ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΚΡΙΣΙΜΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ

ΛΑΤΟΣ ΒΑΓΓΕΛΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2005

Αυτή η μεταπτυχιακή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης το Φεβρουάριο του 2005. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ.Αχιλλέας Τερτικάς, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα για τη βοήθεια και τη συμπαράστασή του κατά τη διάρκεια της εργασίας.

Την επιτροπή αποτέλεσαν οι:Σ.Φίλλιπας, Α.Τερσένοφ και Α.Τερτίκας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θεωρούμε το γραμμικό πρόβλημα θερμότητας :

$$u_t - \Delta u = V(x)u \quad x \in \Omega, t \in (0,T), \tag{1.1}$$
$$u(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, t \in (0,T), \tag{1.2}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

όπου Ω είναι ένα ομαλό και φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ και $0 \in \Omega$. Επίσης $V : \Omega \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που θα ονομάζουμε δυναμικό. Τα ερωτήματα που μας απασχολούν είναι:

- Αν το πρόβλημα (1.1)-(1.3) έχει λύση.
- Αν η λύση ορίζεται για όλους τους χρόνους.
- Η ομαλότητα της λύσης.
- Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης.

Θεωρούμε πρώτα το δυναμικό μας να είναι μία σταθερά, $V(x) \equiv c \in \mathbb{R}$. Με τη μέθοδο του *Fourier* το πρόβλημά μας ανάγεται στο εξής πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$-\Delta\phi = \lambda\phi \quad , \quad x \in \Omega \tag{1.4}$$
$$\phi = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega \tag{1.5}$$

Οπότε για $u_0 \in L^2(\Omega)$ παίρνουμε τη γενική λύση του προβλήματος, που είναι της μορφής:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) e^{(c-\lambda_k)t} \tag{1.6}$$

όπου λ_k είναι ιδιοτιμές και $\phi_k(x)$ είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του (1.4)-(1.5) με:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots$$
$$\textit{και} \quad \int_\Omega \phi_i \phi_j dx = 0 \;\; i \neq j, \quad \int_\Omega \phi_i^2 dx = 1.$$

Οι συντελεστές *Fourier* c_k προσδιορίζονται από τα αρχικά δεδομένα από τη σχέση

$$c_k = \int_\Omega u_0(x)\phi_k(x)dx, \; k = 1, 2, \ldots$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις $\phi_k(x)$ είναι $C^\infty(\Omega)$ επομένως και η γενική λύση είναι $C^\infty(\Omega \times (0,\infty))$. Επίσης αν $c \in [0, \lambda_1)$, όπου λ_1 είναι η πρώτη ιδιοτιμή, τότε ανεξάρτητα των αρχικών δεδομένων, η λύση έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0,$$

ενώ αν $c \geq \lambda_1$, τότε τα αρχικά δεδομένα καθορίζουν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων.

Στην περίπτωση όπου $V \in L^p$ για $p > N/2$, η γενική λύση γράφεται:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) e^{-\mu_k t}.$$

Όπου μ_k,$\psi_k(x)$ είναι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις αντίστοιχα του προβλήματος:

$$-\Delta\psi - V\psi = \mu\psi \quad , \quad x \in \Omega \tag{1.7}$$

$$\psi = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.8}$$

Οι $\psi_k(x)$, εν γένει, είναι μόνο συνεχείς, οπότε και η λύση του (1.1)-(1.3) $u \in C(\Omega \times (0,T))$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι η λύση εν γένει δεν είναι κλασική. Η λύση ορίζεται με ασθενή τρόπο, δηλαδή: για $x \in \Omega$, θέτουμε $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$ και ορίζουμε $L^1_\delta(\Omega) = L^1(\Omega, \delta(x)dx)$. Για $0 < T \leq +\infty$ και $u \in L^1_\delta(\Omega)$ λέμε ότι η $u > 0$ είναι μία ασθενής λύση του προβλήματος (1.1)-(1.3) αν για κάθε $0 < s < T$ έχω ότι $u \in L^1(\Omega \times (0,s))$, $Vu\delta \in L^1(\Omega \times (0,s))$ και

$$\int_0^s \int_\Omega u(-\zeta_t - \Delta\zeta) dx dt - \int_\Omega u(x,0)\zeta(x,0)dx = \int_0^s \int_\Omega Vu\zeta dx dt, \quad \forall \;\; \zeta \in C^2(\Omega \times [0,s]),$$

όπου $\zeta(x,t) = 0, \;\; \forall \; (x,t) \in \partial(\Omega) \times [0,s]$.

Όσον αφορά την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων έχουμε ότι: εάν $\mu_1 > 0$, τότε

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$$

Το δικό μας ενδιαφέρον εστιάζεται στην περίπτωση κρίσιμου δυναμικού, για παράδειγμα όταν

$$V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}, \quad x \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $V \notin L^{N/2}(\Omega)$ αλλά $V \in L^{N/2,\infty}(\Omega)$.

Τα παρακάτω θεωρήματα μελετούν την ομαλότητα και την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων του προβλήματος (1.1)-(1.3) στην περίπτωση όπου $0 < \lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ομαλό και φραγμένο.

Θεώρημα 1.0.1 *Έστω $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$, $0 < \lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Τότε υπάρχει μία ορθοκανονική βάση $\{e_k\}_{k\geq1}$ του $L^2(\Omega)$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του $L(V) = -\Delta - V(x)I$ με ακολουθία ιδιοτιμών*

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_k \ldots \to \infty$$

τ.ω.

$$-\Delta e_k - V(x)e_k = \mu_k e_k \;\; \text{στο } \Omega, \quad e_k = 0 \;\; \text{στο } \; \partial\Omega$$

με $e_k \in H^1_0(\Omega)$.

Θεώρημα 1.0.2 *Έστω $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$, $0 < \lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Τότε για κάθε $u_0 \in L^2(\Omega)$ υπάρχει μια μοναδική λύση u του (1.1)-(1.3),*

$$u \in C(L^2(\Omega) \times [0,\infty)) \bigcap L^2(H^1_0(\Omega) \times [0,\infty))$$

η οποία είναι μία ασθενής λύση του προβλήματος (1.1)-(1.3). Η λύση μπορεί να αναπτυχθεί ως προς την ορθοκανονική βάση του $L^2(\Omega)$ $\{e_k\}$ ως εξης

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\mu_k t} e_k(x), \tag{1.9}$$

όπου c_k είναι οι συντελεστές Fourier των αρχικών δεδομένων,

$$u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k. \tag{1.10}$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης, οπότε καθώς το $t \to \infty$ έχουμε εκθετική μείωση της οποίας ο ρυθμός δίνεται από την πρώτη ιδιοτιμή. Συγκεκριμένα έχουμε

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\mu_1 t}||u_0||_{L^2(\Omega)} \tag{1.11}$$

$$||u(\cdot,t) - \sum_{k=1}^{K} c_k e^{-\mu_k t} e_k||_{L^2(\Omega)} = O(e^{-\mu_{K+1} t})||u_0||_{L^2(\Omega)} \tag{1.12}$$

Στην περίπτωση όπου $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ομαλό και φραγμένο έχουμε: Ορίζουμε με H τον χώρο *Hilbert* που παίρνουμε με την πλήρωση του του $H_0^1(\Omega)$ ως προς τη νόρμα

$$\|u\|_H = \left(\int_\Omega \{|\nabla u|^2 - V(r)u^2\} dx\right)^{1/2}. \tag{1.13}$$

Θεώρημα 1.0.3 *Για κάθε $u_0 \in L^2(\Omega)$ υπάρχει μία μοναδική*

$$u \in C(L^2(\Omega) \times [0,\infty)) \bigcap L^2(H \times [0,\infty)), \qquad u_t \in L^2(H' \times [0,\infty)),$$

η οποία είναι ασθενής λύση του προβλήματος (1.1)-(1.3).

Η λύση μπορεί να αναπτυχθεί ως προς τη βάση $\{e_k\}$ όπως πριν ,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\mu_k t} e_k(x)$$

όπου τα c_k είναι οι συντελεστές *Fourier* των αρχικών δεδομένων. Και έχουμε αντίστοιχες εκτιμήσεις των (1.11)-(1.12).

Τα παραπάνω ισχύουν όταν το Ω είναι ένα φραγμένο και ομαλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Για να δείξουμε τι συμβαίνει όταν $\Omega = \mathbb{R}^N$ έχουμε τα παρακάτω.
Ορίζουμε τον $L^2(K)$ με $K = e^{|x|^2/4}$ να είναι όλες οι μετρήσιμες συναρτήσεις u με $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx < \infty$.

Θεώρημα 1.0.4 *Υποθέτουμε ότι $N \geq 3$ και $\lambda \leq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Τότε, για κάθε $u_0 \in L^2(K)$ το πρόβλημα έχει μοναδική λύση $u \in C(L^2(K) \times (0,\infty)) \bigcap L^2(H^1(K) \times (0,\infty))$.*

Για την ασυμπτωτική συμπεριφορά έχουμε:

Θεώρημα 1.0.5 *Υποθέτουμε ότι* $N \geq 3$ *και ότι* $0 < \lambda \leq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. *Τότε, για κάθε* $t > 0$ *και για όλα τα* $u_0 \in L^2(K)$

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq t^{-\nu_1(\lambda)}||u_0||_{L^2(K)}.$$

Όπου $\nu_1(\lambda) = 1/2 + 1/2\sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda}$.

Στη συνέχεια θα δούμε πως ο περιορισμός

$$\lambda \leq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$$

είναι πολύ ουσιαστικός. Ιδιαίτερα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα των $Cabre$ και $Martel$ [CM1] που συνδέει την ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα (1.1)-(1.3) με την ύπαρξη βελτιωμένης ανισότητας $Hardy$. Ιδιαίτερα έχουμε:

Θεώρημα 1.0.6 *ι) Έστω* $u \in L^1_\delta(\Omega)$ *και* $u \geq 0$ *είναι η λύση του προβλήματος (1.1)-(1.3) για την οποία υπάρχουν θετικές σταθερές* C, M *τέτοιες ώστε:*

$$\int_\Omega u(x,t)\delta(x)dx \leq Ce^{Mt} \quad , \; t > 0. \tag{1.14}$$

Τότε $\lambda_1(V;\Omega) > -\infty$. *Με*

$$\lambda_1(V;\Omega) = \inf_{\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \int_\Omega V(x)\varphi^2}{\int_\Omega \varphi^2}.$$

ιι)Έστω $\lambda_1(V;\Omega) > -\infty$. *Τότε για κάθε* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *με* $u_0 \geq 0$ *υπάρχει μία καθολική ασθενής λύση του προβλήματος με την εκτίμηση*

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)} \leq ||u_0||_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_1(V;\Omega)t}, \quad t > 0. \tag{1.15}$$

ιιι)Έστω ότι για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ *έχουμε*

$$\lambda_1((1-\varepsilon)V;\Omega) = -\infty.$$

Τότε για κάθε $T > 0$ *και* $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)\setminus\{0\}, u_0 \geq 0$, *δεν υπάρχει ασθενής λύση του προβλήματος (1.1)-(1.3). Ιδιαίτερα αν* $V_n(x) = min(V(x), n)$, $u_{0,n}(x) = min(u_0(x), n)$ *και* u_n *είναι η μοναδική λύση του προβλήματος*

$$\partial_t u_n - \Delta u_n = V_n(x)u_n \quad x \in \Omega, t > 0 \tag{1.16}$$

$$u_n(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, t > 0 \tag{1.17}$$

$$u_n(x,0) = u_{0,n} \quad x \in \Omega. \tag{1.18}$$

Τότε για $0 < \tau < T$, *έχουμε:*

$$\frac{u_n(x,t)}{\delta(x)} \to +\infty$$

ομοιόμορφα στο (τ, T) *καθώς* $n \to \infty$.

Στην περίπτωση του δυναμικού $V(x) = \frac{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2}{|x|^2}$, έχουμε την ακόλουθη ανισότητα $Hardy$:

Θεώρημα 1.0.7 *Έστω Ω ένα φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ και $0 \in \Omega$.Τότε υπάρχει μία σταθερά $C(\Omega) > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$C(\Omega)\int_\Omega u^2 dx \leq \int_\Omega [|\nabla u|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u^2}{|x|^2}]dx$$

Η βέλτιστη σταθερά όταν το Ω είναι μία μπάλα $B_\alpha(0)$ είναι

$$C(\Omega) = z_0^2/\alpha^2$$

όπου z_0 είναι το πρώτο μηδενικό της Bessel συνάρτησης $J_0(r), z_0^2 = 0.57832\ldots$.

Από τα παραπάνω θεωρήματα προκύπτει ότι όταν $0 < \lambda \leq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ έχουμε βελτιωμένη ανισότητα *Hardy* και οπότε ύπαρξη ασθενής λύσης, ενώ όταν $\lambda > \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$, έχουμε

$$\lambda_1(\lambda|x|^{-2};\Omega) = -\infty$$

και επομένως το πρόβλημα (1.1)-(1.3) δεν έχει καν ασθενή λύση. Αξίζει να σημειωθεί ότι το φαινόμενο αυτό (της μη-ύπαρξης λύσης) είναι φαινόμενο που δεν εμφανίζεται στα υπό-κρίσιμα δυναμικά.

Κεφάλαιο 2

Βασικοί ορισμοί - Οι ανισότητες $Hardy$ και $Hardy - Poincare$

2.1 Εισαγωγικά στοιχεία-Συμβολισμοί

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ και $u : \Omega \to \mathbb{R}$.
Για $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \;\; : \mu\epsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta \; \mu\epsilon \; ||u||_{L^p(\Omega)} < \infty\}$ με $||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.
$L^p_{loc}(\Omega)$ είναι ο χώρος συναρτήσεων u ώστε για κάθε $K \subset\subset \Omega$, $u \in L^p(K)$.
Η α-ασθενής παράγωγος της u, $D_\alpha u$ είναι εκείνη η συνάρτηση $\upsilon \in L^1_{loc}$ που έχει την ιδιότητα: $(D_\alpha u = \upsilon)$

$$\int_\Omega \upsilon(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha\phi(x)dx, \quad \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\vartheta\epsilon \;\; \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Με $W^{1,p}(\Omega)$ συμβολίζουμε το χώρο $Sobolev$ ο οποίος αποτελείται από όλες τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις u τέτοιες ώστε για κάθε πολυδείκτη α με $|a| \leq 1$, το $D^a u$ να υπάρχει με την ασθενή έννοια και να ανήκει στον $L^p(\Omega)$. Συμβολίζουμε $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$.
Με $C^{k,\alpha}$ θα συμβολίζουμε τις κ-φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις και η τελευταία παράγωγος να είναι $H\ddot{o}lder$ συνεχής.
Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ την πλήρωση του $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ με νόρμα $||u||^2_{\mathcal{D}^{1,2}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$.
Ορίζουμε τη Γάμα συνάρτηση:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $Bessel - J_n(x)$ να είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

με $y(0) = 1$ και $y'(0) = 0$.
Ο τελεστής $Laplace-$ είναι ο τελεστής Δ με $\Delta u = \Sigma_{i=1}^N u_{x_i x_i}$.
Ο τελεστής *Laplace-Beltrami* στην S^2 δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta_S = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Έχουμε περιγράψει τα σημεία του S^2 χρησιμοποιώντας την παραμετρικοποίηση

$$x = \cos\varphi \sin\theta,\ y = \sin\varphi \sin\theta,\ z = \cos\theta,$$

με $\theta \in [0, \pi]$ και $\varphi \in [0, 2\pi]$.
Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες $x = (r, \sigma)$ στην μπάλα κέντρου μηδέν, γράφουμε την u στη μορφή

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r) f_k(\sigma),$$

όπου f_k σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση του $L^2(S^{N-1})$, με S^{N-1} την επιφάνεια της σφαίρας, που αποτελείται από τις ιδιοσυναρτήσεις του *Laplace− Beltrami* τελεστή.Η βάση αυτή έχει ιδιοτιμές

$$c_k = k(N + K - 2), k \geq 0$$

Θέτουμε $f_0(\sigma) = 1$ και $u_0(r)$ να είναι η προβολή του $u \in H_0^1(B)$ στον χώρο των ακτινικά συμμετρικών συναρτήσεων. Έχουμε

$$-\Delta_\sigma f_k = c_k f_k.$$

Για $1 < p < \infty$ ο ασθενής χώρος $L^{p,\infty}(\Omega)$ ορίζεται ως εξης:

$$L^{p,\infty}(\Omega) = \{f \quad \mu\epsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta \ \sigma\tau o \ \Omega, |x : |f(x)| \geq \lambda| \leq C\lambda^{-p} \forall \lambda > 0\},$$

με ημινόρμα

$$[f]_{p,\infty}^p = \sup_{\lambda>0} \lambda^p |x : |f(x)| > \lambda|.$$

Οπότε το $|x|^{-\alpha} \in L^{p,\infty}(B), 1 < p < \infty$, αν και μόνο αν $p\alpha \leq N$.
Συμβολίζουμε με H τον χώρο *Hilbert* που παίρνουμε με την πλήρωση του $H_0^1(\Omega)$ ως προς τη νόρμα

$$||u||_H^2 = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - V(|x|)u^2)dx) \tag{2.1}$$

με

$$-C \leq V(x) \leq \frac{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2}{|x|^2},$$

με $C \in \mathbb{R}$,που συσχετίζεται με τη διγραμμική μορφή

$$a(u, \upsilon) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \upsilon - V(r)u^2)dx.$$

Έστω $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ τότε ορίζουμε:

$$Fu(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-it\cdot x} u(x)dx$$

με $t \cdot x = \sum_{i=1}^N t_i x_i$.
Για $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε:

$$H^t(\mathbb{R}^N) \equiv \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : ||u||_{H^t(\mathbb{R}^N)} \equiv (\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^t |Fu(x)|^2 dx)^{1/2} < \infty$$

Έστω Χ,Υ χώροι *Banach* με $X \subset Y$.Λέμε ότι ο Χ είναι συμπαγώς εμφυτευμένος στον Υ, και γράφουμε

$$X \subset\subset Y,$$

αν υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε
(ι)$||x||_Y \leq C||x||_X \quad \forall x \in X$,
(ιι)για κάθε φραγμένη ακολουθία στον Χ υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον Υ.
Θεώρημα εμφύτευσης *Sobolev*
Έστω Ω ένα φραγμένο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, με C^1 σύνορο και $u \in W^{1,p}(\Omega)$, τότε ισχύει:
ι)Αν $p < n$ τότε $u \in L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$, μάλιστα αν $q < np/(n-p)$ τότε $L^q(\Omega) \subset\subset W^{1,p}(\Omega)$.
ιι)Αν $p > n$ τότε $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$, όπου $\gamma = 1 - n/p$.
ιιι)Αν $p = n$ τότε $u \in L^p(\Omega)$ για κάθε $1 \leq p < \infty$.

2.2 Οι ανισότητες $Hardy$ και $Hardy - Poincare$

Η κλασσική μορφή της *Hardy* ανισότητας δηλώνει ότι για $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), N \geq 3$

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \tag{2.2}$$

Για να αποδείξουμε την παραπάνω ανίσωση παρατηρούμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - cu\frac{x}{|x|^2}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \frac{c^2u^2}{|x|^2} - 2c\frac{u}{|x|^2}(x \cdot \nabla u))dx$$

με μία ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + (Nc + c^2)\frac{u^2}{|x|^2} + cu^2 x \nabla(\frac{1}{|x|^2}))dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + (c^2 - 2c + Nc)\frac{u^2}{|x|^2})dx \geq 0,$$

οπότε:

$$(2c - c^2 - Nc) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

Το πολυώνυμο $(2c - c^2 - Nc)$ ως προς c παίρνει τη μέγιστη τιμή του για $c = \frac{N-2}{2}$, η οποία είναι $\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Παρατηρούμε ότι αν υποθέσουμε την ισότητα στη σχέση 2.2 παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - u\frac{N-2}{2}\frac{x}{|x|^2}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^2} = 0,$$

οπότε

$$\nabla u - u\frac{N-2}{2}\frac{x}{|x|^2} = 0 \quad \sigma.\pi.,$$

δηλαδή

$$u(x) = k|x|^{-\frac{N-2}{2}},$$

όπου $k \in \mathbb{R}$, όμως $u \notin \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.
Για να δείξουμε ότι η σταθερά $\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ είναι βέλτιστη, για $\varepsilon > 0$ θεωρούμε την

$$\overline{u}_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{N-2}{2}+\varepsilon} - 1, & |x| < 1, \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma. \end{cases}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}_\varepsilon(x)|^2 dx = \frac{Na(N)}{2\varepsilon}(\frac{2-N}{2}+\varepsilon)^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\overline{u}_\varepsilon(x)^2}{|x|^2} dx = Na(N)(\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{1}{N-2}-\frac{4}{N-2+2\varepsilon})$$

με $\alpha(N)$ να είναι ο όγκος της μοναδιαίας σφαίρας,οπότε προκύπτει ότι

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}_\varepsilon|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\overline{u}_\varepsilon^2}{|x|^2} dx} \to \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$$

καθώς $\varepsilon \to 0^+$, και άρα η $\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ είναι βέλτιστη.

Παρατηρούμε ότι η απόδειξη της (2.2) ανίσωσης είναι άμεση εαν κάνουμε την αντικατάσταση $v(x) = |x|^{\frac{N-2}{2}} u(x)$. Στο [BV] έχει δοθεί η παρακάτω εκτίμηση όταν $\alpha = 0$.

Θεώρημα 2.2.1 *(Βελτιωμένη Ανισότητα Hardy ,Brezis − Vasquez)*
Έστω Ω ένα φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ και $0 \in \Omega$. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C(\Omega) > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$

$$C(\Omega)\int_\Omega u^2 dx \leq \int_\Omega [|\nabla u|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u^2}{|x|^2}]dx. \tag{2.3}$$

Η βέλτιστη σταθερά όταν το Ω είναι μία μπάλα $B_\alpha(0)$ είναι

$$C(\Omega) = z_0^2/\alpha^2 \tag{2.4}$$

όπου z_0 είναι το πρώτο μηδενικό της Bessel συνάρτησης $J_0(r), z_0^2 = 5.7832\ldots$.

Απόδειξη

Το πρώτο βήμα είναι να κάνουμε μία συμμετρικοποίηση που θα αντικαθιστά το Ω με μία μπάλα B_R ίδιου όγκου ,

$$\omega_N R^N = |\Omega|$$

και τη συνάρτηση u από τη συμμετρική της αναπαράσταση . Τότε η ακτινικά συμμετρική δεν αλλάζει την L^2 νόρμα , μειώνει την $H_0^1(\Omega)$ νόρμα και αυξάνει το ολοκλήρωμα $\int \frac{u^2}{|x|^2}$. Οπότε αρκεί να δείξουμε το αποτέλεσμα στην συμμετρική περίπτωση . Επιπλέον μία απλή κανονικοποίηση μας επιτρέπει να θεωρήσουμε $R = 1$. Η απόδειξη που παρουσιάζεται χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $\overline{u} = |x|^{-\frac{N-2}{2}}$ για να πετύχει μία αναγωγή διαστάσεως του προβλήματος από τις n στις 2. Ορίζουμε

$$v(r) = u(r)|x|^{\frac{N-2}{2}}$$

παρατηρούμε ότι:

$$\int_B |\nabla u|^2 dx - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_B \frac{u^2}{|x|^2} dx = n\omega_N\{\int_0^1 (v')^2 r dr - (N-2)\int_0^1 v(r)v'(r)dr\}$$

Τώρα αν θεωρήσουμε $u \in C_c^1(B_1)$ το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μηδέν και παίρνουμε

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{B_1} \frac{u^2}{r^2} dx = n\omega_N \int_0^1 (v')^2 r dr$$

Κάνοντας χρήση της ανίσωσης $Poincare$ στις δύο διαστάσεις,

$$\int_0^1 (v')^2 r dr \geq z_0^2 \int_0^1 v^2(r) r dr,$$

παίρνουμε το αποτέλεσμα. Η τελευταία παρατήρηση μας επιτρέπει να διαγράψουμε τον περιορισμό του $u \in C_c^1(B_1)$ και αυτό επιτυγχάνεται από το ότι οι $C_c^1(B_1)$ είναι πυκνές στις $H_0^1(B_1)$. $\square$
Επίσης έχουμε:

Θεώρημα 2.2.2 *(Βελτιωμένη $Hardy - Poincare$ Ανισότητα)*
Έστω Ω ένα φραγμένο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N, N \geq 3$. Τότε για κάθε $1 \leq q < 2$ υπάρχει θετική σταθερά $C(q, \Omega)$ ώστε $\forall u \in H_0^1(\Omega)$,

$$C(q,\Omega)\|u\|^2_{W^{1,q}(\Omega)} \leq \int_\Omega [|\nabla u|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u^2}{|x|^2}] dx. \tag{2.5}$$

Απόδειξη
Αρχικά θεωρούμε ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις σε μία μπάλα, δηλαδή $u = u(r)$, $r = |x|$, πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $1 \leq q < 2$ υπάρχει $C = C(q) > 0$ τέτοια ώστε

$$C(\int_0^1 |u'|^q r^{N-1} dr)^{2/q} \leq \int_0^1 [|u'|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u^2}{r^2}] r^{N-1} dr, \tag{2.6}$$

με $u \in C^1(0,1)$ και $u(1) = 0$. Τότε το αποτέλεσμα για ακτινικές συναρτήσεις στον $H_0^1(B)$ έπεται από πυκνότητα με την L^2 νόρμα. Προχωράμε με την αλλαγή μεταβλητών

$$\upsilon(r) = r^{(N-2)/2} u(r). \tag{2.7}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\int_0^1 [|u'|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u^2}{r^2}] r^{N-1} dr = \int_0^1 |\upsilon'|^2 r dr \tag{2.8}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\int_0^1 |u'|^q r^{N-1} dr = \int_0^1 |r^{-(N-2)/2} \upsilon'(r) - \frac{N-2}{2} r^{-N/2} \upsilon(r)|^q r^{N-1} dr$$

$$\leq C_q \int_0^1 |\upsilon'|^q r^{N-1-(N-2)q/2} dr + C_{q,N} \int_0^1 |\upsilon|^q r^{N-1-Nq/2} dr = I_1 + I_2$$

εδώ χρησιμοποιήσαμε την ανίσωση
$|a+b|^p \leq C(|a|^p + |b|^p)$ για κάθε α,β $\in \mathbb{R}$ και $p > 1$
Θα φράξουμε πρώτα το πρώτο ολοκλήρωμα , από $H\ddot{o}lder$ έχω

$$I_1 = \int_0^1 |\upsilon'|^q r^{N-1-(N-2)q/2} dr \leq \Big(\int_0^1 |\upsilon'|^2 r dr\Big)^{q/2} \Big(\int_0^1 r^{N-1} dr\Big)^{(2-q)/2}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει , οπότε για $1 \leq q \leq 2$ έχουμε

$$I_1 \leq C\Big(\int_0^1 |\upsilon'|^2 r dr\Big)^{q/2}$$

Όσον αφορά το άλλο ολοκλήρωμα έχουμε για κάθε $p > q$
$I_2 \leq \Big(\int_0^1 |\upsilon|^p r dr\Big)^{q/p}\Big(\int_0^1 r^\alpha dr\Big)^{(p-q)/p}$, $\alpha = \Big(N - 1 - \frac{Nq}{2} - \frac{q}{p}\Big)\frac{p}{p-q}$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνο αν $\alpha > -1$ δηλαδή αν $q < 2$ και $p > 4q/N(2-q)$.
Χρησιμοποιώντας την εμφύτευση του $H_0^1(B_1)$ στον $L^p(B_1)$ στην διδιάστατη μπάλα ($B_1 \in \mathbb{R}^2$),που ισχύει για κάθε πεπερασμένο p, έχουμε

$$\int_0^1 |\upsilon|^p r dr \leq C_p\Big(\int_0^1 |\upsilon'|^2 r dr\Big)^{p/2}$$

Οπότε το I_2 είναι φραγμένο από πάνω από ένα πολλαπλάσιο της δεξιάς πλευράς του (2.6).Με αυτό τον τρόπο δείξαμε το αποτέλεσμα για ακτινικές συναρτήσεις σε μία μπάλα.

Στη συνέχεια θεωρούμε μη-ακτινικές συναρτήσεις σε μπάλα. Η διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση είναι ότι αυτή τη φορά δεν έχουμε ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις. Οπότε θα χρησιμοποιήσουμε *spherical harmonics* δηλαδή την αρμονική ανάλυση της συνάρτησης στο ακτινικό και το σφαιρικό της κομμάτι που έχουμε αναφέρει στα εισαγωγικά στοιχεία.
Οπότε

$$\int_{B_1}\Big[|\nabla u|^2 - \Big(\frac{N-2}{2}\Big)^2\frac{u^2}{r^2}\Big]dx = \int_{B_1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k'(r) f_k(\sigma)\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(r)\nabla_\sigma f_k(\sigma)\Big)^2 -$$

$$-\frac{\big(\frac{N-2}{2}\big)^2}{r^2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(r) f_k(\sigma)\Big)^2$$

$$= N\omega_N \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\Big[|u_k'|_k^2 + \frac{c_k}{r^2}u_k^2 - \frac{\big(\frac{N-2}{2}\big)^2}{r^2}u_k^2\Big]r^{N-1}dr$$

Χωρίζουμε τώρα το άθροισμα σε δύο όρους:

$$I_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\Big[|u_k'|^2 - (\Big(\frac{N-2}{2}\Big)^2 - c_k)\frac{u_k^2}{r^2}\Big]r^{N-1}dr$$

και στο ακτινικό κομμάτι

$$I_0 = \int_0^1\Big[|u_0'|^2 - \Big(\frac{N-2}{2}\Big)^2\frac{u_0^2}{r^2}\Big]r^{N-1}dr$$

από τη 2.6 παίρνουμε

$$I_0 \geq C\|u_0\|^2_{W^{1,q}(B_1)}.$$

Για να υπολογίσουμε το πρώτο ολοκλήρωμα παίρνουμε από το Θεώρημα 2.2.1 (από τη σχέση 2.4) ότι

$$\int_0^1 \Big[|u_k'|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u_k^2}{r^2} + c_k \frac{u_k^2}{r^2}\Big] r^{N-1} dr \geq \frac{c_k}{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2} \int_0^1 |u_k'|^2 r^{N-1} dr$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός οτι $c_k \geq N-1 > 0$ για $k \geq 1$ το άθροισμα είναι φραγμένο από κάτω με $C\|u-u_0\|^2_{H_0^1(B)}$. Συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με αυτό του προηγούμενου ακτινικού μέρους το Θεώρημα 2.0.2 έπεται σε μπάλες.

Στη γενική περίπτωση για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό εισάγουμε μια ομαλή συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε $0 \leq \phi(x) \leq 1$ με $\phi(x) = 1$ για κάθε $x \in B_{a/2}(0)$ και $\phi(x) = 0$ για κάθε $|x| \geq \alpha$. Ορίζουμε $w_1 = u\phi$ και $w_2 = u(1-\phi)$, $u = w_1 + w_2$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big[|\nabla u|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u^2}{r^2}\Big] dx = &\int_\Omega \Big[|\nabla w_1|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{w_1^2}{r^2}\Big] dx \\ &+ \int_\Omega \Big[|\nabla w_2|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{w_2^2}{r^2}\Big] dx \\ &+ 2\int_\Omega \Big[\nabla w_1 \nabla w_2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{w_1 w_2}{r^2}\Big] dx \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε πρώτα τους διαφορετικούς όρους σε αυτό το ανάπτυγμα. Εφόσον ο φορέας του w_2 είναι ξένος με την αρχή των αξόνων έχουμε

$$\int_\Omega \frac{w_2^2}{|x|^2} dx + \int_\Omega \frac{w_1 w_2}{|x|^2} dx \leq C \int_\Omega u^2 dx$$

Από την άλλη έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla w_1 \nabla w_2 dx = &\int_\Omega \phi(1-\phi)|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega |\nabla\phi|^2 u^2 dx \\ &+ \int_\Omega u\nabla u.((1-2\phi)\nabla\phi) dx\end{aligned}$$

Εφόσον

$$\int_\Omega u\nabla u.((1-2\phi)\nabla\phi) dx = -1/2 \int_{B_\alpha \setminus B_{\alpha/2}} u^2 div((1-2\phi)\nabla\phi) dx$$

Σε αυτή την ολοκλήρωση κατά μέλη οι συνοριακοί όροι μηδενίζονται εφόσον

$$(1-2\phi)\nabla\phi = 0$$

στην $\partial(B_\alpha \setminus B_{\alpha/2})$. Συνδυάζοντας τους τελευταίους δύο τύπους παίρνουμε

$$\int_\Omega \nabla w_1 \cdot \nabla w_2 dx \geq -C \int_\Omega u^2 dx$$

Αυτή η σχέση και η (2.9) με $u = w_1 + w_2$ δίνουν

$$\int_\Omega \Big[|\nabla u|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u^2}{r^2}\Big] dx \geq \int_\Omega \Big[|\nabla w_1|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{w_1^2}{r^2}\Big] dx$$

$$+ \int_\Omega |\nabla w_2|^2 dx - C \int_\Omega u^2 dx$$

Εφαρμόζοντας τώρα το αποτέλεσμα που έχουμε στη μπάλα για την $w_1 \in H_0^1(B_\alpha)$ παίρνουμε

$$\int_\Omega \Big[|\nabla w_1|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{w_1^2}{r^2}\Big] dx \geq C_1 \|w_1\|^2_{W^{1,q}(\Omega)}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη .$\square$

Κεφάλαιο 3

Ύπαρξη και αυτόματη έκρηξη για τη γραμμική εξίσωση θερμότητας με ιδιάζον δυναμικό

Θα μελετήσουμε το γραμμικό πρόβλημα θερμότητας :

$$u_t - \Delta u = V(x)u \quad x \in \Omega, t \in (0,T) \tag{3.1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, t \in (0,T) \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \tag{3.3}$$

Όπου Ω είναι ένα ομαλό και φραγμένο χωρίο με $0 \in \Omega$, $V \in L^1_{loc}(\Omega), u_0 \in L^1_{loc}(\Omega)$ και $V \geq 0, u_0 \geq 0$ σχεδόν παντού στο Ω. Θεωρώ μόνο τις μη αρνητικές λύσεις του (3.1)-(3.3).

Συγκεκριμένα θα δούμε ότι αν το πρόβλημα (3.1)-(3.3) έχει κάποια λύση συσχετίζεται άμεσα με την τιμή της πρώτης ιδιοτιμής του τελεστή $-\Delta - V$.
Υπενθυμίζουμε πως η γενική πρώτη ιδιοτιμή της $-\Delta - V(x)$ στο Ω είναι:

$$\lambda_1(V;\Omega) = \inf_{\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \int_\Omega V(x)\varphi^2}{\int_\Omega \varphi^2}.$$

Παρατηρούμε ότι η ιδιοτιμή μπορεί να είναι και $-\infty$. Η συνθήκη $\lambda_1(V;\Omega) > -\infty$ μεταφράζεται με την ύπαρξη μιάς $Hardy - Sobolev$ ανισότητας με βάρη $V(x)$. Πράγματι σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\int_\Omega V(x)\varphi^2 \leq \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \lambda_1(V)\int_\Omega \varphi^2, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το θεώρημα 1.0.6 που αναφέρουμε στην εισαγωγή.
Απόδειξη
Ξεκινάμε με την απόδειξη καθολικής ύπαρξης ασθενής λύσης υπό τη συνθήκη $\lambda_1(V;\Omega) > -\infty$. Έστω V_n, u_n, u_{0n} όπως ορίστηκαν. Τότε πολλαπλασιάζοντας την 3.6 με u_n και ολοκληρώνοντας κατά μέλη στο Ω παίρνουμε :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_n^2(x,t)dx = -\int_\Omega |\nabla u_n(x,t)|^2 dx + \int_\Omega V_n(x)u_n^2(x,t)dx \leq -\lambda_1(V;\Omega)\int_\Omega u_n^2(x,t)dx$$

για κάθε $t > 0$. Παίρνοντας την εκτίμηση 3.5 όπου u βάζουμε u_n, αυτή είναι που δίνει το ομοιόμορφο φράγμα της u_n στα n. Από θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης , το όριο u της u_n

είναι η ασθενής λύση της αρχική γραμμικής εξίσωσης θερμότητας.[BG, M]

Αναγκαία συνθήκη

Ας υποθέσουμε ότι $0 < u_n \leq u$ είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος (3.6)-(3.8). Από Μονότονη Σύγκλιση, το όριο $\underline{u}$ της u_n υπάρχει , και ικανοποιεί $0 < \underline{u} \leq u$ και $\underline{u}$ είναι ασθενής λύση του αρχικού προβλήματος ($\underline{u}$ είναι η ελάχιστη λύση του αρχικού). Χρειαζόμαστε την ακόλουθη ανίσωση: Για κάθε $0 < t_1 < t_2 < T$ έχουμε

$$\int_\Omega V(x)\cdot\varphi^2 - \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \leq \frac{1}{t_2-t_1}\int_\Omega \log\Big(\frac{\underline{u}(t_2)}{\underline{u}(t_1)}\Big)\varphi^2 \quad \gamma\iota\alpha \;\; \kappa\alpha\theta\varepsilon \quad \varphi\in C_c^\infty(\Omega) \tag{3.4}$$

Για να δείξουμε την 3.9 πολλαπλασιάζουμε την 3.6 με φ^2/u_n και ολοκληρώνω ανά μέλη πάνω στο Ω. Παρατηρούμε ότι η φ^2/u_n έχει συμπαγή φορέα στο Ω. Χρησιμοποιώντας την $Cauchy-Schwartz$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned}\int_\Omega V_n(x)\varphi^2 &= \int_\Omega(\partial_t u_n)\frac{\varphi^2}{u_n} + \int_\Omega \nabla u_n\cdot\nabla(\varphi^2/u_n)\\ &= \frac{d}{dt}\int_\Omega(\log(u_n))\varphi^2 + 2\int_\Omega(\nabla u_n\cdot\nabla\varphi)\frac{\varphi}{u_n} - \int_\Omega|\nabla u_n|^2\frac{\varphi^2}{u_n^2}\\ &\leq \frac{d}{dt}\int_\Omega(\log u_n)\varphi^2 + \int_\Omega|\nabla\varphi|^2\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας στο t_1, t_2 και στέλνοντας το $n\to\infty$ αποδεικνύουμε την 3.9. Παιρνώντας στο όριο γράφουμε :
$\log(u_n(t_2)/u_n(t_1)) = \log(u_n(t_2)\delta) - \log(u_n(t_1)\delta)$ για κάθε $0 < t < T$ έχουμε ότι $u_n(t)\delta \uparrow \underline{u}\delta$ στον $L^1(\Omega)$, και $u_n(t) \geq T(t)u_{0n} \geq c$ στο φορέα της φ, με $c > 0$ ανεξάρτητο του n (από την ισχυρή αρχή μεγίστου για την ημιομάδα $T(t)$ που σχετίζεται με $\partial_t - \Delta$). Οπότε παίρνουμε

$$\int_\Omega \log(u_n(t_i)\delta)\varphi^2 \uparrow \int_\Omega \log(\underline{u}(t_i)\delta)\varphi^2$$

για $i = 1, 2$.

Τώρα θα δείξουμε πως αποδεικνύουμε τις απαραίτητες συνθήκες του θεωρήματος 3.0.3 με την βοήθεια της 3.9. Υποθέτουμε αρχικά ότι $T = \infty$ και $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ με $\int_\Omega \varphi^2 = 1$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Jensen$ έχουμε για κάθε $t > 1$,

$$\int_\Omega V(x)\varphi^2 - \int_\Omega|\nabla\varphi|^2 \leq \frac{1}{t-1}\Big\{\log(\int_\Omega \underline{u}(t)\delta\varphi^2) - \int_\Omega \log(\underline{u}(1)\delta)\varphi^2\Big\}$$

Καθώς $\underline{u} \leq u$ η ανίσωση 3.4 γίνεται

$$\int_\Omega \underline{u}(t)\delta\varphi^2 \leq \log(C||\varphi||_\infty^2) + Mt.$$

Στέλνοντας το $t\to\infty$ παίρνω $-\lambda(V;\Omega) \leq M < \infty$.

Όταν $T < \infty$ σταθεροποιώ $0 < t_1 < t_2 < T$ και χρησιμοποιώ $\log(\underline{u}(t_2)/\underline{u}(t_1)) \in L^p(\Omega)$ για κάθε $1 \leq p < +\infty$. Πράγματι, παίρνουμε $\underline{u}(t)\delta \in L^1(\Omega)$ και $\underline{u}(t) \geq T(t)u_0 \geq c(t)\delta$, με $c(t) > 0$ για κάθε $0 < t < T$ (Λήμμα 2 [M]). Αυτό μας λέει ότι $\log(\underline{u}(t)\delta) \in L^p(\Omega)$ για κάθε $1 \leq p < \infty$. Από το ότι $\log(\underline{u}(t_2)/\underline{u}(t_1)) \in L^{N/2}(\Omega)$ παίρνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια σταθερά ανεξάρτητη της φ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_\Omega \log(\frac{\underline{u}(t_2)}{\underline{u}(t_1)})\varphi^2 \leq \varepsilon\int_\Omega|\nabla\varphi|^2 + C(\varepsilon)\int_\Omega\varphi^2$$

Οπότε παίρνουμε ότι $\lambda_1((1+\varepsilon)^{-1}V;\Omega) > -\infty$.

Κεφάλαιο 4

Εξέλιξη σε υπό-κρίσιμα δυναμικά

Θεωρούμε το πρόβλημα:

$$u_t - \Delta u = V(x)u \quad x \in \Omega, t \in (0,T) \tag{4.1}$$
$$u(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, t \in (0,T) \tag{4.2}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega. \tag{4.3}$$

Υποθέτουμε ότι $-C \leq V(x) \leq \frac{\lambda}{|x|^2}$ με $\lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$.
Από την ανισότητα $Hardy$ ξέρουμε ότι για $\lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$:

$$\int_\Omega \Big[|\nabla u|^2 - \lambda \frac{u^2}{|x|^2}\Big]dx \geq \Big(1 - \frac{\lambda}{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2}\Big) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda C(\Omega)}{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2} \int_\Omega u^2 dx$$

Οπότε το $\Big(\int_\Omega \Big(|\nabla u|^2 - V(x)u^2\Big)dx\Big)^{\frac{1}{2}}$ είναι ισοδύναμο με την συνήθη νόρμα του $H_0^1(\Omega)$. Ο τελεστής $L = L(V)$ δίνεται ως:

$$L(V) = -\Delta - V(x)I$$

ορίζει έναν ισομορφισμό από τον $H_0^1(\Omega)$ στον δυικό του

$$L: \ H_0^1(\Omega) \to H_0^{-1}(\Omega).$$

Συνδυάζοντας την συμπαγή εμφύτευση του $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ και την δυική εμφύτευση του $L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ συμπεραίνουμε ότι ο περιορισμός του L ορίζει έναν μη φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή στον $L^2(\Omega)$ με συμπαγή αντίστροφο.

Θεώρημα 4.0.3 *Για $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$ και $\lambda \in (0, \left(\frac{N-2}{2}\right)^2)$, υπάρχει μία ορθοκανονική βάση $\{e_k\}_{k\geq 1}$ του $L^2(\Omega)$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του L μϵ ακολουθία ιδιοτιμών*

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_k \ldots \ \to \infty$$

τ.ω.

$$-\Delta e_k - V(x)e_k = \mu_k e_k \ \ \textit{στο}\ \Omega,$$
$$e_k = 0 \ \ \textit{στο}\ \ \partial\Omega$$

μϵ $e_k \in H_0^1(\Omega)$.

[CM2].Σε ότι αφορά το πρόβλημα εξέλιξης έχουμε το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 4.0.4 *Αν* $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$ *με* $\lambda \in (0, \left(\frac{N-2}{2}\right)^2)$ *τότε για κάθε* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *υπάρχει μια μοναδική*

$$u \in C([0,\infty] : L^2(\Omega)) \bigcap L^2(0,\infty : H_0^1(\Omega))$$

η οποία είναι μία ασθενής λύση του προβλήματος εξέλιξης. Η λύση μπορεί να αναπτυχθεί ως προς τη βάση e_k *ως εξης*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\mu_k t} e_k(x) \tag{4.4}$$

όπου a_k *είναι οι συντελεστές Fourier των αρχικών δεδομένων ,*

$$u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k. \tag{4.5}$$

Ασυμπτωτική συμπεριφορά
Καθώς το $t \to \infty$ έχουμε εκθετική μείωση της οποίας ο ρυθμός δίνεται από την πρώτη ιδιοτιμή. Συγκεκριμένα έχουμε

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\mu_1 t}||u_0||_{L^2(\Omega)} \tag{4.6}$$

$$||u(\cdot,t) - \sum_{k=1}^{K} a_k e^{-\mu_k t} e_k||_{L^2(\Omega)} = O(e^{-\mu_{K+1} t})||u_0||_{L^2(\Omega)} \tag{4.7}$$

4.1 Η υπό-κρίσιμη περίπτωση σε μπάλα

Υποθέτουμε τώρα το χωρίο Ω είναι η μπάλα $B = B_\alpha(0)$ ακτίνας $\alpha > 0$ του $\mathbb{R}^N$ με $N \geq 3$ και $V(x) = \lambda/|x|^2$, με $\lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$.
Σε αυτή την περίπτωση το φάσμα του τελεστή $L(V)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, $x = (r,\sigma), r > 0, \sigma \in S^{N-1}$, και αυτό δίνει λεπτομερείς πληροφορίες για ανωμαλίες και ρυθμούς μείωσης του προβλήματος εξέλιξης. Ορίζουμε με $f_j(\sigma)$ τις ιδιοσυναρτήσεις του *Laplace−Beltrami* τελεστή, που σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση του $L^2(S^{N-1})$. Οι ιδιοτιμές που εδώ θα συμβολίζουμε με c_j για να ξεχωρίζουν από αυτές του $L(V)$ είναι ακριβώς $c_j = j(j+N-2)$, $j = 0,1,2,\ldots$. Τότε ψάχνουμε για ιδιοσυναρτήσεις του $L(V)$ της μορφής

$$e(r,\sigma) = \phi(r) f_j(\sigma) \tag{4.8}$$

οπότε η ϕ πρέπει να ικανοποιεί το πρόβλημα ιδιοτιμών :

$$\phi'' + \frac{N-1}{r}\phi' + (\frac{\lambda - c_j}{r^2} + \mu)\phi = 0 \tag{4.9}$$

με συνοριακή συνθήκη $\phi(\alpha) = 0$ και $\phi' \in L^2(r^{N-1}dr; (0,1))$.

Χρησιμοποιώντας πάλι την κύρια ιδέα που είχαμε στην απόδειξη της ανίσωσης *Hardy* εκτελούμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$\phi(r) = \frac{\psi(r)}{r^{(N-2)/2}} \tag{4.10}$$

Τότε η ψ λύνει την εξίσωση *Bessel*

$$\psi'' + \frac{1}{r}\psi' + \Big(\mu - \frac{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + c_j - \lambda}{r^2}\Big)\psi = 0 \tag{4.11}$$

Τώρα οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\psi'(0) = 0, \psi(\alpha) = 0.$$

Έπεται ότι η ψ είναι της μορφής:

$$\psi(r) = J_m(r\sqrt{\mu}). \tag{4.12}$$

Όπου J_m είναι η $m-\iota o\sigma\tau\eta$ $Bessel$ συνάρτηση, με $m = m(j, \lambda)$ που δίνεται από:

$$m^2 = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + c_j - \lambda, \quad m \geq 0 \tag{4.13}$$

ούτως ώστε το m να είναι πάντα θετικό όταν $\lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Τότε το J_m μηδενίζεται στο $r = 0$, $J_m = cr^m + O(r^{m+1})$. Τέλος η συνοριακή συνθήκη $\psi(\alpha) = 0$ αναγκάζει το $\sqrt{\mu}\alpha$ να είναι ένα μηδενικό της $Bessel$ συνάρτησης, $\mu = z_{m,n}^2/\alpha^2$. Οπότε παίρνουμε

Θεώρημα 4.1.1 *Υπάρχει μία διπαραμετρική οικογένεια ιδιοσυναρτήσεων*

$$e_{j,n}(r, \sigma) = r^{-(N-2)/2} J_m\left(\frac{z_{m,n}}{\alpha} r\right) f_j(\sigma) \tag{4.14}$$

με ελεύθερες παραμέτρους $j \geq 0, n \geq 1$˙ ο δείκτης $m = m(j) > 0$ σχετίζεται με το j με την (4.13) και $j_{m,n}$ είναι το $n-\iota o\sigma\tau o$ μηδενικό της Bessel συνάρτησης J_m. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

$$\mu_{j,n} = \frac{z_{m,n}^2}{\alpha^2} \tag{4.15}$$

Η οικογένεια $e_{j,n}$ είναι μία πλήρης ορθογώνια βάση του $L^2(B)$ και $H_0^1(B)$.

Διάσπαση του $L^2(B)$

Όλες οι συναρτήσεις της βάσης είναι C^∞ για $x \neq 0$. Με τη μελέτη της κανονικότητας αυτής της βάσης στο κέντρο, μας ενδιαφέρει ο χωρισμός του ακτινικού κομματιού που είναι και το πιο ιδιάζον. Παρατηρούμε ότι ο $L^2(B)$ είναι το ευθύ άθροισμα των χώρων:

$$X_1 = L_r^2(B) = \{f \in L^2(B) : f = f(r)\}, X_2 = L_{za}^2(B) = \{f \in L^2(B) : \bar{f}(r) = 0\},$$

όπου $\bar{f}$ είναι ο σφαιρικός μέσος μιας συνάρτησης στον $L^2(B)$:

$$\bar{f} = \frac{1}{N\omega_N} \int_{|x|=r} f(r, \sigma) d\sigma. \tag{4.16}$$

Οπότε χωρίζουμε κάθε συνάρτηση $f \in L^2(B)$ στο ακτινικό και στο μη-ακτινικό της (ή σφαιρικού μέσου όρου μηδέν) μέρος, $f(r, \sigma) = f_1(r) + f_2(r, \sigma)$, ορίζοντας $f_1 = \bar{f}$.

Με αυτή τη διάσπαση παρατηρούμε ότι η μέγιστη ιδιομορφία στην οικογένεια των ιδιοσυναρτήσεων ανταποκρίνεται στην υπο-οικογένεια των ακτινικών ιδιοσυναρτήσεων. Δηλαδή, $j = 0$ (οπότε $m(0, \lambda)^2 = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda$) που αντιπροσωπεύει την πλήρη βάση για τον υπόχωρο X_1. Παρατηρούμε τότε ότι για $0 < \lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ όλες συμπεριφέρονται στο $r = 0$ όπως

$$e_{0,n} = O(r^{m-(N-2)/2}), \tag{4.17}$$

οπότε είναι ιδιόμορφες, εφόσον έχουμε ακριβώς $m(0,\lambda)^2 < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 = (N-2)^2/4$. Καθώς το λ αυξάνεται άλλες λύσεις χωριζομένων μεταβλητών με $j > 0$, οι οποίες αντιστοιχούν στη βάση μηδενικού μέσου όρου, αναπτύσσουν με τη σειρά τους ιδιομορφίες, ακριβώς όταν $m(j,\lambda) < \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2} = (N-2)/2$, το οποίο είναι ισοδύναμο με $\lambda > c_j$. Εφόσον $c_1 = N-1$ και $\lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$, αυτό συμβαίνει μόνο στις υψηλές διαστάσεις. Σε κάθε περίπτωση, όλες οι ιδιομορφίες είναι συμβατές με την έννοια της μεταβολής της εξίσωσης οπότε, εφόσον $m > 0$, έχουμε

$$|\nabla e|^2, \quad \frac{1}{r^2}e^2 \in L^p(B) \quad \textit{για κάποια} \;\; p > 1$$

Εξέλιξη της λύσης όταν $\Omega = B_1(0)$.
Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε την βάση των λύσεων χωριζομένων μεταβλητών

$$U_{j,n}(x,t) = e_{j,n}(x)e^{-\mu_{j,n}t} \tag{4.18}$$

το οποίο μας επιτρέπει να λύσουμε το πρόβλημα εξέλιξης στη μορφή που δίνεται στο Θεώρημα 4.1.2 και να εφαρμόσουμε τους τύπους (4.6)(4.7). Με σκοπό να δούμε καλύτερα τα αποτελέσματα είναι χρήσιμο να διασπάσουμε την εξίσωση της εξέλιξης στο ακτινικό και μη-ακτινικό κομμάτι της. Οπότε αν u είναι λύση του προβλήματος εξέλιξης και θέσουμε

$$\bar{u}(r,t) = \frac{1}{N\omega_N}\int_{|x|=r} u(x,t)d\sigma, \tag{4.19}$$

τότε η $\bar{u}$ ικανοποιεί την ακτινική μορφή του προβλήματος που μας δίνει

$$\bar{u}_t = \bar{u}_{rr} + \frac{N-1}{r}\bar{u}_r + \frac{\lambda}{r^2}\bar{u}, \tag{4.20}$$

με προφανείς αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Από την άλλη το μη-ακτινικό κομμάτι $\tilde{u} = u - \bar{u}$ είναι λύση του αρχικού προβλήματος με $\tilde{u}(t) \in X_2$ για κάθε t.
Ακτινικές λύσεις
Υποθέτουμε ότι $u = \bar{u}$ είναι μια ακτινικά συμμετρική λύση του (4.1)-(4.3) προβλήματος με δυναμικό $V(r)$. Τότε ορίζουμε:

$$\upsilon = ur^{(N-2)/2}, \tag{4.21}$$

Είναι φανερό ότι

$$\int_\Omega u^2(r,\sigma)dx = N\omega_N\int_0^1 \upsilon^2(r,t)rdr.$$

Παίρνουμε την εξίσωση για την υ,

$$\upsilon_t = \upsilon_{rr} + \frac{1}{r}\upsilon_r + \Big(V(r) - \frac{(N-2)^2}{4r^2}\Big)\upsilon. \tag{4.22}$$

Στην περίπτωση όπου $V(r) = \lambda/r^2$ με $\lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ παίρνουμε την εξίσωση

$$\upsilon_t = \upsilon_{rr} + \frac{1}{r}\upsilon_r + \Big(\frac{(\lambda - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2)}{r^2}\Big)\upsilon, \tag{4.23}$$

και ο χωρισμός μεταβλητών μας οδηγεί στην ακτινική έκδοση

$$\upsilon(r,t) = e^{-\mu_{j,n}t} J_m(z_{m,n}r/\alpha). \tag{4.24}$$

Γυρνώντας πίσω στην u παίρνουμε τις σειρές $Fourier$. Συγκεκριμένα η χωριζομένων μεταβλητών συνάρτηση με την μικρότερη $time - decay$ είναι η

$$U_1(r,t) = r^{-(N-2)/2} J_m(z_{m,1}r/\alpha)e^{-\mu_1 t}, \quad r \in (0,\infty), \quad t > 0, \tag{4.25}$$

που ανταποκρίνεται σε $n = 1$ και $j = 0$, έτσι ώστε $m = m(0,\lambda)$ να δίνεται από $m^2 = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda, m > 0, z_{m,1}$ να είναι το πρώτο μηδενικό του J_m, και $\mu_1 = \mu(0,1) = z_{m,1}^2/\alpha^2$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda > 0$ αυτή η λύση έχει μια ιδιάζουσα ιδιομορφία στο κέντρο της μορφής:

$$U_1(r,t) \sim c(t) r^{m(0,\lambda)-(N-2)/2}.$$

Η ίδια ιδιομορφία εμφανίζεται και στις υπόλοιπες ακτινικές περιπτώσεις , οπότε και στη γενική λύση.

Εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητών $\upsilon = ur^{(N-2)/2}$ παίρνουμε για μια γενική λύση

$$\upsilon_t = \upsilon_{rr} + \frac{1}{r}\upsilon_r + \frac{1}{r^2}B(\sigma)\upsilon + \frac{(\lambda - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2)}{r^2}\upsilon \tag{4.26}$$

όπου B είναι ο $Laplace - Beltrami$ τελεστής στη σφαίρα S^{N-1}. Παίρνουμε τώρα ως u το μη-ακτινικό μέρος της $\tilde{u}$ και ορίζουμε ανάλογα $\tilde{\upsilon}(r,\sigma)$,που να ικανοποιεί την (4.26). Η συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις που έχουν μηδέν μέσο ολοκλήρωμα ˙ από αυτό έπεται η $higher\ decay\ rate$ των μη-ακτινικών λύσεων. Οι αντίστοιχες λύσεις χωριζομένων μεταβλητών έχουν πιο ήπιες ιδιομορφίες από ότι οι ακτινικές. Όπως έχουμε αναφέρει όλες οι ιδιομορφίες είναι συμβάτες με την έννοια της μεταβολής της εξίσωσης ˙ εφόσον $m > 0$ έχουμε $|\nabla u|^2, \frac{1}{r^2}u^2(\cdot,t) \in L^p(\Omega)$ για κάποια $p > 1$, ομοιόμορφα για κάθε $t \geq 0$.

Ασυμπτωτική συμπεριφορά

Σύμφωνα με αυτή την ανάλυση, η λύση $u(x,t)$ με αρχικά δεδομένα u_0 μπορεί να προσεγγιστεί για μεγάλα t από ένα πολλαπλάσιο της πρώτης χωριζομένων μεταβλητών συνάρτησης $U_1(r,t)$.

Θεώρημα 4.1.2 *Καθώς το $t \to \infty$ έχουμε :*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\mu_1 t}\|u(r,t) - \alpha_1 U_1(r,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{4.27}$$

όταν

$$\alpha_1 = \frac{\int_\Omega u_0(x)U_1(r,0)dx}{\|U_1(r,0)\|_{L^2(\Omega)}}. \tag{4.28}$$

Απόδειξη
Έχουμε

$$u(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i r^{\frac{-(N-2)}{2}} J_m e^{-\mu_1 t}$$

οπότε

$$u(r,t) - a_1 U_1(r,t) = \sum_{i\geq 2}^{\infty} a_i r^{\frac{-(N-2)}{2}} J_m e^{-\mu_1 t}$$

παίρνουμε την L^2 νόρμα:

$$e^{2\mu_1 t}||u(r,t) - a_1 U_1(r,t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{i\geq 2}^{\infty} ||a_i r^{\frac{-(N-2)}{2}} J_m||^2_{L^2(\Omega)} e^{-2\mu_i t + 2\mu_1 t}$$

παρατηρούμε ότι το δεξί μέρος της παραπάνω σχέσης τείνει στο 0 καθώς $t \to \infty$.□

Αυτό το Θεώρημα μας δείχνει ότι η λύση $u = u(t)$ σταθεροποιείται καθώς $t \to \infty$ προς το πρώτο ακτινικό κομμάτι, εκτός αν δεν υπάρχει, εξαιτίας των άλλων ακτινικών όρων που έχουν μια πιο γρήγορη εκθετική *decay*. Θυμόμαστε επίσης ότι η u καθώς και η U_1 ανήκουν στον $H^1_0(\Omega)$ για κάθε $t > 0$. Όπως θα δούμε αυτό έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση όπου $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$.

Κεφάλαιο 5

Ανάλυση της κρίσιμης περίπτωσης

5.1 Γενική ανάλυση

Θα προχωρήσουμε τώρα στην ανάλυση της περίπτωσης με το περισσότερο ενδιαφέρων. Θεωρούμε ότι το δυναμικό ικανοποιεί:

$$-C \leq V(x) \leq \frac{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2}{r^2} \tag{5.1}$$

όμως η $V(x) \leq \lambda |x|^{-2}$ δεν αληθεύει για κάθε $\lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Το συναρτησιακό πλαίσιο είναι τώρα πιο πολύπλοκο εφόσον η $Hardy - Poincare$ δεν μπορεί να μας δώσει κατάλληλο φράγμα για τον τελεστή L στον $H_0^1(\Omega)$.Όμως σύμφωνα με την $Improved - Hardy - Poincare$ γνωρίζουμε ότι

$$\int_\Omega \left\{ |\nabla u|^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u^2}{|x|^2} \right\} dx \geq C_q \|u\|^2_{W_0^{1,q}(\Omega)}$$

ισχύει για κάθε $1 \leq q < 2$. Αυτό δηλώνει ότι το πρόβλημα

$$u_t - \Delta u = V(x)u \quad x \in \Omega, t \in (0,T) \tag{5.2}$$

$$u(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, t \in (0,T) \tag{5.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \tag{5.4}$$

θα είναι καλώς ορισμένο στον κατάλληλο χώρο $Hilbert$ που έχει κατασκευαστεί ως εξής: Ορίζουμε με H τον χώρο $Hilbert$ που παίρνουμε με την πλήρωση του $C_c^\infty(\Omega)$ ως προς τη νόρμα

$$\|u\|_H = \left(\int_\Omega \{ |\nabla u|^2 - V(r)u^2 \} dx \right)^{1/2} \tag{5.5}$$

που συσχετίζεται με τη διγραμμική μορφή

$$\alpha(u,v) = \int_\Omega \{ \nabla u \cdot \nabla v - V(r)uv \} dx.$$

Η παραπάνω νόρμα είναι γνωστή ως ενεργειακή . Από κατασκευή ο $L = -\Delta - V$ είναι ο $Riesz$ ισομορφισμός από τον στον δυικό του με αυτή την διγραμμική μορφή. Έχουμε τις συνεχείς εμφυτεύσεις

$H \hookrightarrow W_0^{1,q}(\Omega) \qquad\qquad H \hookrightarrow H_0^s(\Omega)$
Αν $1 \leq q < 2$ και $0 \leq s < 1$. Η δεύτερη εμφύτευση είναι συμπαγής εφόσον ο $W_0^{1,q}(\Omega)$ είναι συμπαγώς εμφυτευμένος στον $H_0^s(\Omega)$ για κατάλλλο $q = q(s)$ κοντα στο 2. Εφόσον ο $H_0^s(\Omega)$ είναι επίσης συμπαγώς εμφυτευμένος στον $L^2(\Omega)$ μπορούμε τότε να ορίσουμε:

$$H \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H'. \tag{5.6}$$

Τον προηγούμενο ισομορφισμό μπορούμε να τον δούμε σαν μία $1-1$ απεικόνιση $H' \to H$, που υποδηλώνει ότι ο αντίστοιχος τελεστής L είναι ένας μη-φραγμένος τελεστής στον H', με πεδίο ορισμού H, του οποίου ο αντιστροφος είναι μία συμπαγής και καθολικά ορισμένη απεικόνιση από τον H' στον εαυτό του. Με περιορισμό στον L^2 μπορούμε να ορίσουμε τον επιρριπτικό τελεστή $L_* : D(L_*) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ με πεδίο ορισμού

$$D_* = \{f \in H : -\Delta f - V(x)f \in L^2(\Omega)\} \tag{5.7}$$

Στη συνέχεια θα γράφουμε L όπου L_* χωρίς φόβο σύγχισης. Ο L είναι αυτοσυζυγής με συμπαγή αντίστροφο οπότε έχει μια ορθοκανονική βάση ιδιοσυναρτήσεων στον H, την οποία την συμβολίζουμε πάλι με $\{e_k\}$, με ακολουθία ιδιοτιμών

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_k \leq \ldots \to \infty. \tag{5.8}$$

Θεώρημα 5.1.1 *Έχουμε $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$ με $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$, τότε για κάθε $u_0 \in L^2(\Omega)$ υπάρχει μία μοναδική λύση u του προβλήματος (5.2)-(5.4) με*

$$u \in C([0,\infty) : L^2(\Omega)) \bigcap L^2(0,\infty : H), \qquad\qquad u_t \in L^2(0,\infty : H').$$

Η λύση μπορεί να αναπτυχθεί ως προς τη βάση $\{e_k\}$ όπως πριν,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-\mu_k t} e_k(x)$$

όπου τα a_k είναι οι συντελεστές *Fourier* των αρχικών δεδομένων. Από τις σειρές *Fourier* έχουμε επίσης τι σχέσεις:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\mu_1 t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.9}$$

$$\|u(\cdot,t) - \sum_{k=1}^{K} a_k e^{-\mu_k t} e_k\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\mu_{K+1} t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.10}$$

Πράγματι πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση 5.2 με u και ολοκληρώνοντας στο Ω παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx \leq -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega V(x) u^2 dx,$$

οπότε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx \leq -\mu_1 \int_\Omega u^2 dx \tag{5.11}$$

όπου μ_1 είναι η πρώτη ιδιοτιμή του $-\nabla + VI$. Εξάλλου,

$$\langle L(e_k), e_j\rangle_{H'\times H} = \mu_k \int_\Omega e_k e_j dx = \mu_k \delta_{kj}. \tag{5.12}$$

Η σχέση του εσωτερικού γινομένου του H με το παραπάνω είναι η εξής

$$(e_k, e_j)_H = \langle L(e_k), e_j\rangle_{H'\times H}.$$

Αν συμβολίσουμε με $\|\cdot\|$ την νόρμα στον H έχουμε επίσης

$$\|u(\cdot,t)\|_H \leq e^{-\mu_1 t}\|u_0\|_H, \tag{5.13}$$

$$\|u(\cdot,t) - \sum_{k=1}^{K} \alpha_k e^{-\mu_k t} e_k\|_H \leq e^{-\mu_{K+1} t}\|u_0\|_H. \tag{5.14}$$

5.2 Η κρίσιμη περίπτωση σε μπάλες

Πάλι το φάσμα μπορεί να υπολογιστεί όταν $V(x) = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2/r^2$. Παίρνοντας σφαιρικές συντεταγμένες και ψάχνοντας για ιδιοσυναρτήσεις του $L(\lambda)$ της μορφής

$$e(r,\sigma) = \phi(r) f_j(\sigma),$$

παίρνουμε την εξίσωση (4.9) για τη φ με $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Θέτοντας $\phi(r) = \psi(r) r^{-(N-2)/2}$ παίρνουμε για την ψ την εξίσωση:

$$\psi'' + \frac{1}{r}\psi' + \Big(\mu - \frac{c_j}{r^2}\Big)\psi = 0 \tag{5.15}$$

όπου $c_j = j(j+N-2), j \geq 0$, με συνοριακές συνθήκες $\psi'(0) = 0, \psi(\alpha) = 0$. Παίρνουμε μια πλήρη οικογένεια λύσεων

Θεώρημα 5.2.1 *Υπάρχει μια διπαραμετρική οικογένεια ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος (5.2)-(5.4)*

$$e_{j,n}(r,\sigma) = r^{-(N-2)/2} J_m\Big(\frac{z_{m,n}}{\alpha} r\Big) f_j(\sigma), \tag{5.16}$$

με $m = c_j, m \geq 0$. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

$$\mu_{j,n} = \frac{z_{m,n}^2}{\alpha^2}. \tag{5.17}$$

Η οικογένεια $\{e_{j,n}\}$ είναι μία πλήρης ορθογώνια βάση του $L^2(B)$.

Ανακαλούμε ότι $z_{m,n}$ είναι το $n-οστο$ μηδέν της συνάρτησης $Bessel, J_m$. Σημειώνουμε επίσης ότι όλες οι J_m μηδενίζονται στο $r = 0$ αλλά η J_0 που έχει πεπερασμένες θετικές τιμές κανονικοποιείται σε $J_0(0) = 1$

5.3 Ο χώρος H

Θέλουμε να κατανοήσουμε καλύτερα την εμβέλεια H της *Dirichlet* μορφής για το ελλειπτικό πρόβλημα στην κρίσιμη περίπτωση $V = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2/r^2$. Τα προηγούμενα παραδείγματα λύσεων χωριζομένων μεταβλητών δείχνουν συναρτήσεις με ιδιομορφία της μορφής $f \sim |x|^{-(N-2)/2}$. Αυτό δείχνει ότι ο H είναι μεγαλύτερος από τον $H_0^1(\Omega)$. Από την άλλη από το Θεώρημα 2.2.2 ο H πρέπει να περιέχεται στον $\bigcap_{q<2} W^{1,q}(\Omega)$. Το ίδιο παράδειγμα δείχνει ότι $|\nabla u| \in L^{2,\infty}(\Omega)$ ομως δεν αληθεύει ότι ο H ταυτίζεται με το χώρο:

$$\mathcal{V} = \{f \in L^2(\Omega) : |\nabla f| \in L^{2,\infty}(\Omega), f = 0 \ \ \sigma\tau o \ \ \partial\Omega\}. \tag{5.18}$$

Με στόχο να το δούμε αυτό εξετάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα, την συνάρτηση που ορίζεται για $0 < r < r_0 < 1$ ως εξής:

$$u(r) = r^{-(N-2)/2}(\log(1/r))^{\alpha}, \tag{5.19}$$

την οποία την συνεχίζουμε ομαλά μέχρι το σύνορο της μπάλας $B_1(0)$, όπου $u = 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι η u ανήκει στον H αν και μόνο αν $\alpha < 1/2$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στο πυκνό σύνολο των συναρτήσεων στις οποίες έχουμε ορίσει τη νόρμα (2.1) και με την υπόθεση της ακτινικής συμμετρίας έχουμε

$$\int_{B_1(0)} \left(|\nabla u|^2 - \frac{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2}{r^2} u^2\right) dx = C \int_0^1 (v')^2 r dr$$

με $v = ur^{-(N-2)/2}$. Για $\alpha > 0$ το διάνυσμα των παραγώγων της λύσης (5.19) δεν ανήκει στον $L^{2,\infty}$. Το αποτέλεσμα δείχνει ότι ο H είναι μεγαλύτερος από τον $H_0^1(B)$ αλλά μικρότερος από τον $\bigcap_{q<2} W^{1,q}(\Omega)$. Επιπλέον ο H δεν περιέχεται στον $\mathcal{V}$. Το ίδιο συμβαίνει για κάθε φραγμένο χωρίο που περιέχει την αρχή των αξόνων εφόσον το υπό συζήτηση πρόβλημα εξαρτάται μόνο από τις ειδικές δυσκολίες ολοκλήρωσης στο κέντρο.

5.3.1 Μοναδικότητα και μη

Έχουμε κατασκευάσει μοναδική λύση του προβλήματος εξέλιξης

$$u_t - \Delta u = V(x)u \quad x \in \Omega, t \in (0,T) \tag{5.20}$$

$$u(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, t \in (0,T) \tag{5.21}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega. \tag{5.22}$$

για λ κρίσιμο ή υπό-κρίσιμο (Θεώρημα 1.0.3 - σχέση (1.9) αντίστοιχα). Σε όλες τις περιπτώσεις λ> 0 ,η ιδιομορφία του δυναμικού έχει ως συνέπεια την ιδιομορφία των λύσεων, ακόμα και με καλά αρχικά δεδομένα. Εδώ όμως η μοναδικότητα λύσεων είναι πιο περιοριστική από ότι στην περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας. Γνωρίζουμε ότι για την εξίσωση θερμότητας, οι λύσεις με την έννοια της κατανομής ορίζονται μοναδικά από τα αρχικά δεδομένα υπό την προϋπόθεση ότι $u \in L^{\infty}(0,T;L^p(\Omega))$ για κάποιο $p \geq 1$. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα δεν αληθεύει για ιδιόμορφα δυναμικά της μορφής $V(x) = \lambda/r^2$ για κανένα $\lambda > 0, \lambda \leq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$.

υπό-κρίσιμη περίπτωση

Ας θεωρήσουμε πρώτα δυναμικά της μορφής $V(x) = \lambda/r^2$ με $0 < \lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ και ας μελετήσουμε για χάρη της απλότητας στατικές και ακτινικά συμμετρικές λύσεις σε μία μπάλα $\Omega = B_R$.

Θεώρημα 5.3.1 *Όταν έχουμε $0 < \lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ υπάρχει μια ακτινικά συμμετρική συνάρτηση $u(x)$ η οποία λύνει την εξίσωση $\Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2}u = 0$ με την έννοια των κατανομών στην $B = B_R$,είναι ομαλή μακριά από το κέντρο , με Dirichlet συνοριακές συνθήκες και δεν ανήκει στον $H_0^1(B)$. Επιπλέον,*
a) $u \in L^p(B)$ για κάθε $p < p(\lambda)$, όπου

$$p(\lambda) = \frac{N}{(N-2)/2 + m}, m = \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda}. \tag{5.23}$$

β) $|\nabla u| \in L^q(B)$ για $q < q(\lambda) = N/((N/2) + m)$.

Απόδειξη
Ψάχνοντας για ακτινικά συμμετρικές και στατικές λύσεις $u(r)$ της εξίσωσης εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητών $\upsilon(r) = u(r)r^{(N-2)/2}$ παίρνουμε την εξίσωση

$$\upsilon_{rr} + \frac{1}{r}\upsilon_r + \frac{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda}{r^2}\upsilon = 0 \tag{5.24}$$

που έχει μία ομαλή λύση της μορφής $\upsilon_1(r) = Cr^m$ με $m^2 = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda, m > 0$ και μία ιδιόμορφη λύση της μορφής $\upsilon_2(r) = Cr^{-m}$. Επιστρέφοντας τώρα στις παλιές μεταβλητές παίρνουμε :

$$u_1(r) = r^{-(N-2)/2+m}, \qquad u_2(r) = Cr^{-(N-2)/2-m}. \tag{5.25}$$

Ενώ η u_1 ανήκει στον $H^1(B)$, η u_2 δεν ανήκει εκεί για κανένα $\lambda > 0$. Συνδυάζοντας αυτά τα δύο παίρνουμε μια λύση $u(r)$ η οποία ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $u(r) = 0$ και κληρονομεί την κανονικότητα της u_2 . Οπότε η u_2 είναι λύση κατά κατανομή σε ολόκληρη την μπάλα αν $m < (N-2)/2$, το οποίο συμβαίνει για $\lambda > 0$.•

Κρίσιμη περίπτωση
Στη περίπτωση όπου $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ μπορεί να γίνει μία παρόμοια κατασκεύη όπως παραπάνω . Η αντίστοιχη ιδιόμορφη συνάρτηση δεν είναι ακριβώς το όριο της υπό-κρίσιμης περίπτωσης αλλά:

$$u(x) = r^{-(N-2)/2}\log(|x|). \tag{5.26}$$

Αυτή είναι μια σταθερή λύση του προβλήματος στη μοναδιαία μπάλα που ανήκει στον $L^2(\Omega)$, η εξίσωση ικανοποιείται με την έννοια των κατανομών , ακόμα και στο κέντρο , όμως η u δεν είναι η καλή λύση διότι φθίνει ως προς το χρόνο. Οπότε, δεν μπορεί να είναι στον H (παρατηρούμε ότι μόνο ο παράγοντας $\log(|x|)$ εμποδίζει τη λύση από το να ανήκει στον H).

Κεφάλαιο 6

Το πρόβλημα στον $\mathbb{R}^N$

6.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε από εδώ και στο εξής το πρόβλημα εξέλιξης

$$u_t - \Delta u = \frac{\lambda}{|x|^2} u \quad x \in \mathbb{R}^N, t \in (0, T) \tag{6.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{6.2}$$

Για $\lambda \leq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ μπορούμε να σκεφτούμε να κατασκευάσουμε μια λύση ως το όριο των λύσεων του $Cauchy - Dirichlet$ προβλήματος σε μπάλες $B_R(0)$ καθώς $R \to \infty$. Η κλασσική $Hardy$ ανισότητα υποδηλώνει ότι η L^2 νόρμα είναι μη-αύξουσα ως προς το χρόνο για όλα τα φραγμένα χωρία, έτσι ώστε η ιδιότητα να ισχύει παίρνοντας το όριο και να μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια συγκεκριμένη λύση του προβλήματος $Cauchy$ σε όλο τον χώρο. Αλλά ο σωστός χαρακτηρισμός της λύσης χρειάζεται μια πιο λεπτομερή μελέτη ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Δυστυχώς η βελτιωμένη ανισότητα $Hardy$ δεν ισχύει στο όριο $R \to \infty$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μια λεπτομερή ανάλυση χρησιμοποιώντας ως βασική ιδέα τη σχέση των ομοιόθετων ($self - similar$) λύσεων που οδηγούν με φυσικό τρόπο στη χρήση χώρων με βάρη που συσχετίζονται με τον επερχόμενο ελλειπτικό τελεστή.

6.2 Αυτόμορφες μεταβλητές και στοιχεία συναρτησιακής ανάλυσης

Επαναλαμβάνουμε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση της μπάλας, αντικαθιστούμε τις χωριζομένων μεταβλητών λύσεις με τις αυτόμορφες λύσεις. Εισάγουμε τις μεταβλητές ομοιοθεσίας ($Similarity\ variables$). Θέτουμε

$$w(y, s) = (t+1)^{N/4} u((t+1)^{1/2} y, t), \qquad s = \log(t+1), \tag{6.3}$$

και η w να ικανοποιεί:

$$w_s = \Delta w + \frac{1}{2} y \cdot \nabla w + \frac{N}{4} w + \frac{\lambda}{|y|^2} w \tag{6.4}$$

Όταν το πρόβλημα εξέλιξης τίθεται με αυτόν τον τρόπο το y παίζει το ρόλο της χωρικής μεταβλητής και s είναι ο καινούριος χρόνος. Όσον αφορά τις νόρμες έχουμε τη σχέση:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} w^2(y, s) dy. \tag{6.5}$$

Ο φυσικός χώρος για να μελετήσουμε την εξέλιξη του προβλήματος (6.4) είναι ο χώρος $L^2(K)$ με βάρος $K = exp(|y|^2/4)$,(διότι όπως φαίνεται από την (6.5) αφήνει τις νόρμες αναλλοίωτες) δηλαδή

$$L^2(K) = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int |f|^2 K dy < \infty \Big\}, \tag{6.6}$$

που έχει μελετηθεί από τους *Escobeto* και *Kavian* στο [EK]. Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την εξίσωση (6.4) με wK και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 K dy + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 K dy = \frac{N}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 K dy + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w^2}{|y|^2} K dy. \tag{6.7}$$

Θέτουμε

$$J(w) = \int |\nabla w|^2 K(y) dy - \frac{(N-2)^2}{4}\int \frac{w^2}{|y|^2} K dy. \tag{6.8}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το χώρο *Sobolev* με βάρος:

$$H^1(K) = \{ f \in L^2(K) : |\nabla f| \in L^2(K)\}, \tag{6.9}$$

με την κανονικοποιημένη νόρμα

$$||f||_{H^1(K)} = \Big[\int (f^2 + |\nabla f|^2) K dy \Big]^{1/2}. \tag{6.10}$$

Χρειαζόμαστε το ακόλουθο αποτέλεσμα από το [EK]:η εμφύτευση $H^1(K) \to L^2(K)$ είναι συμπαγής. Επιπλέον, ο τελεστής $L_0 = -\Delta - (y/2)\cdot\nabla$ είναι ένας ισομορφισμός από τον $H^1(K)$ στον δυικό του. Ο περιορισμός του στον $L^2(K)$ ορίζει ένα μη-φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή στον $L^2(K)$ με πεδίο ορισμού $H^2(K)$. Αυτός ο τελεστής έχει συμπαγή αντίστροφο. Οι ιδιοτιμές του είναι

$$\lambda_j = \frac{j+N-1}{2}, \qquad j \geq 1 \tag{6.11}$$

και ο αντίστοιχος μηδενόχωρος δίνεται από

$$Ker(-\Delta - \frac{y}{2}\cdot\nabla - \lambda_j I) = Span\{D^\alpha \phi_1 : |\alpha| = j-1\},$$

όπου $\phi_1 = 1/K$ είναι η ιδιοσυνάρτηση που συσχετίζεται με την πρώτη ιδιοτιμή $\lambda_1 = N/2$.

Για τον παραπάνω υπολογισμό παίρνουμε:

$$-\Delta u - \frac{1}{2} y \cdot \nabla u = \lambda u$$

στον $L^2(K)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Από τον μετασχηματισμό *Fourier* παίρνουμε:

$$|\xi|^2 \hat{u}(\xi) + \frac{N}{2}\hat{u}(\xi) + \frac{1}{2}\xi\cdot\nabla\hat{u}(\xi) = \lambda\hat{u}(\xi)$$

όπου χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $(x_j\partial_j\hat{u}) = -\hat{u}(\xi) - \xi\partial\hat{u}(\xi)$. Ορίζουμε $\upsilon(\xi) = e^{|\xi|^2}\hat{u}(\xi)$. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις παίρνουμε ότι $\upsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$(εφόσον $\hat{u} \in C^\infty$) και ικανοποιεί την

$$\xi \cdot \nabla\upsilon(\xi) = (2\lambda - N)\upsilon(\xi).$$

Από την ταυτότητα *Euler* για ομογενείς συναρτήσεις, η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι η υ είναι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού $(2\lambda - N)$. Καθώς $\upsilon \in C^{\infty}$, το $(2\lambda - N)$ πρέπει να είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος και αυτό μας δίνει ότι η υ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού $(2\lambda - N)$. Οπότε γράφουμε

$$(2\lambda - N) = j - 1$$

με $j \geq 1$

$$\upsilon(\xi) = P_{j-1}(\xi)$$

όπου $P_{j-1}(\xi_1, \dots, \xi_N)$ είναι τα ομογενή πολυώνυμα βαθμού j-1. Τότε

$$\hat{u}(\xi) = e^{-|\xi|^2} P_{j-1}(\xi)$$

όπου λύνει την εξίσωση που πήραμε από τον μετασχηματισμό *Fourier*. Οπότε παίρνουμε την (6.11).

Συγκεκριμένα έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^2 K dy \geq N/2 \int_{\mathbb{R}^N} f^2 K dy, \tag{6.12}$$

για κάθε $f \in H^1(K)$[EK].

6.3 *Hardy−Poincare* ανισότητα σε χώρους *Sobolev* με βάρη

Η ανάλυση της εξέλιξης με κρίσιμο λ θα χρησιμοποιεί την ακόλουθη μορφή της *Hardy − Poincare* ανίσωσης με βάρη που ισχύει στον $\mathbb{R}^N$:

Θεώρημα 6.3.1 *Για κάθε $f \in H^1(K)$ έχουμε*

$$J(f) = \int |\nabla f|^2 K dy - \frac{(N-2)^2}{4} \int \frac{f^2}{|y|^2} K dy \geq \frac{N+2}{4} \int f^2 K dy. \tag{6.13}$$

Και οι δύο σταθερές είναι βέλτιστες δηλαδή,

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 = inf \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^2 K dy}{\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f^2}{|y|^2} K dy}$$

και

$$(\frac{N+2}{4}) = inf \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^2 K dy - \frac{(N-2)^2}{4} \int \frac{f^2}{|y|^2} K dy}{\int_{\mathbb{R}^N} f^2 K dy}$$

Απόδειξη
Παρατηρούμε ότι η ανίσωση έχει νόημα εφόσον, αν πάρω το αριστερό μέρος της έχω:

$$\int |\nabla f|^2 K dy \geq \frac{(N-2)^2}{4} \int \frac{f^2}{|y|^2} K dy$$

δηλαδή η κλασσική *Hardy* που ισχύει στους χώρους *Sobolev* με βάρη. Πράγματι για ομαλές συναρτήσεις με συμπαγή φορέα έχουμε:

$$f(y) = -\int_0^{\infty} \frac{d}{dt}(f(ty))dt = -y \cdot \nabla \int_0^{\infty} f(ty)dt$$

έτσι ώστε

$$|\frac{f(y)}{|y|}| = \frac{|y \cdot \int_1^\infty \nabla f(ty)dt|}{|y|} \leq |\int_1^\infty \nabla f(ty)dt|$$

έτσι ώστε

$$(\int_{\mathbb{R}^N} |\frac{f(y)}{|y|}|^2 K dy)^{1/2} = (\int_{\mathbb{R}^N} |\int_1^\infty \nabla f(ty)dt|^2 K dy)^{1/2}$$

Από θεώρημα *Minkowski* έχω

$$\leq \int_0^\infty |\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f(ty)dt|^2 K dy|^{1/2} dt$$

$$\leq ||\nabla f||_{L^2(K)} \int_0^\infty t^{-N/2} dt = \frac{2}{N-2} ||\nabla f||_{L^2(K)}.$$

Στη συνέχεια κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$g(y) = |y|^{(N-2)/2} f(y) \tag{6.14}$$

Οπότε θα πάρουμε για την J

$$J(f) = \int |\nabla f|^2 K(y) dy - \frac{(N-2)^2}{4} \int \frac{|f|^2}{r^2} K dy =$$

$$= N\omega_N \Big\{ \int_0^\infty K r^{N-1} ((f'(r))^2 - \frac{(N-2)^2)}{4} \frac{f^2(r)}{r^2}) dr \Big\}$$

$$J(g) = N\omega_N \Big\{ \int_0^\infty K r^{N-1} (((r^{\frac{2-N}{2}} g(r))')^2 - \frac{(N-2)^2}{4} r^{-N} g^2(r)) dr \Big\}$$

$$= N\omega_N \Big\{ \int_0^\infty r e^{r^2/4} (g'(r)^2 dr - (N-2) \int_0^\infty g g' e^{r^2/4} dr \Big\} \tag{6.15}$$

Ολοκληρώνοντας ανά μέλη τον τελευταίο όρο παίρνουμε:

$$\int_0^\infty g g' e^{r^2/4} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty g^2 r e^{r^2/4} dr$$

Για να δικαιολογήσουμε τα ολοκληρώματα αναγκαζόμαστε να θεωρήσουμε ομαλές συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, το οποίο επιτρέπεται από πυκνότητα. Οπότε καταλήγουμε

$$J(f) = N\omega_N \Big\{ \int_0^\infty r e^{r^2/4} |g'|^2 dr - \frac{(N-2)}{4} \int_0^\infty g^2 r e^{r^2/4} dr \Big\} \tag{6.16}$$

Αυτό είναι ένα συναρτησιακό στις δύο διαστάσεις το οποίο μέχρι μία σταθερά είναι η ακτινική εκδοχή του συναρτησιακού:

$$H(g) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla g|^2 K dy - \frac{N-2}{4} \int_{\mathbb{R}^2} g^2 K dy$$

Από την (6.12) παρατηρούμε ότι για N=2 έχουμε

$$H(g) \geq \frac{N+2}{4} \int_{\mathbb{R}^2} g^2 K dy$$

Επιστρέφοντας στην $J(f)$ παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Οι βέλτιστες σταθερές επιτυγχάνονται από την συνάρτηση:Έστω $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(y) = |y|^{\frac{-(N-2)}{2}+\varepsilon} exp(-|y|^2/4)$$

που παίρνουμε από την πρώτη ιδιοσυνάρτηση του τελεστή L στον $L^2(K)$. Για τους παραπάνω υπολογισμούς παίρνουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_\varepsilon|^2 K dy = 2Na(N)[(\varepsilon - \frac{N-2}{2})^2 4^{\varepsilon-1}\Gamma(\varepsilon) + 4^\varepsilon \Gamma(\varepsilon+2) - (\varepsilon - \frac{N-2}{2})4^\varepsilon \Gamma(\varepsilon+1)]$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f_\varepsilon^2}{|y|^2} K dy = 2Na(N)4^{\varepsilon-1}\Gamma(\varepsilon)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon^2 K dy = 2Na(N)4^\varepsilon \Gamma(\varepsilon+1)$$

Οπότε αν στη συνέχεια πάρουμε τα όρια καθώς $\varepsilon \to 0^+$ θα έχουμε και τις βέλτιστες σταθερές.□

Συναρτησιακός Χώρος

Βλέποντας τις παραπάνω εκτιμήσεις είναι φυσικό να εισάγουμε τον χώρο *Hilbert* H, που είναι η πλήρωση του $H^1(K)$ ως προς τη νόρμα $||f||_H = (J(f))^{1/2}$. Έχουμε τις συνεχείς εμφυτεύσεις

$$H^1(K) \to H \to L^2(K) \tag{6.17}$$

Όπως και στην περίπτωση του φραγμένου χωρίου έχουμε:

Πρόταση 6.3.2 *Η εμφύτευση $H \to L^2(K)$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη

Η απόδειξη βασίζεται στον ξεχωριστό έλεγχο του ακτινικού και του μη-ακτινικού κομματιού. Το τελευταίο είναι πιο ομαλό και έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 6.3.3 *Υπάρχει μία σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $f \in H^1(K)$ να έχουμε:*

$$||f - \overline{f}||_H \geq C||f - \overline{f}||_{H^1(K)} \tag{6.18}$$

Όπου $\overline{f}$ είναι το ακτινικά συμμετρικό κομμάτι της f (ο σφαιρικός μέσος της)□

Υποθέτοντας αυτό το αποτέλεσμα και λαμβάνοντας υπόψη τη συμπαγή εμφύτευση του $H^1(K) \to L^2(K)$ είναι αρκετό για να αναλύσουμε το χώρο των ακτινικά συμμετρικών συναρτήσεων για να τελειώσουμε την απόδειξη. Θα πάμε με απαγωγή εις άτοπο. Υποθέτουμε ότι η εμφύτευση δεν είναι συμπαγής, τότε υπάρχει $f_j, \quad j \geq 1$ ακτινικών συναρτήσεων στον H τέτοιες ώστε:

ι) $f_j \to 0$ ασθενώς στον H, όμως
ιι) $||f_j||_{L^2(K)} = 1$

Παίρνουμε $g_j = r^{\frac{N-2}{2}} f_j(r)$. Τότε

$$\int_0^\infty |g_j'|^2 r e^{r^2/4} dr + \frac{N-2}{4} \int_0^\infty |g_j|^2 r e^{r^2/4} dr \leq C_1 \tag{6.19}$$

και
$$0 < C_1 \leq \int_0^\infty |g_j'|^2 r e^{r^2/4} dr \leq C_2$$
Από την (6.19) έπεται ότι οι $g_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένες στον $H^1(K)$, την διδιάστατη εκδοχή του χώρου. Οπότε οι g_j είναι σχετικά συμπαγής στον $L^2(K)$ στις δύο διαστάσεις. Υπάρχει μία ακτινικά συμμετρική $g \in H^1(K)$ τέτοια ώστε
$$\int_0^\infty |g_j - g|^2 r e^{r^2/4} dr \to 0, j \to \infty$$
Αυτό δείχνει ότι η $f = r^{-(N-2)/2} g$ είναι τέτοια ώστε
$$f_j \to f, \quad \alpha\sigma\theta\varepsilon\nu\omega\varsigma \;\; \sigma\tau o\nu \; L^2(K)$$
Επιπλέον $g_j \to g$ στον $H^1(K)$ οπότε
$$f_j \to f, \quad \sigma\tau o\nu \; H^1(K)$$
Από την υπόθεση ι) έχουμε ότι $f = 0 \Rightarrow g = 0$ όμως αυτό αντιβαίνει την υπόθεση ιι). Οπότε έχουμε την απόδειξη για ακτινικές συναρτήσεις.

Απόδειξη του Λήμματος
Φτιάχνουμε μία ακτινική $h \in H^1(K)$ σε σφαιρικές αρμονικές:
$$h = \sum_{j\geq 0} h_j(r) f_j(\sigma)$$
Έχουμε ότι $\overline{h} = h_0(r)$. Οπότε,
$$h - \overline{h} = \sum_{j\geq 1} h_j(r) f_j(\sigma)$$
Επιπλέον,
$$J(h-\overline{h}) = N\omega_n \sum_{j\geq 1} \int_0^\infty \Big[|h_j'|^2 - \frac{(N-2)^2}{4}\frac{h_j^2}{r^2} + \mu_j \frac{h_j^2}{r^2} \Big] r^{N-1} e^{r^2/4} dr.$$
Έχουμε $\mu_j \geq \mu_1 = N$ αν $j \geq 1$. Οπότε από το θεώρημα (6.3.1) υπάρχει $C > 0$ τέτοια ώστε
$$J(h-\overline{h}) \geq C \sum_{j\geq 1} \int_0^\infty \Big[|h_j'|^2 + \mu_j \frac{h_j^2}{r^2} \Big] r^{N-1} e^{r^2/4} dr \sim ||h - \overline{h}||_{H^1(K)}$$

6.4 Φασματική διάσπαση

Ο ελλειπτικός τελεστής
$$L_* = -\Delta - \frac{y}{2}\cdot\nabla - \frac{(N-2)^2)}{4}\frac{I}{|y|^2} \tag{6.20}$$
θα παίξει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση του προβλήματος *Cauchy* που έπεται. Παρατηρούμε ότι:
$$L_* f = -\frac{1}{K} div(K\nabla f) - \frac{(N-2)^2}{4}\frac{f}{|y|^2}$$

Οπότε έχουμε

$$(L_* f, f)_{L^2(K)} = \int |\nabla f|^2 K dy - \frac{(N-2)^2}{4} \int \frac{f^2}{|y|^2} K dy.$$

Έπεται ότι ο L_* είναι ο *Riesz* ισομορφισμός από τον H στον δυικό του H'. Με περιορισμό ορίζουμε τον μη-φραγμένο τελεστή $L_\sharp$ στον $L^2(K)$ με πεδίο ορισμού

$$D(L_\sharp) = \{f \in H : L_* f \in L^2(K)\} \tag{6.21}$$

Έπεται από την πρόταση 6.3.2 ότι ο $L_\sharp$ είναι αυτοσυζυγής με συμπαγή αντίστροφο. Οπότε δέχεται μία βάση ιδιοσυναρτήσεων $\{e_j\}$ με ιδιοτιμές :

$$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_k \leq \ldots \to \infty \tag{6.22}$$

Επιπλέον το θεώρημα 6.3.1 μας λέει ότι

$$\mu_1 \geq \frac{N+2}{4} \tag{6.23}$$

Τα e_j είναι μια ορθοκανονική βάση του $L^2(K)$. Έχουμε επίσης

$$||e_j||_H = \sqrt{\mu_j} \quad (e_i, e_j) \quad \alpha\nu \quad \iota \neq j$$

Υπολογισμός του φάσματος

Έστω $N \geq 3$ και $\lambda \leq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$-\Delta e - y/2 \cdot \nabla e - \frac{\lambda}{|y|^2} e = \mu e \quad \sigma\tau o\nu \quad \mathbb{R}^N \quad , e \in H^1(K)$$

Γράφουμε $e(r,\sigma) = \phi(r) f_j(\sigma)$ όπου f_j είναι η j-οστή ιδιοσυνάρτηση του $Laplace - Beltrami$ τελεστή με ιδιοτιμές c_j. Τότε η εξίσωση για το φ γίνεται :

$$\phi_{rr} + (\frac{N-1}{2} + \frac{r}{2})\phi_r + (\frac{\lambda - c_j}{r^2} + \mu)\phi = 0 \tag{6.24}$$

Υπό την συνθήκη

$$\int_0^\infty (|\phi|^2 + |\phi_r|^2) r^{N-1} e^{r^2/4} dr < \infty \tag{6.25}$$

Η αλλαγή μεταβλητών $\phi(r) = r^{-(N-2)/2}\psi(r)$ δίνει

$$\psi'' + (\frac{1}{r} + \frac{r}{2})\psi' + (\mu - \frac{N-2}{4} - \frac{HC + c_j - \lambda}{r^2})\psi = 0. \tag{6.26}$$

Η ενδεικτική των σειρών *Frobenius* για την (6.26) είναι όπως και στην φραγμένη περίπτωση

$$m^2 = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda + c_j \tag{6.27}$$

Αυτό υποδηλώνει μια συμπεριφορά στο κέντρο των κανονικών λύσεων της μορφής $\psi(r) \sim r^m$, με m την μη-αρνητική ρίζα της (6.27) , το οποίο συμφωνεί με την φραγμένη περίπτωση όπως θα έπρεπε , εφόσον η επιρροή του κρίσιμου δυναμικού στην ιδιομορφία των ιδιοσυναρτήσεων στο μηδέν έχει τοπική ισχύ . Η πρώτη ιδιοσυνάρτηση είναι ακριβώς :

$$\psi_1(r) = r^m e^{-r^2/4}, \quad \phi_1(r) = r^{m-(N-2)/2} e^{-r^2/4}, \tag{6.28}$$

με ιδιοτιμή

$$\mu_1(\lambda) = \frac{N+2+2m}{4}, \quad m = \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda}. \tag{6.29}$$

Για $\lambda = 0$ έχουμε $m = (N-2)/2$ και παίρνουμε $\mu_1(0) = N/2$, ενώ στην οριακή περίπτωση $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ έχουμε $m = 0$ οπότε $\mu_1(\left(\frac{N-2}{2}\right)^2) = (N+2)/4$.

6.5 Καλός ορισμός και ασύμπτωτες

Με την εισαγωγή των όμοιων μεταβλητών (6.3) καταλήγουμε στην ισοδύναμη εξίσωση εξέλιξης (6.4) για τις $w(y,s)$,

$$w_s = \Delta w + 1/2y \cdot \nabla w + N/4w + \lambda/|y|^2 w,$$

με αρχικά δεδομένα $w(y,0) = u(x,0)$.

6.6 Αναθεώρηση της εξίσωσης θερμότητας

Πριν θεωρήσουμε το πρόβλημα *Cauchy* για $\lambda > 0$ ας θεωρήσουμε σύντομα την περίπτωση όπου $\lambda = 0$, την κλασσική εξίσωση θερμότητας . Τότε η εξίσωση είναι

$$w_s = \Delta w + \frac{1}{2} y \cdot \nabla w + \frac{N}{4} w,$$

με αρχικά δεδομένα $w(y,0) = u(y,0)$ στον $\mathbb{R}^N$. Ως συνέπεια των αποτελεσμάτων του [ΕΚ] τα ακόλουθα έπονται :
Για κάθε $u_0 \in L^2(K)$ αυτό το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση $w \in C([0,\infty) : L^2(K)) \cap L^2(0,\infty : H^1(K))$. Επιπλέον ,

$$w(y,s) = \sum_{j\geq 1} e^{-(\mu_j - N/4)s} \Big[\sum_{l=1}^{l(j)} a_{j,l} e_{j,l}\Big].$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για $j \geq 1$ $\mu_j \geq \mu_1 \geq N/2$ έχουμε

$$||w(\cdot,s)||_{L^2(K)} \leq e^{-Ns/4} ||u_0||_{L^2(K)} \tag{6.30}$$

Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές έπεται ότι

$$\int u^2(z, e^s - 1) dz \leq \int u^2(z, e^s - 1) exp(\frac{z^2}{4e^s}) dz$$

$$= e^{Ns/2} \int u^2(e^{s/2} y, e^s - 1) exp(\frac{|y|^2}{4}) dy$$

$$= ||w(\cdot,s)||^2_{L^2(K)} \leq e^{-Ns/2} ||u_0||^2_{L^2(K)}$$

Συγκεκριμένα έχουμε :

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq (t+1)^{-N/4} ||u_0||_{L^2(K)}. \tag{6.31}$$

6.7 Η υπό-κρίσιμη περίπτωση

Τώρα θα μελετήσουμε το πρόβλημα *Cauchy* στον $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, όταν $0 < \lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$.Σύμφωνα με το θεώρημα 6.3.1 ο τελεστής

$$A(l) = -\Delta - \frac{y}{2} \cdot \nabla - \frac{\lambda}{|y|^2} I$$

είναι ένας ισομορφισμός από τον $H^1(K)$ στον $H^{-1}(K)$. Όταν περιοριστεί στον $L^2(K)$ γίνεται ένας αυτοσυζυγής τελεστής με συμπαγή αντίστροφο . Οπότε , ο $L^2(K)$ δέχεται μια ορθοκανονική βάση ιδιοσυναρτήσεων του $A(\lambda)$ με ιδιοδιανύσματα $\mu_j(\lambda), j \geq 1$,

$$-\Delta e_j - \frac{y}{2} \nabla e_j - \frac{\lambda}{|y|^2} e_j = \mu_j(\lambda) e_j \quad \sigma\tau o\nu \mathbb{R}^N$$

έχουμε επίσης

$$\int |\nabla e_j|^2 K dy - \lambda \int \frac{|e_j|^2}{|y|^2} K dy = \mu_j(\lambda)$$

και

$$\int \nabla e_j \cdot \nabla e_k K dy - \lambda \int \frac{e_j e_k}{|y|^2} K dy = 0$$

αν $j \neq k$. Συγκεκριμένα , $e_j \in H^1(K)$ για κάθε $j \geq 1$. Αυτή θα είναι η κύρια διαφορά με την περίπτωση $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ όπου οι ιδιοσυναρτήσεις βρίσκονται σε ένα μεγαλύτερο χώρο H . Έχουμε επίσης την ανίσωση για κάθε $f \in H^1(K)$

$$\int |\nabla f|^2 K dy - \lambda \int \frac{|f|^2}{|y|^2} K dy \geq \mu_1(\lambda) \int f^2 K dy, \tag{6.32}$$

με το $\mu_1(\lambda)$ να δίνεται από τον τύπο (6.29). Το ακόλουθο αποτέλεσμα ισχύει

Θεώρημα 6.7.1 *Υποθέτουμε ότι $N \geq 3$ και $\lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Τότε , για κάθε $u_0 \in L^2(K)$ το πρόβλημα Cauchy έχει μοναδική λύση $u \in C[(0,\infty) : L^2(K)) \bigcap L^2(0,\infty : H^1(K))$.*

Ας παρατηρήσουμε πρώτα κάποιες ιδιότητες της λύσης . Αν αναπτύξουμε τα αρχικά δεδομένα ως εξής

$$u_0 = \sum_{j \geq 1} a_j e_j, \tag{6.33}$$

τότε

$$w = \sum_{j \geq 1} a_j e^{-\nu_j s} e_j \qquad \nu_j = \mu_j - \frac{N}{4} = \frac{1}{2}(1 + m(\lambda, j)). \tag{6.34}$$

Έχουμε επίσης για κάθε $s > 0$ και $u_0 \in L^2(K)$

$$||w(\cdot,s)||_{L^2(K)} \leq e^{-\nu_1(\lambda)s} ||u_0||_{L^2(K)}, \qquad \nu_1(\lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda}. \tag{6.35}$$

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα είναι άμεσες συνέπειες των ακόλουθων. Ο $decay-rate$ 6.35 επιβεβαιώνεται εύκολα από κλασσικές εκτιμήσεις ενέργειας . Πράγματι πολλαπλασιάζοντας την w-εξίσωση με wK και ολοκληρώνοντας ανά μέλη παίρνουμε

$$\frac{d}{ds}\int w^2 K dy + \int |\nabla w|^2 K dy - \frac{N}{4}\int w^2 K dy - \lambda\int \frac{w^2}{|y|^2} K dy = 0$$

Σύμφωνα με την (6.32) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{d}{ds}\int w^2 K dy + (\mu_1(\lambda) - \frac{N}{4})\int w^2 K dy \le 0$$

με την οποία παίρνουμε την (6.35). Παρατηρούμε ότι $\nu_1(\lambda) = N/4$ για $\lambda = 0$, και παίρνουμε τον $decay-rate$ της εξίσωσης θερμότητας . Από την άλλη , για $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ παίρνουμε $\nu_* = 1/2$,το οποίο, όπως αναμενόταν ,είναι ένας πιο αργός $decay-rate$ (εφόσον $N \ge 3$).
Χρησιμοποιώντας την φόρμουλα (6.5) και το γεγονός ότι $K \ge 1$,έχουμε στις αρχικές μεταβλητές

Πόρισμα 6.7.2 *Υποθέτουμε ότι $N \ge 3$ και ότι $0 < \lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Τότε , για κάθε $t > 0$ και για όλα τα $u_0 \in L^2(K)$*

$$||u(t)||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le t^{-\nu_1(\lambda)}||u_0||_{L^2(K)}. \tag{6.36}$$

Η παραπάνω εκτίμηση είναι ακριβής εφόσον έχουμε μία λύση με την μικρότερη $decay$ που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή του τελεστή $L_\sharp$ που έχει υπολογιστεί παραπάνω , ο οποίος έχει ακριβώς αυτό τον ρυθμό .

6.8 Η κρίσιμη περίπτωση

Όταν έχουμε $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ η εκτίμηση είναι

$$||w(\cdot,s)||_{L^2(K)} \le e^{-s/2}||u_0||_{L^2(K)} \tag{6.37}$$

για κάθε $u_0 \in L^2(K)$. Η χωριζομένων μεταβλητών συνάρτηση με την μικρότερη $decay$ που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή του τελεστή $L_\sharp$ δίνει

$$w(y,s) = |y|^{-(N-2)/2} e^{-|y|^2/4} e^{-s/2}, \tag{6.38}$$

δηλαδή στις αρχικές μεταβλητές

$$U_1(x,t) = \frac{1}{|x|^{(N-2)/2} t} exp(-\frac{x^2}{4t}). \tag{6.39}$$

Θεώρημα 6.8.1 *Υποθέτουμε ότι $N \ge 3$ και ότι $\lambda = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. Τότε για κάθε $u_0 \in L^2(K)$ το πρόβλημα Cauchy έχει μοναδική λύση $u \in C([0,\infty) : L^2(K)) \bigcap L^2(0,\infty : H)$. Επιπλέον , για κάθε $u_0 \in L^2(K)$ και για κάθε $t > 0$*

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le t^{-1/2}||u_0||_{L^2(K)} \tag{6.40}$$

και

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/2}||u(x,t) - a_1 U_1(r,t)||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0, \tag{6.41}$$

όπου

$$a_1 = \int_{\mathbb{R}}^{N} u_0(x) U_1(r,0) K dx / ||U_1(r,0)||_{L^2(K)}. \tag{6.42}$$

Παρατήρηση :
Το ακριβές αποτέλεσμα που παίρνουμε για την u στο πρόβλημα $Cauchy$ είναι

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x,t)^{x^2/4(t+1)} dx \le \frac{1}{1+t} \int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(x) e^{x^2/4t} dx. \tag{6.43}$$

Παρατηρούμε ότι όπως αναμενόταν , $U_1(x,t)$ δεν ανήκει στον $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Επιπλέον αυτή είναι μία μη-τετριμμένη λύση με ενδιαφέρουσα αρχική συμπεριφορά εφόσον

$$U_1(x,t) \to 0 \quad \kappa\alpha\theta\omega\varsigma \;\; t \to 0 \quad \gamma\iota\alpha \;\; \kappa\alpha\theta\varepsilon \quad x \neq 0,$$

ενώ αποκλίνει στο $x = 0$ για κάθε $t > 0$. Επιπλέον ,$U_1(t) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ για κάθε $p < 2N/(N-2)$ με

$$||U_1(t)||_p = Ct^{-a} \qquad \mu\varepsilon \quad \alpha = \frac{N+2}{4} - \frac{N}{2p}$$

έτσι ώστε $a = 1/2$ για $p = 2$ και $a \to 1$ καθώς $p \to 2N/(N-2)$. Αυτό σημαίνει ότι η U_1 είναι λύση υποομάδας για κάθε $t \ge \tau > 0$ η οποία παίρνει τετριμμένα αρχικά δεδομένα όχι μόνο με την έννοια των κατανομών αλλά επίσης και στον $L^p(B)$ για κάθε $p < 2N/(N-2)$ και κάθε μπάλα που να περιέχει την αρχή των αξόνων . Συγκεκριμένα , για $p = 1$ έχουμε $a = (2-N)/4 < 0$, που αντιστοιχεί ακριβώς σε μία $decay$ $||w(s)||_1 \sim e^{-s/2}$, όπως αναμενόταν .Από την άλλη , η L^p-νόρμα είναι σταθερή για $p = 2N/(N+2)$ και αυξάνει καθώς $t \to 0$ για $p > N/(N+2)$. Μελετώντας την συμπεριφορά για $0 < \lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ βρίσκουμε ένα τρόπο να συνδέσουμε αυτή τη λύση με την θεμελιώδη λύση της εξίσωσης θερμότητας , και να εξηγήσουμε με ποιό τρόπο η μη-τετριμμένη ανωμαλία στο $(x,t) = (0,0)$ συμβαίνει . Πράγματι , όταν μελετάμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά για αύτη την ακτίνα παραμέτρων η πρώτη λύση είναι

$$U_1(x;t;\lambda)|x|^{m-(N-2)/2} t^{-(1+m)} exp(-\frac{x^2}{4t}) \tag{6.44}$$

με $m = ((\frac{N-2}{2})^2 - \lambda)^{1/2}$. Για $\lambda > 0$ αυτή η συνάρτηση έχει μία ιδιομορφία στο $x = 0$ για κάθε $t > 0$ και $u(x,0) = 0$ για $x \neq 0$. Αντίθετα με την κρίσιμη περίπτωση , $U_1(t) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ για $\lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ και $t > 0$.

Βιβλιογραφία

[BV] H.Brezis, J.L.Vazquez, Blow-up solutions for some non-linear elliptic equations, Revista Mathematica Complutense 10,2 (1997),443-469.

[BG] Baras and Goldstein, The heat equation with a singular potential, Trans.Amer.Math.Soc.,284,pp. 121-139

[M] Martel Y., Complete blow-up and global behavior of solutions of $u_t - \Delta u = g(u)$,1998,Ann. Inst. H.Poicare Anal.Nonlineaire,15,pp.687-723

[PV] I.Peral,J.L.Vazquez, On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term, Arch.Rat.Mech.Anal.,129,pp. 201-224.

[VZ] J.L.Vazquez, E. Zuazua, The Hardy inequality and the asymptotic behavior of the heat equation with an inverse-square potential,Journal of functional analysis,173,2000,pp. 103-153.

[EK] M.Escobedo, O.Kavian, Variational problems related to the self-similar solutions of the heat equation ,Nonlinear Anal.,11(1987),1103-1133.

[CM1] X.Cabre, Y.Martel, Existence versus instantaneous blow-up for linear heat equations with singular potentials, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math., 329 (1999), 973-978.

[CM2] X.Cabre, Y.Martel, Weak eigenfunctions for the linearization of extremal elliptic problems, J. Funct. Anal. 156 (1998), 30-56.