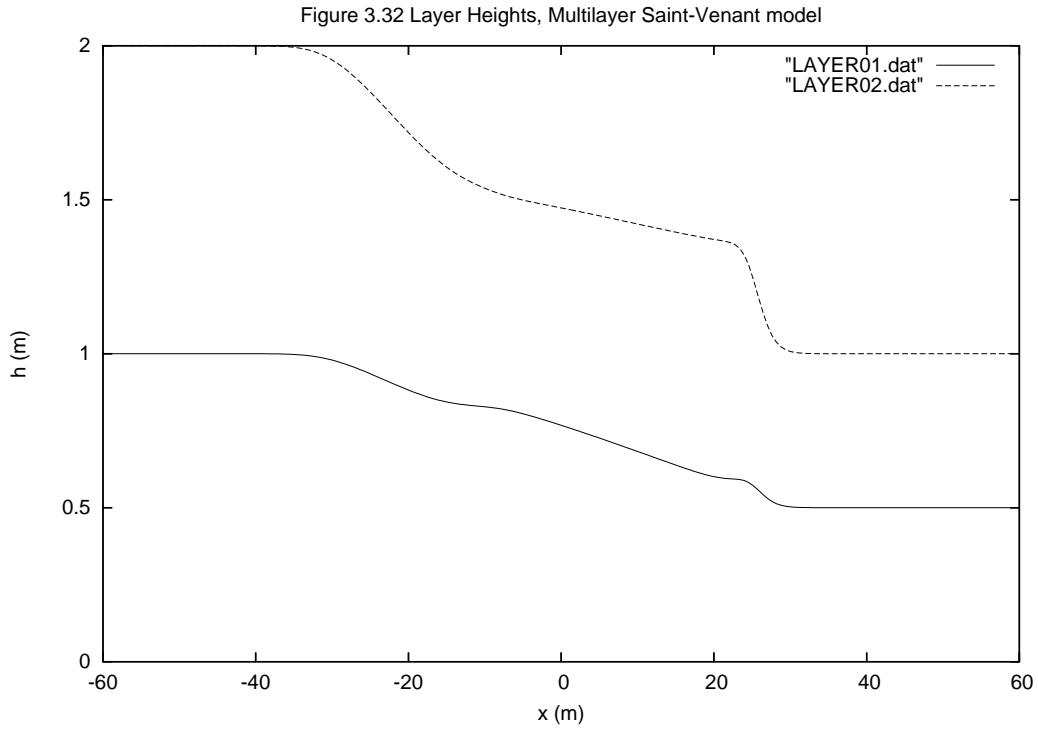


Figure 3.34 Layer velocities, Multilayer Saint-Venant model

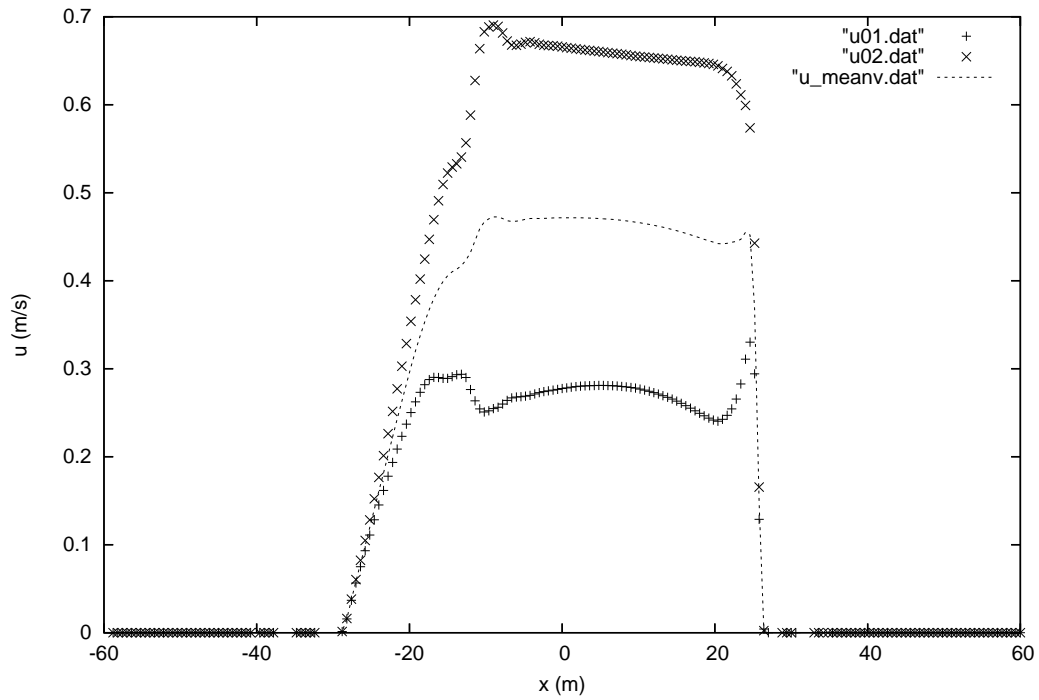
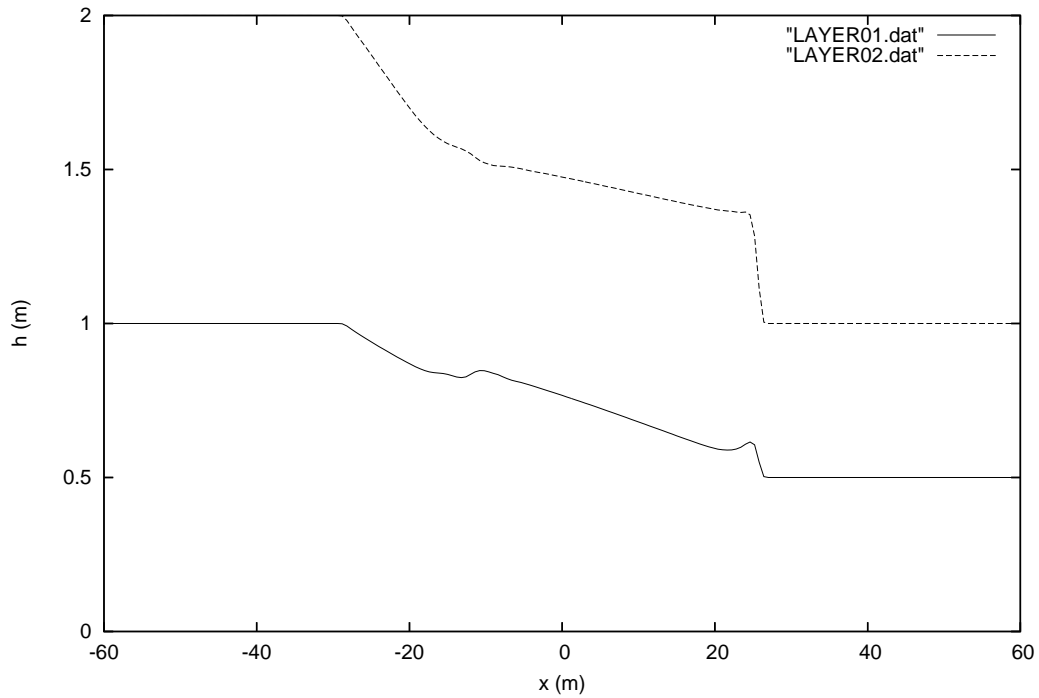
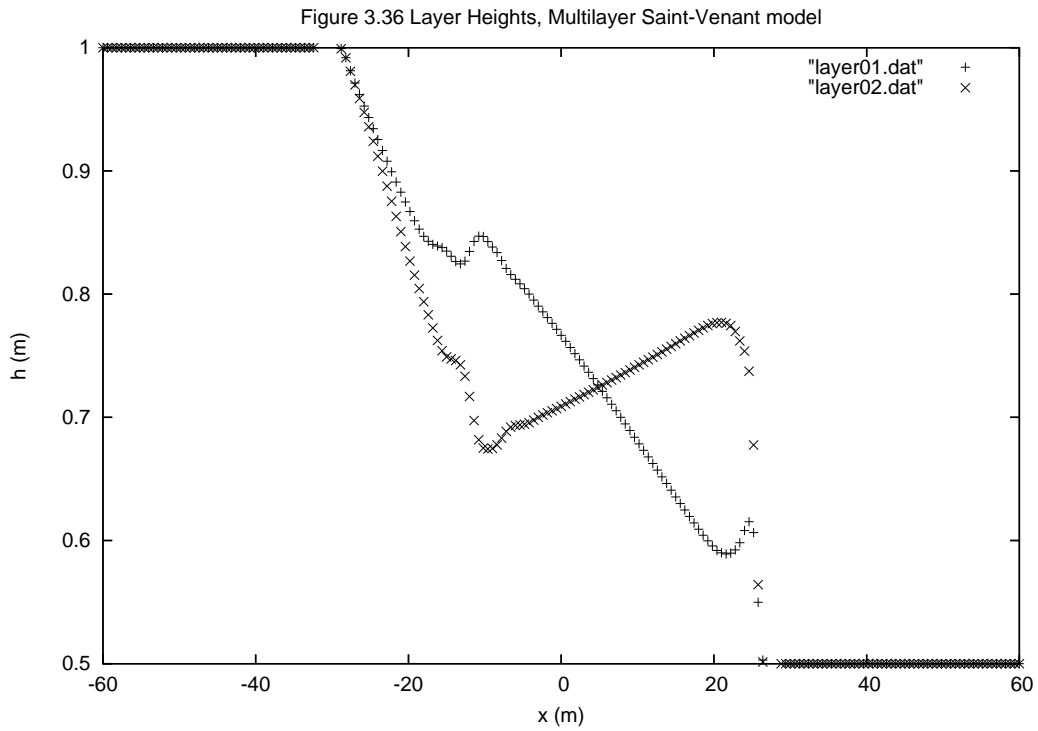


Figure 3.35 Layer Heights, Multilayer Saint-Venant model





Παρατηρούμε επίσης ότι ακόμα και σε περιοχές όπου συναντώνται ασυνέχειες, τα αποτελέσματα, ακόμα και των χαμηλότερων στρωμάτων, είναι αρκετά ομαλά.

Συμπεράσματα

Χάρη σε μια ασυμπτωτική ανάλυση των εξισώσεων Navier-Stokes για ρηχά νερά, δημιουργούμε ένα πολυστρωματικό μοντέλο Saint-Venant το οποίο επιτρέπει μεταβλητή κάθετη ταχύτητα, διατηρώντας την υπολογιστική αποτελεσματικότητα του κλασσικού συστήματος Saint-Venant. Το μοντέλο έχει την ίδια εγγυρότητα με το υδροστατικό μοντέλο Navier-Stokes.

Το πολυστρωματικό μοντέλο ικανοποιεί τις βασικές συνθήκες ευστάθειας, διατηρεί το ύψος σε θετικές τιμές, ύπαρξη μιας μη αυξανόμενης ενέργειας, ενώ το διατηρητικό κομμάτι είναι υπερβολικό. Επίσης διατηρεί τις σταθερές καταστάσεις, σύμφωνα με τις εξισώσεις Saint-Venant και Navier-Stokes.

Συγκρίσεις με το κλασσικό Saint-Venant σύστημα σε πρόβλημα θραύσης φράγματος επαληθεύουν το μοντέλο.

Βιβλιογραφία

- [1] A. I. Delis, Th. Katsaounis. *Relaxation schemes for the shallow water equations*. Int. J. Meth. Fluids 2002, **00**:1-20.
- [2] Aral MM, Zhang Y, Jin S. *Application of Relaxation Scheme to Wave Propagation Simulation in Open-Channel Networks*. J. Hydraulic Engineering 1998; **124**:1125-1133.
- [3] Audesse E., *A multilayer Saint-Venant model*, INRIA Report RR-5249, 2004.
- [4] Bermudez A, Vázquez ME. *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*. Computers and Fluids 1994; **23**:1049.
- [5] Besson O. and Laydi M.R., *Some estimates for the anisotropic Navier-Stokes equations and for the hydrostatic approximation*, RAIRO M2AN (7) 26 (1992), 855-865.
- [6] Causin P., Miglio E., Saleri F., *Algebraic factorizations for 3D non-hydrostatic free surface flows*, Comput. Vis. Sci. (2) 5 (2002), 85-94.
- [7] Chalabi, A. (1999): *Convergence of relaxation schemes for hyperbolic conservation laws with stiff terms*, Math. Comp., **68**, pp.955-970.
- [8] Chen Go, Liu TP. *Zero relaxation and dissipation limits for hyperbolic conservation laws*. Comm. Pure Appl. Math. 1993, **46**:744-781.
- [9] Ferrari S., Saleri F., *A new two dimensional shallow water model including pressure term and slow varying bottom topography* M2AN (2004)

- [10] Frédéric C., Philippe G. L., *An entropy satisfying MUSCL scheme for systems of conservation laws* Numerische Mathematik 65M12 (primary), 35L65 (secondary).
- [11] Gallouët T, Herard JM, Seguin N. *Some approximate Godunov schemes to compute shallow water equations with topography*. AIAA-2001, 2000.
- [12] Gerbeau J.F. and Perthame B., *Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; Numerical validation*, Discrete Cont. Dyn. Syst. Ser. B (1) 1 (2001), 89-102.
- [13] Gosse, L., LeRoux, A.Y. (1996): *A well-balanced scheme designed for inhomogeneous scalar conservation laws* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **323**, 543-546.
- [14] Jin S., Xin Z. *The relaxing schemes of conservation laws in arbitrary space dimensions*. Comm. Pure Appl. Math. 1995; **48**:235-277.
- [15] Liu TP. *Hyperbolic conservation laws with relaxation*. Comm. Math. Phys. 1987; **108**:153-175.
- [16] Natalini R. *Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws*. Comm. Pure Appl. Math. 1996; **49**:795-823.
- [17] Sweby PK. *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*. SIAM J. Numer. Anal. 1984; **21**:995-1011.
- [18] Tzavaras AE. *Materials with internal variables and relaxation to conservation laws*. Arch. Ration. Mech. Anal. 1999; **146**:129-155.
- [19] Vázquez-Cendón ME. *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in Channels with Irregular geometry*. J. Comp. Phys. 1999; **148**:497-526.
- [20] Xu WQ. *Relaxation limit for piecewise smooth solutions to systems for conservation laws*. J. Diff. Eq. 2000; **162**:140-173.