ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων του μοντέλου Αδροποίησης των Lifshitz-Slyozov-Wagner.

Κοκκινάκη Ιακώβα

Μεταπτυχιακή Εργασία
Ηράκλειο, 2003

Περιεχόμενα

Στη γιαγιά μου...

1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό πως η επιστήμη των υλικών αποτελεί ένα ταχέως αναπτυσσόμενο πεδίο έρευνας με πολλές εφαρμογές. Τα δυαδικά κράματα είναι συστήματα που αποτελούνται από δύο είδη στοιχείων $A - B$ στα οποία τα άτομα του A και του B δημιουργούν φυσικούς δεσμούς που οδηγούν στη γένεση ενός νέου μίγματος.

Κάτω από συνθήκες σταθερής πίεσης η θερμοδυναμική κατάσταση του μίγματος καθορίζεται από δύο παραμέτρους : τη θερμοκρασία T και τη συγκέντρωση C του καθενός. Τα μεγέθη T_A και T_B εκφράζουν τις θερμοκρασίες τήξης των A και B αντίστοιχα. Τότε, γίνεται αντιληπτό ότι, σε οποιαδήποτε θερμοκρασία T με $T_A < T < T_B$, το κράμα θα αποτελείται από στερεό και υγρό σε διαφορετικές αναλογίες και επέρχεται ισορροπία μεταξύ αρχικού κράματος και νέου μίγματος.

Βάσει των παραπάνω προκύπτουν πολύπλοκα είδη διεπιφανειών, όπου η υγρή και η στερεή κατάσταση συνυπάρχουν. Αν η διεπιφάνεια είναι λεία, τότε η κίνησή της περιγράφεται από κάποιο σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Υπάρχουν δύο μοντέλα τα οποία μπορούν να περιγράψουν τη μορφή της διεπιφάνειας. Στο ένα μοντέλο η διεπιφάνεια θεωρείται μηδενικού πάχους ενώ στο δεύτερο χαρακτηρίζεται σαν ένα στρώμα με πεπερασμένο πάχος.

Μπορούμε να διακρίνουμε δύο στάδια στην εξέλιξη του φαινομένου του δυαδικού κράματος:το διαχωρισμό και την αδροποίηση. Το στάδιο που μας ενδιαφέρει και με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι η αδροποίηση , όπου το σύστημα εξελίσσεται με σκοπό να ελαχιστοποιήσει την επιφανειακή του ενέργεια. Σε αυτό το στάδιο τα μεγάλα σωματίδια εξελίσσονται σε βάρος των μικρών και παρατηρείται μία σημαντική μείωση του συνολικού αριθμού των σωματιδίων ενώ το μέσο μέγεθος αυξάνει (βλ. [8]).

Στην κλασική θεωρία των Lifshitz-Slyozov-Wagner τα σωματίδια θεωρούνται σφαιρικά οπότε σε κάθε σωματίδιο ενσωματώνουμε ένα κέντρο και μία ακτίνα για όλη τη χρονική εξέλιξη του φαινομένου. Θα μελετήσουμε την ανάπτυξη του σωματιδίου σε σχέση με την επίδραση που ασκεί ένα “ μέσο ” πεδίο το οποίο αναπαριστά την επίδραση των υπόλοιπων σωματιδίων. Βρέθηκε ότι οποιαδήποτε ακτίνα $R(t)$ εξελίσσεται σύμφωνα με τον τύπο

$$\frac{\partial R}{\partial t} = V(R, R_c(t)) := \frac{a}{R^2}\Big(\frac{R}{R_c(t)} - 1\Big), \tag{1.1}$$

όπου a είναι μία σταθερά και η κρίσιμη ακτίνα $R_c(t)$ είναι ίδια για όλα τα σωματίδια και η τιμή της καθορίζεται από τη διατήρηση της μάζας. Αν η μάζα στο πεδίο “ διάχυσης ” μπορεί να αγνοηθεί, τότε ο συνολικός όγκος των σωματιδίων διατηρείται και η κρίσιμη ακτίνα ισούται με τη μέση ακτίνα των ήδη υπαρχόντων σωματιδίων. Σωματίδια με ακτίνα μεγαλύτερη από $R_c(t)$ αυξάνουν, ενώ μικρά σωματίδια συρρικνώνονται σε πεπερασμένο χρόνο και εξαφανίζονται.

Η LSW θεωρία ασχολείται με ένα σύστημα στο οποίο τα περισσότερα αρχικά σωματίδια έχουν εξαφανιστεί αλλά ένα μεγάλο μέρος παραμένει.Το σύστημα χαρακτηρίζεται από την κατανομή της ακτίνας των σωματιδίων $n(t,R)$. Αυτή είναι μία κανονικοποιημένη πυκνότητα έτσι ώστε το $\int_0^R n(t,r)dr$ να δηλώνει τον αριθμό των σωματιδίων με ακτίνα μικρότερη από R διαιρεμένη με τον αριθμό N των αρχικά υπαρχόντων σωματιδίων. Η $n(t,R)$ ικανοποιεί το νόμο διατήρησης

$$\partial_t n + \partial_R(Vn) = 0, \tag{1.2}$$

όπου η κρίσιμη ακτίνα δίνεται από τον τύπο

$$R_c(t) = \int_0^\infty Rn(t,R)dR \Big/ \int_0^\infty n(t,R)dR. \tag{1.3}$$

Η αρχική πυκνότητα $n_0(R) = n(0,R)$ ικανοποιεί $\int_0^\infty n_0(R)dR = 1$.

Θα ήταν πιο βολικό να δουλέψουμε με τον όγκο υ των σωματιδίων αντί της ακτίνας R και με τη συνάρτηση της κατανομής ϕ αντί για την πυκνότητα n, όπου η ϕ ορίζεται να είναι το ποσοστό των αρχικά υπαρχόντων σωματιδίων με όγκο μεγαλύτερο ή ίσο από υ. Ο όγκος $\upsilon(t)$ οποιουδήποτε σωματιδίου θα ικανοποιεί :

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \Lambda(\upsilon, \theta(t)) := \upsilon^{1/3}\theta(t) - 1 \tag{1.4}$$

όπου το $\theta(t)$ είναι ίδιο για όλα τα σωματίδια και ορίζεται μέσω της κρίσιμης ακτίνας σύμφωνα με τον τύπο $\theta(t)^{-3} = (4\pi/3)R_c(t)^3$.

Οι Lifschitz-Slyozov-Wagner υποστήριξαν λοιπόν πως :

1. Η $R_c^3(t)$ αυξάνει γραμμικά για μεγάλους χρόνους και μάλιστα σαν $4t/9$,

2. Η κατανομή μεγέθους των σωματιδίων προσεγγίζει μία μορφή που είναι ομοιόθετη αν κάνουμε κανονικοποίηση ως προς την κρίσιμη ακτίνα, και

3. Γενικά, όλες οι κανονικοποιημένες κατανομές θα προσεγγίζουν την ίδια ομοιόθετη λύση. Αυτή η λύση θα είναι ομαλή, με συμπαγή φορέα και είναι υπολογίσιμη.

Σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε με την καλή τοποθέτηση του προβλήματος αρχικών τιμών, θα εξετάσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων, θα μας απασχολήσουν οι λύσεις ομοιοθεσίας και θα καταλήξουμε σε συνθήκες αναγκαίες και ικανές προκειμένου να συγκλίνει η λύση του προβλήματός μας, αφού προηγουμένως κάνουμε την κατάλληλη κανονικοποίηση στη συνάρτηση κατανομής.

2 Καλή Τοποθέτηση, Ομαλότητα, Κανονικοποίηση

2.1 Καλή τοποθέτηση του προβλήματος

Υπενθυμίζουμε ότι η φ είναι το ποσοστό των σωματιδίων με όγκο μεγαλύτερο ή ίσο με υ τη χρονική στιγμή t. Ως συνάρτηση του όγκου υ τη χρονική στιγμή t, η $\varphi(t,\upsilon)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση, από αριστερά συνεχής με πηδήματα, το $\varphi(t,0) = 1$ και $\int_0^\infty \varphi(t,\upsilon)d\upsilon$ (συνολικός όγκος) είναι ανεξάρτητος του χρόνου.

Η κατανομή του όγκου των σωματιδίων ,που ορίζεται από τη σχέση

$$f(t,\upsilon)d\upsilon = -d\varphi(t,\upsilon)$$

για κάθε σταθεροποιημένο t , συνδέεται με το n μέσω του τύπου

$$f(t,\upsilon)d\upsilon = n(t,R)dR.$$

Θα ασχοληθούμε με λύσεις για τις οποίες η αρχική κατανομή $f(0,\upsilon)d\upsilon$ είναι ένα τυχαίο μέτρο πιθανότητας με συμπαγή φορέα. Αυτό επιτρέπει κατανομές όπου ένα πεπερασμένο μέρος των σωματιδίων έχουν όλα για παράδειγμα το ίδιο μέγεθος. Ο συμπαγής φορέας αντιστοιχεί στην απαίτηση οι όγκοι των αρχικών σωματιδίων να είναι φραγμένοι.

Αντιστρέφουμε στη συνέχεια τη σχέση μεταξύ υ και φ και θεωρούμε τον όγκο υ στο χρόνο t ως συνάρτηση του $\varphi \in [0,1]$, και παίρνουμε τη $\upsilon(t,\varphi)$ έτσι ώστε η απεικόνιση $\varphi \mapsto \upsilon(t,\varphi)$ να είναι φθίνουσα και από δεξιά συνεχής με πηδήματα και με $\upsilon(t,1) = 0$. Για ένα πεπερασμένο σύστημα σωματιδίων με όγκους τοποθετημένους σε φθίνουσα σειρά $\upsilon_0(t) \geq ... \geq \upsilon_{N-1}(t)$ έχουμε ότι $\upsilon(t,\varphi) = \upsilon_j$ για φ που ανήκει στο $[j/N,(j+1)/N)$. Γενικά

$$\upsilon(t,x) = \sup\{y \mid \varphi(t,y) > x\} \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 \leq x < 1 = \max\varphi. \tag{2.1}$$

Ονομάζουμε την απεικόνιση $\varphi \mapsto \upsilon(t,\varphi)$ διάταξη όγκου για τη χρονική στιγμή t και τη φ διάταξη των σωματιδίων.

Η συνάρτηση κατανομής ορίζεται μέσω της διάταξης όγκου και σύμφωνα με την περιγραφή

$$\begin{aligned} \varphi(t,y) &= \sup\{x \mid \upsilon(t,x) > y\} \vee 0 \\ &= \begin{cases} \sup\{x \mid \upsilon(t,x) > y\} & \gamma\iota\alpha \quad 0 \leq y < \max\upsilon(t,x), \\ 0 & \gamma\iota\alpha \quad y \geq \max\upsilon(t,x). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Επιπλέον, όπως είδαμε η εξίσωση που καθορίζει την εξέλιξη της $\upsilon(t,\varphi)$ είναι

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \Lambda(\upsilon, \theta(t)) \equiv \upsilon^{1/3}\theta(t) - 1. \tag{2.3}$$

Ορίζουμε λοιπόν τον εξής μετρικό χώρο:

Ορισμός 2.1. : $\mathcal{A} := \{\ \upsilon_0 : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$: υ_0 φθίνουσα , δεξιά συνεχής , $\upsilon_0(1) = 0\}$.

Το σύνολο αυτό το εφοδιάζουμε με τη supremum μετρική

$$\|\upsilon_0\| = \sup_{\varphi \in [0,1]} |\upsilon_0(\varphi)|$$

και για οποιοδήποτε $T > 0$, ο $C([0,T];\mathcal{A})$ είναι ο μετρικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων $\upsilon : [0,T] \to \mathcal{A}$, με μετρική που δίνεται από τη $\sup_{[0,T]} \|\upsilon(t,\cdot)\|$.

Επίσης με $L^\infty_{loc}(0,\infty)$ συμβολίζουμε το χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων που είναι τοπικά φραγμένες στο $(0,\infty)$, όπου δύο συναρτήσεις θεωρούνται ισοδύναμες εάν συμπίπτουν σχεδόν παντού.

Αρχικός στόχος μας είναι να αποδείξουμε το εξής θεώρημα ολικής ύπαρξης και μοναδικότητας (βλ. [5]):

Θεώρημα 2.1. *Έστω $\upsilon_0 \in \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει μοναδικό ζευγάρι συναρτήσεων $\upsilon \in C([0,\infty);\mathcal{A})$ και $\theta \in L^\infty_{loc}(0,\infty)$ τέτοιο ώστε :*

$$\int_0^1 \upsilon(t,\varphi)d\varphi = \int_0^1 \upsilon_0(\varphi)d\varphi, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.4}$$

και

$$\upsilon(t,\varphi) = \upsilon_0(\varphi) + \int_0^t (\upsilon(s,\varphi)^{1/3}\theta(s) - 1)ds \tag{2.5}$$

για όλα τα (t,φ) που είναι τέτοια ώστε $\upsilon(t,\varphi) > 0$.
Επίσης η απεικόνιση από τη υ_0 στη υ είναι τοπικά Lipschitz συνεχής από το σύνολο $\mathcal{A}$ στο $C([0,T];\mathcal{A})$,για οποιοδήποτε $T > 0$.

Οι λύσεις του παραπάνω συστήματος αντιστοιχούν σε ασθενείς λύσεις του αρχικού προβλήματός μας.

Προκειμένου λοιπόν να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα θα ξεκινήσουμε αναφέροντας δύο λήμματα που είναι παραλλαγές της ανισότητας Gronwall:

Λήμμα 2.2. *Έστω συνάρτηση $G : [0,T] \to \mathbb{R}$ αύξουσα με $G(0) = 1$, και $K \geq 0$ μία σταθερά. Έστω επίσης μία $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχής και η οποία ικανοποιεί*

$$0 \leq f(t) \leq K + \int_{0^+}^{t} f(s)dG(s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Τότε θα ισχύει

$$f(t) \leq Ke^{G(t)}, \quad \text{για} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Λήμμα 2.3. *Έστω $G : [0,T] \to \mathbb{R}$ μία αύξουσα συνάρτηση και $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής, μη-αρνητική και αύξουσα.*

Τότε εφόσον $0 \leq t + f(t) \leq T$ θα ισχύει

$$\int_0^t (G(s + f(s)) - G(s))ds \leq \int_0^{f(0)} (G(f(0)) - G(s))ds + \int_0^t f(s)d\tilde{G}(s),$$

όπου $\tilde{G}(s) = G(s + f(s))$.

Σταθεροποιούμε λοιπόν ένα $T > 0$ και θεωρούμε $t \in [0,T]$. Έστω $\theta \in L^\infty(0,T)$ θετική και έστω $\upsilon \in C([0,T], \mathcal{A}([0,1]))$ και που είναι τέτοια ώστε

$$\int_0^1 \upsilon(t,\varphi)d\varphi = \int_0^1 \upsilon(0,\varphi)d\varphi \tag{2.6}$$

για όλα τα t και

$$\upsilon(t,\varphi) = \upsilon(0,\varphi) + \int_0^t (\upsilon(s,\varphi)^{1/3}\theta(s) - 1)ds \tag{2.7}$$

οποτεδήποτε το $\upsilon(t,\varphi) > 0$.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η απεικόνιση $t \to \upsilon(t,\varphi)$ είναι Lipschitz συνεχής και άρα είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη οπότε θα ικανοποιεί

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \upsilon^{1/3}\theta(t) - 1 \tag{2.8}$$

για σχεδόν κάθε t σε οποιοδήποτε διάστημα όπου η $\upsilon > 0$. Ορίζοντας $\varepsilon_0^{-1} = 8 \cdot esssup_{0 \leq t \leq T}\theta(t)$ παίρνουμε $\upsilon^{1/3}\theta - 1 \leq -\frac{1}{2}$, *για* $\upsilon < \varepsilon_0$ και με βάση αυτό προκύπτει ότι αν

$$\upsilon(t_0,\varphi) = 0 \Rightarrow \upsilon(t,\varphi) = 0, \text{για} \quad t \geq t_0.$$

Παραθέτουμε τους εξής συμβολισμούς:

$$\begin{aligned}\overline{\upsilon}(t) &:= \upsilon(t,0) = \max_{\varphi} \upsilon(t,\varphi),\\ \bar{t}(\varphi) &:= \inf\{t \in [0,T] | \upsilon(t,\varphi) = 0\} \wedge T,\\ \overline{\varphi}(t) &:= \sup\{\varphi \in [0,1] |\ \upsilon(t,\varphi) > 0\}\end{aligned} \tag{2.9}$$

η οποία $\overline{\varphi}(t)$ είναι ακριβώς το άκρο του φορέα της συνάρτησης $\upsilon(t,\cdot)$.

Οι συναρτήσεις $\bar{t}$ και $\overline{\varphi}$ είναι φθίνουσες και μάλιστα $\overline{\varphi}(t) > 0$ για όλα τα t, εφόσον η $\upsilon(t,\cdot)$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν λόγω της διατήρησης του όγκου. Τη συνάρτηση $\bar{t}$ την αποκαλούμε χρόνο εξαφάνισης για την $\upsilon(t,\varphi)$ στο φ εάν $\bar{t}(\varphi) < T$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε και αποδεικνύουμε ένα λήμμα το οποίο καθορίζει την τιμή του $\theta(t)$ και δίνει και ένα άνω φράγμα του.

Λήμμα 2.4. *Για σχεδόν κάθε $t \in [0,T]$ ισχύει*

$$0 < \theta(t) = \frac{\overline{\varphi}(t)}{\int_0^1 \upsilon(t,\varphi)^{1/3} d\varphi} \le \overline{\upsilon}(t)^{2/3} \le (e^t \overline{\upsilon}(0))^{2/3}. \tag{2.10}$$

Απόδειξη Υπολογίζουμε τη σχέση (2.7) στο $\min(t,\bar{t}(\varphi))$ και ολοκληρώνουμε ως προς $\varphi \in [0,1]$. Κάνοντας αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\bar{t}(\varphi) < t \quad \Rightarrow \upsilon(\bar{t}(\varphi),\varphi) = 0$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\overline{\varphi}(t)} \upsilon(t,\varphi) d\varphi - \int_0^1 \upsilon(0,\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^1 \int_0^{\min(t,\bar{t}(\varphi))} (\upsilon(s,\varphi)^{1/3}\theta(s) - 1) ds d\varphi \\ &= \int_0^t \int_0^{\overline{\varphi}(s)} (\upsilon(s,\varphi)^{1/3}\theta(s) - 1) d\varphi ds. \end{aligned}$$

Επειδή το t ήταν τυχαίο έπεται ότι

$$\int_0^{\overline{\varphi}(s)} (\upsilon(s,\varphi)^{1/3}\theta(s) - 1) d\varphi ds = 0$$

οπότε

$$\theta(t) = \frac{\overline{\varphi}(t)}{\int_0^1 \upsilon(t,\varphi)^{1/3} d\varphi}.$$

Προκειμένου να αποδείξουμε τις ανισότητες , χρησιμοποιούμε ότι $\overline{\varphi}(t) \leq 1$ και $\int_0^1 \upsilon^{1/3} d\varphi \geq \overline{\upsilon}(t)^{-2/3} \int_0^1 \upsilon d\varphi$. Τότε θα ισχύει $d\overline{\upsilon}/dt \leq \overline{\upsilon}^{1/3}\theta \leq \overline{\upsilon}$ από όπου και βρίσκουμε ότι $\theta(t) \leq \overline{\upsilon}(t)^{2/3}$ και $\overline{\upsilon}(t) \leq e^t \overline{\upsilon}(0)$. □

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα ακόμη λήμμα το οποίο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι αν $\upsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow \upsilon^{1/3}\theta - 1 < -\frac{1}{2}$:

Λήμμα 2.5. *Έστω $t_1 > 0$ και $\varepsilon_0 > 0$. Τότε*

$$\partial\upsilon/\partial t < -\frac{1}{2}, \ \text{για} \quad \text{σχεδόν} \quad \text{κάθε} \quad t \in [t_1, \bar{t}(\varphi)]$$

και

$$\frac{1}{2}(\bar{t}(\varphi) - t) \leq \upsilon(t,\varphi) \leq \varepsilon_0 - \frac{1}{2}(t - t_1), \ \forall t \in [t_1, \bar{t}(\varphi)].$$

Μία συνέπεια αυτού του λήμματος είναι το εξής πόρισμα :

Πόρισμα 2.6. *Έστω $T > 0$ και C_0 μία σταθερά. Τότε υπάρχει σταθερά $C = C(T, C_0)$ τέτοια ώστε*

$$\int_0^{\bar{t}(\varphi)} \upsilon(t,\varphi)^{-2/3} dt \leq C, \ \forall \varphi \in [0,1]. \tag{2.11}$$

Επιπλέον , η συνάρτηση β που ορίζεται ως εξής

$$\beta(t) = \int_0^{\overline{\varphi}(t)} \upsilon(t,\varphi)^{-2/3} d\varphi \tag{2.12}$$

είναι πεπερασμένη για σχεδόν κάθε $t \in [0,T]$ και $\int_0^t \beta(t)dt \leq C$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε πόσο κοντά παραμένουν δύο λύσεις όταν αρχικά η απόστασή τους είναι μικρή.

Η απάντηση δίνεται από την εξής πρόταση :

Πρόταση 2.7. *Έστω $T > 0$ και $C_0 > 0$. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C > 0$ και ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν (υ_1, θ_1) και (υ_2, θ_2) είναι δύο λύσεις που ανήκουν στο $\mathcal{A} \times L^\infty_{loc}$ και ικανοποιούν τις (2.4) και (2.5) και εάν υποθέσουμε ότι*

$$\|\upsilon_1(0,\cdot) - \upsilon_2(0,\cdot)\| \leq \delta$$

τότε

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\upsilon_1(t,\cdot) - \upsilon_2(t,\cdot)\| \leq C \|\upsilon_1(0,\cdot) - \upsilon_2(0,\cdot)\|. \tag{2.13}$$

Ξεκινάμε την απόδειξη υποθέτοντας ότι τα $T, C_0 > 0$ και θέτουμε

$$\varepsilon_1 = (8e^T C_0)^{-1}.$$

Υποθέτουμε επίσης ότι (υ_1, θ_1) και (υ_2, θ_2) που ανήκουν στο $C([0,T];\mathcal{A}) \times L^\infty(0,T)$ είναι δύο λύσεις του (2.4) και (2.5) τέτοιες ώστε $\max(\upsilon_1(0,0), \upsilon_2(0,0)) \leq C_0$.

Επιπλέον ορίζουμε

$$M(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \|\upsilon_1(s,\cdot) - \upsilon_2(s,\cdot)\|$$

και υποθέτουμε ότι $M(0) < \varepsilon_1$.

Παραθέτουμε στη συνέχεια τρία λήμματα που θα μας βοηθήσουν στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης:

Λήμμα 2.8. *Υπάρχει μία σταθερά $C_1 = C_1(T, C_0)$ τέτοια ώστε αν $0 \leq t \leq T$ τότε*

$$M(t) \leq C_1\Big(M(0) + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2 s|\, ds\Big) \tag{2.14}$$

Απόδειξη

Σταθεροποιούμε ένα $\varphi \in [0,1]$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\bar{t}_1(\varphi) \geq \bar{t}_2(\varphi)$. Για $t \in [0, \bar{t}_2(\varphi)]$ έχουμε

$$\upsilon_1(t,\varphi) - \upsilon_2(t,\varphi) = \upsilon_1(0,\varphi) - \upsilon_2(0,\varphi) + \int_0^t \upsilon_2(s,\varphi)^{1/3}(\theta_1(s) - \theta_2(s))ds + \int_0^t \theta_1(s)(\upsilon_1(s,\varphi)^{1/3} - \upsilon_2(s,\varphi)^{1/3})ds.$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|a - b| \leq |a^3 - b^3| / a^2$ οποτεδήποτε τα a, b είναι θετικά παίρνουμε την εξής εκτίμηση

$$|\upsilon_1(t,\varphi) - \upsilon_2(t,\varphi)| \leq |\upsilon_1(0,\varphi) - \upsilon_2(0,\varphi)| + C_\star \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|\, ds + C_\star^2 \int_0^t \upsilon_1(t,\varphi)^{-2/3} |\upsilon_1(s,\varphi) - \upsilon_2(s,\varphi)|\, ds \tag{2.15}$$

όπου θέσαμε $C_\star = (e^T C_0)^{1/3}$. Εάν το $t \in [\bar{t}_2(\varphi), \bar{t}_1(\varphi)]$ τότε $\upsilon_2(t,\varphi) = 0$ και

$$\upsilon_1(t,\varphi) \leq \upsilon_1(\bar{t}_2(\varphi),\varphi) + C_\star^2 \int_{\bar{t}_2(\varphi)}^t \upsilon_1(s,\varphi)^{1/3} ds.$$

Θέτοντας $t = \bar{t}_2(\varphi)$ στη σχέση (2.11) βρίσκουμε ότι αυτή θα ισχύει για όλα τα $t \in [0, \bar{t}_1(\varphi)]$. Χρησιμοποιώντας επιπλέον και την ανισότητα του Gronwall καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$\exp\Big(-C_\star^2 \int_0^t \upsilon_1(t,\varphi)^{-2/3} ds\Big) |\upsilon_1(t,\varphi) - \upsilon_2(t,\varphi)| \leq$$
$$|\upsilon_1(0,\varphi) - \upsilon_2(0,\varphi)| + C_\star \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|\, ds.$$

Χρησιμοποιώντας και το πόρισμα 2.6 καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Παραθέτουμε εν συνεχεία το δεύτερο λήμμα :

Λήμμα 2.9. *Έστω $\tau > 0$ και $\varepsilon_1 > 0$. Υποθέτουμε ότι*

$$M(t) \leq \varepsilon_1 \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Τότε θα ισχύει

$$|\overline{\varphi}_1(t) - \overline{\varphi}_2(t)| \leq \overline{\varphi}_1(t) - \overline{\varphi}_1(t + 2M(t)) + \overline{\varphi}_2(t) - \overline{\varphi}_2(t + M(t)) \qquad (2.16)$$

όσο το $t + 2M(t) \leq \tau$.

Προχωρούμε στο τρίτο λήμμα που θα μας βοηθήσει στην απόδειξη της Πρότασης 2.7.

Λήμμα 2.10. *Υπάρχει μία σταθερά C_2 η οποία εξαρτάται από τα T και C_0 και μία αύξουσα συνάρτηση $H : [0,T] \to \mathbb{R}$ η οποία εξαρτάται από τις λύσεις υ_1 και υ_2 του προβλήματος 2.6-2.7, και η οποία ικανοποιεί το εξής : $H(0) = 0$ και $H(T) \leq C_2$. Τότε εάν $M(t) \leq \varepsilon_1$ για $0 \leq t \leq \tau$ θα ισχύει*

$$\int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|\, ds \leq C_2 M(0) + \int_{0^+}^t M(s) dH(s) \qquad (2.17)$$

όσο το $t + 2M(t) \leq \tau$.

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τη σχέση για το $\theta(t)$ και την ανισότητα $\int \upsilon_j^{1/3} d\varphi \geq \bar{\upsilon}_j^{-2/3} \geq C_\star^{-2}$ βρίσκουμε ότι

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)| \geq C_\star^2 |\bar{\varphi}_1(t) - \bar{\varphi}_2(t)| + C_\star^4 \int_0^1 \left|\upsilon_1^{1/3} - \upsilon_2^{1/3}\right| d\varphi.$$

Ορίζουμε $\varphi_+(t) = \max \bar{\varphi}_1(t), \bar{\varphi}_2(t)$. Τότε εάν $\varphi < \varphi_+$ θα έχουμε

$$\left| \upsilon_1^{1/3} - \upsilon_2^{1/3} \right| \leq \frac{|\upsilon_1 - \upsilon_2|}{\upsilon_1^{2/3} + \upsilon_2^{2/3}}.$$

Όμως τότε από το Πόρισμα 2.6 και θέτοντας $t_+(\varphi) = \max \bar{t}_1(\varphi), \bar{t}_1(\varphi)$ θα προκύψει ότι

$$\int_0^{t_+(\varphi)} \frac{1}{\upsilon_1^{2/3} + \upsilon_2^{2/3}} dt \leq C(T, C_0).$$

Από το θεώρημα του *Fubini* προκύπτει ότι η συνάρτηση που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$h_0(t) = \int_0^{\varphi_+(t)} \frac{1}{\upsilon_1^{2/3} + \upsilon_2^{2/3}} d\varphi$$

είναι πεπερασμένη για σχεδόν όλα τα t και είναι ολοκληρώσιμη με $\int_0^T h_0(t)dt \leq C(T, C_0)$.

Τότε συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι

$$\int_0^1 \left| \upsilon_1^{1/3} - \upsilon_2^{1/3} \right| d\varphi \leq M(t) h_0(t),$$

για σχεδόν όλα τα $t \in [0, T]$.

Στη συνέχεια θέτοντας $G(t) = -\bar{\varphi}_j(t)$ για $j = 1, 2$ και $f(t) = 2M(t)$, στο Λήμμα 2.3 και κάνοντας απλές πράξεις καταλήγουμε στο ότι

$$\int_0^t \bar{\varphi}_j(s) - \bar{\varphi}_j(s + 2M(s))ds \leq 2M(0) + \int_{0^+}^t 2M(s) dH_j(s),$$

όπου $H_j(t) = -\bar{\varphi}_j(t + 2M(t)) + \bar{\varphi}_j(2M(0))$. Προφανώς η H_j ικανοποιεί $H_j(t) \leq 1, \forall t$.

Χρησιμοποιώντας όλες τις παραπάνω εκτιμήσεις καθώς και το αποτέλεσμα του Λήμματος 2.9 βρίσκουμε ότι

$$\int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)| \, ds \leq 4C_\star^2 M(0) + \int_{0^+}^t M(s) dH(s) ds,$$

όπου ορίσαμε

$$H(t) = 2C_\star^2 (H_1(t) + H_2(t)) + c_\star^4 \int_0^t h_0(s) ds.$$

Το ζητούμενο προκύπτει τώρα εύκολα. $\square$

Επιστρέφουμε λοιπόν στην απόδειξη της Πρότασης 2.7, όπου και θα χρησιμοποιήσουμε ένα επιχείρημα συνέχειας βασισμένο και στις παραπάνω εκτιμήσεις μαζί με την εκτίμηση

$$M(\tau) - M(t) \leq 2C_*^3(\tau - t), \tag{2.18}$$

οποτεδήποτε $0 \leq t \leq \tau \leq T$, το οποίο προκύπτει από την $\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \leq C_*^3$. Αφού η M είναι αύξουσα μπορούμε να βρούμε $\tilde{T} \leq T$ έτσι ώστε $\tilde{T} + 2M(\tilde{T}) = T$. Θέτοντας $\tau = t + 2M(t)$, η ανισότητα (2.18) δίδει

$$M(t + 2M(t)) \leq M(t)(1 + 4C_*^3), \tag{2.19}$$

οποτεδήποτε $t \leq \tilde{T}$. Τώρα ορίζουμε

$$\Omega = \left\{ t \in [0, \tilde{T}] | M(t + 2M(t)) \leq \varepsilon \right\}.$$

Εάν $M(0) \leq \delta_0 := \frac{\varepsilon_1}{(1+4C_*^3)}$, τότε $0 \in \Omega$ έτσι το Ω είναι μη-κενό, και προφανώς είναι και κλειστό.

Ισχυριζόμαστε ότι το Ω είναι ανοιχτό στο $[0, \tilde{T}]$ εάν το $M(0)$ είναι αρκετά μικρό.

Δεδομένου λοιπόν κάποιου $t_1 \in \Omega$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τα Λήμματα 2.8 και 2.10 για να πάρουμε ότι

$$M(t) \leq C_1(1 + C_2)M(0) + C_1 \int_{0^+}^{t} M(s) dH(s), \tag{2.20}$$

για $0 \leq t \leq t_1$. Τότε από το Λήμμα 2.2 έχουμε

$$M(t) \leq C_3 M(0), \tag{2.21}$$

για $0 \leq t \leq t_1$, όπου θέσαμε $C_3(T, C_0) = \exp(C_1 C_2) C_1 (1 + C_2)$. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τη (2.19) συμπεραίνουμε ότι $M(t_1 + 2M(t_1)) \leq C_4 M(0)$ ορίζοντας $C_4 = C_3(1 + 4C_*^3)$. Εφόσον υποθέσουμε ότι

$$M(0) \leq \delta_1 := \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{C_4},$$

προκύπτει ότι $M(t_1 + 2M(t_1)) < \varepsilon_1$, και αφού η M είναι συνεχής, το Ω είναι ανοιχτό στο $[0, \tilde{T}]$.

Συνεπώς έχουμε ότι $\tilde{T} \in \Omega$. Θέτοντας $t_1 = \tilde{T}$, αυτό σημαίνει ότι έχουμε $M(t) \leq \varepsilon_1$ και $M(t) \leq C_4 M(0)$ εάν $M(0) \leq \delta_1$, και έτσι τελειώνει η απόδειξη. $\square$

Ισχύει το εξής λήμμα:

Λήμμα 2.11. *: Το σύνολο των συναρτήσεων του $\mathcal{A}$ οι οποίες παίρνουν ένα πεπερασμένο πλήθος τιμών, είναι πυκνό στο $\mathcal{A}$.*

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1

Η μοναδικότητα προκύπτει από την Πρόταση 2.7. Για να αποδείξουμε την ύπαρξη για τυχαίο $v_0 \in \mathcal{A}$, από την Πρόταση 2.7 και το Λήμμα 2.4 προφανώς αρκεί να δείξουμε ολική ύπαρξη για v_0 σε ένα πυκνό σύνολο του $\mathcal{A}$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η v_0 παίρνει το πεπερασμένο πλήθος τιμών $y_0 > \cdots > y_N = 0$. Τότε θέτοντας $\varphi_j = \inf\{\varphi | v_0(\phi) = y_j\}$ παίρνουμε ότι $0 = \phi_0 < \cdots < \phi_N \leq 1$ και $v_0(\varphi) = y_j$ για $\varphi \in [\varphi_j, \varphi_{j+1}), j = 0, \cdots, N-1$. Αρχίζουμε να κατασκευάζουμε μία λύση λύνοντας το εξής σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\omega_j'(t) = \omega_j(t)^{1/3}\Theta(t) - 1, \quad j = 0, \cdots, N-1, \tag{2.22}$$

με

$$\Theta(t) = \varphi_N / \sum_{j=0}^{N-1} \omega_j(t)^{1/3}(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \tag{2.23}$$

με $\omega_j(0) = y_j$ σε ένα μέγιστο διάστημα $[0, t_N)$ στο οποίο $\min \omega_j(t) > 0$. Η λύση είναι ομαλή και $\omega_j(t) > \omega_{j+1}(t)$ από τη μοναδικότητα της εξίσωσης $\omega' = \omega^{1/3}\Theta - 1$. Η ποσότητα

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega_j(t)(\varphi_{j+1} - \varphi_j)$$

διατηρείται στο χρόνο και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι ίση με 1. Από τον τύπο της $\Theta(t)$ προκύπτει ότι $\Theta(t) \leq \omega_0(t)^{2/3}$ έτσι θα έχουμε $\omega_0' \leq \omega_0$ και έτσι $\omega_0(t) \leq e^t y_0$. Εάν $t_N < \infty$ τότε προκύπτει ότι ο μικρότερος συντελεστής εξαφανίζεται , δηλαδή $\omega_{N-1}(t_N^-) = \lim_{t \uparrow t_N} \omega_{N-1}(t) = 0$.

Για $t \in [0, t_N)$ ορίζουμε $v(t, \varphi) = \omega_j(t)$ για $\varphi \in [\varphi_j, \varphi_{j+1}), j = 0, \cdots, N-1$, και $\theta = \Theta$. Αυτό συνεπάγει μία λύση του Προβλήματος 2.6-2.7 για $t \in [0, t_N)$. Καθώς το $t \to t_N$ τα όρια $v(t_N^-, \varphi)$ και $\theta(t_N^-)$ υπάρχουν. Η λύση μπορεί έτσι να ξαναορισθεί στο χρόνο t με ένα λιγότερο συντελεστή(το N αντικαθίσταται από το $N-1$.) Μετά από πεπερασμένο αριθμό τέτοιων βημάτων η λύση πρέπει να υπάρχει ολικά. Έτσι για μία $v_0 \in \mathcal{A}$ με ένα πεπερασμένο πλήθος τιμών , μία ολική λύση θα υπάρχει. Έτσι ολοκληρώνεται και η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1. $\square$

2.2 Κανονικοποίηση

Πρόταση 2.12. *Έστω* $(\upsilon, \theta) \in C([0,\infty); \mathcal{A}) \times L^{\infty}_{loc}(0,\infty)$ *μία λύση του συστήματος*

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \upsilon^{1/3}\theta(t) - 1$$

και

$$\theta(t) = \frac{\overline{\varphi}(t)}{\int_0^1 \upsilon(t,\varphi)^{1/3} d\varphi} \leq \overline{\upsilon}(t)^{2/3}.$$

Για $x > 0$*, έστω* $\mathcal{V}(t,x)$ *μία λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης*

$$\mathcal{V}(t,x) = x + \int_0^t (\mathcal{V}(s,x)^{1/3}\theta(s) - 1) ds \tag{2.24}$$

ορισμένη στο μέγιστο διάστημα χρόνου $[0, \hat{t}(x))$ *όπου η* $\mathcal{V} > 0$*. Τότε*

(α) Η $\mathcal{V}$ *είναι αναλυτική ως προς* x*, δηλαδή όταν* $\mathcal{V}(t_0, x_0) > 0$ *η απεικόνιση* $x \mapsto \mathcal{V}(t_0, x)$ *είναι αναλυτική κοντά στο* x_0*.*

(β) Η $\partial \mathcal{V}/\partial x$ *είναι αυστηρά αύξουσα ως προς το χρόνο για κάθε* x*.*

(γ) $\upsilon(t,\varphi) = \mathcal{V}(t, \upsilon_0(\varphi)), \quad$ *όταν* $\quad \upsilon_0(\varphi) > 0.$

Απόδειξη

Καταρχήν παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{V}(t, \upsilon_0(\varphi)) = \upsilon_0(\varphi) + \int_0^t (\mathcal{V}(s, \upsilon_0(\varphi))^{1/3}\theta(s) - 1) ds.$$

Ξέρουμε όμως από το Θεώρημα 2.1 ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.5) είναι μοναδική . Άρα αφού η $\mathcal{V}$ την λύνει , έπεται ότι $\upsilon(t,\varphi) = \mathcal{V}(t, \upsilon_0(\varphi))$. Αυτό αποδεικνύει το (γ).

Για την απόδειξη του (β) σκεφτόμαστε ως εξής: Εφόσον η συνάρτηση $w \mapsto w^{1/3}$ είναι ομαλή για $w > 0$, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα θα έχουμε ότι η απεικόνιση $x \mapsto \mathcal{V}(t_0, x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη οποιασδήποτε τάξης και κάθε παράγωγος είναι Lipschitz συνεχής ως προς τον χρόνο , άρα και σχεδόν παντού διαφορίσιμη ως προς τον χρόνο .

Έχουμε ότι

$$\mathcal{V}(t,x) = x + \int_0^t (\mathcal{V}(s,x)^{1/3}\theta(s) - 1) ds,$$

οπότε
$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(t,x) = 1 + \int_0^t \frac{1}{3}\mathcal{V}(s,x)^{-2/3}\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(s,x)\ \theta(s) ds,$$
και
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{3}\ \mathcal{V}(t,x)^{-2/3}\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(t,x)\ \theta(t),$$
και επομένως
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(t,x) = \frac{\theta(t)}{3\mathcal{V}(t,x)^{2/3}}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(t,x). \tag{2.25}$$

Όμως
$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(0,x) = 1$$
και αν θέσουμε
$$\phi(t) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(t,x),$$
έχουμε
$$\phi'(t) = \frac{\theta(t)}{3\mathcal{V}(t,x)^{2/3}}\ \phi(t)$$
που με ολοκλήρωση δίνει
$$\ln\phi(t) = \ln\phi(0) + \int_0^t \frac{\theta(s)}{3\mathcal{V}(s,x)^{2/3}} ds \tag{2.26}$$
και τελικά ότι
$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(t,x) = \exp\int_0^t \frac{\theta(s)}{3\mathcal{V}(s,x)^{2/3}} ds.$$
Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(t,x) > 0$ οπότε από τη σχέση (2.25) έχουμε το ζητούμενο.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τον εξής ορισμό :

Ορισμός 2.2. Η $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ λέγεται **απολύτως μονότονη** όταν η g είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα
$$(-1)^\kappa g^{(\kappa)} \geq 0, \quad \forall \kappa = 0,1,2,\ldots$$

Ισχύει και η εξής πρόταση του Bernstein(βλ.[1]):

Πρόταση 2.13. *Έστω $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ μία απολύτως μονότονη συνάρτηση . Τότε η g έχει μία αναλυτική επέκταση στο ανοικτό δεξί ημίχωρο του μιγαδικού επιπέδου.*

Προκειμένου λοιπόν να αποδείξουμε το πρώτο ισχυρισμό θα χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα. Καταρχήν με δεδομένο το γεγονός ότι η $\mathcal{V}(t,x)$ ως συνάρτηση του x είναι γνησίως αύξουσα και του ότι δεν έχουμε έκρηξη της λύσης καταλήγουμε στο ότι

$$\mathcal{V}(t_0,x_0) < \mathcal{V}(t_0,x) < \infty \text{ για όλα τα } x > x_0.$$

Έτσι για να αποδείξουμε το (α) αρκεί να δείξουμε ότι εάν το $\mathcal{V}(t_0,x_0) > 0$ τότε η συνάρτηση $x \mapsto (\partial\mathcal{V}/\partial x)(t_0,x_0+x)$ είναι απολύτως μονότονη. Αυτό με τη σειρά του αποδεικνύεται εάν δείξουμε ότι η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$\omega(t,x) = -\mathcal{V}(t,-x+x_0) \text{ για } 0 \le t \le t_0,\ x < 0$$

ικανοποιεί $\partial_x^\kappa \omega \ge 0$ για όλους τους ακεραίους $\kappa \ge 1$.

Εφαρμόζουμε την μαθηματική επαγωγή. Για $\kappa = 1$ ισχύει λόγω του (β). Υποθέτουμε ότι ισχύει για $1 \le \kappa < j$ για κάποιο j.

Ορίζουμε $G(y) = -(-y)^{1/3}$ για $y < 0$ και παραγωγίζοντας παίρνουμε ότι

$$G^{(n)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(-y)^{-2/3}, & n = 1 \\ \frac{1}{3}\frac{2}{3}(-y)^{-5/3}, & n = 2 \\ \frac{1}{3}\frac{2}{3}\cdots\frac{2n-1}{3}(-y)^{-\frac{2n+2}{3}}, & n \text{ περιττό } \ge 3 \\ \frac{1}{3}\frac{2}{3}\cdots\frac{2n}{3}(-y)^{-\frac{2n+3}{3}}, & n \text{ άρτιο} \ge 4 \end{cases}$$

και όπως παρατηρούμε οι παράγωγοι $G^{(\kappa)}$ είναι θετικές για όλα τα $\kappa \ge 1$.

Τώρα

$$G(\omega) = -(-\omega)^{1/3} = -\mathcal{V}(t,-x+x_0)^{1/3},$$

και παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}G(\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{V}(t,-x+x_0)^{-2/3}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}(t,-x+x_0),$$

δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial x}G(\omega) = \frac{1}{3\mathcal{V}(t,-x+x_0)^{2/3}}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}(t,-x+x_0). \tag{2.27}$$

Επίσης

$$\omega(t,x) = -\mathcal{V}(t,-x+x_0)$$

οπότε

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}(t,-x+x_0). \tag{2.28}$$

Επίσης από τις σχέσεις (2.25),(2.27) παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial x}G(\omega) = \frac{1}{\theta(t)}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial x}(t,x)$$

και άρα

$$\theta(t)\frac{\partial}{\partial x}G(\omega) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial x}(t,x).$$

Επιπλέον

$$\frac{\partial}{\partial x}\theta(t)\frac{\partial}{\partial x}G(\omega) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial x}(t,x)$$

και άρα

$$\theta(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(\omega) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(t,x)$$

οπότε

$$\frac{\partial}{\partial t}\partial_x^j\omega = \theta(t)\partial_x^j(G(\omega)). \tag{2.29}$$

Επίσης μετά από παραγωγίσεις προκύπτει ότι

$$\partial_x^j G(\omega) = G'(\omega)\partial_x^j\omega + R_j(t,x)$$

όπου το $R_j(t,x)$ είναι ένα άθροισμα όρων της μορφής $c_a G^{(\kappa)}(\omega)\partial_x^{\alpha_1}\omega\ldots\partial_x^{\alpha_n}\omega$ το οποίο έχει θετικούς συντελεστές και οι παράγωγοι $\partial_x^\kappa\omega$ είναι τάξης $\kappa \leq j-1$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\partial_x^\kappa\omega \geq 0$. Επίσης τα $G^\kappa \geq 0$ οπότε το $R_j(t,x) \geq 0$. Συνοψίζοντας έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial t}\partial_x^j\omega = \theta(t)\partial_x^j(G(\omega)) = \theta(t)\left(G'(\omega)\partial_x^j\omega + R_j(t,x)\right). \tag{2.30}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{\partial}{\partial t}\partial_x^j\omega = \theta(t)\left(G'(\omega)\partial_x^j\omega + R_j(t,x)\right).$$

Θέτουμε

$$\phi(t) = \partial_x^j\omega(t,x)$$

και έχουμε

$$\phi'(t) = \theta(t)G'(\omega)\phi(t) + R_j(t,x)\theta(t)$$

δηλαδή

$$R_j(t,x)\theta(t) = \phi'(t) - \theta(t)G'(\omega)\phi(t). \tag{2.31}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την (2.31) με τη συνάρτηση $\mu(t) = \exp\int_0^t -\theta(r)G'(\omega(r,x))dr$ και με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\phi(t) = \phi(0)\exp\int_0^t \theta(r)G'(\omega(r,x))dr$$

$$+\int_0^t \theta(s)R_j(s,x)\frac{\exp-\int_0^s \theta(r)G'(\omega(r,x))dr}{\exp-\int_0^t \theta(r)G'(\omega(r,x))dr}ds.$$

Οπότε

$$\phi(t) = \phi(0)\exp\int_0^t \theta(r)G'(\omega(r,x))dr$$

$$+\int_0^t \theta(s)R_j(s,x)\exp\int_s^t \theta(r)G'(\omega(r,x))dr.$$

Όμως επειδή

$$\phi(0) = \partial_x^j\omega(0,x) \ \text{και}\ \frac{\partial}{\partial x}\omega(0,x) = \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}(0,-x+x_0) = 1,$$

τελικά παίρνουμε

$$\partial_x^j\omega(t,x) = \int_0^t \omega(t,x)\exp\int_0^t \theta(r)G'(\omega(r,x))dr\theta(s)R_j(s,x)ds \geq 0$$

για $0 \leq t \leq t_0,\ x < 0$. Έτσι τελειώνει η μαθηματική επαγωγή και καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

2.3 Εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής

Παρακάτω παρατίθεται ένα λήμμα το οποίο περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της $\varphi(t,\upsilon)$ και συνεπάγει ότι είναι μία λύση της εξίσωσης

$$\partial_t\varphi + \Lambda(\upsilon,\theta(t))\partial_\upsilon\varphi = 0 \tag{2.32}$$

οποτεδήποτε τα αρχικά δεδομένα $\varphi_0 = \varphi(0,\cdot)$ είναι διαφορίσιμα. Μάλιστα οι χαρακτηριστικές (βλ. [4]) αυτής της εξίσωσης δίνονται από τη συνάρτηση $\mathcal{V}$ της προηγούμενης πρότασης.

Λήμμα 2.14. *Έστω* $\upsilon_0 \in \mathcal{A}$ *και* (υ, θ) *η λύση του (2.4)-(2.5). Έστω επίσης* $\mathcal{V}$ *μία λύση του (2.24). Θέτουμε*

$$\phi(t,y) = \sup\{x | \upsilon(t,x) > y\} \vee 0.$$

Εάν ισχύει: $0 < \mathcal{V}(t,y) < \overline{\upsilon}(t)$ *τότε θα έχουμε*

$$\phi(t, \mathcal{V}(t,y)) = \phi_0(y).$$

Απόδειξη

Από την Πρόταση 2.12 έχουμε ότι $\upsilon(t,\phi) = \mathcal{V}(t, \upsilon_0(\phi))$. Οπότε

$$\phi(t, \mathcal{V}(t,y)) = \sup\{x|\ \upsilon(t,x) > \mathcal{V}(t,y)\} \vee 0$$

δηλαδή

$$\phi(t, \mathcal{V}(t,y)) = \sup\{x|\ \mathcal{V}(t, \upsilon_0(x)) > \mathcal{V}(t,y)\} \vee 0$$

και άρα

$$\phi(t, \mathcal{V}(t,y)) = \begin{cases} \sup\{x|\ \mathcal{V}(t,\upsilon_0(x)) > \mathcal{V}(t,y)\} & \gamma\iota\alpha \quad 0 \leq \mathcal{V}(t,y) < \max_x \mathcal{V}(t, \upsilon_0(x)) \\ 0 & \gamma\iota\alpha \quad \mathcal{V}(t,y) \geq \overline{\upsilon}(t) \end{cases}$$

Όμως η $\mathcal{V}(t,x)$ είναι γνήσια θετική στο διάστημα όπου ορίζεται και επίσης $\max_x \mathcal{V}(t, \upsilon_0(x)) = \max_x \upsilon(t,x) = \overline{\upsilon}(t)$ άρα

$$\phi(t, \mathcal{V}(t,y)) = \sup\{x|\ \mathcal{V}(t, \upsilon_0(x)) > \mathcal{V}(t,y)\} \qquad \gamma\iota\alpha \qquad 0 < \mathcal{V}(t,y) < \overline{\upsilon}(t).$$

Με απλούς υπολογισμούς και με δεδομένο ότι η $\mathcal{V}(t,x)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς x έχουμε τον εξής ισχυρισμό:

$$\mathcal{V}(t, \upsilon_0(x)) > \mathcal{V}(t,y) \Leftrightarrow \upsilon_0(x) > y$$

οπότε

$$\sup\{x|\ \mathcal{V}(t,\upsilon_0(x)) > \mathcal{V}(t,y)\} = \sup\{x|\ \upsilon_0(x) > y\} \qquad \gamma\iota\alpha \qquad 0 < \mathcal{V}(t,y) < \overline{\upsilon}(t).$$

Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{V}(t,y) < \overline{\upsilon}(t) \Leftrightarrow y < \overline{\upsilon}(0).$$

Όμως το $\sup\{x|\ \mathcal{V}(t,\upsilon_0(x)) > \mathcal{V}(t,y)\}$ *για* $y < \overline{\upsilon}(0)$ είναι εξ ορισμού το $\phi(0,y) = \phi_0(y)$. Άρα καταλήγουμε στο ότι

$$\phi(t, \mathcal{V}(t,y)) = \phi_0(y) \qquad \acute{o}\tau\alpha\nu \qquad 0 < \mathcal{V}(t,y) < \overline{\upsilon}(t). \quad \square$$

3 Ασυμπτωτική συμπεριφορά I

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα για το πώς συμπεριφέρεται η λύση καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο χωρίς να κάνουμε ομοιοθεσία στη λύση, πράγμα που θα εφαρμόσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Καταρχήν ξεκινάμε με έναν συμβολισμό:

Συμβολίζουμε το μέγιστο όγκο σωματιδίου τη χρονική στιγμή t ως εξής :

$$\overline{\upsilon}(t) = \upsilon(t,0) = \max_{\varphi} \upsilon(t,\varphi).$$

Ξέρουμε ότι

$$\theta(t) = \frac{\overline{\varphi}(t)}{\int_0^{\overline{\varphi}(t)} \upsilon(t,\varphi)^{1/3} d\varphi},$$

οπότε

$$\overline{\upsilon}(t)^{1/3}\theta(t) = \overline{\upsilon}(t)^{1/3} \frac{\overline{\varphi}(t)}{\int_0^{\overline{\varphi}(t)} \overline{\upsilon}(t)^{1/3} d\varphi}.$$

Όμως επειδή

$$\int_0^{\overline{\varphi}(t)} \overline{\upsilon}(t)^{1/3} d\varphi \leq \{\max_{\varphi} \upsilon(t,\varphi)\}^{1/3} \overline{\varphi}(t)$$

προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\int_0^{\overline{\varphi}(t)} \overline{\upsilon}(t)^{1/3} d\varphi} \geq \frac{1}{\overline{\varphi}(t)\overline{\upsilon}(t)^{1/3}},$$

δηλαδή

$$\frac{\overline{\varphi}(t)}{\int_0^{\overline{\varphi}(t)} \overline{\upsilon}(t)^{1/3} d\varphi} \geq \frac{1}{\overline{\upsilon}(t)^{1/3}}$$

και άρα

$$\overline{\upsilon}(t)^{1/3}\theta(t) \geq \frac{\overline{\upsilon}(t)^{1/3}}{\overline{\upsilon}(t)^{1/3}} = 1.$$

Επίσης ξέρουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(t,\varphi) = \upsilon^{1/3}\theta(t) - 1$$

και επομένως $\frac{d\overline{\upsilon}(t)}{dt} \geq 0$, δηλαδή η $\overline{\upsilon}(t)$ είναι αύξουσα.

Ο συνολικός όγκος των σωματιδίων στο σύστημα θα δίνεται από τον τύπο

$$V = \int_0^1 \upsilon(t,\varphi) d\varphi.$$

3.1 Η περίπτωση μάζας Dirac στο άκρο του φορέα

Θεωρούμε την περίπτωση που ένα θετικό μέρος των σωματιδίων έχει όγκο ίσο με το μέγιστο δυνατό στο σύστημα . Χρησιμοποιώντας την κατανομή του όγκου των σωματιδίων f αυτό σημαίνει ότι τα αρχικά δεδομένα f_0 μεταφέρουν μία μάζα Dirac στο άκρο του φορέα . Δηλαδή

$$f_0(\upsilon) = \alpha\delta(\upsilon - \overline{\upsilon}_0) + \tilde{f}_0(\upsilon)$$

όπου $0 < \alpha \leq 1$, $\delta(\upsilon - \overline{\upsilon}_0)$ δηλώνει τη κατανομή Dirac στο $\overline{\upsilon}_0$ και η $\tilde{f}_0$ ικανοποιεί

$$\lim_{\upsilon \to \overline{\upsilon}_0} \int_{\upsilon}^{\infty} \tilde{f}_0(y) dy = 0.$$

Για τη συνάρτηση της διάταξης όγκου υ αυτό σημαίνει ότι η λύση $\upsilon(t, \cdot)$ είναι σταθερή σε ένα διάστημα της μορφής $[0, \alpha)$.

Σε αυτήν την περίπτωση η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων χαρακτηρίζεται από την εξής πρόταση :

Πρόταση 3.1. *Έστω ότι τα αρχικά δεδομένα $\upsilon_0 \in \mathcal{A}$ για κάποια τιμή του $\alpha \in (0, 1]$ ικανοποιούν*

$$\upsilon_0(0) = \upsilon_0(\varphi) \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 \leq \varphi < \alpha$$

και

$$\upsilon_0(0) > \upsilon_0(\varphi) \quad \gamma\iota\alpha \quad \varphi > \alpha.$$

Τότε θα ισχύουν:

(α) $\lim_{t\to\infty} \overline{\varphi}(t) = \alpha$

(β) $\lim_{t\to\infty} \upsilon(t, \varphi) = \begin{cases} V/\alpha, & 0 \leq \varphi < \alpha, \\ 0\,, & \varphi > \alpha \end{cases}$

(γ) $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, \upsilon) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq \upsilon < V/\alpha, \\ 0, & \upsilon > V/\alpha. \end{cases}$

Απόδειξη

Περίπτωση 1^{η} : $0 \leq \varphi < \alpha$

Έχουμε

$$\upsilon(t, \varphi) = \upsilon_0(\varphi) + \int_0^t (\upsilon(s, \varphi)^{1/3}\theta(s) - 1) ds \tag{3.1}$$

και

$$\upsilon(t,0) = \upsilon_0(0) + \int_0^t (\upsilon(s,0)^{1/3}\theta(s) - 1)ds \tag{3.2}$$

όπου το τελευταίο, με βάση τα αρχικά δεδομένα ,δηλαδή ότι $\upsilon_0(0) = \upsilon_0(\varphi)$ για $0 \leq \varphi < \alpha$, ισούται με

$$\upsilon(t,0) = \upsilon_0(\varphi) + \int_0^t (\upsilon(s,0)^{1/3}\theta(s) - 1)ds. \tag{3.3}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3.1) και (3.3) παίρνουμε ότι

$$\upsilon(t,\varphi) = \upsilon(t,0) - \int_0^t (\upsilon(s,0)^{1/3} - \upsilon(s,\varphi)^{1/3})\theta(s)ds.$$

Όμως η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι μη αρνητική οπότε και το ολοκλήρωμα είναι μη αρνητικό άρα καταλήγουμε στο ότι

$$\upsilon(t,\varphi) \geq \upsilon(t,0) = \overline{\upsilon}(t)$$

και αφού το $\upsilon(t,\varphi) \leq \overline{\upsilon}(t)$ για κάθε φ προκύπτει ότι $\upsilon(t,\varphi) = \overline{\upsilon}(t)$.

Περίπτωση 2^η : $\varphi > \alpha$ Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι $\upsilon_0(0) > \upsilon_0(\varphi)$ για $\varphi > \alpha$ και τις σχέσεις (3.1) και (3.3) έχουμε

$$\overline{\upsilon}(t) > \upsilon_0(\varphi) + \int_0^t (\upsilon(s,0)^{1/3}\theta(s) - 1)ds$$

οπότε

$$\overline{\upsilon}(t) > \upsilon(t,\varphi) + \int_0^t (\upsilon(s,0)^{1/3} - \upsilon(s,\varphi)^{1/3})\theta(s)ds.$$

Όπως εξηγήθηκε και προηγουμένως το ολοκλήρωμα είναι μη αρνητικό και άρα $\overline{\upsilon}(t) > \upsilon(t,\varphi)$.

Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε ότι

$$\upsilon(t,\varphi) = \overline{\upsilon}(t) \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 \leq \varphi < \alpha \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon(t,\varphi) < \overline{\upsilon}(t) \quad \gamma\iota\alpha \quad \varphi > \alpha.$$

Λόγω της διατήρησης του όγκου και των αρχικών δεδομένων έχουμε

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\infty \upsilon(t,\varphi)d\varphi = \int_0^1 \upsilon(t,\varphi)d\varphi \\ &= \int_0^\alpha \upsilon(t,\varphi)d\varphi + \int_\alpha^1 \upsilon(t,\varphi)d\varphi \\ &= \int_0^\alpha \overline{\upsilon}(t)d\varphi + \int_\alpha^1 \upsilon(t,\varphi)d\varphi \geq \int_0^\alpha \overline{\upsilon}(t)d\varphi = \alpha\overline{\upsilon}(t). \end{aligned}$$

Άρα

$$V \geq \alpha \overline{\upsilon}(t) \Rightarrow \overline{\upsilon}(t) \leq \frac{V}{\alpha},$$

δηλαδή η $\overline{\upsilon}(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και εφόσον είναι και αύξουσα έπεται ότι συγκλίνει. Ορίζουμε

$$\upsilon_{\infty} = \lim_{t \to \infty} \overline{\upsilon}(t).$$

Έχουμε $V = \int_0^1 \upsilon(t, \varphi) d\varphi \leq \int_0^1 \overline{\upsilon}(t) d\varphi \leq \overline{\upsilon}(t)$. Άρα $\overline{\upsilon}(t) \geq V > 0$. Επίσης ξέρουμε ότι για $0 \leq \varphi < \alpha$

$$\upsilon(t, \varphi) = \overline{\upsilon}(t) \geq V > 0 \Rightarrow \overline{\varphi}(t) \geq \alpha, \quad \forall t.$$

Επειδή η $\overline{\varphi}(t)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0 θα συγκλίνει και

$$\lim_{t \to \infty} \overline{\varphi}(t) \geq 0.$$

Υποθέτουμε ότι $\lim_{t \to \infty} \overline{\varphi}(t) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Ισχυρισμός

Υπάρχει $\varphi > \alpha$ τέτοια ώστε $\upsilon(t, \varphi) > 0$ για όλα τα $t > 0$.

Απόδειξη

Από τον ορισμό του ορίου υπάρχει $t_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall\, t \geq t_1 \quad \overline{\varphi}(t) \geq \beta > \alpha.$$

Έστω $t < t_1$. Η $\overline{\varphi}$ είναι φθίνουσα οπότε

$$\overline{\varphi}(t) \geq \overline{\varphi}(t_1) \geq \beta > \alpha.$$

Άρα

$$\overline{\varphi}(t) \geq \beta > \alpha \qquad \forall t > 0.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\overline{\varphi}(t) \geq \beta > \frac{\beta + \alpha}{2} > \alpha \qquad \forall t > 0. \tag{3.4}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι

$$\upsilon(t, \frac{\beta + \alpha}{2}) > 0 \quad \forall t > 0.$$

Ακολουθούμε την εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε $\upsilon(t_0, \frac{\beta+\alpha}{2}) = 0$. Τότε $\overline{\varphi}(t_0) \leq \frac{\beta+\alpha}{2}$ που είναι άτοπο από τη σχέση (3.4).
Άρα βρήκαμε μία φ την $\varphi = \frac{\beta+\alpha}{2}$ η οποία είναι γνήσια μεγαλύτερη από α και

$$\upsilon(t, \frac{\beta+\alpha}{2}) > 0 \quad \forall t > 0.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3.1) και (3.2) παίρνουμε

$$\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi) = \upsilon_0(0) - \upsilon_0(\varphi) + \int_0^t (\overline{\upsilon}(s)^{1/3} - \upsilon(s,\varphi)^{1/3})\theta(s)ds \tag{3.5}$$

και παραγωγίζοντας τη τελευταία θα έχουμε ότι για σχεδόν κάθε t

$$\partial_t(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)) = (\overline{\upsilon}(t)^{1/3} - \upsilon(t,\varphi)^{1/3})\theta(t). \tag{3.6}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την ανισότητα $\alpha - \beta \geq (\alpha^3 - \beta^3)/3\alpha^2$ για $\alpha > \beta > 0$ παίρνουμε

$$\partial_t(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)) \geq \theta(t)\frac{\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)}{3\overline{\upsilon}(t)^{2/3}},$$

και επομένως

$$\partial_t(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)) \geq \theta(t)\frac{\overline{\upsilon}(t)^{1/3}}{3\overline{\upsilon}(t)} (\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)). \tag{3.7}$$

Όμως το $\overline{\upsilon}(t)^{1/3}\theta(t) \geq 1$ και $\frac{1}{\overline{\upsilon}(t)} \geq \frac{\alpha}{V}$. Οπότε

$$\partial_t(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)) \geq \frac{\alpha(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi))}{3V}$$

και έτσι

$$\partial_t(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)) - \frac{\alpha(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi))}{3V} \geq 0.$$

Δημιουργούμε τέλειο διαφορικό πολλαπλασιάζοντας με $e^{\frac{-\alpha t}{3V}}$. Τότε

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{\frac{-\alpha t}{3V}}(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi))) \geq 0,$$

και εύκολα προκύπτει ότι

$$e^{\frac{-\alpha t}{3V}}(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)) \; \text{είναι αύξουσα}. \tag{3.8}$$

Άρα
$$e^{\frac{-\alpha t}{3V}}(\overline{\upsilon}(t)-\upsilon(t,\varphi)) \geq e^{0}(\overline{\upsilon}(0)-\upsilon(0,\varphi)),$$
δηλαδή
$$\overline{\upsilon}(t)-\upsilon(t,\varphi) \geq (\overline{\upsilon}(0)-\upsilon(0,\varphi))e^{\frac{\alpha t}{3V}}. \tag{3.9}$$

Επειδή το $\varphi > \alpha \Rightarrow \overline{\upsilon}(0) > \upsilon(0,\varphi) \Rightarrow \overline{\upsilon}(0)-\upsilon(0,\varphi) > 0$ οπότε αφήνοντας το $t \to \infty$ στη σχέση (3.5) καταλήγουμε στο ότι
$$\lim_{t\to\infty}(\overline{\upsilon}(t)-\upsilon(t,\varphi)) = \infty$$
που είναι άτοπο, λόγω του ότι η $\overline{\upsilon}(t)$ είναι φραγμένη και το $\upsilon(t,\varphi) > 0 \quad \forall t > 0$. Άρα για κάθε $\varphi > \alpha$ το $\upsilon(t,\varphi) = 0$ για αρκετά μεγάλο t. Δηλαδή
$$\lim_{t\to\infty}\upsilon(t,\varphi) = 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad \forall\varphi > \alpha \quad \kappa\alpha\iota \ \lim_{t\to\infty}\overline{\varphi}(t) = \alpha. \tag{3.10}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι
$$\upsilon_{\infty} = \lim_{t\to\infty}\overline{\upsilon}(t) = \frac{V}{\alpha}.$$

Έχουμε
$$V = \int_0^{\infty}\upsilon(t,\varphi)d\varphi = \int_0^{\alpha+\varepsilon}\upsilon(t,\varphi)d\varphi + \int_{\alpha+\varepsilon}^{\infty}\upsilon(t,\varphi)d\varphi = \int_0^{\alpha+\varepsilon}\upsilon(t,\varphi)d\varphi$$
λόγω του ότι για κάθε $\varphi > \alpha$ το $\upsilon(t,\varphi) = 0$ για αρκετά μεγάλο t.
Άρα
$$V = \int_0^{\alpha+\varepsilon}\upsilon(t,\varphi)d\varphi \leq \int_0^{\alpha+\varepsilon}\overline{\upsilon}(t)d\varphi \leq \overline{\upsilon}(t)(\alpha+\varepsilon).$$
Οπότε
$$\frac{V}{\alpha+\varepsilon} \leq \overline{\upsilon}(t) \leq \frac{V}{\alpha}$$
για αρκετά μεγάλο t. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε ότι
$$\lim_{t\to\infty}\overline{\upsilon}(t) = \frac{V}{\alpha}.$$
Άρα για $0 \leq \varphi < \alpha$ ισχύει $\upsilon(t,\varphi) = \overline{\upsilon}(t)$ και $\lim_{t\to\infty}\upsilon(t,\varphi) = \lim_{t\to\infty}\overline{\upsilon}(t) = \frac{V}{\alpha}$, ενώ για $\varphi > \alpha$, $\lim_{t\to\infty}\upsilon(t,\varphi) = 0$.

Επίσης για $\varphi < \overline{\varphi}(t)$ έχουμε $\upsilon(t,\varphi) > 0$ και για $\varphi > \alpha$ έχουμε $\upsilon(t,\varphi) < \overline{\upsilon}(t)$. Άρα

$$0 \le \upsilon < \overline{\upsilon}(t) \Rightarrow \alpha < \varphi \le \overline{\varphi}(t) \Rightarrow \alpha \le \varphi \le \overline{\varphi}(t)$$

και επειδή η $\varphi(t,\upsilon)$ είναι από αριστερά συνεχής ως προς υ, έπεται ότι για

$$0 \le \upsilon \le \overline{\upsilon}(t) \Rightarrow \alpha \le \varphi \le \overline{\varphi}(t).$$

Οπότε έχουμε την εξής κατάσταση

$$\begin{cases} \alpha \le \varphi(t,\upsilon) \le \overline{\varphi}(t), & 0 \le \upsilon \le \overline{\upsilon}(t), \\ \varphi(t,\upsilon) = 0, & \upsilon > \overline{\upsilon}(t). \end{cases} \tag{3.11}$$

Έστω λοιπόν ένα υ με $0 \le \upsilon < \frac{V}{\alpha}$. Όμως το $\lim_{t\to\infty} \overline{\upsilon}(t) = \frac{V}{\alpha}$,άρα βρίσκουμε t_0 τέτοιο ώστε $\forall\ t \ge t_0 \ \ \overline{\upsilon}(t) \ge \upsilon$. Οπότε από τη σχέση (3.6) παίρνουμε $\alpha \le \varphi(t,\upsilon) \le \overline{\varphi}(t)\ \gamma\iota\alpha\ \forall\ t \ge t_0$ και αφήνοντας το $t \to \infty$ έχουμε από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων ότι

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\upsilon) = \alpha.$$

Έστω τώρα ένα υ με $\upsilon > \frac{V}{\alpha}$. Επειδή το $\lim_{t\to\infty} \overline{\upsilon}(t) = \frac{V}{\alpha}$ και λόγω του ότι η $\overline{\upsilon}(t)$ είναι αύξουσα παίρνουμε

$$\upsilon > \frac{V}{\alpha} \ge \overline{\upsilon}(t), \forall\ t \ge t_0.$$

Άρα $\upsilon > \overline{\upsilon}(t), \forall\ t \ge t_0$ και από τη σχέση (3.6) έχουμε ότι $\varphi(t,\upsilon) = 0, \forall\ t \ge t_0$. Άρα $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\upsilon) = \lim_{t\to\infty} 0 = 0$. Τελικά

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\upsilon) = \begin{cases} \alpha, & 0 \le \upsilon < \frac{V}{\alpha}, \\ 0, & \upsilon > \frac{V}{\alpha}. \end{cases}$$

□

3.2 Η περίπτωση της μη-ύπαρξης μάζας Dirac στο άκρο του φορέα

Από εδώ και στο εξής και καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας υποθέτουμε ότι κανένα θετικό μέρος των σωματιδίων δεν έχει όγκο ίσο με το μέγιστο δυνατό όγκο δηλαδή με το $\overline{\upsilon}$. Για την αρχική κατανομή όγκου f_0 αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{\upsilon\to\overline{\upsilon}_0} \int_{\upsilon}^{\infty} f_0(y)dy = 0.$$

Πρόταση 3.2. *Υποθέτουμε ότι* $\upsilon_0 \in \mathcal{A}$ *και* $\upsilon_0(0) > \upsilon_0(\varphi)$ *για όλα τα* $\varphi \in (0,1]$. *Τότε*

(α) $\lim_{t\to\infty} \overline{\upsilon}(t) = \infty$ *, δηλαδή ο μέγιστος δυνατός όγκος τείνει στο άπειρο.*

(β) $\liminf_{t\to\infty} \theta(t) = 0$ *, δηλαδή η κρίσιμη ακτίνα είναι άφρακτη.*

(γ) $\lim_{t\to\infty} \overline{\phi}(t) = 0$, *δηλαδή το μέρος των σωματιδίων που εξακολουθεί να υπάρχει στο χρόνο* t *φθίνει στο* 0.

Σημείωση: *Δεν ξέρουμε αν το αποτέλεσμα στο (β) μπορεί να βελτιωθεί έτσι ώστε* $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = 0$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι η $\overline{\upsilon}(t)$ είναι άφρακτη χρησιμοποιώντας τη διατήρηση του όγκου. Ακολουθούμε την εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι $\overline{\upsilon}(t) \leq C$ για όλα τα t. Εάν πάρουμε μία οποιαδήποτε $\varphi > 0$ τέτοια ώστε το $\upsilon(t,\varphi) > 0$ τότε για αυτήν θα ισχύουν οι σχέσεις (3.5) ,(3.6) και (3.7). Όμως το $\frac{1}{\overline{\upsilon}(t)} \geq C$ και $\overline{\upsilon}(t)^{1/3}\theta(t) \geq 1$. Οπότε

$$\partial_t(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)) \geq \frac{1}{3C}(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)).$$

Δημιουργούμε τέλειο διαφορικό πολλαπλασιάζοντας με $e^{-\frac{t}{3C}}$ και έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-\frac{t}{3C}})(\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)) \geq 0$$

και άρα

$$\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi) \geq (\overline{\upsilon}(0) - \upsilon_0(\varphi))e^{\frac{t}{3C}}. \tag{3.12}$$

Από την υπόθεση ισχύει ότι $\upsilon_0(0) > \upsilon_0(\varphi)$ για όλα τα $\varphi \in (0,1]$. Οπότε για κάθε $\varphi > 0$ το $\overline{\upsilon}(0) - \upsilon_0(\varphi) = \upsilon_0(0) - \upsilon_0(\varphi) > 0$. Οπότε αν στη σχέση (3.12) στείλουμε το t στο άπειρο θα πρέπει το $\overline{\upsilon}(t) - \upsilon(t,\varphi)$ να τείνει και αυτό στο άπειρο ,το οποίο όμως είναι άτοπο, γιατί η $\overline{\upsilon}(t)$ είναι άνω φραγμένη και το $\upsilon(t,\varphi) > 0 \quad \forall\ \varphi > 0$. Συνεπώς για κάθε $\varphi > 0$ το $\upsilon(t_0,\varphi) = 0$, για κάποιο t_0. Άρα και για $t \geq t_0$ το $\upsilon(t,\varphi) = 0$. Επιπρόσθετα η $\upsilon(t,\varphi)$ είναι από δεξιά συνεχής ως προς φ. Έπεται ότι για κάθε φ το $\upsilon(t,\varphi) = 0$ για αρκετά μεγάλο t. Αυτό προφανώς σημαίνει ότι $\overline{\varphi}(t) \to 0$ καθώς το $t \to \infty$.

Τώρα ,

$$V = \int_0^1 \upsilon(t,\varphi)d\varphi = \int_0^{\overline{\varphi}(t)} \upsilon(t,\varphi)d\varphi$$

$$\leq \int_0^{\overline{\varphi}(t)} \overline{\upsilon}(t) d\varphi = \overline{\upsilon}(t)\overline{\varphi}(t) \to 0 \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad t \to \infty.$$

δηλαδή $V = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο ,γιατί αν υποθέσουμε ότι αληθεύει, τότε έχουμε

$$0 = V = \int_0^1 \upsilon(t,\varphi) d\varphi = \int_0^1 \upsilon_0(\varphi) d\varphi \Rightarrow \upsilon_0(\varphi) \equiv 0 \quad \forall\, \varphi,$$

όπου το τελευταίο ισχύει επειδή η $\upsilon_0(\varphi)$ είναι φθίνουσα και από δεξιά συνεχής. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $\upsilon_0(0) > \upsilon_0(\varphi)$ για $\varphi \in (0,1]$. Άρα η $\overline{\upsilon}(t)$ είναι άφρακτη και εφόσον δεν είναι άνω φραγμένη θα αποκλίνει στο άπειρο.

Τώρα για την απόδειξη του δεύτερου σκέλους πηγαίνουμε με άτοπο. Έστω ότι $\liminf \theta(t) > 0$. Ξέρουμε ότι η $\theta(t)$ είναι γνήσια θετική σε πεπερασμένα διαστήματα χρόνου, οπότε υπάρχει ένα $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε $\theta(t) \geq \delta_1,\ \gamma\iota\alpha\ t \in [0, t_1]$.

Ισχυρισμός

Υπάρχει ένα $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε $\theta(t) \geq \delta_2, \forall t \geq t_1$.

Απόδειξη του ισχυρισμού

Εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι

$$\forall\, \delta_2 > 0 : \exists t \geq t_1\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \theta(t) \leq \delta_2.$$

Παίρνω $\delta_2 = \frac{1}{n}$. Τότε $\exists t_n \geq t_1\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \theta(t_n) \leq \frac{1}{n}$.

Εάν η ακολουθία (t_n) είναι φραγμένη τότε υπάρχει υπακολουθία της που συγκλίνει ,δηλαδή υπάρχει t_{n_k} τέτοια ώστε $t_{n_k} \to t_0 \geq 0$. Τότε αφού $0 \leq \theta(t_{n_k}) \leq \frac{1}{n_k}$ προκύπτει ότι $\lim_{k\to\infty} \theta(t_{n_k}) = 0$. Επειδή $t_{n_k} \to t_0 \Rightarrow t_{n_k} \in [0, 2t_0]$ και δείξαμε ότι για τα $t_{n_k} \in [0, 2t_0]$ $\tau o \lim_{k\to\infty} \theta(t_{n_k}) = 0$. Άτοπο, διότι $\theta(t) \geq \frac{1}{\overline{\upsilon}(t)^{1/3}} \geq \frac{1}{\overline{\upsilon}(T)^{1/3}} > 0$, για οποιοδήποτε $T > 0$ και εφόσον η $\overline{\upsilon}(t)$ είναι αύξουσα. Άρα αφού η $\theta(t) > 0$ δεν μπορεί να υπάρχει ακολουθία t_n τέτοια ώστε $\theta(t_n) \to \infty$ καθώς το $n \to \infty$. Άρα η $t_n \to \infty$ και $\theta(t_n) \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Αλλά αυτό σημαίνει ότι $\liminf_{t\to\infty} \theta(t) = 0$ που είναι άτοπο από την υπόθεσή μας. Οπότε έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{ll} \exists \delta_2 > 0 : \theta(t) \geq \delta_2, & t \geq t_1 \\ \exists \delta_1 > 0 : \theta(t) \geq \delta_1, & t \in [0, t_1] \end{array} \right\}.$$

Παίρνουμε $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$. Συμπερασματικά έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\theta(t) \geq \delta$ για όλα τα t.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το εξής :

Ισχυρισμός

Υπάρχει $\varepsilon > 0$ και (t_0, φ_0) με $\varphi_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\upsilon(t_0, \varphi_0)^{1/3}\delta - 1 \geq \varepsilon$.

Απόδειξη του ισχυρισμού

Επειδή $\lim_{t\to\infty} \overline{\upsilon}(t) = \infty$ έχουμε ότι $\forall\ M > 0, \quad \exists t_0 > 0 : \forall\ t \geq t_0 \quad \overline{\upsilon}(t) > M$. Επομένως

$$\forall\ M > 0 \quad \exists t_0 > 0 : \quad \overline{\upsilon}(t)^{1/3}\delta - 1 > M^{1/3}\delta - 1.$$

Επιλέγουμε τώρα εκείνο το M που είναι τέτοιο ώστε $M^{1/3}\delta - 1 = \varepsilon > 0$. Οπότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και t_0 τέτοια ώστε $\overline{\upsilon}(t_0)^{1/3}\delta - 1 > \varepsilon$, δηλαδή $\upsilon(t, 0)^{1/3}\delta - 1 > \varepsilon$. Επειδή η $\upsilon(t_0, \varphi)$ είναι από δεξιά συνεχής ως προς φ ισχύει

$$\lim_{\varphi\to 0^+} \upsilon(t, \varphi) = \upsilon(t, 0)$$

δηλαδή

$$\forall\ \varepsilon_1 > 0 \quad \exists k > 0 : \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 < \varphi < k \quad |\upsilon(t_0, \varphi) - \upsilon(t_0, 0)| < \varepsilon_1$$

άρα

$$\forall\ \varepsilon_1 > 0 \quad \exists k > 0 : \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 < \varphi < k \quad \upsilon(t_0, 0) < \upsilon(t_0, \varphi) + \varepsilon_1$$

επομένως

$$\forall\ \varepsilon_1 > 0 \quad \exists k > 0 : \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 < \varphi < k \quad \varepsilon < \upsilon(t_0, 0)^{1/3}\delta - 1$$

και

$$\varepsilon < \upsilon(t_0, 0)^{1/3}\delta - 1(\upsilon(t_0, \varphi) + \varepsilon_1)^{1/3}\delta - 1.$$

Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon_1 > 0$ αφήνοντας το $\varepsilon_1 \to 0$ παίρνουμε ότι

$$\upsilon(t_0, \varphi)^{1/3}\delta - 1 \geq \varepsilon, \quad 0 < \varphi < k.$$

Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ και (t_0, φ_0) με $\varphi_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\upsilon(t_0, \varphi_0)^{1/3}\delta - 1 \geq \varepsilon. \tag{3.13}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ένα τρίτο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(t,\varphi_0) = \upsilon^{1/3}\theta(t) - 1 \geq \varepsilon > 0$$

για σχεδόν όλα τα $t \geq t_0$.

Απόδειξη του ισχυρισμού

Καταρχήν για $t = t_0$ ισχύει αφού

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(t_0,\varphi_0) = \upsilon^{1/3}(t_0,\varphi_0)\theta(t_0) - 1 \geq \upsilon^{1/3}(t_0,\varphi_0)\delta - 1 > \varepsilon > 0,$$

τα οποία αληθεύουν από τους προηγούμενους ισχυρισμούς.

Εν συνεχεία δείχνουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για τα t που ανήκουν σε μία περιοχή του t_0, έστω στην $[t_0, t_0 + h]$ για κάποιο $h > 0$.

Ξέρουμε ότι η $t \to \upsilon(t,\varphi)$ είναι Lipschitz συνεχής άρα συνεχής. Οπότε

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(t,\varphi_0) = \upsilon^{1/3}(t,\varphi_0)\theta(t_0) - 1 \geq \upsilon^{1/3}(t,\varphi_0)\delta - 1$$

και

$$\lim_{t\to t_0}(\upsilon^{1/3}(t,\varphi_0)\delta - 1) > \varepsilon.$$

Άρα για $t \to t_0$, δηλαδή για t σε μία περιοχή του t_0 το $\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(t,\varphi_0) \geq \varepsilon > 0$.

Θα δείξουμε ότι τώρα ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για κάθε διάστημα της μορφής $[t_0, t_0 + h], h > 0$.

Χρησιμοποιούμε την εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι για κάποιο $\xi \geq t_0 + h$ ισχύει

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(\xi,\varphi_0) = \upsilon^{1/3}(\xi,\varphi_0)\theta(\xi) - 1 < \varepsilon.$$

Τότε ολοκληρώνοντας στο $[t_0, \xi)$ παίρνουμε

$$\int_{t_0}^{\xi} \frac{\partial \upsilon}{\partial t}(t,\varphi_0)dt = \int_{t_0}^{\xi}(\upsilon^{1/3}(t,\varphi_0)\theta(t) - 1)dt$$

και άρα

$$\upsilon^{1/3}(\xi,\varphi_0)\theta(\xi) - 1) \geq \varepsilon$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεσή μας. Οπότε

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(t,\varphi_0) \geq \varepsilon > 0, \quad \forall\, t \geq t_0$$

και έτσι αποδεικνύεται ο ισχυρισμός μας.

Από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι η $\upsilon(t,\varphi_0)$ είναι αύξουσα στο $[t_0,\infty)$, οπότε

$$\upsilon(t,\varphi_0) \geq \upsilon(t_0,\varphi_0) + \varepsilon(t-t_0).$$

Καθώς όμως το $t \to \infty$ η $\upsilon(t,\varphi_0)$ αποκλίνει στο άπειρο και άρα είναι άφρακτη. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την εξής παρατήρηση

$$V = \int_0^1 \upsilon(t,\varphi)d\varphi \geq \int_0^{\varphi_0} \upsilon(t,\varphi)d\varphi \geq \int_0^{\varphi_0} \upsilon(t,\varphi_0)d\varphi$$

δηλαδή

$$\upsilon(t,\varphi_0) \leq \frac{V}{\varphi_0} < \infty, \quad \forall\, t$$

και άρα

$$\upsilon(t,\varphi_0) \quad \textit{είναι} \quad \textit{φραγμένη}.$$

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα του δεύτερου ερωτήματος, ότι δηλαδή,

$$\liminf_{t\to\infty} \theta(t) = 0.$$

Τώρα για την απόδειξη του τρίτου σκέλους σκεφτόμαστε ως εξής:

$$\theta(t) = \frac{\overline{\varphi}(t)}{\int_0^{\overline{\varphi}(t)} \upsilon^{1/3}(t,\varphi)} d\varphi$$

δηλαδή

$$\overline{\varphi}(t) = \theta(t)\int_0^{\overline{\varphi}(t)} \upsilon^{1/3}(t,\varphi)d\varphi$$

και άρα

$$\overline{\varphi}(t) = \theta(t) + \theta(t)V = \theta(t)(1+V)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $\upsilon^{1/3} < 1+\upsilon$.
Οπότε

$$0 \leq \overline{\varphi}(t) \leq \theta(t)(1+V)$$

δηλαδή

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \overline{\varphi}(t) \leq (1+V)\liminf_{t\to\infty} \theta(t).$$

Όμως όπως αποδείχθηκε προηγουμένως $\liminf_{t\to\infty}\theta(t) = 0$, και άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

4 Λύσεις Ομοιοθεσίας

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με λύσεις ομοιοθεσίας. Καταρχάς θεωρούμε την εξής παραδοχή : η κατανομή του όγκου έχει άπειρο φορέα. Οποιαδήποτε κατανομή ομοιοθεσίας φ για την οποία ο συνολικός όγκος διατηρείται και είναι πεπερασμένος είναι της μορφής

$$\varphi(t,\upsilon)=\alpha(t)\tilde{\psi}(\alpha(t)\upsilon) \tag{4.1}$$

για κάποιες φθίνουσες συναρτήσεις $\tilde{\psi}$ και α. Το παραπάνω δικαιολογείται αν σκεφτούμε ότι όταν εννοούμε λύση ομοιοθεσίας εννούμε να είναι της μορφής $\varphi(t,\upsilon)=\alpha(t)f(\beta(t)\upsilon)$, όπου παίρνουμε την $\alpha(t)>0$. Επειδή θέλουμε ο όγκος να διατηρείται παίρνουμε

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\infty \varphi(t,\upsilon)d\upsilon=\int_0^1 \upsilon(t,\varphi)d\varphi \\ &= \int_0^\infty \alpha(t)f(\beta(t)\upsilon)d\upsilon \\ &= \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\int_0^\infty f(z)dz, \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $z=\beta(t)\upsilon$, και εφόσον είναι ανεξάρτητος του t θα πρέπει το $\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}=\lambda$ για κάποιο λ. Έπεται ότι $\beta(t)=\lambda\alpha(t)$ και αν απορροφήσουμε το λ στη f παίρνουμε $\alpha(t)=\beta(t)$ και $\tilde{\psi}(t)=\lambda f$.
Οπότε $\varphi(t,\upsilon)=\alpha(t)\tilde{\psi}(\alpha(t)\upsilon)$ και $V=\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\int_0^\infty f(z)dz=\int_0^\infty\tilde{\psi}(s)ds$.

Επίσης $\overline{\varphi}(t)=\varphi(t,0)$ οπότε

$$\theta(t)=\frac{\overline{\varphi}(t)}{\int_0^{\overline{\varphi}(t)}\upsilon^{1/3}(t,\varphi)d\varphi}=\frac{\varphi(t,0)}{\int_0^{\varphi(t,0)}\upsilon^{1/3}(t,\varphi)d\varphi}.$$

Όμως

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi(t,0)}\upsilon^{1/3}(t,\varphi)d\varphi &= \int_0^{\varphi(t,0)}\varphi'\upsilon^{1/3}(t,\varphi)d\varphi \\ &= \varphi(t,0)\upsilon^{1/3}(t,\varphi(t,0))-0\upsilon^{1/3}(t,0)- \\ &- \int_0^{\varphi(t,0)}\varphi\frac{1}{3}\upsilon^{\frac{-2}{3}}(t,\varphi)\frac{\partial\upsilon(t,\varphi)}{\partial\varphi}d\varphi. \end{aligned}$$

Επίσης το $\upsilon(t,\varphi(t,0))=0$ και άρα

$$\int_0^{\varphi(t,0)} \upsilon^{1/3}(t,\varphi)d\varphi = -\int_0^{\varphi(t,0)} \varphi\frac{1}{3}\upsilon^{\frac{-2}{3}}(t,\varphi)\frac{\partial\upsilon(t,\varphi)}{\partial\varphi}d\varphi. \tag{4.2}$$

Κάνουμε την εξής αλλαγή μεταβλητών :

$$\upsilon=\upsilon(t,\varphi)$$

και παραγωγίζοντας παίρνουμε :

$$d\upsilon=\frac{\partial\upsilon(t,\varphi)}{\partial\varphi}d\varphi.$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} \varphi=0\to\upsilon &= \overline{\upsilon}(t) \\ \kappa\alpha\iota \quad \varphi=\varphi(t,0)\to\upsilon &= \upsilon(t,\varphi(t,0))=0. \end{aligned}$$

και άρα από την (4.2) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi(t,0)} \upsilon^{1/3}(t,\varphi)d\varphi &= -\int_{\overline{\upsilon}(t)}^{0} \varphi(t,\upsilon)\frac{1}{3}\ \upsilon^{-\frac{2}{3}}d\upsilon \\ &= \int_0^{\overline{\upsilon}(t)} \varphi(t,\upsilon)\frac{1}{3}\ \upsilon^{-\frac{2}{3}}d\upsilon \\ &= \int_0^{\infty}\frac{1}{3}\ \varphi(t,\upsilon)\upsilon^{-\frac{2}{3}}d\upsilon. \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{\varphi(t,0)}{\int_0^\infty \frac{1}{3}\ \varphi(t,\upsilon)\upsilon^{-\frac{2}{3}}d\upsilon} = \frac{\varphi(t,0)}{\int_0^\infty \frac{1}{3}\ \upsilon^{-\frac{2}{3}}\alpha(t)\tilde{\psi}(\alpha(t)\upsilon)d\upsilon} \\ &= \frac{\alpha(t)\tilde{\psi}(0)}{\int_0^\infty \frac{1}{3}\ \frac{s^{\frac{-2}{3}}}{\alpha(t)^{-\frac{2}{3}}}\tilde{\psi}(s)ds} = \frac{\alpha(t)\tilde{\psi}(0)}{\alpha(t)^{\frac{2}{3}}\int_0^\infty \frac{1}{3}\ s^{\frac{-2}{3}}\tilde{\psi}(s)ds} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\theta(t)=\frac{\alpha(t)^{\frac{1}{3}}\tilde{\psi}(0)}{\int_0^\infty \frac{1}{3}\ s^{\frac{-2}{3}}\tilde{\psi}(s)ds}. \tag{4.3}$$

Λήμμα 4.1. *Οποιαδήποτε ομοιόθετη συνάρτηση κατανομής φ της μορφής*

$$\varphi(t,\upsilon) = \alpha(t)\tilde{\psi}(\alpha(t)\upsilon)$$

με συνολικό όγκο πεπερασμένο έχει συμπαγή φορέα.

Απόδειξη του λήμματος

Από τη σχέση (4.3) κάνοντας ομοιοθεσία ως προς α και ψ μπορούμε να πετύχουμε το $\theta(t)\alpha(t)^{\frac{-1}{3}} \equiv 1$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.14 έχουμε

$$\varphi(t,\mathcal{V}(t,y)) = \varphi_0(y) = \varphi(0,y) \quad \text{όταν} \quad 0 < \mathcal{V}(t,y) < \overline{\upsilon}(t).$$

Συνεπώς

$$\alpha(t)\ \tilde{\psi}(\alpha(t)\ \mathcal{V}(t,y)) = \alpha(0)\ \tilde{\psi}(\alpha(0)\ y) \quad \text{όταν} \quad 0 < \mathcal{V}(t,y) < \overline{\upsilon}(t). \tag{4.4}$$

Ψάχνουμε για μη σταθερές λύσεις. Οι συναρτήσεις $\alpha(t)$ και $\tilde{\psi}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις διότι, από το λήμμα 2.14 έχουμε $\varphi(t,\mathcal{V}(t,y)) = \varphi_0(y)$ και τα αρχικά δεδομένα $\varphi_0(y)$ είναι διαφορίσιμα. Άρα η $\varphi_0(y)$ είναι διαφορίσιμη ως προς y και ως προς t. Επίσης από την Πρόταση 2.12 η $\mathcal{V}$ είναι αναλυτική ως προς y, οπότε η φ είναι διαφορίσιμη ως προς y ως σύνθεση διαφορίσιμων συναρτήσεων. Επιπλέον η φ_0 είναι διαφορίσιμη ως προς t οπότε και η φ είναι διαφορίσιμη ως προς t. Επειδή ισχύει $\varphi(t,\upsilon) = \alpha(t)\tilde{\psi}(\alpha(t)\upsilon)$ συμπεραίνουμε ότι η $\alpha(t)$ είναι διαφορίσιμη ως προς t και η $\tilde{\psi}$ είναι διαφορίσιμη ως προς y. Οπότε παραγωγίζοντας την σχέση (4.4) παίρνουμε αφού πρώτα θέσουμε $\alpha(t)\ \mathcal{V}(t,y) = s$

$$\alpha'(t)\tilde{\psi}(s) + \alpha(t)\tilde{\psi}'(s)\frac{\partial s}{\partial t}(t,y) = 0,$$

δηλαδή

$$\alpha'(t)\tilde{\psi}(s) + \alpha(t)\tilde{\psi}'(s)\left\{\alpha'(t)\ \mathcal{V}(t,y) + \alpha(t)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}(t,y)\right\} = 0$$

και άρα

$$\alpha'(t)\left\{\tilde{\psi}(s) + \tilde{\psi}'(s)\alpha(t)\ \mathcal{V}(t,y)\right\} + \alpha^2(t)\tilde{\psi}'(s)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}(t,y) = 0. \tag{4.5}$$

Όμως

$$\mathcal{V}(t,y) = y + \int_0^t (\mathcal{V}^{1/3}(s,y)\theta(s) - 1)ds$$

και με παραγώγιση έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}(t,y) = \mathcal{V}^{1/3}(t,y)\theta(t) - 1 = \mathcal{V}^{1/3}(t,y)\alpha(t)^{1/3} - 1$$

δηλαδή

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}(t,y) = s^{1/3} - 1. \tag{4.6}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.5) και (4.6) παίρνουμε

$$\alpha'(t)\left\{\tilde{\psi}(s) + \tilde{\psi}'(s)s\right\} + \alpha^2(t)\tilde{\psi}'(s)(s^{1/3} - 1) = 0. \tag{4.7}$$

Εν συνεχεία με χωρισμό μεταβλητών στην τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} = \frac{(1 - s^{1/3})\tilde{\psi}'(s)}{\tilde{\psi}(s) + s\tilde{\psi}'(s)}. \tag{4.8}$$

Έχουμε λοιπόν ότι μία συνάρτηση του t είναι ίση με μία συνάρτηση του s έπεται ότι θα πρέπει να είναι σταθερές, δηλαδή $\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} = c$.
Όμως η $\alpha(t)$ είναι φθίνουσα και άρα $c \leq 0$. Μάλιστα η $c < 0$. Αν η $c = 0$ τότε έπεται ότι και η $\alpha'(t) = 0$. Τότε όμως από τη σχέση (4.7) θα είχαμε

$$\alpha^2(t)\tilde{\psi}'(s)(s^{1/3} - 1) = 0, \forall s \geq 0. \tag{4.9}$$

Αν το $\alpha(t) \equiv 0$ τότε η $\varphi(t,\upsilon) = 0$, αλλά ψάχνουμε για μη σταθερές λύσεις. Έστω ότι $\alpha(t) \not\equiv 0$. Τότε για να ισχύει η (4.9) για κάθε $s \geq 0$ θα πρέπει αναγκαστικά η $\tilde{\psi}'(s) = 0 \Rightarrow \tilde{\psi}(s) = c_1$, όπου c_1 είναι μία σταθερά. Τότε όμως από τη σχέση (4.4) θα είχαμε

$$\alpha(t)c_1 = \alpha(0)c_1 \Rightarrow \alpha(t) = \alpha(0),$$

δηλαδή και η $\alpha(t)$ θα ήταν σταθερή ,από όπου έπεται ότι και η $\varphi(t,\upsilon)$ θα ήταν σταθερή ,που αντίκειται στην υπόθεσή μας για μη σταθερές λύσεις. Οπότε $\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} = c < 0$.

Εν συνεχεία θέτουμε $\beta = \frac{-\alpha^2}{\alpha'}$ και έχουμε

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} = \frac{-1}{\beta}$$

δηλαδή
$$\alpha(t) = \frac{\beta\alpha(0)}{\beta + t\alpha(0)}. \tag{4.10}$$

Επίσης από την (4.8) παίρνουμε
$$\frac{(1 - s^{1/3})\tilde{\psi}'(s)}{\tilde{\psi}(s) + s\tilde{\psi}'(s)} = \frac{-1}{\beta}$$
δηλαδή
$$\tilde{\psi}(s) + (s + \beta(1 - s^{1/3}))\tilde{\psi}'(s) = 0 \tag{4.11}$$
και άρα
$$-\ln(\frac{\tilde{\psi}(s)}{\tilde{\psi}(0)}) = \int_0^s \frac{dx}{x + \beta(1 - x^{1/3})} \tag{4.12}$$
όσο το $\tilde{\psi} > 0$. Η συνάρτηση $s \to s + \beta(1 - s^{1/3})$ είναι κυρτή με τιμή $\beta > 0$ στο $s = 0$ και στο $s = (\beta/3)^{3/2}$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της που είναι η $\beta(1-\sqrt{4\beta/27})$. Αυτή είναι θετική εάν $\beta < 27/4$ και μη-αρνητική εάν $\beta \geq 27/4$.
<u>Περίπτωση 1^η :</u> $\beta < 27/4$.
Τότε η $f(s) = s + \beta(1 - s^{1/3})$ δεν έχει ρίζα, οπότε η σχέση (4.12) ορίζεται καλά και με προσεγγίσεις παίρνουμε ότι για κάποια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ και για μεγάλες τιμές του s ισχύει
$$-\ln(\frac{\tilde{\psi}(s)}{\tilde{\psi}(0)}) = \int_0^s \frac{dx}{x + \beta(1 - x^{1/3})} \sim \int_1^s \frac{dx}{x} \sim \ln(s) + k,$$
δηλαδή
$$\ln(\frac{\tilde{\psi}(s)}{\tilde{\psi}(0)}) \sim \ln\frac{1}{s} - k$$
και άρα
$$\tilde{\psi}(s) \sim \frac{c}{s}, \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad s \to \infty \tag{4.13}$$
εφόσον η $\tilde{\psi}$ ορίζεται για όλα τα $s > 0$. Οπότε
$$V = \int_0^\infty \tilde{\psi}(s)ds \sim \int_1^\infty \frac{c}{s}ds = \infty,$$
το οποίο είναι άτοπο, γιατί στην υπόθεσή μας ο όγκος είναι πεπερασμένος. Άρα η περίπτωση $\beta < 27/4$ δεν υφίσταται.

Περίπτωση 2^η : $\beta \geq 27/4$.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = \beta > 0$ και $f(\frac{27}{8}) = \frac{27}{8} - \frac{\beta}{2} < 0$. Άρα από Bolzano υπάρχει μία ρίζα στο $(1, \frac{27}{8})$. Ονομάζω s_0 τη μικρότερη θετική ρίζα στο $(1, \frac{27}{8})$. Ορίσαμε $f(s) = s + \beta(1 - s^{1/3})$.Παρατηρούμε ότι, για να έχουμε ρίζα ,θα πρέπει καθώς το $\beta \to \infty$ το $1 - s^{1/3} \to 0$, δηλαδή $s \to 1$. Αν λοιπόν $s \to s_0$ τότε το ολοκλήρωμα στη σχέση (4.12) αποκλίνει και άρα

$$\lim_{s \to s_0} \ln(\frac{\tilde{\psi}(s)}{\tilde{\psi}(0)}) = -\infty$$

και άρα

$$\lim_{s \to s_0} \tilde{\psi}(s) = 0, \quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon} \quad \tilde{\psi}(0) < \infty.$$

Άρα $\tilde{\psi}(s) \to 0$, καθώς $s \to s_0$ και θέτουμε $\tilde{\psi}(s) = 0$ $\gamma\iota\alpha$ $s \geq s_0$.

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι ο φορέας της $\tilde{\psi}(s)$ είναι το διάστημα $[0, s_0)$. Έχουμε

$$s \geq s_0 \Leftrightarrow \alpha(t)\upsilon \geq s_0 \Leftrightarrow \upsilon \geq \frac{s_0}{\alpha(t)}.$$

Ο αριθμός $\frac{s_0}{\alpha(t)}$ είναι πεπερασμένος διότι, το s_0 είναι πεπερασμένο και το $\alpha(t)$ είναι πεπερασμένο, διότι αν το τελευταίο ήταν άπειρο τότε θα προέκυπτε και το $\theta(t)$ να ήταν άπειρο σύμφωνα με τον τύπο (4.3). Άρα η $\varphi(t, \upsilon) = 0$ για $\upsilon \geq \frac{s_0}{\alpha(t)}$, από όπου συμπεραίνουμε ότι η $\varphi(t, \upsilon)$ έχει συμπαγή φορέα. $\square$

Είδαμε λοιπόν ότι όλες οι λύσεις ομοιοθεσίας με πεπερασμένο όγκο έχουν συμπαγή φορέα. Για να περιγράψουμε αυτές τις λύσεις με ένα τρόπο που σχετίζονται με τα παρακάτω, κάνουμε κανονικοποίηση ως προς το άκρο του φορέα, εισάγοντας τις μεταβλητές u και $\psi_\star(u)$ οι οποίες ικανοποιούν

$$1 - u = \frac{\upsilon}{\overline{\upsilon}(t)} = \frac{\upsilon\alpha(t)}{\overline{\upsilon}(t)\alpha(t)} = \frac{s}{s_0}, \tag{4.14}$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \psi_\star(u) = \frac{\overline{\upsilon}(t)\varphi(t,\upsilon)}{V} = \frac{\overline{\upsilon}(t)\alpha(t)\tilde{\psi}(\alpha(t)\upsilon)}{V} = \frac{s_0\tilde{\psi}(s)}{V} \tag{4.15}$$

για $0 < s < s_0 \Leftrightarrow 0 < u < 1$. Σημειώνουμε ότι $\upsilon\alpha(t) = s$ και $\overline{\upsilon}(t)\alpha(t) = s_0$. Επεξηγούμε την τελευταία σχέση: Ξέρουμε ότι

$$\overline{\upsilon}(t) = \upsilon(t, 0) = \sup\{\, y |\ \varphi(t, y) > 0\}.$$

Οπότε $\varphi(t,\overline{v}(t))=0$ και μάλιστα το $\overline{v}(t)$ είναι το πρώτο σημείο μηδενισμού της φ. Επίσης, όπως είδαμε στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος , $\tilde{\psi}(s)=0,\ \gamma\iota\alpha\quad s\geq s_0 \Rightarrow \tilde{\psi}(s_0)=0$. Επίσης

$$\varphi(t,\overline{v}(t))=\alpha(t)\tilde{\psi}(\alpha(t)\overline{v}(t)).$$

Επειδή $\alpha(t)>0$ και $\varphi(t,\overline{v}(t))=0 \Rightarrow \tilde{\psi}(\alpha(t)\overline{v}(t))=0$. Επιπρόσθετα, επειδή το $\overline{v}(t)$ είναι το πρώτο σημείο μηδενισμού της φ θα έχουμε ότι το $\alpha(t)\overline{v}(t)$ είναι το πρώτο σημείο μηδενισμού της $\tilde{\psi}$. Επίσης και το s_0 ,όπως είδαμε παραπάνω , είναι το πρώτο σημείο μηδενισμού της $\tilde{\psi}$, άρα $s_0=\alpha(t)\overline{v}(t)$.

Συνεχίζοντας τώρα, χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.10) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\overline{v}(t) &= \frac{s_0}{\alpha(t)}=\frac{s_0(\beta+\alpha(0)t)}{\beta\alpha(0)}\\ &= \frac{1}{\beta}(\overline{v}(0)\beta+s_0t)\\ &= \overline{v}(0)+\frac{\sigma_0 t}{\beta}.\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$k_\star=\frac{s_0+\beta}{3s_0}=\frac{\beta s_0^{1/3}}{3s_0}, \tag{4.16}$$

αφού το s_0 είναι ρίζα του $f(s)=s+\beta(1-s^{1/3})$.
Οπότε

$$k_\star=\frac{s_0+\beta}{3s_0}$$

και άρα

$$\frac{\beta}{s_0}=3k_\star-1. \tag{4.17}$$

Τώρα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.16) και (4.17) παίρνουμε

$$k_\star = \frac{\beta s_0^{1/3}}{3s_0}=\frac{\beta}{s_0}\frac{s_0^{1/3}}{3}=(3k_\star-1)\frac{s_0^{1/3}}{3} \tag{4.18}$$

δηλαδή

$$s_0=\Big(\frac{3k_\star}{3k_\star-1}\Big)^3. \tag{4.19}$$

Ξέρουμε ότι $1 \leq s_0 \leq \frac{27}{8}$. Με απλές πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\frac{\frac{8\beta}{27}+1}{3} \leq k_\star \leq \frac{\beta+1}{3}.$$

Οπότε καθώς το β αυξάνει από το $\frac{27}{4}$ στο ∞, το $k_\star$ αυξάνει από το 1 στο ∞.

Επίσης

$$\begin{aligned}
\frac{s+\beta(1-s^{1/3})}{s_0} &= \frac{s}{s_0}+\frac{\beta}{s_0}-\frac{\beta s^{1/3}}{s_0^{1/3}s_0^{2/3}} \\
&= (1-u)+(3k_\star-1)-\frac{\beta}{s_0^{2/3}}\Big(\frac{s}{s_0}\Big)^{1/3} \\
&= 3k_\star-u-3k_\star(1-u)^{1/3} \\
&= 3k_\star(1-(1-u)^{1/3})-u \\
&= u\Big(k_\star\frac{3(1-(1-u)^{1/3})}{u}-1\Big)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

και άρα

$$\frac{s+\beta(1-s^{1/3})}{s_0} = u(k_\star Q(u)-1), \tag{4.21}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (4.14) και (4.17) και ορίσαμε

$$Q(u) = 3\Big(\frac{(1-(1-u)^{1/3})}{u}\Big). \tag{4.22}$$

Παρατηρούμε ότι $Q(0) = 1$ και $Q(1) = 3$. Επίσης η συνάρτηση $(1-u)^{1/3}$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά ως εξής:

$$(1-u)^{1/3} = 1-\frac{1}{3}\,u-\frac{1}{9}\,u^2-\frac{5}{3^4}\,u^3+\ldots$$

Άρα και η Q θα αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με τύπο

$$Q(u) = 1+\frac{1}{3}\,u+\frac{5}{27}\,u^2+\ldots,$$

η οποία συγκλίνει για $|u|<1$ και όλοι οι συντελεστές της είναι θετικοί.

Επιστρέφοντας στις λύσεις ομοιοθεσίας $\psi_\star(u)$ θα δείξουμε ότι είναι αύξουσες συναρτήσεις που ικανοποιούν

$$\frac{d}{du}\ln\psi_\star = \frac{1}{u(\kappa_\star Q(u)-1)} \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 < u < 1 \tag{4.23}$$

και

$$\int_0^1 \psi_\star(u)du = 1. \tag{4.24}$$

Καταρχάς

$$\psi_\star(u) = \frac{s_0\tilde{\psi}(s)}{V}, \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 \le s \le s_0$$

οπότε

$$\ln(\psi_\star(u)) = \ln(\frac{s_0}{V}) + \ln(\tilde{\psi}(s))$$

και με παραγώγιση παίρνουμε

$$\frac{d}{du}\ln(\psi_\star(u)) = \frac{d}{ds}\ln\tilde{\psi}(s)\frac{ds}{du}$$

δηλαδή

$$\frac{d}{du}\ln(\psi_\star(u)) = \frac{-1}{s+\beta(1-s^{\frac{1}{3}})}(-s_0)$$

και επομένως

$$\frac{d}{du}\ln(\psi_\star(u)) = \frac{1}{u(\kappa_\star Q(u)-1)} \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 < u < 1,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (4.21) , το γεγονός ότι

$$1-u = \frac{s}{s_0} \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad \frac{ds}{du} = -s_0 \tag{4.25}$$

και

$$\frac{d}{ds}\ln\tilde{\psi}(s) = \frac{-1}{s+\beta(1-s^{\frac{1}{3}})},$$

η οποία προκύπτει με απλές πράξεις από τη σχέση (4.11). Έτσι αποδεικνύεται η σχέση (4.23).

Προκειμένου να δείξουμε ότι είναι αύξουσες συναρτήσεις σκεφτόμαστε ως εξής: Αφού $0 < s < s_0$, η $f(s) = s+\beta(1-s^{\frac{1}{3}})$ δεν έχει ρίζα όπως είδαμε στην απόδειξη του Λήμματος , και μάλιστα είναι κυρτή με τιμή $\beta > 0$ στο $s = 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η παράσταση $\frac{s+\beta(1-s^{1/3})}{s_0} > 0$ και άρα

$$\frac{1}{u(\kappa_\star Q(u)-1)} > 0$$

δηλαδή

$$\frac{d}{du}\ln(\psi_\star(u)) > 0.$$

Επομένως η $\ln\psi_\star(u)$ είναι γνησίως αύξουσα και άρα η $\psi_\star(u)$ ακολουθεί το ίδιο είδος μονοτονίας.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τη σχέση (4.24). Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi_\star(u)du &= \int_0^1 \frac{s_0\tilde{\psi}(s)}{V}du \\ &= \int_0^{s_0} \frac{\tilde{\psi}(s)}{V}ds = \frac{1}{V}V = 1\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (4.15), (4.25) και το γεγονός ότι $V = \int_0^\infty \tilde{\psi}(s)ds$.

Επιπλέον ισχύει και ο εξής τύπος για $\kappa_\star > 1$

$$\frac{1}{u(\kappa_\star Q(u)-1)} = \frac{1}{(\kappa_\star-1)u} - (\frac{\kappa_\star}{\kappa_\star-1})\frac{Q(u)-1}{u(\kappa_\star Q(u)-1)} \tag{4.26}$$

ο οποίος προκύπτει εύκολα αν ξεκινήσουμε από το δεύτερο μέλος και κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα . Ισχύει για $\kappa_\star > 1$, εφόσον είμαστε στην περίπτωση που το $\beta \geq \frac{27}{4}$ και άρα το $\kappa_\star \geq 1$(η περίπτωση $\beta < \frac{27}{4}$ έχει ήδη απορριφθεί σύμφωνα με την απόδειξη του Λήμματος 4.1).

Τώρα ,ξέρουμε ότι το $\kappa_\star > 1$, το $\frac{1}{u(\kappa_\star Q(u)-1)} > 0$ και $Q(u) - 1 = \frac{1}{3}u + \frac{5}{27}u^2 + \ldots > 0$ εφόσον το $0 < u < 1$ και όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί ,όπως έχει προαναφερθεί. Άρα ο τελευταίος όρος του παραπάνω τύπου είναι αρνητικός και παραμένει φραγμένος καθώς το $u \to 0$, διότι το $Q(u) - 1 \sim \frac{1}{3}u$ κοντά στο 0 και άρα το

$$\frac{Q(u)-1}{u(\kappa_\star Q(u)-1)} \sim \frac{\frac{1}{3}u}{u(\kappa_\star Q(u)-1)} \sim \frac{1}{3(\kappa_\star-1)} < \infty$$

αφού το $Q(0) = 1$ και $\kappa_\star > 1$.

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε τη σχέση (4.23) και έχουμε

$$\int_u^1 \frac{d}{du}\ln\psi_\star(u)du = \int_u^1 \frac{d\xi}{\xi(\kappa_\star Q(\xi)-1)}$$

δηλαδή

$$\frac{\psi_\star(u)}{\psi_\star(1)} = \exp\Big\{-\int_u^1 \frac{d\xi}{\xi(\kappa_\star Q(\xi)-1)}\Big\}. \tag{4.27}$$

Ψάχνουμε τώρα να βρούμε p τέτοιο ώστε

$$\lim_{u\downarrow 0}\frac{\psi_\star(u)}{u^p} = c \neq 0.$$

Από τη σχέση (4.26) έχουμε ότι το $\frac{1}{\xi(\kappa_\star Q(\xi)-1)}$ σπάει σε δύο κομμάτια, το πρώτο απειρίζεται με κάποιο συντελεστή καθώς το $u\to 0$ και το δεύτερο είναι μία φραγμένη συνάρτηση ,όπως αποδείξαμε παραπάνω, την οποία αποκαλούμε $p(\xi)$. Οπότε από τη σχέση (4.27) παίρνουμε

$$\frac{\psi_\star(u)}{\psi_\star(1)} = \exp\Big\{-\int_u^1 \frac{d\xi}{(\kappa_\star-1)\xi} + \int_u^1 p(\xi)d\xi\Big\}$$

δηλαδή

$$\frac{\psi_\star(u)}{\psi_\star(1)} = \exp\Big\{\frac{1}{(\kappa_\star-1)}\ln(u)\Big\}\exp\Big\{\int_u^1 p(\xi)d\xi\Big\}$$

επομένως

$$\psi_\star(u) = \psi_\star(1)u^{\frac{1}{\kappa_\star-1}}\exp\Big\{\int_u^1 p(\xi)d\xi\Big\}$$

και άρα

$$\lim_{u\downarrow 0}\frac{\psi_\star(u)}{u^{\frac{1}{\kappa_\star-1}}} = \lim_{u\downarrow 0}\left(\psi_\star(1)\exp\Big\{\int_u^1 p(\xi)d\xi)\Big\}\right).$$

Όμως το τελευταίο όριο είναι κάποιο $c\neq 0$ αφού η $p(\xi)$ είναι φραγμένη συνάρτηση και άρα το ολοκλήρωμά της σε κλειστό διάστημα θα είναι πεπερασμένος αριθμός. Οπότε από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει το $p=\frac{1}{\kappa_\star-1}$ και άρα

$$\psi_\star(u) = \psi_\star(1)\exp\Big\{\int_u^1 p(\xi)d\xi\Big\}u^p. \tag{4.28}$$

Δηλαδή βρήκαμε τη λύση ομοιοθεσίας $\psi_\star(u)$ συναρτήσει του εκθέτη $p=\frac{1}{\kappa_\star-1}$, ο οποίος ελέγχει τον τρόπο μηδενισμού της $\psi_\star(u)$ καθώς το $u\to 0$. Τη λύση $\psi_\star(u)$ του συστήματος (4.23)-(4.24) με $\kappa_\star = 1+\frac{1}{p}$ την συμβολίζουμε με Ψ_p.

Λήμμα 4.2. *Για οποιοδήποτε $p \in (0, \infty]$ η εξίσωση της συνάρτησης κατανομής*

$$\partial_t \varphi + \Lambda(\upsilon, \theta(t))\partial_\upsilon \varphi = 0$$

έχει μία λύση ομοιοθεσίας που ορίζεται από τις σχέσεις

$$\psi_\star(u) = \frac{\overline{\upsilon}(t)\varphi(t,\upsilon)}{V} = \frac{s_0\tilde{\psi}(s)}{V}$$

και

$$\frac{d}{du}\ln\psi_\star = \frac{1}{u(\kappa_\star Q(u) - 1)}$$

με $\kappa_\star = 1 + \frac{1}{p}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. *$p < \infty$. Τότε η λύση έχει τη μορφή*

$$\Psi_p(u) = \alpha_p(u)u^p$$

   όπου η α_p είναι φθίνουσα και αναλυτική στο $[0, 1)$.

2. *$p = \infty\,(\kappa_\star = 1)$. Τότε η λύση είναι της μορφής*

$$\Psi_\infty(u) = \circ(u^q) \quad \textit{καθώς} \quad u \to 0$$

   για όλα τα $q > 0$.

Απόδειξη του λήμματος

Η πρώτη παρατήρηση έχει ήδη προκύψει ως αποτέλεσμα της ανάλυσης που έχει αναπτυχθεί έως τώρα.

Για τη μορφή των λύσεων κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις : Αν το $p < \infty$ τότε από τον τύπο (4.28) παίρνουμε

$$\Psi_p(u) = \alpha_p(u)u^p \tag{4.29}$$

όπου

$$\alpha_p(u) = \Psi_p(1)\exp\Big\{\int_u^1 p(\xi)d\xi\Big\}.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\alpha_p'(u) = -\Psi_p(1)\exp\Big\{\int_u^1 p(\xi)d\xi\Big\}p(u).$$

Όμως το $\Psi_p(1) = \psi_\star(1) = \frac{s_0\tilde{\psi}(0)}{V} \geq 0$ και $p(u) \geq 0$. Άρα η $\alpha_p(u)$ είναι φθίνουσα. Επίσης ξέρουμε ότι η $Q(\xi)$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά οπότε είναι αναλυτική και επομένως το ίδιο θα είναι και η $p(\xi)$ ως πηλίκο αναλυτικών συναρτήσεων. Άρα η $\alpha_p(u)$ είναι και αναλυτική ως σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων.

Τώρα, αν το $p = \infty$ δηλαδή $\kappa_\star = 1$,παίρνουμε

$$\frac{d}{du}\ln\psi_\star = \frac{1}{u(Q(u)-1)}.$$

Όμως όπως είδαμε το $Q(u) - 1$ συμπεριφέρεται όπως το $\frac{1}{3}u$ καθώς το $u \to 0$, οπότε το $\frac{1}{u(Q(u)-1)}$ το σπάμε σε δύο κομμάτια ως εξής:

$$\frac{1}{u(Q(u)-1)} = \frac{1}{u\frac{1}{3}u} - p(u) = \frac{3}{u^2} - p(u)$$

όπου λύνοντας ως προς $p(u)$ βρίσκουμε

$$p(u) = \frac{3(Q(u)-1)-u}{u^2(Q(u)-1)}\,. \tag{4.30}$$

Έχουμε

$$Q(u) - 1 = \frac{1}{3}u + \frac{5}{27} + \dots$$

δηλαδή

$$3(Q(u)-1) = u + \frac{5}{9}u^2 + \dots$$

Άρα ο αριθμητής του κλάσματος στην σχέση (4.30) συμπεριφέρεται σαν $\frac{5}{9}u^2$ ενώ ο παρονομαστής σαν $\frac{u^3}{3}$. Συμπερασματικά το $p(u)$ θα συμπεριφέρεται σαν $\frac{5}{3u}$ καθώς το $u \to 0$. Επομένως παίρνουμε την σχέση

$$\frac{1}{u(Q(u)-1)} = \frac{3}{u^2} - \frac{5}{3u} - S(u) \tag{4.31}$$

όπου λύνοντας ως προς $S(u)$ και αντικαθιστώντας την $Q(u)$ με τη δυναμοσειρά της ,έχουμε ότι η

$$S(u) = \frac{A(u)}{1 + B(u)}$$

με $A(u) \quad \textit{και} \quad B(u)$ να είναι δύο δυναμοσειρές που συγκλίνουν, αφού $0 < u < 1$. Άρα το $S(u)$ παραμένει φραγμένο καθώς το $u \to 0$.

Έστω λοιπόν ένα $q > 0$. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{u\to 0}\frac{\Psi_p(u)}{u^q} = 0.$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (4.31) και κάνοντας κάποιες απλές πράξεις παίρνουμε ότι

$$\int_u^1 \frac{d\xi}{\xi(Q(\xi)-1)} = \frac{3}{u} + \ln u^{\frac{5}{3}} - 3 - \int_u^1 S(\xi)d\xi.$$

Επίσης συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.15) και (4.31) βρίσκουμε

$$\frac{d}{du}\ln\psi_\infty(u) = \frac{3}{u^2} - \frac{5}{3u} - S(u) \tag{4.32}$$

την οποία ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\psi_\infty(u) = \exp\{-\frac{3}{u}\}u^{-\frac{5}{3}}\exp\{3 + \int_u^1 S(\xi)d\xi\}.$$

Οπότε

$$\frac{\psi_\infty(u)}{u^q} = \frac{\exp\{-\frac{3}{u}\}}{u^{q+\frac{5}{3}}}\exp\{3 + \int_u^1 S(\xi)d\xi\}. \tag{4.33}$$

Όμως το

$$\lim_{u\to 0}\frac{\exp\{-\frac{3}{u}\}}{u^{q+\frac{5}{3}}} = 0$$

για κάθε $q > 0$ και το

$$\exp\{3 + \int_u^1 S(\xi)d\xi\}$$

είναι πεπερασμένο, αφού η $S(\xi)$ είναι φραγμένη καθώς το $u \to 0$. Οπότε από τη σχέση (4.33) συμπεραίνουμε ότι το

$$\lim_{u\to 0}\frac{\Psi_\infty(u)}{u^q} = 0$$

και επειδή το q ήταν τυχαίο, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Θεωρούμε την εξής αλλαγή μεταβλητών:

$$1 - u = x^3$$

οπότε η παράσταση $u(\kappa_\star(u)Q(u)-1)$ γίνεται

$$u(\kappa_\star(u)Q(u)-1)=(x-1)(x-\alpha)(x+\alpha-1)$$

όπου $2\alpha=-1+\sqrt{3(4\kappa_\star-1)}$.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ματαβλητές στη σχέση (4.23) και ολοκληρώνοντας με χρήση της μεθόδου των μερικών κλασμάτων βρίσκουμε ότι στην μεν περίπτωση που το $p<\infty$ ($\kappa_\star>1$) το

$$\frac{\Psi_p(u)}{\Psi_p(1)}=\frac{(1-x)^p}{(1-\frac{x}{\alpha})^{p_1}(1+\frac{x}{\alpha+1})^{p_2}} \tag{4.34}$$

όπου

$$p=\frac{3}{(\alpha-1)(\alpha+2)},\, p_1=\frac{3\alpha^2}{(\alpha-1)(2\alpha+1)},\, p_2=\frac{3(\alpha+1)^2}{(\alpha+2)(2\alpha+1)}$$

ενώ στην περίπτωση που το $p=\infty$ ($\kappa_\star=1$) έχουμε

$$\frac{\Psi_\infty(u)}{\Psi_\infty(1)}=\frac{e^{\frac{-x}{(1-x)}}}{(1-x)^{\frac{5}{3}}(1+\frac{x}{2})^{\frac{4}{3}}}. \tag{4.35}$$

Σημειώνουμε ότι

$$1-u=x^3$$

και άρα

$$x=(1-u)^{\frac{1}{3}}=\Big(\frac{\upsilon}{\overline{\upsilon}(t)}\Big)^{\frac{1}{3}}=\Big(\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi\overline{R}(t)^3}\Big)^{\frac{1}{3}}=\frac{R}{\overline{R}(t)},$$

όπου το R αντιπροσωπεύει την ακτίνα του σωματιδίου και το $\overline{R}(t)$ είναι η μέγιστη δυνατή ακτίνα . Επειδή το $p=\frac{3}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$ θα έχουμε ότι καθώς το $p\to 0$ το $\alpha\to\infty$ και άρα το

$$\lim_{p\to 0}\frac{\Psi_p(u)}{\Psi_p(1)}=1 \quad \gamma\iota\alpha \quad 0<u<1.$$

Επίσης από τη σχέση (4.34) έχουμε ότι :

$$\Psi_p(u)=\Psi_p(1)\frac{(1-x)^p}{(1-\frac{x}{\alpha})^{p_1}(1+\frac{x}{\alpha+1})^{p_2}}.$$

Ορίζουμε $Q_p(u) = \frac{(1-x)^p}{(1-\frac{x}{\alpha})^{p_1}(1+\frac{x}{\alpha+1})^{p_2}}$, όπου το $0 \leq Q_p(u) \leq 2$ και $Q_p(u) \to 1$ καθώς το $p \to 0$, για $u \in (0,1)$. Οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε ότι

$$\int_0^1 Q_p(u)du \to 1,$$

καθώς το $p \to 0$. Επιπλέον επειδή

$$\int_0^1 \Psi_p(u)du = 1 \quad \Rightarrow \Psi_p(1)\int_0^1 Q_p(u)du = 1$$

και παίρνοντας το όριο έχουμε ότι

$$\lim_{p\to 0} \Psi_p(1) = 1.$$

Χρησιμοποιώντας και τη σχέση (4.34) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{p\to 0} \Psi_p(u) = 1, \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 < u < 1.$$

Επίσης για τη λύση ομοιοθεσίας Ψ_p, ο μέγιστος δυνατός όγκος των σωματιδίων ικανοποιεί τη σχέση

$$\overline{v}(t) = \overline{v}(0) + \frac{pt}{2p+3}.$$

Πράγματι, ξέρουμε ότι $\overline{v}(t) = \overline{v}(0) + \frac{ts_0}{\beta}$. Οπότε

$$\overline{v}(t) = \overline{v}(0) + \frac{t}{3\kappa_\star - 1}$$

δηλαδή

$$\overline{v}(t) = \overline{v}(0) + \frac{tp}{2p+3},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (4.17) και ότι το $\kappa_\star = 1 + \frac{1}{p}$.

5 Ασυμπτωτική συμπεριφορά II

5.1 Κανονικοποιημένες μεταβλητές

Από εδώ και στο εξής θεωρούμε την περίπτωση που κανένα θετικό μέρος των σωματιδίων δεν έχει το μέγιστο δυνατό όγκο $\overline{v}$. Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή του όγκου δεν περιέχει κανένα άτομο στο άκρο του φορέα. Προκειμένου να καταλάβουμε τη σημασία της συμπεριφοράς ομοιοθεσίας για μεγάλους χρόνους, είναι ορθό να διαιρέσουμε τον όγκο με το μέγιστο δυνατό όγκο $\overline{v}$.

Εισάγουμε λοιπόν τις μεταβλητές

$$\tau = \ln \frac{\overline{v}(t)}{\overline{v}(0)}, \qquad u = 1 - \frac{v}{\overline{v}(t)}, \quad \psi = \frac{\overline{v}(t)\varphi}{V}. \tag{5.1}$$

Με δεδομένο ότι η $\phi(t,v)$ είναι από αριστερά συνεχής και φθίνουσα ως προς v συμπεραίνουμε ότι για $\forall \tau \geq 0$ η συνάρτηση $u \to \psi(\tau,u)$ είναι από αριστερά συνεχής και αύξουσα στο $[0,1]$ με $\psi(\tau,0) = 0$. Ορίζοντας $\psi_0(u) = \overline{v}(0)\phi_0(v)/V$ και με χρήση του Λήμματος 2.14 καταλήγουμε στο ότι η εξέλιξη της $\psi(\tau,u)$ δίνεται από τη σχέση

$$\psi(\tau, U(\tau,u)) = e^{\tau}\psi_0(u) \tag{5.2}$$

όσο το $0 < U(\tau,u) < 1$, όπου $U(\tau,u) = 1 - V(t,v)/\overline{v}(t)$ και ικανοποιεί

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = (\kappa(\tau)Q(U) - 1)U, \quad U(0,u) = u. \tag{5.3}$$

Εδώ η Q είναι η συνάρτηση που ορίζεται στη σχέση (4.22) και το $\kappa(\tau)$ ορίζεται ως εξής

$$\frac{1}{\overline{v}(t)^{1/3}\theta(t)} = 1 - \frac{1}{3\kappa(\tau)} = \frac{1}{\psi(\tau,1)}\int_0^1 \frac{1}{3}(1-u)^{\frac{-2}{3}}\psi(\tau,u)du. \tag{5.4}$$

Προφανώς $\kappa(\tau) > \frac{1}{3}$. Επιπλέον η διατήρηση του συνολικού όγκου εκφράζεται από την ταυτότητα

$$\int_0^1 \psi(\tau,u)du = 1, \quad \forall \tau \geq 0. \tag{5.5}$$

Επίσης για διαφορίσιμα αρχικά δεδομένα η καινούρια συνάρτηση ψ θα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\partial_\tau \psi + (\kappa(\tau)Q(u) - 1)u\partial_u \psi = \psi \tag{5.6}$$

για $0 < u < 1, \tau > 0$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι χαρακτηριστικές της παραπάνω εξίσωσης ικανοποιούν τη σχέση (5.3) και σε ό,τι αφορά στην τροχιά τους κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις :

Αν ορίσουμε $f(U) = (\kappa(\tau)Q(U) - 1)U$ τότε επειδή η $f(u)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1)$, προκύπτει ότι αν $u > 0$, η χαρακτηριστική που θα ξεκινάει από το u δεν θα τέμνει τον άξονα των τ. Άρα η χαρακτηριστική που θα ξεκινάει από το 0 θα είναι μοναδική και επιπλέον θα ισχύει το μονοσήμαντο για $0 \leq u < 1$. Επίσης λόγω της συνεχής εξάρτησης από τα αρχικά δεδομένα από κάθε σημείο θα περνάει χαρακτηριστική και λόγω του μονοσημάντου η χαρακτηριστική θα είναι μοναδική. Συμπερασματικά οποιοδήποτε σημείο $(\tau_1, u_1) \in (0, \infty) \times (0, 1)$ θα βρίσκεται πάνω σε μία μοναδική χαρακτηριστική η οποία θα μπορεί να συνεχιστεί πίσω στο χρόνο $\tau = 0$. Το τελευταίο σημαίνει ότι $u_1 = U(\tau_1, \tilde{u_1})$, για κάποιο $\tilde{u_1} \in (0, 1)$.

Αν τώρα το $u = 1$ τότε επειδή το $\kappa(\tau)Q(1) - 1 > 0, \quad \forall \tau > 0$ θα έχουμε ότι σε μία περιοχή του $U = 1$ το $(\kappa(\tau)Q(U) - 1)U > 0$ και άρα η εφαπτομένη της χαρακτηριστικής στο σημείο U θα έχει θετική κλίση και άρα θα τέμνει την ευθεία $U = 1$, οπότε και η ίδια η χαρακτηριστική θα τέμνει την $U = 1$. Άρα οι χαρακτηριστικές θα τέμνουν την $U = 1$.

Οι στάσιμες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (5.6) τις οποίες συμβολίζουμε με $\psi(u)$ θα ικανοποιούν τη

$$(\kappa Q(u) - 1)u\psi(u) = \psi(u)$$

όπου το κ δίνεται από τον τύπο (5.4), όπου αντικαταστήσαμε την $\psi(\tau, u)$ στο δεξί μέλος από την $\psi(u)$. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{d}{du} \ln \psi(u) = \frac{1}{(\kappa Q(u) - 1)u}$$

δηλαδή η $\psi(u)$ λύνει τη (4.23) με $\kappa_\star = \kappa > 1$ και $\psi = \Psi_p$ όπου $p = \frac{1}{\kappa_\star - 1} = \frac{1}{\kappa - 1}$. Με άλλα λόγια οι λύσεις ομοιοθεσίας της εξίσωσης (2.32) αντιστοιχούν σε στάσιμες λύσεις της εξίσωσης (5.6).

Γενικά αυτό που μας ενδιαφέρει και με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια είναι, κάτω από ποιές προϋποθέσεις η λύση $\psi(\tau, u)$ συγκλίνει καθώς το $\tau \to \infty$. Θα δούμε ότι η συμπεριφορά των λύσεων για μεγάλους χρόνους είναι συνάρτηση του τρόπου με τον οποίο τα αρχικά δεδομένα μηδενίζονται καθώς το $u \to 0$.

5.2 Συμπεριφορά στο άκρο και " μέσο " πεδίο

Στη συνέχεια αναφέρουμε κατάλληλες προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα για να έχουμε σύγκλιση της συνάρτησης $\kappa(\tau)$ η οποία ορίζεται μέσω του τύπου

$$\frac{1}{\overline{v}(t)^{1/3}\theta(t)} = 1 - \frac{1}{3\kappa(\tau)} = \frac{1}{\psi(\tau,1)}\int_0^1 \frac{1}{3}(1-u)^{\frac{-2}{3}}\psi(\tau,u)du.$$

Πρόταση 5.1. *Έστω συνάρτηση ψ όπως ορίζεται στις σχέσεις (5.2)-(5.5) και* $0 < p < \infty$.

1. *Εάν* $\inf_{u>0}\psi_0(u)/u^p > 0$, *τότε* $\limsup_{\tau\to\infty}\kappa(\tau) \geqslant 1 + \frac{1}{p}$.

2. *Εάν* $\sup_{u>0}\psi_0(u)/u^p < \infty$, *τότε* $\liminf_{\tau\to\infty}\kappa(\tau) \leq 1 + \frac{1}{p}$.

Απόδειξη της πρότασης

Έστω ότι το $\inf\{\psi_0(u)/u^p | u > 0\} = w > 0$. Τότε

$$\psi_0(u)/u^p \geq w \Leftrightarrow \psi_0(u) \geq wu^p.$$

Επίσης από το Λήμμα (4.2) ξέρουμε ότι για $p < \infty$ η $\Psi_p(u) = \alpha_p(u)u^p$, όπου η $\alpha_p(u)$ είναι φθίνουσα και αναλυτική στο $[0,1)$. Οπότε

$$\psi_0(u) \geq \frac{w}{\alpha_p(0)}\Psi_p(u) \Leftrightarrow \psi_0(u) \geq \alpha_0\Psi_p(u) \tag{5.7}$$

για $0 < u < 1$ και $\alpha_0 = \frac{w}{\alpha_p(0)} > 0$.

Θεωρούμε την $\psi^-(\tau,u)$ η οποία λύνει το εξής σύστημα :

$$\begin{cases} \psi^-_\tau(\tau,u) + (\kappa(\tau)Q(u) - 1)u\psi^-_u(\tau,u) \leq \psi^-(\tau,u) \\ \psi^-(0,u) \leq \psi(0,u) \\ 1 - \frac{1}{3\kappa(\tau)} = \frac{1}{\psi(\tau,1)}\int_0^1 \frac{1}{3}(1-u)^{\frac{-2}{3}}\psi(\tau,u)du \end{cases} \tag{5.8}$$

Τότε η $\psi^-(\tau,u)$ είναι υπολύση, δηλαδή $\psi^-(\tau,u) \leq \psi(\tau,u)$. Όντως, επειδή το $\kappa(\tau)$ είναι το ίδιο και για τη λύση και για την υπολύση οι χαρακτηριστικές καμπύλες θα είναι οι ίδιες και άρα η λύση θα δίνεται από τον ίδιο τύπο, οπότε

$$\psi^-(\tau,u) = e^\tau\psi^-(0,u) \leq e^\tau\psi(0,u) = \psi(\tau,U(\tau,u)),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (5.2).

Θα δείξουμε ότι αν η $\psi^{-}(\tau,u)$ έχει τη μορφή $\alpha(\tau)\Psi_p(u)$, όπου η $\alpha(\tau)$ είναι *Lipschitz*, $\alpha(0)=\alpha_0$ και για σχεδόν κάθε $\tau>0$ ικανοποιεί

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)} \leq 1-\frac{\kappa(\tau)Q(u)-1}{\kappa_\star Q(u)-1}=\frac{\kappa_\star-\kappa(\tau)}{\kappa_\star-1/Q(u)} \tag{5.9}$$

για $0<u<1$, τότε η $\psi^{-}(\tau,u)$ είναι υπολύση.
Εφόσον $1\leq Q(u)\leq 3$ η παραπάνω σχέση εξασφαλίζεται αν απαιτήσουμε να ισχύει το εξής:

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}=\begin{cases} (\kappa_\star-\kappa(\tau))/(\kappa_\star-1), & \varepsilon\dot{\alpha}\nu \quad \kappa_\star-\kappa(\tau)<0, \\ (\kappa_\star-\kappa(\tau))/(\kappa_\star-1/3), & \varepsilon\dot{\alpha}\nu \quad \kappa_\star-\kappa(\tau)>0 \\ 0, & \varepsilon\dot{\alpha}\nu \quad \kappa_\star-\kappa(\tau)=0, \end{cases} \tag{5.10}$$

Οπότε με δεδομένο τα παραπάνω θα αποδείξουμε ότι η $\psi(\tau,u)$ είναι υπολύση.

Καταρχάς

$$\psi^{-}(0,u)=\alpha(0)\Psi_p(u)=\alpha_0\Psi_p(u)\leq\psi_0(u)$$

για $0<u<1$, σύμφωνα με τη σχέση (5.7). Οπότε

$$\begin{aligned} \psi^{-}_\tau(\tau,u) \quad & +(\kappa(\tau)Q(u)-1)u\psi^{-}_u(\tau,u)-\psi^{-}(\tau,u)= \\ = \quad & \alpha(\tau)\Psi_p(u)\left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}+(\kappa(\tau)Q(u)-1)u\frac{{\Psi_p}'(u)}{\Psi_p(u)}-1\right] \\ = \quad & \alpha(\tau)\Psi_p(u)\left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}+\frac{\kappa(\tau)Q(u)-1}{\kappa_\star Q(u)-1}-1\right] \end{aligned}$$

Η τελευταία αγκύλη λόγω της σχέσης (5.9) είναι αρνητική και από τη σχέση (5.10) προκύπτει το εξής σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha'(\tau)=\alpha(\tau)p(\tau) \\ \alpha(0)=\alpha_0>0 \end{cases}$$

για εκείνα τα τ για τα οποία ορίζεται η $p(\tau)$. Τώρα λόγω του μονοσημάντου του συστήματος προκύπτει ότι η $\alpha(\tau)>0$ για όλα τα παραπάνω τ. Οπότε

$$\psi^{-}_\tau(\tau,u)+(\kappa(\tau)Q(u)-1)u\psi^{-}_u(\tau,u)\leq\psi^{-}(\tau,u)$$

και άρα η $\psi^{-}(\tau,u) = \alpha(\tau)\Psi_p(u)$ είναι υπολύση, δηλαδή $\frac{\psi(\tau,u)}{\alpha(\tau)\Psi_p(u))} \geq 1$ για $0 < u < 1$. Επειδή η $\psi(\tau,u)$ είναι από αριστερά συνεχής η παραπάνω ανισότητα θα ισχύει για $0 < u \leq 1$ και για όλα τα $\tau \geq 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\limsup \kappa(\tau) < \kappa_\star$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θέτουμε $\alpha = \limsup \kappa(\tau)$. Επειδή το $\alpha < \kappa_\star, \exists \quad \beta \quad \mu\varepsilon \quad \alpha < \beta < \kappa_\star$ και $\exists \quad \delta > 0 \quad \mu\varepsilon \quad \kappa(\tau) \leq \beta \quad \gamma\iota\alpha \quad \tau > \frac{1}{\delta}$.

Έχουμε λοιπόν ότι $\kappa_\star - \kappa(\tau) > 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad \tau > \delta$ και άρα από τη σχέση (5.10) έχουμε:

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)} = \frac{\kappa_\star - \kappa(\tau)}{\kappa_\star - 1/3} \geq \frac{\kappa_\star - \beta}{\kappa_\star - 1/3} > 0,$$

δηλαδή $\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)} \geq \theta$ για κάποιο $\theta > 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \tau > \delta$. Οπότε

$$\frac{d}{d\tau} \ln \alpha(\tau) \geq \theta$$

και με πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\alpha(\tau) \geq e^{\theta\tau+\mu},$$

όπου ορίσαμε $\mu = \ln \alpha(\frac{1}{\delta}) - \frac{\theta}{\delta}$. Καθώς το $\tau \to \infty \Rightarrow \alpha(\tau) \to \infty$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη διατήρηση του όγκου, από όπου προκύπτει ότι το $\alpha(\tau) \leq 1$, για $\forall \tau \geq 0$, και άρα $\limsup \kappa(\tau) \geq \kappa_\star$.

Τώρα προκειμένου να αποδείξουμε το δεύτερο σκέλος του πορίσματος θα εργαστούμε ανάλογα. Αν η $\tilde{\psi}(\tau,u)$ λύνει το σύστημα:

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_\tau(\tau,u) + (\kappa(\tau)Q(u) - 1)u\tilde{\psi}_u(\tau,u) \leq \tilde{\psi}(\tau,u) \\ \tilde{\psi}(0,u) \leq \psi(0,u) \\ 1 - \frac{1}{3\kappa(\tau)} = \frac{1}{\psi(\tau,1)} \int_0^1 \frac{1}{3}(1-u)^{\frac{-2}{3}} \psi(\tau,u)du \end{cases} \tag{5.11}$$

τότε $\tilde{\psi}(\tau,u) \geq \psi(\tau,u)$ δηλαδή η $\tilde{\psi}(\tau,u)$ είναι μία υπερλύση.

Έστω λοιπόν ότι $\sup\{\psi_0(u)/u^p | u > 0\} = w < \infty$ και επειδή για $p < \infty$ το $\Psi_p(u) = \alpha_p(u)u^p$ με $\alpha_p(u)$ φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι $\psi_0(u) \leq \beta_0 \Psi_p(u)$ για $0 < u < 1$ και όπου $\beta_0 = \frac{w}{\alpha_p(1)} > 0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση $\psi^{+}(\tau,u) = \beta(\tau)\Psi_p(u)$ με $\beta(0) = \beta_0$, $\beta(\tau)$ *Lipscitz*, και η οποία ικανοποιεί την ανίσωση

$$\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)} \geq 1 - \frac{\kappa(\tau)Q(u) - 1}{\kappa_\star Q(u) - 1} = \frac{\kappa_\star - \kappa(\tau)}{\kappa_\star - 1/Q(u)} \tag{5.12}$$

για $0 < u < 1$, είναι υπερλύση.
Εφόσον $1 \leq Q(u) \leq 3$ η παραπάνω σχέση εξασφαλίζεται αν απαιτήσουμε να ισχύει το εξής:

$$\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)} = \begin{cases} (\kappa_\star - \kappa(\tau))/(\kappa_\star - 1), & \varepsilon\grave{\alpha}\nu \quad \kappa_\star - \kappa(\tau) > 0, \\ (\kappa_\star - \kappa(\tau))/(\kappa_\star - 1/3), & \varepsilon\grave{\alpha}\nu \quad \kappa_\star - \kappa(\tau) < 0 \\ 0, & \varepsilon\grave{\alpha}\nu \quad \kappa_\star - \kappa(\tau) = 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε το εξής σύστημα:

$$\begin{cases} \beta'(\tau) = \beta(\tau)p(\tau) \\ \beta(0) = \beta_0 > 0 \end{cases}$$

για εκείνα τα τ για τα οποία ορίζεται η $p(\tau)$. Τώρα λόγω του μονοσημάντου του συστήματος προκύπτει ότι η $\beta(\tau) > 0$ για όλα τα παραπάνω τ.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\liminf \kappa(\tau) > \kappa_\star$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θέτουμε $\alpha = \liminf \kappa(\tau)$. Επειδή το $\alpha > \kappa_\star, \exists \quad \beta \quad \mu\varepsilon \quad \alpha > \beta > \kappa_\star$ και $\exists \quad \delta > 0 \quad \mu\varepsilon \quad \kappa(\tau) \geq \beta \quad \gamma\iota\alpha \quad \tau > \frac{1}{\delta}$.
Έχουμε λοιπόν ότι $\kappa_\star - \kappa(\tau) < 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad \tau > \delta$ και άρα από τη σχέση (5.13) έχουμε:

$$\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)} = \frac{\kappa_\star - \kappa(\tau)}{\kappa_\star - 1/3} \leq \frac{\kappa_\star - \beta}{\kappa_\star - 1/3} < 0,$$

δηλαδή $\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)} \leq -\theta$ για κάποιο $\theta > 0$ και $\tau > \delta$. Οπότε

$$\frac{d}{d\tau} \ln \beta(\tau) \leq -\theta$$

και καταλήγουμε στο ότι

$$\beta(\tau) \leq e^{\mu - \theta\tau},$$

όπου ορίσαμε $\mu = \ln \beta(\frac{1}{\delta}) + \frac{\theta}{\delta}$. Καθώς το $\tau \to \infty \Rightarrow \beta(\tau) \to 0$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη διατήρηση του όγκου, από όπου προκύπτει ότι το $\beta(\tau) \geq 1$, για $\forall \tau \geq 0$, και άρα $\liminf \kappa(\tau) \leq \kappa_\star$. $\square$

5.3 Αναγκαίες συνθήκες για σύγκλιση

Σκοπός μας σε αυτήν την ενότητα είναι να εξάγουμε κάποιους περιορισμούς στα αρχικά δεδομένα ψ_0 οι οποίοι πρέπει να ισχύουν προκειμένου να έχουμε σύγκλιση με τις κανονικοποιημένες μεταβλητές.

5.3.1 Συνθήκες σύγκλισης

Λήμμα 5.2. *Υποθέτουμε ότι το* $\lim_{\tau\to\infty}\psi(\tau,u)=\psi_\infty(u)$ *υπάρχει για κάθε* $u\in[0,1]$. *Τότε το* $\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\kappa(\tau)}=\frac{1}{\kappa_\infty}$ *υπάρχει, όπου* $1\le\kappa_\infty\le\infty$, *και* $\psi_\infty=\Psi_p(u)$, *όπου* $p=\frac{1}{\kappa_\infty-1}\in[0,\infty]$. *Επιπλέον καθώς το* $\tau\to\infty$, *η* $\psi(\tau,u)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς* u *σε οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του* $(0,1]$.

Απόδειξη του λήμματος

Ξέρουμε ότι η $\psi(\tau,)$ είναι αύξουσα ως προς u και από την υπόθεση υπάρχει το όριό της καθώς το $\tau\to\infty$. Οπότε

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{3}(1-u)^{-2/3}\psi(\tau,u)=\frac{1}{3}(1-u)^{-2/3}\psi_\infty(u),$$

και $\frac{1}{3}(1-u)^{-2/3}\psi(\tau,u)\le\frac{1}{3}\psi(\tau,1)$, όπου η τελευταία είναι ολοκληρώσιμη ως προς u. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης θα πάρουμε ότι

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^1\frac{1}{3}(1-u)^{-2/3}\psi(\tau,u)du=\int_0^1\frac{1}{3}(1-u)^{-2/3}\psi_\infty(u)du.$$

Επιπλέον ισχύει και η σχέση (5.4), όπου περνώντας στα όρια παίρνουμε ότι

$$1-\frac{1}{3\lim_{\tau\to\infty}\kappa(\tau)}=\frac{1}{\psi_\infty(1)}\int_0^1\frac{1}{3}(1-u)^{-2/3}\psi_\infty(u)du. \tag{5.14}$$

Οπότε λόγω της ύπαρξης του ολοκληρώματος στα δεξιά προκύπτει ότι υπάρχει το $\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\kappa(\tau)}$.
Στη συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :
<u>Περίπτωση 1^η:</u> $\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\kappa(\tau)}=0$.
Τότε $\lim_{\tau\to\infty}\kappa(\tau)=\kappa_\infty=\infty$. Από τη σχέση (5.14) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{1}{3}\int_0^1(1-u)^{-2/3}du=1$, προκύπτει ότι

$$\int_0^1(1-u)^{-2/3}\left\{\psi_\infty(1)-\psi_\infty(u)\right\}du=0.$$

Όμως η $\psi_\infty(u)$ είναι αύξουσα και άρα η συνάρτηση $\psi_\infty(1)-\psi_\infty(u)$ είναι φθίνουσα, μη-αρνητική ,έχει και ολοκλήρωμα μηδέν, οπότε θα είναι η μηδενική συνάρτηση στο $(0,1)$. Από τη διατήρηση του όγκου προκύπτει επιπλέον ότι $\int_0^1\psi_\infty(u)du=1$, και λόγω της παραπάνω παρατήρησης

$$\int_0^1\psi_\infty(1)du=1\quad\Rightarrow\quad\psi_\infty(u)=\psi_\infty(1)=1,$$

για $u \in (0,1]$, αφού το $\psi_\infty(0) = \lim_{\tau\to\infty}\psi(\tau,0) = \lim_{\tau\to\infty} 0 = 0$. Επίσης επειδή $p = 1/(\kappa_\infty - 1)$ και $\kappa_\infty = \infty$, θα έχουμε ότι αυτή είναι ακριβώς η περίπτωση $p = 0$ του λήμματος.

Περίπτωση 2^η: $\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\kappa(\tau)} \neq 0$.
Τότε $\kappa_\infty \neq \infty$ και άρα $\frac{1}{3} \leq \kappa_\infty < \infty$. Ειδικότερα ισχύει ότι $1 \leq \kappa_\infty < \infty$. Προκειμένου να το αποδείξουμε θα ακολουθήσουμε την εις άτοπο απαγωγή.

Έστω ότι $\kappa_\infty < 1$. Επειδή $Q(0) = 1$ και $\kappa_\infty Q(0) - 1 < 0$ θα υπάρχει μία περιοχή του μηδενός τέτοια ώστε $\kappa_\infty Q(u) - 1 < 0$ για τα u αυτής της περιοχής. Συγκεκριμένα θα υπάρχει ένα $u_0 > 0$ τέτοιο ώστε το $\kappa_\infty Q(u) - 1 < 0$ για $u \in (0, u_0]$.
Από τη σχέση (5.3) και για αρκετά μεγάλο τ θα έχουμε

$$U_\tau = (\kappa(\tau)Q(U) - 1)U \sim (\kappa_\infty Q(U) - 1)U,$$

από όπου παίρνουμε ότι αν $0 < U \leq u_0$ τότε $U_\tau < 0$. Λόγω της συνέχισης εξάρτησης από τα αρχικά δεδομένα και του γεγονότος ότι από κάθε σημείο περνάει μοναδική χαρακτηριστική θα έχουμε ότι υπάρχει $u_1 > 0$ τέτοιο ώστε για κάποιο τ_1 το $U(\tau_1, u_1) < u_0$. Επειδή

$$U_\tau < 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad U \leq u_0 \Rightarrow U(\tau, u_1) \leq U(\tau_1, u_1) < u_0 \quad \gamma\iota\alpha \quad \tau \geq \tau_1.$$

Άρα για τ αρκετά μεγάλο, $0 < U(\tau, u_1) < u_0$.

Έστω τώρα ότι παίρνουμε $u_0 \leq u \leq 1$, οπότε $U(\tau, u_1) < u_0 \leq u \leq 1$. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η $\psi(\tau, u)$ είναι αύξουσα ως προς u καθώς και τη σχέση (5.2), καταλήγουμε στο ότι

$$e^\tau \psi_0(u_1) \leq \psi(\tau, u) \quad \gamma\iota\alpha \quad u_0 \leq u \leq 1,$$

την οποία ολοκληρώνοντας ως προς u και από u_0 έως 1 παίρνουμε ότι

$$\int_0^1 \psi(\tau, u)du = \infty,$$

που έρχεται σε αντίθεση με τη διατήρηση του όγκου. Άρα $\kappa_\infty \geq 1$.
Από τη διατήρηση του όγκου προκύπτει επίσης ότι υπάρχει κάποιο $u_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\psi_\infty(u_0) > 0$, διαφορετικά θα είχαμε ότι

$$\int_0^1 \psi_\infty(u)du = 0 \neq 1,$$

άτοπο.

Σκοπεύουμε να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε $u_1 \in (0,1), \psi_\infty(u_1) > 0$ και

$$\ln \psi_\infty(u_1) - \ln \psi_\infty(u_0) = \tau_{10} := \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{u(\kappa_\infty Q(u) - 1)}. \qquad (5.15)$$

Πρώτα ορίζουμε U_∞ να είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial U_\infty}{\partial \tau} = (\kappa_\infty Q(U_\infty) - 1)U_\infty, \quad U_\infty(0) = u_0.$$

Θα δείξουμε ότι η U_∞ ορίζεται σε ένα μέγιστο διάστημα της μορφής $(-\infty, T_0)$ με $U_\infty(-\infty) = 0$ και $U_\infty(T_0) = 1$.

Καταρχάς αν $0 < U_\infty \leq 1$ τότε το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι θετικό και άρα η $U_\infty(\tau, u)$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε καθώς το $\tau \to -\infty$ η $U_\infty(\tau, u)$ φθίνει προς το μηδέν και άρα $U_\infty(\tau, u) \to l \geq 0$. Έστω ότι $U_\infty(\tau, u) \to l > 0$. Τότε παίρνοντας όρια στη διαφορική εξίσωση καταλήγουμε στο ότι θα πρέπει το $\kappa_\infty = 1$ και $l = 0$, άτοπο. Άρα $l = 0$ και αφού το $U_\infty(\tau, u) \to 0$ καθώς το $\tau \to -\infty$, έπεται ότι $U_\infty(-\infty) = 0$.

Για να αποδείξουμε ότι $U_\infty(T_0) = 1$, υποθέτουμε το αντίθετο . Έστω λοιπόν ότι $U_\infty(\tau) < 1$ και $U_\infty(\tau) \to 1$ καθώς το $\tau \to \infty$. Τότε παίρνοντας πάλι όρια στη διαφορική εξίσωση καταλήγουμε στο ότι θα πρέπει το $\kappa_\infty = \frac{1}{3}$, άτοπο γιατί όπως αποδείχθηκε παραπάνω το $\kappa_\infty \geq 1$. Άρα υπάρχει $T_0 > 0$ τέτοιο ώστε $U_\infty(T_0) = 1$.

Επίσης αν θέσουμε όπου $u = U_\infty(\tau_{10})$ στο ολοκλήρωμα της σχέσης (5.15) θα πάρουμε ότι $U_\infty(\tau_{10}) = u_1$.

Στη συνέχεια ορίζουμε $U_0(\tau)$ να είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial U_0}{\partial \tau} = (\kappa(\tau_0 + \tau)Q(U_0) - 1)U_0, \quad U_0(0) = u_0.$$

Λόγω της συνεχής εξάρτησης από τα αρχικά δεδομένα και του ότι το $\kappa(\tau_0 + \tau) \to \infty$ καθώς το $\tau_0 \to \infty$ και ότι η Q είναι ομαλή στο $(0,1)$ θα έχουμε ότι για τ σε οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του $(-\infty, T_0)$, το $U_0(\tau) \to U_\infty(\tau)$, με άλλα λόγια

$$\sup_{\alpha \leq \tau \leq \beta} |U_0(\tau) - U_\infty(\tau)| \to 0$$

καθώς το $\tau_0 \to \infty$.

Στη συνέχεια σταθεροποιούμε ένα κλειστό διάστημα το οποίο περιέχει το 0 και το τ_{10} στο εσωτερικό του. Τότε εξαιτίας της παραπάνω σχέσης έχουμε ότι

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \tau_0 \geq \delta \quad U_\infty(\tau) - \varepsilon \leq U_0(\tau) \leq U_\infty(\tau) + \varepsilon,$$

και επειδή η $\psi(\tau, u)$ είναι αύξουσα παίρνουμε ότι

$$\psi(\tau_0+\tau, U_\infty(\tau)-\varepsilon) \leq \psi(\tau_0+\tau, U_0(\tau)) = e^\tau \psi(\tau_0, u_0) \leq \psi(\tau_0+\tau, U_\infty(\tau)+\varepsilon),$$

για οποιοδήποτε $\tau \in [\alpha, \beta]$ και άρα για τη χρονική στιγμή τ_{10} η οποία ανήκει στο συγκεκριμένο διάστημα, θα ισχύει

$$\psi(\tau_0+\tau_{10}, u_1-\varepsilon) \leq e^{\tau_{10}}\psi(\tau_0, u_0) \leq \psi(\tau_0+\tau_{10}, u_1+\varepsilon).$$

Παίρνοντας όρια καταλήγουμε στο ότι

$$\psi_\infty(u_1-\varepsilon) \leq e^{\tau_{10}}\psi_\infty(u_0) \leq \psi_\infty(u_1+\varepsilon), \forall \varepsilon > 0. \tag{5.16}$$

Από τη σχέση (5.2) προκύπτει ότι για οποιοδήποτε $\tau \in [\alpha, \beta]$ θα έχουμε

$$\psi(\tau_0+\tau, U_0(\tau)) = e^\tau \psi(\tau_0, u_0) \to e^\tau \psi_\infty(u_0)$$

καθώς το $\tau_0 \to \infty$.
Επιλέγουμε λοιπόν το $\varepsilon > 0$ με τέτοιο τρόπο ώστε $u_1 = u_0 - 2\varepsilon, u_1 + \varepsilon < 1$ και $u_1 - \varepsilon > 0$. Τότε η σχέση (5.16) παίρνει τη μορφή

$$\psi_\infty(u_0-3\varepsilon) \leq \psi_\infty(u_0) \exp \int_{u_0}^{u_0-2\varepsilon} \frac{du}{u(\kappa_\infty Q(u)-1)} \leq \psi_\infty(u_0-\varepsilon) \leq \psi_\infty(u_0)$$

δηλαδή

$$\psi_\infty(u_0) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \psi_\infty(u_0-\varepsilon) \leq \psi_\infty(u_0)$$

οπότε

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \psi_\infty(u_0-\varepsilon) = \psi_\infty(u_0),$$

δηλαδή η $\psi_\infty(u)$ είναι από αριστερά συνεχής.

Επιλέγουμε τώρα το $\varepsilon > 0$ με τέτοιο τρόπο ώστε $u_1 = u_0 + 2\varepsilon, u_1 + \varepsilon < 1$ και $u_1 - \varepsilon > 0$. Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως καταλήγουμε στο ότι $\lim_{\varepsilon\to 0} \psi_\infty(u_0+\varepsilon) = \psi_\infty(u_0)$, δηλαδή η $\psi_\infty(u)$ είναι από δεξιά συνεχής. Έπεται ότι η $\psi_\infty(u)$ είναι συνεχής στο $(0, 1)$, και από τη σχέση (5.16) προκύπτει επιπλέον ότι ,για $u_1 \in (0, 1)$ ισχύει

$$e^{\tau_{10}}\psi_\infty(u_0) = \psi_\infty(u_1) > 0$$

οπότε

$$\ln \psi_\infty(u_0) = \tau_{10},$$

δηλαδή έχουμε το ζητούμενο.

Θα δείξουμε ότι η $\psi_\infty(u)$ είναι συνεχής και στο $u_1 = 1$ οπότε η (5.15) θα ισχύει και για $u_1 = 1$. Η Q είναι γνησίως αύξουσα, οπότε αν $u_0 < U_0 < 1 \quad \Rightarrow$ $1 < Q(u_0) < Q(U_0) < 3$. Επίσης για αρκετά μεγάλο τ_0 το $\kappa(\tau_0+\tau) \sim \kappa_\infty \geq 1$, άρα $\frac{\partial U_0}{\partial \tau} = (\kappa(\tau_0+\tau)Q(U_0) - 1)U_0 > 0$. Οπότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial U_0}{\partial \tau} > \delta$ για $u_0 < U_0 < 1$ και τ_0 αρκετά μεγάλο.

Έστω $\varepsilon > 0$ μικρό. Επειδή η $\psi(\tau, u)$ είναι από αριστερά συνεχής και συγκλίνει στην $\psi_\infty(u)$ καθώς το $\tau_0 \to \infty$ θα έχουμε ότι για τ_0 αρκετά μεγάλο υπάρχει u_0 κοντά στο 1 τέτοιο ώστε $\psi(\tau_0, u_0) > \psi_\infty(1) - \varepsilon$. Επιπλέον ολοκληρώνοντας την $\frac{\partial U_0}{\partial \tau} > \delta$ ως προς τ παίρνουμε ότι $U_0(-\varepsilon) < 1 - \delta\varepsilon$ και έτσι

$$\psi(\tau_0 - \varepsilon, 1 - \delta\varepsilon) \geq \psi(\tau_0 - \varepsilon, U_0(-\varepsilon)) = e^{-\varepsilon}\psi(\tau_0, u_0) \geq e^{-\varepsilon}(\psi_\infty(1) - \varepsilon),$$

όπου αφήνοντας το $\tau_0 \to \infty$ παίρνουμε

$$\psi_\infty(1) \leq e^{\varepsilon}\psi_\infty(1 - \delta\varepsilon) + \varepsilon$$

δηλαδή

$$\psi_\infty(1) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\infty(1 - \delta\varepsilon) = \lim_{u \to 1} \psi_\infty(u) \leq \lim_{u \to 1} \psi_\infty(1) = \psi_\infty(1)$$

οπότε

$$\lim_{u \to 1} \psi_\infty(u) = \psi_\infty(1),$$

άρα η ψ_∞ είναι συνεχής στο $u \in (0, 1]$ και η σχέση (5.15) ισχύει για $u \in (0, 1]$.

Οπότε ολοκληρώνοντας την (5.15) και συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με τη σχέση (4.23) παίρνουμε ότι $\psi_\infty(u) = \Psi_p(u)$ και $\kappa_\infty = \kappa_\star$, δηλαδή $p = \frac{1}{\kappa_\infty - 1}$.

Συνδυάζοντας λοιπόν τις δύο παραπάνω περιπτώσεις παίρνουμε ότι $\psi_\infty(u) = \Psi_p(u)$, όπου $p = 1/(\kappa_\infty - 1) \in [0, \infty]$.

Επειδή τώρα η $\psi(\tau, u) \to \Psi_p(u)$, καθώς το $\tau \to \infty$, η Ψ_p είναι συνεχής και η $\psi(\tau, u)$ είναι αύξουσα, από βασικό θεώρημα της Ανάλυσης θα έχουμε ότι η $\psi(\tau, u)$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς u, σε οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του $(0, 1]$. $\square$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το εξής πόρισμα :

Πόρισμα 5.3. *Υποθέτουμε ότι το* $\lim_{\tau \to \infty} \psi(\tau, u) = \psi_\infty(u)$ *υπάρχει για κάθε* $u \in [0, 1]$. *Τότε υπάρχει* $p \in [0, \infty]$ *τέτοιο ώστε* $\psi_\infty(u) = \Psi_p(u)$ *και*

$$\inf_{u>0} \psi_0(u)/u^q = 0 \quad \text{για} \quad \text{όλα} \quad \text{τα} \quad q < p,$$

$$\sup_{u>0} \psi_0(u)/u^q = \infty \quad \text{για} \quad \text{όλα} \quad \text{τα} \quad q > p.$$

Απόδειξη του πορίσματος

Το πρώτο προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 5.2. Για το δεύτερο σκέλος πηγαίνουμε με άτοπο. Έστω ότι υπάρχει $q < p$ τέτοιο ώστε $\inf_{u>0} \psi_0(u)/u^q > 0$. Τότε από την Πρόταση 5.1 το $\limsup_{\tau\to\infty} \kappa(\tau) \geq 1 + \frac{1}{q}$. Όμως από το Λήμμα 5.2 έχουμε ότι υπάρχει το $\lim_{\tau\to\infty} \kappa(\tau) = \kappa_\infty$. Άρα $\kappa_\infty \geq 1 + \frac{1}{q}$. Οπότε από την ανισότητα $q < p$ έπεται ότι $\kappa_\infty > 1 + \frac{1}{p}$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί $p = \frac{1}{\kappa_\infty - 1} \Rightarrow \kappa_\infty = 1 + \frac{1}{p}$. Άρα το $\inf_{u>0} \psi_0(u)/u^q = 0$ για όλα τα $q < p$.

Σε ό,τι αφορά στο sup πηγαίνουμε πάλι με άτοπο.Έστω ότι υπάρχει $q > p$ τέτοιο ώστε $\sup_{u>0} \psi_0(u)/u^q < \infty$. Τότε από την Πρόταση 5.1 έχουμε ότι $\liminf_{\tau\to\infty} \kappa(\tau) \leq 1 + \frac{1}{q}$, και επειδή ,όπως προαναφέρθηκε, υπάρχει το $\lim_{\tau\to\infty} \kappa(\tau) = \kappa_\infty$, θα έχουμε ότι $\kappa_\infty \leq 1 + \frac{1}{q}$. Τώρα από την ανισότητα $q > p$ προκύπτει ότι $\kappa_\infty < 1 + \frac{1}{p}$, άτοπο. Άρα $\sup_{u>0} \psi_0(u)/u^q = \infty$ για όλα τα $q > p$.
$\square$

Τα αποτελέσματα αυτού του πορίσματος τονίζουν ακριβώς την αστάθεια των στάσιμων λύσεων Ψ_p ως προς τη *supremum* νόρμα. Αυτή η παρατήρηση διατυπώνεται ακριβέστερα στο παρακάτω πόρισμα :

Πόρισμα 5.4. *Δοσμένου οποιουδήποτε $p \in (0, \infty]$, η στάσιμη λύση Ψ_p είναι ασταθής σε διαταραχές όπου τα αρχικά δεδομένα ικανοποιούν*

$$\inf_{u>0} \psi_0(u)/u^q > 0 \quad \text{για} \quad \text{κάποιο} \quad q < p.$$

Ιδιαίτερα η LSW λύση (με $p = \infty$) είναι ασταθής για όλες τις διαταραχές για τις οποίες

$$\inf_{u>0} \psi_0(u)/u^q > 0 \quad \text{για} \quad \text{κάποιο} \quad q < \infty.$$

Απόδειξη του πορίσματος

Καταρχάς υποθέτουμε ότι η $\psi(\tau, u)$ συγκλίνει. Η ιδέα είναι να πάρουμε αρχικά δεδομένα $\psi_0(u)$ κοντά στην Ψ_p και τέτοια, ώστε $\inf_{u>0} \psi_0(u)/u^q > 0$ για κάποιο $q < p$.

Σκοπός μας είναι για ένα δοσμένο $\delta > 0$, να βρούμε $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε τα αρχικά δεδομένα $\psi(0, u)$ να είναι $\delta-$κοντά στην Ψ_p με την *supremum* νόρμα, αλλά η λύση $\psi(\tau, u)$ με αυτά τα αρχικά δεδομένα να μην είναι $\varepsilon-$κοντά στην Ψ_p. Για αυτό το λόγο φτιάχνουμε αρχικά δεδομένα τέτοια ώστε $\psi_0 \sim u^q$ κοντά στο μηδέν , $\Psi_p(u) \leq \psi_0(u) \leq \Psi_p(u) + \delta$ και $\int_0^1 \psi_0(u)du = 1$. Επειδή $\psi_0 \sim u^q$ κοντά στο μηδέν , έπεται ότι $\frac{\psi_0(u)}{u^q} \to l > 0$ και άρα το supremum και το infimum της συνάρτησης $\frac{\psi_0(u)}{u^q}$ είναι θετικά και πεπερασμένα, οπότε από την

Πρόταση 5.1 θα έχουμε ότι $\lim_{\tau\to\infty}\kappa(\tau) = \kappa_\infty = 1 + \frac{1}{q}$, εφόσον η $\psi(\tau, u)$ συγκλίνει και άρα από το Λήμμα 5.2 υπάρχει το όριο του $\kappa(\tau)$. Επιπλέον από το ίδιο Λήμμα παίρνουμε την πληροφορία ότι $\psi(\tau, u) \to \Psi_q$, καθώς το $\tau \to \infty$. Οπότε

$$\|\psi(\tau, u) - \Psi_p(u)\|_\infty \sim \|\Psi_q - \Psi_p\|_\infty$$

για μεγάλους χρόνους.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αρκεί να πάρουμε $\varepsilon = \frac{\|\Psi_q - \Psi_p\|_\infty}{2} > 0$. Τότε για το $\delta > 0$ βρήκαμε $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε $\|\psi(0, u) - \Psi_p(u)\|_\infty < \delta$, αλλά για κάποιο μεγάλο χρόνο T_0, $\|\psi(T_0, u) - \Psi_p(u)\|_\infty \geq \varepsilon$, δηλαδή η Ψ_p είναι ασταθής. $\square$

5.3.2 Φυσιολογικά κυμαινόμενες συναρτήσεις

Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποιους ορισμούς και λήμματα τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη βασικών θεωρημάτων.

Ορισμός 5.1. Μία θετική, μετρήσιμη συνάρτηση g, ορισμένη σε κάποιο διάστημα της μορφής $(0, \alpha]$, λέγεται φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη $p \in \mathbb{R}$ εάν

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(\lambda x)}{\lambda^p g(x)} = 1, \quad \forall \lambda > 0. \tag{5.17}$$

Εάν το $p = 0$, λέμε ότι η g είναι αργά κυμαινόμενη στο 0.

Ορισμός 5.2. Λέμε ότι μία πραγματικών τιμών, μετρήσιμη συνάρτηση h, ορισμένη σε κάποιο διάστημα της μορφής $[A, \infty)$ είναι τοπικά γραμμική στο ∞ με κλίση $p \in \mathbb{R}$ εάν

$$\lim_{y\to\infty} h(y + L) - h(y) = pL, \quad \forall L \in \mathbb{R} \tag{5.18}$$

Εάν το $p = 0$, λέμε ότι η h είναι τοπικά επίπεδη στο ∞.

Ένα βασικό αποτέλεσμα αναφέρει ότι εάν η g είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0, τότε το όριο στη σχέση (5.17) πιάνεται ομοιόμορφα για όλες τις τιμές του λ σε ένα οποιοδήποτε συμπαγές διάστημα $[\alpha, \beta]$ του $(0, \infty)$. Παρόμοια εάν η h είναι τοπικά γραμμική στο ∞ τότε το όριο στη σχέση (5.18) πιάνεται ομοιόμορφα για όλες τις τιμές του L σε ένα οποιοδήποτε φιξαρισμένο πεπερασμένο διάστημα. (βλ.[2],[7]) Στη συνέχεια ορίζουμε την ταλάντωση μιας συνάρτησης h σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ να είναι

$$osc_{z\in[\alpha,\beta]}h(z) = \sup_{z\in[\alpha,\beta]} h(z) - \inf_{z\in[\alpha,\beta]} h(z) = \sup_{z_1,z_2\in[\alpha,\beta]} h(z_1) - h(z_2). \quad (5.19)$$

Έχουμε τα εξής δύο βασικά λήμματα από τη θεωρία των φυσιολογικά κυμαινόμενων συναρτήσεων στο μηδέν και των τοπικά γραμμικών συναρτήσεων στο άπειρο :

Λήμμα 5.5. *Υποθέτουμε ότι $h(-\ln x) = -\ln g(x)$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα .*

(ι) η g είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p.

(ιι) η h είναι τοπικά γραμμική στο ∞ με κλίση p.

(ιιι) $\forall L > 0$,

$$osc_{z\in[y,y+L]}(h(z) - pz) \to 0, \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad y\to\infty.$$

$(i\nu)$ $\forall\lambda > 1$,

$$\frac{\sup_{z\in[x,\lambda x]} g(z)/z^p}{\inf_{z\in[x,\lambda x]} g(z)/z^p} \to 1, \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad x\to 0.$$

Λήμμα 5.6. *Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $x \to X(x)$ είναι C^1 κοντά στο $x = 0$ με $X(0) = 0$ και $X' > 0$. Τότε η g είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p εάν και μόνο εάν η συνάρτηση $g\circ X$ έχει την ίδια ιδιότητα.*

5.3.3 Η σύγκλιση απαιτεί φυσιολογικά κυμαινόμενα δεδομένα

Υπενθυμίζουμε ότι

$$U(\tau,u) = 1 - \frac{V(t,\upsilon)}{\overline{\upsilon}(t)},$$

όπου $\tau = \ln\frac{\overline{\upsilon}(t)}{\overline{\upsilon}(0)}$ και $u = 1 - \frac{\upsilon}{\overline{\upsilon}(t)}$. Η $U(\tau,u)$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$U(\tau,u) = 1 - \frac{V(t, e^{\tau}\overline{\upsilon}(0)(1-u))}{e^{\tau}\overline{\upsilon}(0)} \quad (5.20)$$

και από την Πρόταση 2.12 θα έχουμε ότι η $V(t,\cdot)$ είναι αναλυτική σε μία περιοχή του $\overline{\upsilon}(t)$ με θετική παράγωγο.

Αποδεικνύουμε τώρα το εξής λήμμα :

Λήμμα 5.7. *Για οποιοδήποτε $\tau > 0$ και $p \in [0, \infty)$, η $\psi(\tau, u)$ είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο μηδέν με εκθέτη p εάν και μόνο εάν η ψ_0 έχει την ίδια ιδιότητα.*

Απόδειξη του λήμματος

Με βάση τη σχέση (5.20) παίρνουμε ότι αφού η $V(t, v)$ είναι αναλυτική σε μία περιοχή του $\overline{v}(t)$, η $U(\tau, u)$ θα είναι αναλυτική σε μία περιοχή του 0. Άρα η απεικόνιση $u \to U(\tau, u)$ είναι C^1 κοντά στο 0, και μάλιστα έχει θετική παράγωγο.

Επιπλέον $U(\tau, 0) = 0$, λόγω της μοναδικότητας των χαρακτηριστικών. Οπότε με βάση το Λήμμα 5.6 και τη σχέση (5.2) έχουμε ότι η $\psi(\tau, \cdot)$ είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p ισοδύναμα η $\psi(\tau, \cdot) \circ U(\tau, u)$ είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p ισοδύναμα η $e^{\tau}\psi_0(u)$ είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p ισοδύναμα η $\psi_0(u)$ είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p. $\square$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μία αναγκαία συνθήκη προκειμένου να έχουμε σύγκλιση ως προς τις κανονικοποιημένες μεταβλητές σε μία οποιαδήποτε στάσιμη λύση Ψ_p, όταν $0 \leq p < \infty$.

Θεώρημα 5.8. *Υποθέτουμε ότι για κάποιο $p \in [0, \infty)$ έχουμε*

$$\lim_{\tau \to \infty} \psi(\tau, u) = \Psi_p(u), \quad \forall u \in [0, 1].$$

Τότε η ψ_0 είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p.

Απόδειξη του θεωρήματος

Με βάση το Λήμμα 5.7 αρκεί να δείξουμε ότι για κάποιο $\tau_0 > 0$, η $\psi(\tau_0, \cdot)$ είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1^{η}: $p > 0$.

Αφού από την υπόθεση η $\psi(\tau, u)$ συγκλίνει, από το Λήμμα 5.2 θα έχουμε ότι $\kappa(\tau) \to \kappa_\infty$, καθώς το $\tau \to \infty$. Οπότε από τον ορισμό του ορίου και για $\varepsilon = \frac{1}{2p}$, θα έχουμε ότι υπάρχει $\tau_0 > 0$ τέτοιο ώστε :$\forall \tau \geq \tau_0 \quad |\kappa(\tau) - \kappa_\star| \leq \frac{1}{2p}$.

Θεωρούμε στη συνέχεια την εξής αλλαγή μεταβλητών :

$$y = -\ln u, \quad \rho = -\ln \psi \tag{5.21}$$

και εάν $\rho_0(y) = -\ln \psi_0(u) \quad \textit{και} \quad Y = -\ln U \quad \textit{με} \quad Y(\tau, y) > 0$ τότε η σχέση (5.2) παίρνει τη μορφή

$$\rho(\tau, Y(\tau, y)) = \rho_0(y) - \tau \tag{5.22}$$

και η σχέση (5.3) τη μορφή

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = -\kappa(\tau)Q(e^{-Y}) + 1, \quad Y(0,y) = y. \tag{5.23}$$

Για διαφορίσιμα αρχικά δεδομένα $\rho_0(y)$, η σχέση (5.22) παραγωγιζόμενη ως προς τ δίνει

$$\partial_\tau \rho - (\kappa(\tau)Q(e^{-y}) - 1)\partial_y \rho = -1. \tag{5.24}$$

Με αυτές τις μεταβλητές οι στάσιμες λύσεις περιγράφονται από τις $\rho_\star(y)$, δηλαδή $\rho_\star(y) = -\ln \psi_\star(u)$ και η σχέση (4.23) παίρνει τη μορφή

$$(\kappa_\star Q(e^{-y}) - 1)\rho_\star'(y) = 1 \tag{5.25}$$

για όλα τα $y > 0$. Για $0 < p = 1/(\kappa_\star - 1) < \infty$ προκύπτει ότι

$$\rho_\star(y) = \rho y - A_\star(y) \tag{5.26}$$

όπου το $\lim_{y\to\infty} A_\star(y)$ υπάρχει και έτσι η $A_\star$ είναι τοπικά επίπεδη στο ∞.

Όντως το παραπάνω αποδεικνύεται εύκολα, αν αναλογισθούμε ότι η $\Psi_p(u) = \alpha_p(u)u^p$, από το Λήμμα 4.2 όπου η $\alpha_p(u)$ είναι φθίνουσα και αναλυτική στο $[0,1)$ και λογαριθμήσουμε την παραπάνω σχέση. Τότε θα προκύψει ότι $\rho_\star(y) = \rho y - A_\star(y)$, όπου $A_\star(y) = -\ln \alpha_p(u)$ και επειδή η $\alpha_p(u)$ είναι φθίνουσα και αναλυτική στο $[0,1)$ έπεται ότι θα υπάρχει το όριο της $A_\star(y)$.

Στη συνέχεια ορίζουμε

$$h(\tau, y) = \rho(\tau, y) - \rho_\star(y). \tag{5.27}$$

Από το Λήμμα 5.2 έχουμε ότι η $\psi(\tau,u)$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς u τα οποία ανήκουν σε ένα οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του $(0,1]$. Με την παραπάνω αλλαγή μεταβλητών αυτό μεταφράζεται στο ότι η $h(\tau,y)$ συγκλίνει στο 0 ομοιόμορφα ως προς y τα οποία ανήκουν σε ένα οποιοδήποτε συμπαγές διάστημα $[\alpha,\beta] \subset [0,\infty)$.

Οπότε προκειμένου να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι η $h(\tau_0,\cdot)$ είναι τοπικά επίπεδη στο ∞, γιατί τότε η $\rho(\tau_0,y)$ θα είναι τοπικά γραμμική στο ∞ με εκθέτη p, αφού η $\rho_\star(y)$ είναι τοπικά γραμμική στο ∞ με εκθέτη p, ($A_\star$ είναι τοπικά επίπεδη στο ∞,) και βάση του Λήμματος 5.5 θα προκύψει ότι η $\psi(\tau_0,\cdot)$ είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p.

Η ιδέα είναι να ακολουθήσουμε ζευγάρια χαρακτηριστικών πίσω στο χρόνο και συγκεκριμένα από μεγάλους χρόνους $\tilde{\tau}$ και μέχρι τη χρονική στιγμή τ_0.

Στις εκτιμήσεις που θα ακολουθήσουν θα δούμε ότι η συνολική αλλαγή στην απόσταση μεταξύ τέτοιων ζευγαριών παραμένει φραγμένη ανεξάρτητα από το χρόνο $\tilde{\tau}$.

Ξεκινάμε, συμβολίζοντας με $\widetilde{Y}(\tau, \tilde{y})$ τη χαρακτηριστική που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tau} = -(\kappa(\tau) Q(e^{-\tilde{Y}}) - 1), \quad \tilde{Y}(\tilde{\tau}, \tilde{y}) = \tilde{y}. \tag{5.28}$$

Κοιτώντας προς τα πίσω στο χρόνο, δηλαδή για $\tilde{\tau} \geq \tau \geq \tau_0$ θα έχουμε από μία παρατήρηση που έχει προηγηθεί στην αρχή ότι, αφού το $\tau \geq \tau_0$ το $|\kappa(\tau) - \kappa_\star| \leq \frac{1}{2p}$, και άρα το $\kappa(\tau) - 1 \geq \frac{1}{2p}$, δεδομένου ότι $\kappa_\star = 1 + \frac{1}{p}$.

Επίσης, όπως γνωρίζουμε η $Q(0) = 1$ και η Q είναι γνησίως αύξουσα οπότε $\kappa(\tau) Q(e^{-\tilde{Y}}) - 1 \geq \kappa(\tau) - 1$ και άρα

$$-\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tau} \geq \kappa(\tau) - 1 \geq \frac{1}{2p} \tag{5.29}$$

για $\tilde{\tau} \geq \tau \geq \tau_0$. Στη συνέχεια με ολοκλήρωση της παραπάνω ανισότητας και για χρόνους από τ έως $\tilde{\tau}$ παίρνουμε το εξής

$$\tilde{Y}(\tau, \tilde{y}) \geq \tilde{y} + (\tilde{\tau} - \tau)/2p. \tag{5.30}$$

Επίσης πάλι από το γεγονός ότι για $\tau \geq \tau_0$ το $|\kappa(\tau) - \kappa_\star| \leq \frac{1}{2p}$, προκύπτει η ανισότητα

$$\kappa(\tau) \leq K_0 := \kappa_\star + 1/2p \tag{5.31}$$

και επειδή $0 < Q(e^{-\tilde{Y}}) \leq 3$ θα έχουμε $\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tau} \geq -3K_0$ από την οποία με ολοκλήρωση παίρνουμε ότι

$$\tilde{Y}(\tau, \tilde{y}) \leq \tilde{y} + 3K_0(\tilde{\tau} - \tau). \tag{5.32}$$

Τώρα, εφόσον το $Q'(0) = \frac{1}{3}$ υπάρχει κάποιο $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε $Q'(e^{-y}) < 1$, για $y \geq \delta_0$. Υποθέτουμε ότι $\delta_0 \leq \tilde{y} \leq \min(\tilde{y_1}, \tilde{y_2})$. Έστω

$$\begin{aligned} \tilde{Y_1}(\tau) = \tilde{Y}(\tau, \tilde{y_1}), \quad y_1 = \tilde{Y_1}(\tau_0) \\ \tilde{Y_2}(\tau) = \tilde{Y}(\tau, \tilde{y_2}), \quad y_2 = \tilde{Y_2}(\tau_0). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Ορίζουμε $E(\tilde{\tau}, \tilde{y_1}, \tilde{y_2}) := (y_1 - y_2) - (\tilde{y_1} - \tilde{y_2})$ και μάλιστα

$$E(\tilde{\tau}, \tilde{y_1}, \tilde{y_2}) = \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} \kappa(\tau)(Q(e^{-\tilde{Y_1}(\tau)}) - Q(e^{-\tilde{Y_2}(\tau)}))d\tau.$$

Πράγματι, από τη σχέση (5.28) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \kappa(\tau)Q(e^{-\tilde{Y_1}(\tau)}) &= 1-\frac{\partial\tilde{Y_1}}{\partial\tau} \\ \kappa(\tau)Q(e^{-\tilde{Y_2}(\tau)}) &= 1-\frac{\partial\tilde{Y_2}}{\partial\tau} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\kappa(\tau)[Q(e^{-\tilde{Y_1}(\tau)})-Q(e^{-\tilde{Y_2}})]=\frac{\partial\tilde{Y_2}}{\partial\tau}-\frac{\partial\tilde{Y_1}}{\partial\tau},$$

την οποία ολοκληρώνουμε ως προς τ και παίρνουμε το ζητούμενο. Άρα

$$\begin{aligned} E(\tilde{\tau},\tilde{y_1},\tilde{y_2}): &= (y_1-y_2)-(\tilde{y_1}-\tilde{y_2}) \\ &= \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}\kappa(\tau)(Q(e^{-\tilde{Y_1}(\tau)})-Q(e^{-\tilde{Y_2}(\tau)}))d\tau. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Επίσης αν στην σχέση (5.30) θέσουμε $\tilde{y}=\tilde{y_1}$ και $\tilde{y}=\tilde{y_2}$ και χρησιμοποιήσουμε και τη σχέση (5.33) θα πάρουμε ότι $\tilde{Y_1}(\tau),\tilde{Y_2}(\tau)\geq\delta_0$, οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $Q\circ e^{-x}$ στο διάστημα $[\tilde{Y_1}(\tau),\tilde{Y_2}(\tau)]$ και δεδομένου ότι $Q'(e^{-y})<1$ για $y\geq\delta_0$ και ότι η συνάρτηση $\tilde{Y_2}(\tau)-\tilde{Y_1}(\tau)$ είναι αύξουσα ως προς το τ θα καταλήξουμε στην εξής εκτίμηση

$$\left|Q(e^{-\tilde{Y_1}(\tau)})-Q(e^{-\tilde{Y_2}(\tau)})\right|\leq e^{-\tilde{Y}(\tau)}\left|\tilde{y_1}-\tilde{y_2}\right|. \tag{5.35}$$

Παίρνοντας λοιπόν απόλυτες τιμές στη σχέση (5.34) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.30) , (5.20) και την παραπάνω εκτίμηση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$|E(\tilde{\tau},\tilde{y_1},\tilde{y_2})|\leq K_0e^{-\tilde{y}}\left|\tilde{y_1}-\tilde{y_2}\right|\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}e^{-(\tilde{\tau}-\tau)/2p}d\tau\leq 2pK_0e^{-\tilde{y}}\left|\tilde{y_1}-\tilde{y_2}\right|. \tag{5.36}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε

$$H(\tilde{\tau},\tilde{y_1},\tilde{y_2}):=(h(\tau_0,y_1)-h(\tau_0,y_2))-(h(\tilde{\tau},\tilde{y_1})-h(\tilde{\tau},\tilde{y_2}))$$

και μάλιστα

$$H(\tilde{\tau},\tilde{y_1},\tilde{y_2})=\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}(\kappa_\star-\kappa(\tau))\frac{Q(e^{-\tilde{Y_2}(\tau)})-Q(e^{-\tilde{Y_1}(\tau)})}{(\kappa_\star Q(e^{-\tilde{Y_1}(\tau)})-1)(\kappa_\star Q(e^{-\tilde{Y_2}(\tau)})-1)}d\tau.$$

Όντως από τη σχέση (5.22) παίρνουμε το εξής

$$\begin{aligned}\rho(\tau, \tilde{Y}_1(\tau)) &= \rho_0(\tilde{y}_1) - \tau \\ \rho(\tau, \tilde{Y}_2(\tau)) &= \rho_0(\tilde{y}_2) - \tau.\end{aligned}$$

Επίσης από τη σχέση (5.27) προκύπει ότι για τις $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}h(\tau, \tilde{Y}_1(\tau)) &= \rho(\tau, \tilde{Y}_1(\tau)) - \rho_\star(\tilde{Y}_1(\tau)) \\ h(\tau, \tilde{Y}_2(\tau)) &= \rho(\tau, \tilde{Y}_2(\tau)) - \rho_\star(\tilde{Y}_2(\tau)).\end{aligned}$$

Οπότε συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$h(\tau, \tilde{Y}_1(\tau)) - h(\tau, \tilde{Y}_2(\tau)) = \rho_0(\tilde{y}_1) - \rho_0(\tilde{y}_2) - \rho_\star(\tilde{Y}_1(\tau)) + \rho_\star(\tilde{Y}_2(\tau))$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau}(h(\tau, \tilde{Y}_1(\tau)) - h(\tau, \tilde{Y}_2(\tau))) &= -\rho_\star'(\tilde{Y}_1(\tau))\tilde{Y}_1'(\tau) + \rho_\star'(\tilde{Y}_2(\tau))\tilde{Y}_2'(\tau) \\ &= \frac{-1}{\kappa_\star Q(e^{-\tilde{Y}_1(\tau)}) - 1}\tilde{Y}_1'(\tau) + \frac{-1}{\kappa_\star Q(e^{-\tilde{Y}_2(\tau)}) - 1}\tilde{Y}_2'(\tau) \\ &= \frac{\kappa(\tau) Q(e^{-\tilde{Y}_1(\tau)}) - 1}{\kappa_\star Q(e^{-\tilde{Y}_1(\tau)}) - 1} - \frac{\kappa(\tau) Q(e^{-\tilde{Y}_2(\tau)}) - 1}{\kappa_\star Q(e^{-\tilde{Y}_2(\tau)}) - 1} \\ &= \frac{(\kappa_\star - \kappa(\tau))(Q(e^{-\tilde{Y}_1(\tau)}) - Q(e^{-\tilde{Y}_2(\tau)}))}{(\kappa_\star Q(e^{-\tilde{Y}_1(\tau)}) - 1)(\kappa_\star Q(e^{-\tilde{Y}_2(\tau)}) - 1)}\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (5.25),(5.28) και εν συνεχεία αν ολοκληρώσουμε την τελευταία σχέση από τ_0 έως $\tilde{\tau}$ και έχοντας υπόψην την (5.33) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}&H(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) := (h(\tau_0, y_1) - h(\tau_0, y_2)) - (h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_2)) \\ &= \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} (\kappa_\star - \kappa(\tau)) \frac{Q(e^{-\tilde{Y}_2(\tau)}) - Q(e^{-\tilde{Y}_1(\tau)})}{(\kappa_\star Q(e^{-\tilde{Y}_1(\tau)}) - 1)(\kappa_\star Q(e^{-\tilde{Y}_2(\tau)}) - 1)} d\tau. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}H &\leq \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} (\kappa_\star - \kappa(\tau)) \frac{Q(e^{-\tilde{Y}_2(\tau)}) - Q(e^{-\tilde{Y}_1(\tau)})}{(\kappa_\star - 1)^2} \\ &= p^2 \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} (\kappa_\star - \kappa(\tau))(Q(e^{-\tilde{Y}_2(\tau)}) - Q(e^{-\tilde{Y}_1(\tau)})) d\tau\end{aligned} \tag{5.38}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} |H| &\leq p^2 \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} |\kappa_\star - \kappa(\tau)| \, e^{-\tilde{Y}(\tau)} \, |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| \, d\tau \\ &\leq p^2 e^{-\tilde{y}} \, |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} |\kappa_\star - \kappa(\tau)| \, e^{\frac{-(\tilde{\tau}-\tau)}{2p}} d\tau := M_0(\tilde{\tau}) \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της (5.30). Εφόσον τώρα $\kappa(\tau) - \kappa_\star \to 0$, έπεται ότι $M_0(\tilde{\tau}) \to 0$, καθώς το $\tilde{\tau} \to \infty$.

Έστω λοιπόν ένα $L > 0$ και σταθεροποιούμε ένα $\tilde{y} > \delta_0$. Θέτουμε $\tilde{y}_2 = \tilde{y}$ και διαλέγουμε ένα $\tilde{y}_1 > \tilde{y}_2$ τέτοιο ώστε με $y = y(\tilde{\tau}) = y_2$ να έχουμε $y + L = y_1$. Από τη σχέση (5.36) έχουμε το εξής :

$$|L - (\tilde{y}_1 - \tilde{y})| \leq 2pK_0 e^{-\tilde{y}} (\tilde{y}_1 - \tilde{y})$$

δηλαδή

$$(\tilde{y}_1 - \tilde{y}) - L \leq 2pK_0 e^{-\tilde{y}} (\tilde{y}_1 - \tilde{y})$$

οπότε

$$\tilde{y}_1 \leq \tilde{y} + \frac{L}{1 - 2pK_0 e^{-\delta_0}},$$

όπου πήραμε δ_0 αρκετά μεγάλο προκειμένου να ισχύει ότι $1 - 2pK_0 e^{-\delta_0} > 0$. Άρα έχουμε ότι το $\tilde{y}_1 \in [0, \tilde{y} + \frac{1}{1-2pK_0 e^{-\delta_0}} L]$, και αφού η $h(\tau, \cdot)$ συγκλίνει στο 0 ομοιόμορφα ως προς y που ανήκουν σε συμπαγές διάστημα έπεται ότι $h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) \to 0$ ομοιόμορφα ως προς $\tilde{y}_1 \in [0, \tilde{y} + \frac{1}{1-2pK_0 e^{-\delta_0}} L]$ και $h(\tilde{\tau}, \tilde{y}) \to 0$ ομοιόμορφα ως προς $\tilde{y} \in [0, \tilde{y} + \frac{1}{1-2pK_0 e^{-\delta_0}} L]$, καθώς το $\tilde{\tau} \to \infty$.

Τώρα, αφού $H \to 0$, καθώς το $\tilde{\tau} \to \infty$, και με δεδομένα τα παραπάνω όρια παίρνουμε

$$\lim_{\tilde{\tau} \to \infty} \{(h(\tau_0, y(\tilde{\tau}) + L) - h(\tau_0, y(\tilde{\tau}))) - (h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - h(\tilde{\tau}, \tilde{y}))\} = 0$$

$$\lim_{y \to \infty} (h(\tau_0, y + L) - h(\tau_0, y)) = 0. \tag{5.39}$$

Επειδή το $L > 0$ ήταν τυχαίο έπεται ότι η $h(\tau_0, \cdot)$ είναι τοπικά επίπεδη στο ∞. Έτσι τελειώνει η απόδειξη του Θεωρήματος στην περίπτωση που το $p > 0$.

Περίπτωση 2^η: $p = 0$.

Σε αυτήν την περίπτωση είχαμε δει στην απόδειξη του Λήμματος 5.2 ότι $\Psi_p(u) = 1, \forall u \in (0, 1]$ και λόγω της σχέσης (5.21) συνεπάγεται ότι $\rho_\star = 0$ και άρα $h(\tau, y) = \rho(\tau, y)$. Οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.33),(5.22),(5.28) και κάνοντας κάποιες πράξεις καταλήγουμε στο ότι $H(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = 0$. Επίσης $\lim_{\tau\to\infty} \kappa(\tau) = \kappa_\infty = \infty$ και άρα μπορούμε να βρούμε τ_0 αρκετά μεγάλο τέτοιο ώστε $\kappa(\tau) > 2$ για $\tau \geq \tau_0$.

Η στρατηγική αυτής της απόδειξης είναι η ίδια με την προηγούμενη. Το κλειδί είναι να δείξουμε ότι η $E(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ είναι φραγμένη ανεξάρτητα από το $\tilde{\tau}$ με $\tilde{\tau} > \tau_0$. Ισχύουν πάλι οι σχέσεις (5.28) και (5.29). Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας τις (5.34) και (5.35) και το ότι $\kappa(\tau) > 2$ για $\tau \geq \tau_0$, παίρνουμε την εξής εκτίμηση :

$$|E(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)| \leq e^{-\tilde{y}} |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| \leq e^{-\delta_0} |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| \leq \frac{1}{2} |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2|$$

όπου για να ισχύει το τελευταίο πήραμε δ_0 αρκετά μεγάλο ώστε να ικανοποιεί ότι $e^{-\delta_0} < \frac{1}{2}$. Με αυτήν την επιλογή τα $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ θα ανήκουν σε συμπαγές διάστημα και επιχειρηματολογώντας ακριβώς όπως στην περίπτωση που το $p > 0$ καταλήγουμε στο ότι η $h(\tau_0, \cdot)$ είναι τοπικά επίπεδη στο ∞, δηλαδή στο ζητούμενο. $\square$

5.4 Μία ικανή συνθήκη για επάρκεια

Το προηγούμενο θεώρημα απεδείκνυε την αναγκαιότητα του να είναι τα αρχικά δεδομένα φυσιολογικά κυμαινόμενα στο μηδέν με εκθέτη p προκειμένου να έχουμε σύγκλιση της λύσης. Εικάζουμε λοιπόν ότι η απαίτηση αυτή μπορεί να είναι και ικανή. Συγκεκριμένα, αν έχουμε σύγκλιση της συνάρτησης $\kappa(\tau)$ τότε όντως έχουμε σύγκλιση της λύσης όπως φαίνεται στο επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 5.9. *Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{\tau\to\infty} \kappa(\tau) = \kappa_\star \in (1, \infty].$$

Τότε $\lim_{\tau\to\infty} \psi(\tau, u)$ υπάρχει για όλα τα $u \in [0,1]$ εάν και μόνο εάν η ψ_0 είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη $p = 1/(\kappa_\star - 1)$.

Απόδειξη του θεωρήματος

Η ευθής κατεύθυνση είναι ακριβώς το Θεώρημα 5.8. Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι η ψ_0 είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση1^η: $p > 0$.

Τότε λόγω της ιδιότητας της ψ_0 ισχύει το εξής: για $\forall q < p, \psi_0(u)/u^q \to 0$ καθώς το $u \to 0$ και $\forall q > p, \psi_0(u)/u^q \to \infty$ καθώς το $u \to 0$. Οπότε

$\inf_{u>0} \frac{\psi_0(u)}{u^q} = 0, \quad \forall q < p$, ενώ $\sup_{u>0} \frac{\psi_0(u)}{u^q} = \infty, \quad \forall q > p$. Επομένως $\inf_{u>0} \frac{\psi_0(u)}{u^p} = 0$ και $\sup_{u>0} \frac{\psi_0(u)}{u^q} = \infty$. Δηλαδή ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης 5.1 και αφού από την υπόθεση υπάρχει το όριο του $\kappa(\tau)$ παίρνουμε ότι $p = 1/(\kappa_\star - 1)$ και ότι υπάρχει τ_0 αρκετά μεγάλο τέτοιο ώστε $\kappa(\tau) - 1 \geq 1/2p$ για $\tau \geq \tau_0$. Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εκτιμήσεις από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.8.

Το πρώτο μας βήμα είναι να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε $L > 0$, ισχύει

$$\sup_{z\in[\delta_0,\delta_0+L]} |h(\tilde{\tau}, z) - b(\tilde{\tau})| \to 0, \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad \tilde{\tau} \to \infty \tag{5.40}$$

όπου ορίσαμε $b(\tilde{\tau}) = h(\tilde{\tau}, \delta_0)$.

Υποθέτουμε ότι $\tilde{y}_2 = \delta_0$ και $\tilde{y}_1 \in [\delta_0, \delta_0 + L]$. Τότε $\tilde{y}_1 \geq \tilde{y}_2$ και εφόσον οι χαρακτηριστικές δεν τέμνονται θα έχουμε ότι $\tilde{Y}_1 \geq \tilde{Y}_2$. Με δεδομένο το τελευταίο και το γεγονός ότι η Q είναι αύξουσα προκύπτει ότι $E(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \leq 0$ και με βάση αυτό και τις σχέσεις (5.30),(5.33) παίρνουμε ότι

$$\delta_0 + (\tilde{\tau} - \tau_0)/2p \leq y_2 \leq y_1 \leq y_2 + L.$$

Από τη σχέση (5.37) έχουμε ότι $|H| \leq M_0(\tilde{\tau})$ και άρα

$$|(h(\tau_0, y_1) - h(\tau_0, y_2)) - (h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - b(\tilde{\tau}))| \leq M_0(\tilde{\tau})$$

δηλαδή

$$|h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - b(\tilde{\tau})| \leq |(h(\tau_0, y_1) - h(\tau_0, y_2))| + M_0(\tilde{\tau})$$

οπότε

$$|h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - b(\tilde{\tau})| \leq osc_{z\in[y_2,y_2+L]} h(\tau_0, z) + M_0(\tilde{\tau}). \tag{5.41}$$

Όμως όπως έχουμε αποδείξει $M_0(\tilde{\tau}) \to 0$ καθώς το $\tilde{\tau} \to \infty$ και επιπλέον η $h(\tau_0, \cdot)$ είναι τοπικά επίπεδη στο άπειρο και άρα σύμφωνα με το Λήμμα 5.5 $osc_{z\in[y_2,y_2+L]} h(\tau_0, z) \to 0$ καθώς το $y_2 \to \infty$. (Από τη σχέση $\delta_0 + \frac{(\tilde{\tau}-\tau_0)}{2p} \leq y_2$ προκύπτει ότι αν $\tilde{\tau} \to \infty$ τότε και $y_2 \to \infty$.)
Οπότε από τη σχέση (5.41) προκύπτει ότι

$$|h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - b(\tilde{\tau})| \to 0$$

καθώς το $\tilde{\tau} \to \infty$, ομοιόμορφα ως προς $\tilde{y}_1 \in [\delta_0, \delta_0 + L]$, δηλαδή

$$\sup_{z\in[\delta_0,\delta_0+L]} |h(\tilde{\tau}, z) - b(\tilde{\tau})| \to 0, \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad \tilde{\tau} \to \infty.$$

Έτσι αποδεικνύεται η (5.40).

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε $L > \delta_0$, ισχύει

$$\sup_{z\in[0,L]} |h(\tilde{\tau}, z) - b(\tilde{\tau})| \to 0, \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad \tilde{\tau} \to \infty. \tag{5.42}$$

Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε $\tau_0 := \tau_1 = \tilde{\tau} - 2p\delta_0$, δηλαδή $\frac{\tilde{\tau}-\tau_1}{2p} = \delta_0$ και θέτοντας στην (5.30) $\tilde{y} = 0$ παίρνουμε $\tilde{Y}(\tau_1, \tilde{y}) \geq \delta_0$. Φιξάρουμε $\tilde{y}_2 = \delta_0$ και θεωρούμε $\tilde{y}_1 \in [0, L]$. Τότε θέτοντας $\tau = \tau_1$ στη σχέση (5.30) παίρνουμε την ανίσωση $\delta_0 \leq y_1$ ενώ θέτοντας $\tau = \tau_1$ και $\tilde{y} = \tilde{y}_1$ στη σχέση (5.32) παίρνουμε την ανίσωση $y_1 \leq \tilde{L} := L + 3K_0(\tilde{\tau} - \tau_1) = L + 6p\delta_0 K_0$, δηλαδή συνολικά

$$\delta_0 \leq y_1 \leq L + 3K_0(\tilde{\tau} - \tau_1) = L + 4p\delta_0 K_0.$$

Αντικαθιστούμε στην (5.37) το τ_0 με το τ_1 και εφόσον $1 \leq Q \leq 3$ θα πάρουμε ότι

$$|H(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)| \leq 3p^2 \int_{\tau_1}^{\tilde{\tau}} |\kappa_\star - \kappa(\tau)|\, d\tau$$

δηλαδή

$$|h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - b(\tilde{\tau})| \leq osc_{z\in[\delta_0,\tilde{L}]} h(\tau_1, z) + 3p^2 \int_{\tau_1}^{\tilde{\tau}} |\kappa_\star - \kappa(\tau)|\, d\tau.$$

Επειδή το $\kappa(\tau) \to \kappa_\infty$ καθώς το $\tau \to \infty$, και εφόσον η $h(\tau_1, \cdot)$ είναι τοπικά επίπεδη στο άπειρο προκύπτει ότι

$$|h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - b(\tilde{\tau})| \to 0$$

καθώς το $\tilde{\tau} \to \infty$, ομοιόμορφα ως προς $\tilde{y}_1 \in [0, L]$, δηλαδή

$$\sup_{z\in[0,L]} |h(\tilde{\tau}, z) - b(\tilde{\tau})| \to 0, \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \quad \tilde{\tau} \to \infty.$$

Έτσι αποδεικνύεται η (5.42), από την αποία συνεπάγεται ότι για οποιοδήποτε $L > 0, \rho(\tau, y) - b(\tau) \to \rho_\star(y)$, καθώς το $\tau \to \infty$ ομοιόμορφα ως προς $y \in [0, L]$, αφού $h(\tau, y) = \rho(\tau, y) - \rho_\star(y)$.

Επίσης η $\rho(\tau, y) - b(\tau)$ αυξάνει στο άπειρο καθώς το $y \to \infty$ για κάθε τ. Οπότε με δεδομένα τα παραπάνω όρια και την ταυτότητα της διατήρησης του όγκου στις νέες μεταβλητές ρ και y παίρνουμε ότι

$$e^{b(\tau)} = \int_0^\infty e^{-\rho(\tau,y)+b(\tau)} e^{-y} dy \to \int_0^\infty e^{-\rho_\star(y)} e^{-y} dy = 1,$$

με κατάλληλη εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης. Οπότε $\lim_{\tau\to\infty} b(\tau) = 0$ και όπως εύκολα παρατηρούμε θα ισχύει ότι $\lim_{\tau\to\infty} \rho(\tau, y) = \rho_\star(y)$, δηλαδή $\lim_{\tau\to\infty} \psi(\tau, u) = \psi_\star(u), \forall u \in [0, 1]$. Οπότε έχουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που το $p > 0$.

<u>Περίπτωση 2^η:</u> $p = 0$.

Τώρα $\kappa_\star = \infty$ και άρα $\lim_{\tau\to\infty} \kappa(\tau) = \infty$. Έστω λοιπόν ότι η ψ_0 είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο μηδέν με εκθέτη $p = 0$. Επειδή σε αυτήν την περίπτωση $\Psi_p(u) = 1, \forall u \in (0, 1] \Rightarrow \rho_\star(y) = 0 \Rightarrow \quad h(\tau_0, \cdot) = \rho(\tau_0, \cdot)$, η οποία είναι τοπικά επίπεδη στο άπειρο, για κάθε $\tau_0 \geq 0$, όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.8. Επίσης, επειδή $\lim_{\tau\to\infty} \kappa(\tau) = \infty$, υπάρχει τ_0 αρκετά μεγάλο τέτοιο ώστε $\kappa(\tau) > 2, \forall \tau \geq \tau_0$ και έστω $\tilde{y}_2 = 0$ και $\tilde{y}_1 \in [0, L]$. Τότε $\tilde{y}_1 \geq \tilde{y}_2$ και επομένως $\tilde{Y}_1(\tau) \geq \tilde{Y}_2(\tau)$.

Επιπρόσθετα από τη σχέση (5.29) έχουμε ότι $\frac{-\partial \tilde{Y}}{\partial \tau} \geq \kappa(\tau) - 1 > 1$, την οποία αν ολοκληρώσουμε παίρνουμε ότι $\tilde{Y}(\tau, \tilde{y}) \geq \tilde{y} + (\tilde{\tau} - \tau), \gamma\iota\alpha \quad \tilde{\tau} \geq \tau \geq \tau_0$ και στην τελευταία αν θέσουμε $\tilde{y} = \tilde{y}_2$ θα πάρουμε ότι $\tilde{Y}_1(\tau) \geq \tilde{Y}_2(\tau) \geq \tilde{\tau} - \tau, \gamma\iota\alpha \quad \tilde{\tau} \geq \tau \geq \tau_0$. Με δεδομένη αυτή τη σχέση και το γεγονός ότι η Q είναι αύξουσα προκύπτει αβίαστα ότι $E(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \leq 0$, και άρα ότι $y_1 \leq y_2 + L$. Επίσης από το ότι $\tilde{Y}_1(\tau_0) \geq \tilde{Y}_2(\tau) \geq \tilde{\tau} - \tau_0$, παίρνουμε $\tilde{\tau} - \tau_0 \leq y_2 \leq y_1$ και άρα συνολικά $\tilde{\tau} - \tau_0 \leq y_2 \leq y_1 \leq y_2 + L$. Οπότε επειδή $H(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = 0$ προκύπτει ότι

$$|(h(\tau_0, y_1) - h(\tau_0, y_2)) - (h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - h(\tilde{\tau}, 0))| \leq 0$$

και άρα

$$|h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - h(\tilde{\tau}, 0)| \leq osc_{z\in[y_2, y_2+L]} h(\tau_0, z). \tag{5.43}$$

Εν συνεχεία επειδή η $h(\tau_0, \cdot)$ είναι τοπικά επίπεδη στο άπειρο προκύπτει ότι $osc_{z\in[y_2,y_2+L]} h(\tau_0, z) \to 0$ καθώς το $y_2 \to \infty$(αφού το $\tilde{\tau} \to \infty$ και $\tilde{\tau} - \tau_0 \leq y_2, \quad y_2 \to \infty$.) Οπότε από τη σχέση (5.43) παίρνουμε ότι $|h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - h(\tilde{\tau}, 0)| \to 0$, καθώς το $\tilde{\tau} \to \infty$, ομοιόμορφα ως προς $y \in [0, L]$, δηλαδή

$$\sup_{z\in[0,L]} |h(\tilde{\tau}, \tilde{y}_1) - h(\tilde{\tau}, 0)| \to 0$$

καθώς το $\tilde{\tau} \to \infty$. Αν τώρα το $b(\tau) = h(\tau, 0)$ τότε η παραπάνω σχέση με $\tau = \tilde{\tau}$ μας δίνει ότι $h(\tau, y) - b(\tau) = \rho(\tau, y) - b(\tau) \to 0$ καθώς το $\tau \to \infty$, ομοιόμορφα ως προς $y \in [0, L]$, $\forall L > 0$.

Αν στην συνέχεια εργαστούμε όπως ακριβώς και προηγουμένως χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διατήρησης του όγκου, θα καταλήξουμε στο ότι $b(\tau) \to 0$ και με βάση και το πιο πάνω όριο βρίσκουμε ότι $\rho(\tau, y) \to 0$

καθώς το $\tau \to \infty$, δηλαδή $\lim_{\tau\to\infty} \psi(\tau, u) = 1, \forall u \in (0, 1]$. $\square$

5.5 Ευστάθεια και σύγκλιση για μικρό p

Υπενθυμίζουμε ότι

$$h(\tau, y) = \rho(\tau, y) - \rho_\star(y) = -\ln\{\psi(\tau, e^{-y})/\Psi_p(e^{-y})\}.$$

Ορίζουμε το μέτρο επιπεδότητας της h να είναι

$$\overline{\omega}(\tau, y) = \sup_{\tilde{y}\geq y} osc_{z\in[\tilde{y},\tilde{y}+1]} h(\tau, z). \tag{5.44}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι οποτεδήποτε $0 \leq a < b < c$, τότε

$$osc_{z\in[a,c]} h(\tau, z) \leq osc_{z\in[a,b]} h(\tau, z) + osc_{z\in[b,c]} h(\tau, z)$$

και έτσι για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο n θα ισχύει

$$osc_{z\in[y,y+n]} h(\tau, z) \leq n\overline{\omega}(\tau, y). \tag{5.45}$$

Προφανώς η $\overline{\omega}(\tau, y)$ είναι φθίνουσα ως προς y και ισχύει ότι

$$\overline{\omega}(\tau, y) \to 0 \text{ καθώς } y \to \infty \Leftrightarrow h(\tau, \cdot) \text{ είναι τοπικά επίπεδη στο } \infty. \tag{5.46}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα θεώρημα το οποίο μας δίνει για κατάλληλα μικρές τιμές του p την ικανή εκείνη συνθήκη για να συγκλίνει η λύση.

Θεώρημα 5.10. *Έστω $p > 0$ κατάλληλα μικρό . Τότε υπάρχουν θετικές σταθερές $\delta_\star$ και K_0 με την ακόλουθη ιδιότητα :*
Εάν το μέτρο επιπεδότητας της h ικανοποιεί $\overline{\omega}(0, 0) \leq \delta_\star$ τότε

$$\overline{\omega}(\tau, 0) \leq K_0\overline{\omega}(0, 0) \tag{5.47}$$

και

$$\sup_{0<u\leq 1} |\psi(\tau, u) - \Psi_p(u)| \leq K_0\overline{\omega}(\tau, 0) \tag{5.48}$$

για όλα τα $\tau \geq 0$.
Εάν επιπλέον η ψ_0 είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p (ισοδύναμα, εάν η $h(0, \cdot)$ είναι τοπικά επίπεδη στο ∞), τότε

$$\overline{\omega}(\tau, 0) \to 0, \quad \tau \to \infty$$

και

$$\lim_{\tau\to\infty} \psi(\tau, u) = \Psi_p(u) \quad \text{για} \quad \text{όλα} \quad \text{τα} \quad u \in [0, 1].$$

Απόδειξη του θεωρήματος

Ξεκινάμε, παίρνοντας ένα φράγμα πάνω στην $|\kappa(\tau)-\kappa_\star|$ όπου $\kappa_\star = 1+1/p$. Από την σχέση (5.4) και θέτοντας $\psi_\star = \Psi_p$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa_\star} &= 3-\frac{1}{\psi_\star(1)}\int_0^1 (1-u)^{-2/3}\psi_\star(u)du\\ \frac{1}{\kappa(\tau)} &= 3-\frac{1}{\psi(\tau,1)}\int_0^1 (1-u)^{-2/3}\psi_\star(u)du\end{aligned}$$

και με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{\kappa(\tau)}-\frac{1}{\kappa_\star} = \int_0^1 \Big(\frac{\psi_\star(u)}{\psi_\star(1)}-\frac{\psi(\tau,u)}{\psi(\tau,1)}\Big)(1-u)^{-2/3}du. \tag{5.49}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών που δίνεται από τους τύπους στη σχέση (5.21) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\psi_\star(u)}{\psi_\star(1)}-\frac{\psi(\tau,u)}{\psi(\tau,1)} &= \frac{e^{-\rho_\star(y)}}{e^{-\rho_\star(0)}}-\frac{e^{-\rho(\tau,(y))}}{e^{-\rho(\tau,0)}}\\ &= e^{-\rho_\star(y)+\rho_\star(0)}-e^{-\rho(\tau,y)+\rho(\tau,0)}\\ &= e^{-\rho_\star(y)+\rho_\star(0)}-e^{-\rho_\star(y)+\rho_\star(0)}e^{h(\tau,0)-h(\tau,y)}\\ &= e^{\rho_\star(0)-\rho_\star(y)}\Big(1-e^{h(\tau,0)-h(\tau,y)}\Big)\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $h(\tau,y)=\rho(\tau,y)-\rho_\star(y)$. Οπότε η σχέση (5.49) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa(\tau)}-\frac{1}{\kappa_\star} &= \int_0^1 \Big(\frac{\psi_\star(u)}{\psi_\star(1)}-\frac{\psi(\tau,u)}{\psi(\tau,1)}\Big)(1-u)^{-2/3}du\\ &= \int_0^\infty (1-e^{h(\tau,0)-h(\tau,y)})e^{\rho_\star(0)-\rho_\star(y)}(1-e^{-y})^{-2/3}e^{-y}dy.\end{aligned}\tag{5.50}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την εξής ανίσωση

$$|h(\tau,0)-h(\tau,y)| \le (y+1)\,\overline{\omega}(\tau,0). \tag{5.51}$$

Καταρχάς θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$|h(\tau,0)-h(\tau,y)| \le N\,\overline{\omega}(\tau,0), \forall\, y\in[N-1,N].$$

Για $N=1$: $|h(\tau,0)-h(\tau,y)| \le osc_{z\in[0,1]} h(\tau,z) \le 1\overline{\omega}(\tau,0)$, δηλαδή ισχύει ο ισχυρισμός.
Δεχόμαστε ότι ισχύει για $N-1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $N=1$. Τότε

$$
\begin{aligned}
|h(\tau,0)-h(\tau,y)| &= |h(\tau,0)-h(\tau,N-1)+h(\tau,N-1)-h(\tau,y)| \\
&\le |h(\tau,0)-h(\tau,N-1)|+|h(\tau,N-1)-h(\tau,y)| \\
&\le (N-1)\overline{\omega}(\tau,0)+|h(\tau,N-1)-h(\tau,y)| \\
&\le (N-1)\overline{\omega}(\tau,0)+osc_{z\in[N-1,N]} h(\tau,z) \\
&\le (N-1)\overline{\omega}(\tau,0)+\overline{\omega}(\tau,N-1) \\
&\le (N-1)\overline{\omega}(\tau,0)+\overline{\omega}(\tau,0)=N\,\overline{\omega}(\tau,0)
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση και επειδή το $N-1\le y\le N$ παίρνουμε ότι

$$|h(\tau,0)-h(\tau,y)| \le N\,\overline{\omega}(\tau,0) \le (y+1)\,\overline{\omega}(\tau,0).$$

Τώρα εφόσον το $|1-e^x| \le |x|\,e^{|x|}, \forall\, x$ και $\rho_\star(y)-\rho_\star(0)\ge 0$ η ολοκληρωτέα ποσότητα της (5.50) μας δίνει

$$
\begin{aligned}
& (1-e^{h(\tau,0)-h(\tau,y)})e^{\rho_\star(0)-\rho_\star(y)}(1-e^{-y})^{-2/3}e^{-y} \\
\le\ & |h(\tau,0)-h(\tau,y)|\,e^{|h(\tau,0)-h(\tau,y)|}(1-e^{-y})^{-2/3}e^{-y} \\
\le\ & (y+1)\overline{\omega}(\tau,0)e^{(y+1)\overline{\omega}(\tau,0)}(1-e^{-y})^{-2/3}e^{-y}.
\end{aligned}
$$

Αν υποθέσουμε ότι $\overline{\omega}(\tau,0)\le\frac{1}{2}$ τότε παίρνοντας απόλυτες τιμές στην (5.50) έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\kappa(\tau)}-\frac{1}{\kappa_\star}\right| &\le \int_0^\infty (y+1)\overline{\omega}(\tau,0)e^{(y+1)\overline{\omega}(\tau,0)}(1-e^{-y})^{-2/3}e^{-y}dy \\
&\le \overline{\omega}(\tau,0)\int_0^\infty (y+1)e^{\frac{y+1}{2}}e^{-y}dy \le \overline{K}\overline{\omega}(\tau,0)
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$\left|\frac{1}{\kappa(\tau)}-\frac{1}{\kappa_\star}\right| \le \overline{K}\overline{\omega}(\tau,0) \tag{5.52}$$

όπου $\overline{K}=6e^{\frac{1}{2}}$, ανεξάρτητη των h και p. Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\overline{K}\overline{\omega}(\tau,0)\le 1/2p{\kappa_\star}^2=p/4(p+1)^2$ τότε με κάποιες απλές πράξεις και τη χρήση της (5.52) προκύπτει ότι $\kappa(\tau)\le 2\kappa_\star$ και

$$|\kappa_\star-\kappa(\tau)| \le 2\kappa_\star^2\overline{K}\overline{\omega}(\tau,0) \le \frac{1}{2p}. \tag{5.53}$$

Στη συνέχεια παρεμβάλλουμε το εξής λήμμα :

Λήμμα 5.11. *Έστω $p>0$. Τότε υπάρχει μία θετική, φθίνουσα συνάρτηση $G_p:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\int_0^\infty G_p(\tau)d\tau \le \overline{C}p(p+1)^2$$

για κάποια σταθερά $\overline{C}>0$ ανεξάρτητη του p και ισχύει το ακόλουθο:
Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\tau_\star>0$ έχουμε

$$\overline{K}\overline{\omega}(\tilde{\tau},0)\le p/4(p+1)^2 \quad \text{για} \quad 0\le\tilde{\tau}\le\tau_\star.$$

Τότε

$$\overline{\omega}(\tilde{\tau},0)\le\overline{\omega}(0,\tilde{\tau}/2p)+\int_0^{\tilde{\tau}}G_p(\tilde{\tau}-\tau)\overline{\omega}(\tau,0)d\tau \tag{5.54}$$

για $0\le\tilde{\tau}\le\tau_\star$.

Απόδειξη του λήμματος

Καταρχάς υποθέτουμε το συμβολισμό της απόδειξης του Θεωρήματος 5.8. Έστω λοιπόν τυχόν $\tilde{y}\ge 0$ και $\tilde{y}_1,\tilde{y}_2\in[\tilde{y},\tilde{y}+1]$. Από τη σχέση (5.37) και το γεγονός ότι η $1\le Q\le 3$ παίρνουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $\tau_0\le\tilde{\tau}$ και μεταξύ του 0 και του $\tau_\star$,ότι

$$\begin{aligned}
H(\tilde{\tau},\tilde{y}_1,\tilde{y}_2) &:= (h(\tau_0,y_1)-h(\tau_0,y_2))-h(\tilde{\tau},\tilde{y}_1)-h(\tilde{\tau},\tilde{y}_2)\\
&\le \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}(\kappa_\star-\kappa(\tau))\frac{Q(e^{-\tilde{Y}_2})-Q(e^{-\tilde{Y}_1})}{(\kappa_\star-1)^2}d\tau\\
&\le \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}(\kappa_\star-\kappa(\tau))\frac{Q(e^{-\tilde{Y}_2})}{\frac{1}{p^2}}d\tau\\
&\le 3p^2\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}(\kappa_\star-\kappa(\tau))d\tau
\end{aligned}$$

και άρα

$$|h(\tilde{\tau},\tilde{y}_1)-h(\tilde{\tau},\tilde{y}_2)|\le|h(\tau_0,y_1)-h(\tau_0,y_2)|+3p^2\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}|(\kappa_\star-\kappa(\tau))|\,d\tau.$$

Επίσης επειδή $\tilde{y}\le\tilde{y}_1\le\tilde{y}+1$ και εφόσον οι χαρακτηριστικές δεν τέμνονται συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(\tau_0,\tilde{y}) &\le \tilde{Y}(\tau_0,\tilde{y}_1)\le\tilde{Y}(\tau_0,\tilde{y})+1\\
\Rightarrow \hat{y} &\le y_1\le\hat{y}+1
\end{aligned}$$

όπου $\tilde{Y}(\tau_0,\tilde{y})=\hat{y}$. Όμοια για το y_2. Άρα $y_1,y_2\in[\hat{y},\hat{y}+1]$.

Είχαμε δει προηγουμένως ότι αν $\overline{K}\overline{\omega}(\tau,0)\le\frac{p}{4(p+1)^2}, \tau\acute{o}\tau\epsilon \quad |\kappa_\star-\kappa(\tau)|\le 2\kappa_\star^2\overline{K}\overline{\omega}(\tau,0)$, οπότε με χρήση της παραπάνω ανίσωσης παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
|h(\tilde{\tau},\tilde{y}_1)-h(\tilde{\tau},\tilde{y}_2)| &\le |h(\tau_0,y_1)-h(\tau_0,y_2)|+3p^2\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}|(\kappa_\star-\kappa(\tau))|\,d\tau\\
&\le |h(\tau_0,y_1)-h(\tau_0,y_2)|+3p^2 2\kappa_\star^2\overline{K}\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}\overline{\omega}(\tau,0)d\tau\\
&\le |h(\tau_0,y_1)-h(\tau_0,y_2)|+6(p+1)^2\overline{K}\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}\overline{\omega}(\tau,0)d\tau
\end{aligned}$$

οπότε

$$osc_{z\in[\tilde{y},\tilde{y}+1]}h(\tilde{\tau},z)\le osc_{z\in[\hat{y},\hat{y}+1]}h(\tau_0,z)+6(p+1)^2\overline{K}\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}\overline{\omega}(\tau,0)d\tau.$$

Παίρνοντας τώρα το sup πάνω από όλα τα $\tilde{y}\le y$, έχουμε

$$\sup_{\tilde{y}\ge y}osc_{z\in[\tilde{y},\tilde{y}+1]}h(\tilde{\tau},z)\le\sup_{\tilde{y}\ge y}osc_{z\in[\hat{y},\hat{y}+1]}h(\tau_0,z)+6(p+1)^2\overline{K}\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}\overline{\omega}(\tau,0)d\tau$$

$$\begin{aligned}
&\le \sup_{\tilde{y}+\frac{(\tilde{\tau}-\tau_0)}{2p}\ge y+\frac{(\tilde{\tau}-\tau_0)}{2p}} osc_{z\in[\hat{y},\hat{y}+1]}h(\tau_0,z)+6(p+1)^2\overline{K}\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}\overline{\omega}(\tau,0)d\tau\\
&\le \sup_{\hat{y}\ge y+\frac{(\tilde{\tau}-\tau_0)}{2p}} osc_{z\in[\hat{y},\hat{y}+1]}h(\tau_0,z)+6(p+1)^2\overline{K}\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}\overline{\omega}(\tau,0)d\tau
\end{aligned} \tag{5.55}$$

και άρα

$$\overline{\omega}(\tilde{\tau},y)\le\overline{\omega}(\tau_0,y+\frac{(\tilde{\tau}-\tau_0)}{2p})+6(p+1)^2\overline{K}\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}}\overline{\omega}(\tau,0)d\tau. \tag{5.56}$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\tilde{y}\ge\delta_0$ με δ_0 όπως επιλέχθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.8 και έστω πάλι $\tilde{y}_1,\tilde{y}_2\in[\tilde{y},\tilde{y}+1]$. Παίρνοντας $\tau_0=0$ στην (5.39) έχουμε την εκτίμηση

$$|h(\tilde\tau,\tilde y_1)-h(\tilde\tau,\tilde y_2)|\le|h(0,y_1)-h(0,y_2)|$$
$$+p^2e^{-\tilde y}\left|\tilde y_1-\tilde y_2\right|\int_0^{\tilde\tau}\left|\kappa_\star-\kappa(\tau)\right|e^{-(\tilde\tau-\tau)/2p}d\tau.$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι για $y\ge\delta_0$

$$\begin{aligned}|h(\tilde\tau,\tilde y_1)-h(\tilde\tau,\tilde y_2)| &\le |h(0,y_1)-h(0,y_2)|\\ &+ p^2e^{-\delta_0}\left|\tilde y_1-\tilde y_2\right|\int_0^{\tilde\tau}2\kappa_\star^2\overline{K}\overline{\omega}(\tau,0)e^{-(\tilde\tau-\tau)/2p}d\tau\\ &\le osc_{z\in[\hat y,\hat y+1]}h(0,z)\\ &+ 2(p+1)^2e^{-\delta_0}\overline{K}\int_0^{\tilde\tau}\overline{\omega}(\tau,0)e^{-(\tilde\tau-\tau)/2p}d\tau\end{aligned}$$

και άρα

$$osc_{z\in[\tilde y,\tilde y+1]}h(\tilde\tau,z)\le osc_{z\in[\hat y,\hat y+1]}h(0,z)+2(p+1)^2e^{-\delta_0}\overline{K}\int_0^{\tilde\tau}\overline{\omega}(\tau,0)e^{-(\tilde\tau-\tau)/2p}d\tau.$$

Παίρνοντας τώρα το sup πάνω από όλα τα $\tilde y\ge y$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sup_{\tilde y\ge y}osc_{z\in[\tilde y,\tilde y+1]}h(\tilde\tau,z) &\le \sup_{\tilde y\ge y}osc_{z\in[\hat y,\hat y+1]}h(0,z)\\ &+ 2(p+1)^2e^{-\delta_0}\overline{K}\int_0^{\tilde\tau}\overline{\omega}(\tau,0)e^{-(\tilde\tau-\tau)/2p}d\tau\\ &\le sup_{\tilde y+\frac{\tilde\tau}{2p}\ge y+\frac{\tilde\tau}{2p}}osc_{z\in[\hat y,\hat y+1]}h(0,z)\\ &+ 2(p+1)^2e^{-\delta_0}\overline{K}\int_0^{\tilde\tau}\overline{\omega}(\tau,0)e^{-(\tilde\tau-\tau)/2p}d\tau\\ &\le \sup_{\hat y+\frac{\tilde\tau}{2p}\ge y+\frac{\tilde\tau}{2p}}osc_{z\in[\hat y,\hat y+1]}h(0,z)\\ &+ 2(p+1)^2e^{-\delta_0}\overline{K}\int_0^{\tilde\tau}\overline{\omega}(\tau,0)e^{-(\tilde\tau-\tau)/2p}d\tau\end{aligned}$$

και άρα

$$\overline{\omega}(\tilde\tau,y)\le\overline{\omega}(0,y+\frac{\tilde\tau}{2p})+2(p+1)^2e^{-\delta_0}\overline{K}\int_0^{\tilde\tau}\overline{\omega}(\tau,0)e^{-(\tilde\tau-\tau)/2p}d\tau. \qquad (5.57)$$

Έπειτα ορίζουμε την εξής συνάρτηση G_p η οποία θα είναι και η ζητούμενη με τις ιδιότητες του Λήμματος

$$G_p(\tau) = \begin{cases} 6(p+1)^2\overline{K}, & 0 \leq \tau \leq 2p\delta_0 \\ 2(p+1)^2\overline{K}e^{-\tau/2p}, & \tau \geq 2p\delta_0. \end{cases}$$

Καταρχάς όπως εύκολα παρατηρούμε η G_p είναι θετική , φθίνουσα, ορισμένη στο $[0,\infty)$ και

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G_p(\tau) &= \int_0^{2p\delta_0} 6(p+1)^2\overline{K}d\tau + \int_{2p\delta_0}^\infty 2(p+1)^2\overline{K}e^{-\tau/2p}d\tau \\ &= 6(p+1)^2\overline{K}2p\delta_0 + 2(p+1)^2\overline{K}2pe^{-\delta_0} \\ &\leq p(p+1)^2[12\delta_0\overline{K} + 4\overline{K}] = \overline{C}p(p+1)^2 \end{aligned}$$

όπου $\overline{C} = 12\delta_0\overline{K} + 4\overline{K} > 0$, ανεξάρτητο του p.

Τώρα , ορίζουμε $\tau_0 = \max(0, \tilde{\tau} - 2p\delta_0)$. Εάν $\tau_0 = \tilde{\tau} - 2p\delta_0$ τότε αν στην (5.56) θέσουμε όπου y το 0 θα πάρουμε

$$\overline{\omega}(\tilde{\tau}, 0) \leq \overline{\omega}(\tau_0, \delta_0) + 6(p+1)^2\overline{K}\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} \overline{\omega}(\tau, 0)d\tau$$

ενώ από την (5.57) θέτοντας $\tilde{\tau} = \tau_0$ και $y = \delta_0$ παίρνουμε ότι

$$\overline{\omega}(\tau_0, \delta_0) \leq \overline{\omega}(0, \tilde{\tau}/2p) + 2(p+1)^2e^{-\delta_0}\overline{K}\int_0^{\tilde{\tau}-2p\delta_0} \overline{\omega}(\tau, 0)e^{-(\tau_0-\tau)/2p}d\tau.$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ανισώσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \overline{\omega}(\tilde{\tau}, 0) \leq \overline{\omega}(0, \tilde{\tau}/2p) &+ 2(p+1)^2e^{-\delta_0}\overline{K}\int_0^{\tilde{\tau}-2p\delta_0} \overline{\omega}(\tau, 0)e^{-(\tau_0-\tau)/2p}d\tau \\ &+ 6(p+1)^2\overline{K}\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} \overline{\omega}(\tau, 0)d\tau, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\overline{\omega}(\tilde{\tau}, 0) \leq \overline{\omega}(0, \tilde{\tau}/2p)\int_0^{\tilde{\tau}} G_p(\tilde{\tau} - \tau)\overline{\omega}(\tau, 0)d\tau.$$

Εάν $\tau_0 = 0$ τότε πάλι από την (5.56) για $y = 0$ παίρνουμε ότι η G_p ικανοποιεί την ανίσωση του Λήμματος. Άρα η παραπάνω G_p είναι η ζητούμενη συνάρτηση. Έτσι τελειώνει η απόδειξη του Λήμματος.

Συνεχίζοντας με την απόδειξη του Θεωρήματος υποθέτουμε ότι το p είναι αρκετά μικρό έτσι ώστε $\overline{C}p(p+1)^2 \leq \frac{1}{2}$ και ότι $\overline{K}\overline{\omega}(0,0) < p/8(p+1)^2$. Έστω επίσης ότι $M(\tilde{\tau}) = \sup_{0\leq\tau\leq\tilde{\tau}} \overline{\omega}(\tau, 0)$. Τότε αφού ισχύουν οι υποθέσεις του Λήμματος 5.11 και η $\overline{\omega}(\tau, y)$ είναι φθίνουσα ως προς y παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}(\tilde{\tau}, 0) &\leq \overline{\omega}(0, \tilde{\tau}/2p) + \int_0^{\tilde{\tau}} G_p(\tilde{\tau} - \tau)\overline{\omega}(\tau, 0)d\tau \\
&\leq \overline{\omega}(0, 0) + M(\tilde{\tau}) \int_0^{\tilde{\tau}} G_p(\tilde{\tau} - \tau)d\tau \\
&\leq \overline{\omega}(0, 0) + M(\tilde{\tau}) \int_0^{\infty} G_p(\tilde{\tau} - \tau)d\tau \\
&\leq \overline{\omega}(0, 0) + M(\tilde{\tau})\overline{C}p(p+1)^2 \\
&\leq \overline{\omega}(0, 0) + M(\tilde{\tau})\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\sup_{0\leq\tau\leq\tilde{\tau}} \overline{\omega}(\tau, 0) \leq \overline{\omega}(0, 0) + M(\tilde{\tau})\frac{1}{2}$$

οπότε

$$M(\tilde{\tau}) \leq 2\overline{\omega}(0, 0), \quad \forall\tilde{\tau} \geq 0.$$

Έτσι αν πάρουμε $\delta_\star = \frac{p}{8\overline{K}(p+1)^2} > 0$ τότε αφού $\overline{K}\overline{\omega}(0,0) < \frac{p}{8(p+1)^2}$ συνεπάγεται ότι $\overline{\omega}(0,0) < \delta_\star$ και αφού $M(\tilde{\tau}) \leq 2\overline{\omega}(0,0), \forall\tilde{\tau} \geq 0$ έχουμε ότι $\overline{\omega}(\tau, 0) \leq M(\tilde{\tau}) \leq 2\overline{\omega}(0,0), \quad \forall\tau \geq 0$ δηλαδή $\overline{\omega}(\tau, 0) \leq 2\overline{\omega}(0,0), \quad \forall\tau \geq 0$. Οπότε με την παραπάνω επιλογή του $\delta_\star$ και με $K_0 \geq 2$ αποδεικνύεται η πρώτη εκτίμηση του Θεωρήματος.

Παρεμβάλλουμε τώρα το εξής λήμμα :

Λήμμα 5.12. *Έστω f, a και g θετικές, φραγμένες και μετρήσιμες συναρτήσεις ορισμένες στο $(0, \infty)$ και*

$$\int_0^\infty g(s)ds = \gamma < 1.$$

Υποθέτουμε επίσης ότι

$$f(t) \leq a(t) + \int_0^t g(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \geq 0$$

και

$$a(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Τότε

$$f(t) \to 0 \quad \textit{καθώς} \quad t \to \infty.$$

Ορίζουμε λοιπόν $g(\tau) = G_p(\tau), \quad f(\tau) = \overline{\omega}(\tau), \quad a(\tau) = \overline{\omega}(0, \frac{\tau}{2p})$. Η G_p είναι θετική , φθίνουσα ,$G_p(\tau) \leq G_p(0) = 6(p+1)^2\overline{K}$, δηλαδή είναι φραγμένη και $\int_0^\infty G_p(s)ds \leq \overline{C}p(p+1)^2 \leq \frac{1}{2} = \gamma < 1$. Επίσης $\overline{\omega}(\tau, 0) \leq K_0\overline{\omega}(0,0) \leq K_0\delta_\star$, δηλαδή είναι φραγμένη και $\overline{\omega}(0, \frac{\tau}{2p}) \leq \overline{\omega}(0,0) \leq \delta_\star$, δηλαδή και η $\overline{\omega}(0, \frac{\tau}{2p})$ είναι φραγμένη. Επίσης ισχύει και η σχέση (5.54) . Αν υποθέσουμε ότι η ψ_0 είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο μηδέν με εκθέτη p τότε η $h(0,\cdot)$ είναι τοπικά επίπεδη στο άπειρο και άρα $\overline{\omega}(\tau, y) \to 0$ καθώς $y \to \infty$ για κάθε $\tau \geq 0$. Άρα $\overline{\omega}(0, \frac{\tau}{2p}) \to 0$ καθώς $\tau \to \infty$. Οπότε οι συναρτήσεις που ορίστηκαν κατά αυτό τον τρόπο ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος 5.12 οπότε $\overline{\omega}(\tau, 0) \to 0$ καθώς $\tau \to \infty$. Τότε όμως από την (5.53) προκύπτει ότι $|\kappa_\star - \kappa(\tau)| \to 0$ καθώς $\tau \to \infty$, και άρα από το Θεώρημα 5.9 θα έχουμε ότι $\psi(\tau, u) \to \Psi_p(u)$ καθώς $\tau \to \infty, \forall u \in [0,1]$. Έτσι αποδεικνύεται το τελευταίο μέρος του Θεωρήματος.

Απομένει λοιπόν να αποδείξουμε την εκτίμηση ευστάθειας (5.48). Εφόσον $\int_0^1 \psi(\tau, u)du = \int_0^1 \Psi_p(u)du = 1$ προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητών $u = e^{-y}$ ότι $\int_0^\infty \psi(\tau, e^{-y})e^{-y}dy = \int_0^\infty \Psi_p(e^{-y})e^{-y}dy = 1$. Επίσης είχαμε δει ότι

$$h(\tau, y) = -\ln\Big(\frac{\psi(\tau, e^{-y})}{\Psi_p(e^{-y})}\Big)$$

και άρα

$$e^{-h(\tau,y)} = \frac{\psi(\tau, e^{-y})}{\Psi_p(e^{-y})}.$$

Οπότε με δεδομένες τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι

$$e^{h(\tau,0)} - 1 = e^{h(\tau,0)} \int_0^\infty e^{-h(\tau,y)}\Psi_p(e^{-y})e^{-y}dy - \int_0^\infty \Psi_p(e^{-y})e^{-y}dy$$

δηλαδή

$$e^{h(\tau,0)} - 1 = \int_0^\infty (e^{h(\tau,0)-h(\tau,y)} - 1)\Psi_p(e^{-y})e^{-y}dy. \tag{5.58}$$

Επίσης ξέρουμε ότι $\Psi_p(u) \le \alpha_p(0)u^p$. Αν λοιπόν εξασφαλίσουμε ότι $\overline{\omega}(\tau,0) \le \frac{1}{2}$ τότε και με δεδομένη την ανίσωση $|e^x - 1| \le |x|\, e^{|x|}$ η (5.58) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\left|e^{h(\tau,0)-1}\right| &\le \int_0^\infty \left|e^{h(\tau,0)-h(\tau,y)} - 1\right| \Psi_p(e^{-y})e^{-y}dy \\
&\le \int_0^\infty |h(\tau,0)-h(\tau,y)|\, e^{|h(\tau,0)-h(\tau,y)|}\Psi_p(e^{-y})e^{-y}dy \\
&\le \int_0^\infty (y+1)\overline{\omega}(\tau,0)e^{(y+1)\overline{\omega}(\tau,0)}\alpha_p(0)e^{-py}e^{-y}dy \\
&\le \alpha_p(0)\overline{\omega}(\tau,0)\int_0^\infty (y+1)e^{\frac{y+1}{2}}e^{-(p+1)y}dy \\
&\le \alpha_p(0)\overline{\omega}(\tau,0)e^{\frac{1}{2}}\frac{p+\frac{3}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2} \qquad (5.59)
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\left|e^{h(\tau,0)-1}\right| \le K_1\overline{\omega}(\tau,0), \qquad (5.60)$$

όπου $K_1 = \alpha_p(0)e^{\frac{1}{2}}\frac{p+\frac{3}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2}$.

Εάν επίσης εξασφαλίσουμε ότι $\overline{\omega}(\tau,0) \le \frac{1}{2K_1}$ τότε προκύπτει εύκολα ότι $e^{h(\tau,0)} \ge 1/2$ και λογαριθμίζοντας την (5.60) παίρνουμε ότι

$$\ln(1 - K_1\overline{\omega}(\tau,0)) \le h(\tau,0) \le \ln(1 + K_1\overline{\omega}(\tau,0))$$

δηλαδή

$$|h(\tau,0)| \le \max\Big(-\ln(1-K_1\overline{\omega}(\tau,0)), \ln(1+K_1\overline{\omega}(\tau,0))\Big).$$

Ειδικότερα ισχύει ότι

$$|h(\tau,0)| \le 2K_1\overline{\omega}(\tau,0) \qquad (5.61)$$

οπότε η σχέση (5.51) με βάση αυτή την ανίσωση μας δίνει ότι

$$|h(\tau,y)| \le |h(\tau,0)| + (y+1)\overline{\omega}(\tau,0)$$

και άρα

$$|h(\tau,y)| \le 2K_1\overline{\omega}(\tau,0) + (y+1)\overline{\omega}(\tau,0) = (y+K_2)\overline{\omega}(\tau,0) \qquad (5.62)$$

όπου $K_2 = 1 + 2K_1$. Τότε για $u = e^{-y} \in (0,1]$, και εφόσον μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $\overline{\omega}(\tau,0) \leq \frac{p}{2}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
|\psi(\tau,u) - \Psi_p(u)| &= \left|\psi(\tau,e^{-y}) - \Psi_p(e^{-y})\right| \\
&\leq \left|e^{-h(\tau,y)} - 1\right| \Psi_p(e^{-y}) \\
&\leq \alpha_p(0)(y+K_2)\overline{\omega}(\tau,0)e^{(y+K_2)\overline{\omega}(\tau,0)-py} \\
&= e^{K_2\overline{\omega}(\tau,0)}\alpha_p(0)(y+K_2)e^{(\overline{\omega}(\tau,0)-p)y} \\
&\leq e^{\frac{K_2 p}{2}}\alpha_p(0)(C+K_2)\overline{\omega}(\tau,0)
\end{aligned}$$

όπου C είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $ye^{-\frac{py}{2}}$ και άρα

$$|\psi(\tau,u) - \Psi_p(u)| \leq K_3\overline{\omega}(\tau,0)$$

με $K_3 = e^{\frac{K_2 p}{2}}\alpha_p(0)(C+K_2)$. Οπότε ορίζοντας $K_0 = \max\{2, K_3\}$ ικανοποιείται η (5.47) και επίσης

$$|\psi(\tau,u) - \Psi_p(u)| \leq K_3\overline{\omega}(\tau,0), \ 0 < u \leq 1$$

οπότε

$$\sup_{0<u\leq 1} |\psi(\tau,u) - \Psi_p(u)| \leq K_0\overline{\omega}(\tau,0), \ \forall\tau \geq 0. \qquad \square$$

6 Συμπεράσματα

Τέλος, θα δώσουμε κάποια συμπεράσματα πάνω σε όλη την ανάλυση και θεωρία που έχει προηγηθεί. Καταρχάς υπενθυμίζουμε ότι

$$u = 1 - \upsilon/\overline{\upsilon}(t) \quad \kappa\alpha\iota \quad \psi = (\overline{\upsilon}(t)/V)\varphi$$

όπου $\varphi(t,x) = \int_x^\infty f(t,\upsilon)d\upsilon$, και υποθέτουμε ότι τα αρχικά δεδομένα για την ψ είναι γραμμένα στη μορφή :

$$\psi_0(u) = (\frac{\overline{\upsilon}_0}{V})\varphi_0(\overline{\upsilon}_0(1-u)) = \Psi_p(u)e^{-h_0(\ln(1/u))}.$$

Εδώ η ψ_0 πρέπει να είναι αύξουσα και κανονικοποιημένη ώστε $\int_0^1 \psi_0(u)du = 1$.

Είδαμε λοιπόν ότι :

1. Εάν η κανονικοποιημένη συνάρτηση κατανομής ψ συγκλίνει σημειακά καθώς το $\tau \to \infty$, τότε το όριο είναι η στάσιμη λύση Ψ_p για κάποιο $p \in [0,\infty]$.

2. Εάν ισχύει

$$\psi_0(u) \geq \alpha u^q > 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o \quad q < \infty \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha > 0$$

τότε η ψ δε μπορεί να συγκλίνει στην Ψ_∞, δηλαδή στη λύση που πρεσβεύει η θεωρία των Lifshitz-Slyozov-Wagner.

3. Εάν η ψ συγκλίνει στην Ψ_p για κάποιο $p \in [0,\infty)$ τότε η ψ_0 είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p.

4. Εάν το p είναι κατάλληλα μικρό και θετικό και εάν το flatness modulus της h_0 είναι αρκετά μικρό, όπου $h_0 = \rho_0 - \rho_\star$, τότε η ψ συγκλίνει στην Ψ_p εάν και μόνο εάν η ψ_0 είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p.

Υπενθυμίζουμε ότι η ψ_0 είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p εάν και μόνο εάν η συνάρτηση h_0 είναι τοπικά επίπεδη στο ∞. Έτσι , εάν η h_0 είναι φραγμένη ,το οποίο συνεπάγει ότι $\psi_0(u) \geq \alpha u^p$, και εάν δεν είναι τοπικά επίπεδη στο ∞, τότε η ψ δε μπορεί να συγκλίνει σημειακά σε κανένα όριο καθώς το $t \to \infty$.

Εάν η h_0 είναι C^1, τότε η h_0 θα είναι τοπικά επίπεδη στο άπειρο οπότε αν το p είναι κατάλληλα μικρό η λύση ψ θα συγκλίνει στην Ψ_p παρά το γεγονός ότι $\psi_0(u)/u^p \to \infty, \quad u \to 0$.

Συμπεράναμε επίσης ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων είναι " ευαίσθητη " ως προς τη συμπεριφορά των αρχικών δεδομένων κοντά στο άκρο του φορέα. Τα δύο παραπάνω συμπεράσματα που βεβαιώνουν τη μη σύγκλιση στις κανονικοποιημένες μεταβλητές εξαρτώνται μόνο από την αρχική κατανομή μεγέθους ενός τυχαίου μικρού ποσοστού των μεγαλύτερων σωματιδίων. Αυτό σημαίνει ότι αυτά αξαρτώνται μόνο από από την αρχική διάταξη όγκου $v_0(\varphi)$ για τιμές της διάταξης φ των σωματιδίων που ανήκουν σε ένα τυχαίο μικρό διάστημα $(0, \varepsilon_0)$.

Είναι προφανές ότι μπορούμε πάντα να διαταράξουμε τα μεγέθη ενός τυχαίου μικρού ποσοστού από τα μεγαλύτερα σωματίδια έτσι ώστε να πετύχουμε να είναι η ψ_0 μη φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 και $\psi_0(u) \geq \alpha u^p$ για κάποιο p. Αυτό σημαίνει ότι , ως προς την τοπολογία που δίνεται από τη sypremum νόρμα της απόστασης μεταξύ των διατάξεων όγκου ,υπάρχει ένα πυκνό σύνολο αρχικών δεδομένων που συνεπάγουν μη σύγκλιση στη λύση ομοιοθεσίας.

Παρόμοια, διαταράσσοντας τα μεγέθη των μεγαλύτερων σωματιδίων, μπορούμε να πετύχουμε η ψ_0 να είναι φυσιολογικά κυμαινόμενη στο 0 με εκθέτη p. Εάν είναι αλήθεια ότι έχοντας τέτοια δεδομένα συνεπάγεται ότι η ψ συγκλίνει στη λύση ομοιοθεσίας Ψ_p, τότε υπάρχει ένα πυκνό σύνολο αρχικών δεδομένων που συνεπάγουν σύγκλιση στην Ψ_p, για οποιοδήποτε $p \in [0, \infty)$.

Επίσης θα μπορούσαμε να κάνουμε μικρές διαταράξεις ώστε να γίνει η διάταξη όγκου σταθερή σε ένα μικρό διάστημα της μορφής $(0, \varepsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση κατανομής περιέχει ένα Dirac δέλτα στο άκρο του φορέα, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1, η διαταραγμένη συνάρτηση κατανομής θα συγκλίνει σε μία στάσιμη κατανομή που θα έχει και αυτή μία μάζα Dirac.

Αναφορές

[1] C.Berg and G.Forst, *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups*, Springler-Verlag, New York, 1975.

[2] N.H.Bingham, C.M.Goldie, and J.L. Teugels, *Regular Variation,* Encycl.Math.Appl., Vol.27, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[3] J.Carr, O.Penrose, *Asymptotic behaviour of solutions to a simplified Lifshitz-Slyozov equation,* Physica D 124(1998), pp.166-176.

[4] Lawrence C.Evans, *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, American Mathematical Society, 1998

[5] Barbara Niethammer and Robert L.Pego, *On the initial-value problem in the Lifshitz-Slyozov-Wagner theory of Ostwald ripening,* SIAM J.Math.Anal., Vol.31, No.3(2000), pp.467-485.

[6] Barbara Niethammer and Robert L.Pego, *Non-self-similar behavior in the LSW theory of Ostwald ripening,* Journal of Statistical Physics, Vol.95, 1999

[7] E.Seneta, *Regularly Varying Functions*, Lec.Notes in Math., Vol.508, Springer-Verlag, New York, 1976.

[8] Γεωργία Δ.Καραλή ,Δυναμική Διεπιφανειών , Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 2002.