

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Μεταπτυχιακή Εργασία

**Θέματα Δυναμικής Διεπιφανειών**

Χριστόφορος Κωνσταντίνου Παπανικολάου

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια : Καραλή Γεωργία

Ηράκλειο 2010



Επιτροπή  
Καραλή Γεωργία  
Κατσουλάκης Μάρκος  
Κοσιώρης Γεώργιος

## Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω την καθηγήτριά μου κ. Καραλή Γεωργία για τη στήριξη που μου προσέφερε καθώς και τους κυρίους Κοσιώρη Γιώργο και Κατσουλάκη Μάρκο που είχαν την διάθεση να συμμετάσχουν στην επιτροπή μου. Επίσης πρέπει να ευχαριστήσω και τα παιδιά Γιώργο, Δημήτρα, Νικολέττα, Κάτια, Λίλια που έκαναν τις δύσκολες ώρες της εργασίας ακόμη πιο δύσκολες!.

## Περίληψη

Το θέμα της εργασίας αυτής είναι η μελέτη της δυναμικής των διεπιφανειών που σχηματίζονται σε ένα δυναμικό σύστημα. Οι διεπιφάνειες είναι τα εσωτερικά στρώματα του συστήματος στα οποία η κατάσταση αλλάζει απότομα. Η ιδέα για τη μελέτη της δυναμικής των διεπιφανειών έχει εφαρμογή σε συστήματα όπου δύο διαφορετικές καταστάσεις συνυπάρχουν και ανταγωνίζονται για το ποια θα επιβιώσει. Ένα μοντέλο στο οποίο εφαρμόζεται η παραπάνω ιδέα και το οποίο μελετάμε στην παρούσα εργασία, είναι η απότομη ψύξη ενός κράμματος δύο μετάλλων. Κατά το φαινόμενο αυτό οι δύο διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος είναι η στερεά και η υγρή φάση του οι οποίες διαχωρίζονται μεταξύ τους και σχηματίζουν τις διεπιφάνειες.

**Λέξεις Κλειδιά:** Δυναμική διεπιφανειών, συστήματα κλίσης, Cahn - Hilliard, Allen - Cahn, Mullins - Sekerka, Phase field model, Sharp Interface model, διατηρητικά συστήματα κλίσης, μη διατηρητικά συστήματα κλίσης.

## Περίληψη

The issue of this paper is to study the interfaces that are created in a dynamical system. Interfaces are the inner layers of the system where the state changes sharply. The basic idea of this study is applied on systems where two different states exist simultaneously and compete for survival. A particular example that we are studying in this paper is the Ostwald ripening in two dimensions. During this phenomenon, we deal with two different states of the system, liquid and solid which separate from each other and so they form interfaces.

**Key words:** Interfaces, gradient systems, Cahn - Hilliard, Allen - Cahn, Mullins - Sekerka, Phase field model, Sharp Interface model, conservative gradient systems, non conservative gradient systems.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Συστήματα Κλίσης (Gradient Systems)</b>	<b>6</b>
2.1	Σχηματισμός δομών . . . . .	6
2.1.1	Τι είναι ο σχηματισμός δομών; . . . . .	7
2.2	Τα Συστήματα Κλίσης και η δυναμική τους . . . . .	9
2.3	Μη διατηρητικά Συστήματα Κλίσης . . . . .	14
2.3.1	Βαθμωτή διευσταθής εξίσωση αντίδρασης διάχυσης . . . . .	14
2.3.2	Μιγαδικές εξισώσεις Ginzburg - Landau . . . . .	15
2.4	Διατηρητικά Συστήματα Κλίσης . . . . .	16
2.4.1	Η εξίσωση Cahn - Hilliard . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Αποσύνθεση, Πυρηνοποίηση και Διαχωρισμός Φάσης</b>	<b>19</b>
3.1	Θερμοστατική . . . . .	19
3.2	Επισκόπηση του φαινομένου . . . . .	21
3.3	Διαχωρισμός . . . . .	22

3.3.1	Μονοδιάστατη Εξίσωση Allen - Cahn . . . . .	23
3.3.2	Μονοδιάστατη Εξίσωση Cahn - Hilliard . . . . .	24
3.3.3	Η Εξίσωση Cahn - Hilliard στις $n$ διαστάσεις . . . . .	26
3.4	Μέθοδος Ιδιόμορφων διαταραχών . . . . .	29
3.4.1	Μέση Καμπυλότητα . . . . .	30
3.5	Από την εξίσωση Cahn - Hilliard στο πρόβλημα Mullins - Sekerka . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Αδροποίηση</b>	<b>36</b>
4.1	Προβλήματα στο σχεδόν στατικό πρόβλημα Stefan (Mullins - Sekerka) . . . . .	36
4.1.1	Ο εξελικτικός νόμος . . . . .	36
4.1.2	Πρόβλημα 1 (Green's Theorem) . . . . .	37
4.1.3	Πρόβλημα 2 (Αρχή Μεγίστου) . . . . .	38
4.1.4	Πρόβλημα 3 (Θεωρία Δυναμικού) . . . . .	38
4.2	Mullins - Sekerka Δυναμική . . . . .	40
4.3	Εξισώσεις ακτίνων και κέντρων σε δύο διαστάσεις . . . . .	44
4.4	Εξισώσεις ακτίνων και κέντρων σε τρεις διαστάσεις . . . . .	51
4.5	Ολοκληρωτική αναπαράσταση και η εξίσωση του φαινομένου της αδροποίησης	55



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Μας ενδιαφέρει γενικά ο τρόπος με τον οποίο σχηματίζονται κάποιες δομές. Όταν λέμε δομές εννοούμε κάποιες καταστάσεις οι οποίες δημιουργούνται καταναλώνοντας κάποιου είδους ενέργεια. Για παράδειγμα μία τέτοια δομή με την οποία θα ασχοληθούμε συγκεκριμένα είναι ο διαχωρισμός φάσης ενός κράματος δύο μετάλλων που γίνεται μετά την απότομη ψύξη του.

Μεταξύ πολλών διακεκριμένων εργασιών του Alan Turing υπάρχει μία δημοσίευση που αποκαλύπτει ότι ένας απλός συνδυασμός αντίδρασης - διάχυσης μπορεί να προκαλέσει έναν σχηματισμό ετερογενών δομών που ονομάζονται δομές Turing. Ένας τέτοιος μηχανισμός είναι ένα σύστημα σχεδόν γραμμικών παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων που καλείται σύστημα αντίδρασης - διάχυσης. Το χαρακτηριστικό αυτού του συστήματος είναι μία ισορροπημένη αλληλεπίδραση μεταξύ ενός μηχανισμού διάχυσης κι ενός άλλου που τείνει να εμποδίσει αυτή τη διάχυση. Μπορούμε για παράδειγμα να φανταστούμε την εξάπλωση ενός θανατηφόρου ιού σε έναν πληθυσμό. Υπάρχει από τη μία ο μηχανισμός διάδοσης του ιού και από την άλλη ένας άλλος μηχανισμός που τείνει να καταστείλει αυτή τη διάδοση όπως είναι για παράδειγμα το ανοσοποιητικό σύστημα. Τελικά ο πληθυσμός είτε σταθεροποιείται σε κάποιο κατάλληλο αριθμό, είτε μειώνεται είτε παρουσιάζει ταλαντωτική συμπεριφορά. Υπάρχουν λοιπόν τρεις διαφορετικές καταστάσεις. Ο πληθυσμός να είναι ευαίσθητος στην ασθένεια, να είναι μολυσμένος και τέλος να είναι ανοσοποιημένος.

Για να δούμε λοιπόν πως θα εξαπλωθεί αυτός ο ιός θα πρέπει να γνωρίζουμε τις τρεις αυτές καταστάσεις. Το πρόβλημα όπως καταλαβαίνουμε γίνεται αρκετά πολύπλοκο. Εν τούτοις μπορεί το πρόβλημα αυτό να απλοποιηθεί γνωρίζοντας μόνο το μολυσμένο πληθυσμό. Αυτό το επιχείρημα οδηγεί φυσιολογικά στο πρόβλημα της **δυναμικής διεπιφανειών**. Αρκεί δηλαδή να περιγραφεί η κίνηση μόνο των εσωτερικών στρωμάτων (διεπιφάνειες) στα οποία η κατάσταση αλλάζει απότομα. Αυτό μειώνει τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος και το κάνει πιο απλό.

Αυτή η ιδέα έχει εφαρμογή στην περιγραφή κάποιων φαινομένων όπου δύο καταστάσεις συνυπάρχουν και ανταγωνίζονται μεταξύ τους για το ποια θα επιβιώσει. Για παράδειγμα στους κρυσταλλικούς όγκους, στις διαδικασίες καύσης, στις μορφογενέσεις, ακόμα και στη βιολογία πληθυσμών.

Είπαμε λοιπόν ότι αυτές οι δομές καταναλώνουν κάποιο είδος ενέργειας. Η ενέργεια δηλαδή είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Επομένως το φυσικό σύστημα που εξετάζουμε θα έρθει τελικά στην κατάσταση εκείνη κατά την οποία η ενέργειά του ελαχιστοποιείται. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται σύστημα κλίσης. Κατά τη μοντελοποίηση ενός τέτοιου συστήματος μπορεί να επιβάλλουμε μία διατηρητική συνθήκη ενός μεγέθους όπως είναι η διατήρηση μάζας. Τέτοια συστήματα ονομάζονται διατηρητικά. Ένα τέτοιο σύστημα περιγράφεται για παράδειγμα από την εξίσωση **Cahn - Hilliard** και θα το αναλύσουμε παρακάτω. Βέβαια μπορούμε να έχουμε ένα σύστημα κλίσης όπου δεν θα έχει επιβληθεί καμία τέτοια συνθήκη. Αυτά είναι τα μη διατηρητικά συστήματα κλίσης. Τέτοια συστήματα περιγράφονται για παράδειγμα από την εξίσωση **Allen - Cahn**. Όλα τα παραπάνω συστήματα κλίσης είναι τα λεγόμενα **phase field** μοντέλα. Δηλαδή η διεπιφάνεια που μελετάμε περιγράφεται σαν ένα εσωτερικό στρώμα με πεπερασμένο μη μηδενικό πάχος. Σε αναλογία με αυτά τα μοντέλα υπάρχει και το μοντέλο **sharp interface** όπου εκεί η διεπιφάνεια δεν έχει πάχος. Παρακάτω αναλύουμε ένα τέτοιο μοντέλο που είναι το πρόβλημα **Mullins - Sekerka**.

Στην εργασία αυτή θα περιγράψουμε τη μοντελοποίηση ενός συγκεκριμένου φυσικού φαινομένου. Έχουμε ένα δυαδικό κράμα μετάλλων A και B μάζας  $m$  το οποίο αρχικά είναι

σε μία θερμοκρασία και το ψύχουμε απότομα. Τότε αυτό που συμβαίνει είναι ότι αρχίζουν να διαχωρίζονται τα συστατικά του μετά από κάποιο χρόνο. Θα εξετάσουμε λοιπόν το φαινόμενο της αλλαγής φάσης του κράματος με τη βοήθεια των μοντέλων που αναφέραμε παραπάνω.

Μετά την απότομη ψύξη του κράματος λοιπόν η αλλαγή φάσης γίνεται σε δύο στάδια. Το στάδιο του διαχωρισμού που εκεί έχουμε τη φάση της αποσύνθεσης (spinodal decomposition) και τη φάση της πυρηνοποίησης (nucleation), και το στάδιο της αδροποίησης (coarsening).

Στο στάδιο της αδροποίησης συμβαίνουν τα εξής: το μείγμα περιέχει μικρά κομματάκια μέσα σε μία «σούπα» κράματος. Ύστερα από λίγο τα μεγαλύτερα απο αυτά τα κομματάκια μεγαλώνουν ακόμη περισσότερο εξαφανίζοντας τα μικρότερα. Έτσι το μείγμα δεν είναι πλέον «σούπα» αλλά γίνεται πιο αδρό. Θα περιγράψουμε λεπτομερώς στο τελευταίο κεφάλαιο τη μαθηματική μοντελοποίηση του φαινομένου της αδροποίησης.

## Κεφάλαιο 2

# Συστήματα Κλίσης (Gradient Systems)

### 2.1 Σχηματισμός δομών

Οι δομές, με την ευρύτερη έννοια της λέξης, είναι καταστάσεις που δημιουργούνται καταναλώνοντας κάποιου είδους ενέργεια. Οι μαθηματικές θεωρίες για το σχηματισμό δομών που καλύπτουν μια τέτοια ευρεία ερμηνεία της ορολογίας, εντούτοις, δεν έχουν καθιερωθεί. Η κατάσταση προς το παρόν είναι ότι νέοι τύποι δυναμικών συμπεριφορών ανακαλύπτονται ο ένας μετά τον άλλο, διευρύνοντας τον ορίζοντα των ποικιλιών, ενώ η ανακάλυψη των καθολικών μαθηματικών εξισώσεων που διέπουν τα φαινόμενα σχηματισμού δομών παραμένει ως μελλοντικός στόχος. Είναι επίσης αλήθεια, από την άλλη μεριά ότι πολλά φαινόμενα σχηματισμού δομών έχουν δώσει μια ώθηση για να αναπτυχθούν κάποιες μεθοδολογίες. Παραδείγματος χάριν, η θεωρία διακλάδωσης και η θεωρία ιδιόμορφων διαταραχών είναι πολύ αποτελεσματικά εργαλεία για τις λύσεις με εποικοδομητικό τρόπο. Επίσης, η ασυμπτωτική ανάλυση και οι ιδέες από τα απειροδιάστατα δυναμικά συστήματα είναι πολύ χρήσιμες στην αποκάλυψη της τελικής συμπεριφοράς ενός συστήματος. Παρακάτω θα γίνει αναφορά στο τι μπορεί να πει κάποιος για το σχηματισμό δομών σε περισσότερες διαστάσεις κάνοντας

αλλαγή κλίμακας.

### 2.1.1 Τι είναι ο σχηματισμός δομών;

Μεταξύ πολλών διακεκριμένων εργασιών του Alan Turing, που είναι διάσημος για τη μηχανή Turing, υπάρχει μία δημοσίευση που προβλέπει ότι ένας απλός συνδυασμός αντίδρασης και διάχυσης μπορεί να προκαλέσει έναν αυθόρμητο σχηματισμό ετερογενών δομών, που ονομάζονται *δομές Turing*. Αυτό το αξιολογικό αποτέλεσμα αποκάλυψε ότι τα αποτελέσματα διάχυσης, που θεωρήθηκαν ως κατευθυντήρια δύναμη της ομοιομορφοποίησης, είχαν μια διαισθητική πτυχή: θα μπορούσαν να λειτουργήσουν ταυτόχρονα με την αντίδραση και να δημιουργήσουν στο χώρο ετερογενείς διατεταγμένες δομές. Καταρχάς ο μηχανισμός Turing θεωρήθηκε ότι δεν έχει μεγάλη σχέση με τα πραγματικά φαινόμενα. Εντούτοις, πρόσφατα πειράματα έχουν διευκρινίσει ότι η ιδέα Turing μπαίνει στην ουσία της δυναμικής στις χημικές αντιδράσεις και τη μορφογένεση. Επιπλέον, η καθολικότητα του μηχανισμού, που δεν εξαρτάται τόσο πολύ από τα ιδιαίτερα πραγματικά φαινόμενα, έχει αναγνωριστεί ως πολύ σημαντική αρχή για τις ποικιλίες των ιεραρχικών δομών στα μη γραμμικά φαινόμενα.

Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα μιας εξίσωσης του μηχανισμού Turing είναι ένα σύστημα σχεδόν γραμμικών παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, που καλείται *σύστημα διάχυσης - αντίδρασης*.

Ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα ενός τέτοιου συστήματος είναι μια ισορροπημένη αλληλεπίδραση μεταξύ μιας αύξησης και ενός μηχανισμού που τείνει να καταστείλει την αύξηση. Ο πληθυσμός μιας πόλης ή η εξάπλωση ενός ιού αυξάνεται ή διαδίδεται αμέσως μόλις δοθεί μια αφορμή. Τελικά, ο πληθυσμός είτε σταθεροποιείται σε ένα κατάλληλο αριθμό είτε μειώνεται, και μερικές φορές δίνει μια ταλαντωτική συμπεριφορά. Τέτοιες συμπεριφορές προκαλούνται από τα ανασταλτικά αποτελέσματα λόγω μιας περιορισμένης πηγής τροφίμων, ή από το ανοσοποιητικό σύστημα.

Μια άλλη πτυχή των συστημάτων αντίδρασης - διάχυσης είναι η διασπορά στο χώρο

λόγω των αποτελεσμάτων διάχυσης. Για να κατανοηθούν τέτοια αποτελέσματα, μπορούμε να φανταστούμε τη διάδοση μίας γρίπης ή μιας πυρκαγιάς. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές καταστάσεις: ο πληθυσμός να είναι ευαίσθητος στην ασθένεια, να είναι μολυσμένος και ανοσοποιημένος. Προκειμένου να περιγραφεί η διασπορά στο χώρο ή η ασθένεια ή η φλόγα, δεν είναι απαραίτητο να είναι γνωστές όλες αυτές οι τρεις καταστάσεις. Είναι αρκετό να ξέρουμε μόνο το μολυσμένο πληθυσμό ή τα μέτωπα φλόγας. Αυτό το επιχείρημα οδηγεί με φυσιολογικό τρόπο στην ιδέα της **δυναμικής των διεπιφανειών**. Δηλαδή, αρκεί να περιγραφεί μόνο η κίνηση των εσωτερικών στρωμάτων (διεπιφάνειες) όπου η κατάσταση αλλάζει απότομα. Μια τέτοια διαδικασία, είναι σε θέση όχι μόνο να μειώσει ουσιαστικά το βαθμό ελευθερίας στην αρχική δομή, αλλά και να χαρακτηρίσει ρητά την ουσία της φυσικής δυναμικής.

Μια τέτοια ιδέα έχει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών. Δεν είναι υπερβολικό να πούμε ότι η ιδέα αυτή είναι αποτελεσματική για να περιγράψει κάποιο είδος μετάβασης από μία κατάσταση σε μία άλλη κατάσταση όπου δύο ή περισσότερες καταστάσεις συνυπάρχουν, όπως ο κρυσταλλικός όγκος, οι διαδικασίες καύσης, οι μορφογενέσεις και η βιολογία πληθυσμών. Όταν θέλουμε να ανάγουμε την κίνηση ενός συστήματος στην κίνηση των διεπιφανειών, είναι απαραίτητο να αλλάξουμε κλίμακα στο χώρο και στο χρόνο. Για να πάρει κανείς όρια με φυσικό νόημα, θα πρέπει να προσέξει την ισορροπία μεταξύ πολλών δυνάμεων που σχετίζονται με την κίνηση της διεπιφάνειας. Ανάλογα με τις εφαρμοζόμενες δυνάμεις που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, υπάρχουν και διαφορετικά όρια και νόμοι κλίμακας.

Ο στόχος μας είναι να περιγράψουμε την ύπαρξη και τη δυναμική των δομών σε συστήματα αντίδρασης - διάχυσης χρησιμοποιώντας κυρίως ασυμπτωτικές μεθόδους, τεχνικές από απειροδιάστατα δυναμικά συστήματα, τη μέθοδο Liapunov - Schmidt και ευστάθεια.

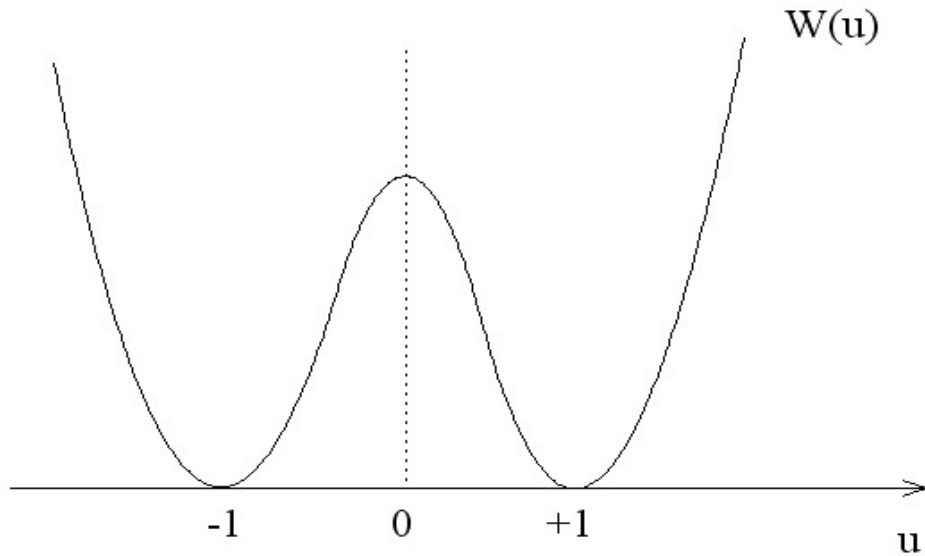
## 2.2 Τα Συστήματα Κλίσης και η δυναμική τους

Είναι μία παλιά ιδέα από τη φυσική ότι η δυναμική μίας κατάστασης εξελίσσεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η τιμή (ενέργεια) ενός συναρτησιακού (ελεύθερη ενέργεια) να ελαττώνεται αποτελεσματικά στο χρόνο. Σε μια τέτοια περίπτωση, ο βασικός προορισμός της κατάστασης είναι εκείνος όπου η ενέργεια λαμβάνει την ελάχιστη τιμή. Αυτός είναι ένας λόγος γιατί είναι τόσο αποτελεσματικό να μελετάμε τις ιδιότητες ευστάθειας χρησιμοποιώντας συναρτήσεις Liapunov από τη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Σε συστήματα που εκτείνονται στο χώρο, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ γειτονικών θέσεων εκφράζονται συνήθως σε όρους χωρικών παραγώγων (για παράδειγμα, υλικά ή ροή θερμότητας με ταχύτητα ανάλογη της χωρικής βαθμίδας). Ένα τυπικό παράδειγμα συναρτησιακού ενέργειας το παρακάτω απλό αλλά πολύ βασικό που καλείται συναρτησιακό τύπου van der Waals

$$F_\varepsilon(u) = \int_\Omega \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 + W(u) dx \quad (2.2.1)$$

χρησιμοποιείται συχνά, όπου το  $\Omega$  είναι ένα ομαλό φραγμένο χωρίο στο  $\mathbb{R}^n$ . Το  $\varepsilon \ll 1$  είναι μία μικρή θετική παράμετρος που η φυσική του σημασία είναι ότι παριστάνει την τάξη μεγέθους της επιφανειακής τάσης και είναι ο πρωτεύον παράγοντας στη μορφή της διεπιφάνειας. Υποθέτουμε ότι η κατάσταση του υλικού μπορεί να περιγραφεί από μία συνάρτηση  $u$ , η οποία είναι ένας μακροσκοπικός δείκτης της μικροσκοπικής δομής του υλικού και ορίζεται στο χωρίο  $\Omega$  που περιέχει το υλικό. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός φερομαγνητικού υλικού η συνάρτηση  $u$  μπορεί να παριστάνει την τοπική πυκνότητα μαγνήτισης. Σε άλλες περιπτώσεις το  $u$  παριστάνει τη συγκέντρωση. Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο τουλάχιστον δύο διαφορετικές καταστάσεις παρατηρούνται στο διαχωρισμό φάσης, για παράδειγμα υγρό και στερεό. Επομένως για τη συνάρτηση πυκνότητας  $W(u)$  (ενέργεια ανά μονάδα όγκου του υλικού), εισάγουμε αυτό που λέμε διπλό πηγάδι δυναμικού (double well potential) που τυπικά εκφράζεται από το τέταρτης τάξης πολυώνυμο  $W(u) = \frac{(u^2-1)^2}{4}$  και έχει τη μορφή του σχήματος 2.1



Σχήμα 2.1: Η συνάρτηση δυναμικού  $W(u)$

Για τη μοντελοποίηση των δύο καταστάσεων έχουμε υποθέσει ότι η τιμή  $+1$  αντιστοιχεί στη μία κατάσταση και η τιμή  $-1$  στην άλλη. Επίσης έχουμε τον περιορισμό ότι η ενέργεια  $F_\varepsilon$  πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx = \bar{u} \quad (2.2.2)$$

όπου  $\bar{u}$  η μέση τιμή της ποσότητας  $u$ , με  $-1 < \bar{u} < 1$  το οποίο εκφράζει τη διατήρηση του συνολικού ποσού κάθε συστατικού.

Το σύστημα κλίσης (gradient system) σχετίζεται με το  $F_\varepsilon$  με τον τύπο

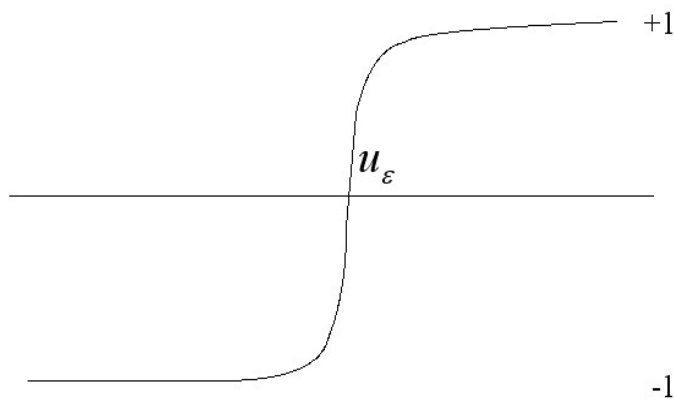
$$\frac{du}{dt} = -\text{grad}_H F_\varepsilon(u) \quad (2.2.3)$$

ο οποίος εξαρτάται από τη μετρική της πολλαπλότητας Hilbert όπου υπολογίζεται το «gradient». Διαφορετικές μετρικές συνεπάγονται διαφορετικούς τρόπους να μετράμε μήκη διανυσμάτων στο χώρο  $H$  και αυτό επηρεάζει την κατεύθυνση πάνω στην οποία μειώνεται το  $F_\varepsilon$ . Η πιο βασική ιδιότητα των συστημάτων κλίσης (gradient systems) είναι ότι μακριά από τα σημεία ισορροπίας το  $F_\varepsilon(u)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου

$$\frac{d}{dt} F_\varepsilon(u) = - \|u_t\|_H^2 \quad (2.2.4)$$



Από αυτό το γεγονός βγάζουμε ένα γενικό συμπέρασμα. Αφού με την πάροδο του χρόνου το σύστημα μειώνει την ενέργειά του, θα περίμενε κανείς σαν αποτέλεσμα της ύπαρξης του  $W$  στο  $F_\varepsilon$ , οι λύσεις να πλησιάζουν στο  $-1$  και στο  $1$  και έτσι να σχηματίζουν προφίλ όπως στο σχήμα 2.2



Σχήμα 2.2: Το στρώμα

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι υπάρχει ένας ανταγωνισμός μεταξύ του δυναμικού  $W(u)$  και του όρου της χωρικής παραγώγου στο συναρτησιακό  $F_\varepsilon(u)$ . Το μεν δυναμικό ευνοεί το διαχωρισμό, ο δε όρος χωρικής παραγώγου το αντίθετο. Το οριακό στρώμα μεταξύ των δύο καταστάσεων  $\pm 1$  μπορούμε να το δούμε ως τη συμφιλίωση των δύο αυτών αντίθετων τάσεων. Ορίζουμε έτσι τη **διεπιφάνεια** ως:

$$\Gamma_\varepsilon(t) = \{x \in \Omega | u_\varepsilon(x, t) = 0\} \quad (2.2.5)$$

και εννοούμε με τον όρο *ζώνη* την περιοχή του χώρου που απέχει  $\varepsilon$  από τη διεπιφάνεια. Η εξίσωση (2.2.3) καλείται *Diffuse Interface Model* ή *Phase Field Model*. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο άρθρο του Cahn [7], [8] για την ιστορική αξία του θέματος. Έτσι χωρίζουμε το  $\Omega$  σε μεγάλες περιοχές οι οποίες χωρίζονται μεταξύ τους από λεπτές ζώνες. Η λύση σε κάθε περιοχή είναι σταθερή ( $-1$  ή  $1$ ) ενώ μέσα στις ζώνες αυτές η λύση αλλάζει απότομα.

Για να καταλάβουμε καλύτερα το σημείο αυτό, αγνοούμε τον όρο της χωρικής παραγώγου στο συναρτησιακό και έχουμε άπειρα απόλυτα ελάχιστα. Δοσμένου ενός συνόλου

$E \subset \Omega$  τέτοιο ώστε

$$-|E| + |\Omega \setminus E| = \bar{u}$$

για να ικανοποιείται ο περιορισμός

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx = \bar{u}$$

η συνάρτηση

$$\begin{cases} u(x) = -1 & x \in E \\ u(x) = 1 & x \in \Omega \setminus E \end{cases}$$

είναι ένας απόλυτος ελαχιστοποιητής. Παρόλο που το  $\varepsilon$  είναι πολύ μικρό, το σύνολο των ελαχιστοποιητών του  $F_{\varepsilon}$  είναι εντελώς διαφορετικό από αυτό που ορίσαμε πριν. Για  $\varepsilon > 0$ , το σύνολο των ελαχιστοποιητών είναι γενικά πεπερασμένο. Για παράδειγμα στην περίπτωση που δεν έχουμε περιορισμό οι μόνοι ελαχιστοποιητές είναι οι  $\pm 1$ . Αυτή η ελάττωση του συνόλου των ελαχιστοποιητών από την περίπτωση  $\varepsilon = 0$  στην περίπτωση  $\varepsilon > 0$ , δεν ακυρώνει τελείως την ιδιόμορφη κατάσταση για  $\varepsilon = 0$ . Στην πραγματικότητα το σύνολο των συναρτήσεων που ορίζονται από τον παραπάνω τύπο, ανάγεται στην περίπτωση  $\varepsilon > 0$ , από ένα τεράστιο σύνολο χωρικής κατανομής της  $u$  όπου σαν ελαχιστοποιητές, έχουν ενέργεια μόλις τάξης  $\varepsilon$ . Αν  $E \subset \Omega$  είναι ομαλό ανοιχτό σύνολο και  $I_{\varepsilon}$  είναι μία  $\varepsilon$  περιοχή του συνόλου  $\partial E \cap \Omega$ , μία τέτοια κατανομή δίνεται από τον τύπο:

$$u(x) = \frac{d(x, E \setminus I_{\varepsilon}) - d(x, (\Omega \setminus E) \setminus I_{\varepsilon})}{d(x, E \setminus I_{\varepsilon}) + d(x, (\Omega \setminus E) \setminus I_{\varepsilon})}$$

Εδώ η  $d(x, E)$  είναι η απόσταση του  $x$  από το σύνολο  $E$ . Η περιοχή  $I_{\varepsilon}$  πάχους  $\varepsilon$ , που το  $u$  αλλάζει από -1 σε 1 αντιστοιχεί στη ζώνη μεταξύ των δύο φάσεων. Το σύνολο  $E$  μπορεί να είναι πολύ πολύπλοκο με πολλές συνιστώσες, και η συνάρτηση  $u$  που σχετίζεται με το  $E$  μπορεί να έχει μεγάλη απόκλιση από έναν απόλυτο ελαχιστοποιητή.

Παίρνοντας κατάλληλα το όριο καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$  μπορούμε να συνδέσουμε την (2.2.3) με ένα καθαρά γεωμετρικό πρόβλημα για την διεπιφάνεια  $\Gamma(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_{\varepsilon}(t)$ . Η δομή κλίσης και η συνθήκη διατήρησης μάζας (2.2.2) διατηρούνται κατά το πέρασμα στο όριο και προκαλούν

μείωση της περιμέτρου και διατήρηση όγκου:

$$\frac{du}{dt} = -\text{grad}_H F_\varepsilon(u)$$

$$\mathbf{V} = -\text{grad} \text{Per}_\Omega E, \quad E = \{x \in \Omega \mid u(x) < 0\}$$

$$F_\varepsilon \searrow \Rightarrow \text{Per}_\Omega \Gamma(t) \searrow$$

$$\int_\Omega u dx = \bar{u} |\Omega| \Rightarrow |\Omega^-(t)| = \text{σταθερά}$$

όπου  $\mathbf{V}$  είναι η κάθετη ταχύτητα της  $\Gamma = \partial E \cap \Omega$ ,  $\text{Per}_\Omega E = |\Gamma|$  και όπου  $\Omega^-(t)$  το εσωτερικό της  $\Gamma(t)$ . Το πρόβλημα της  $\Gamma(t)$  καλείται Sharp Interface Model. Τα σημεία ισορροπίας είναι οι επιφάνειες σταθερής μέσης καμπυλότητας που τέμνουν κάθετα το  $\partial\Omega$ . Τα Sharp Interface Models επιπλέον είναι μία φυσική απλοποίηση των diffuse models, και μ' αυτά ασχολείται και το κλασικό πρόβλημα Mullins - Sekerka.

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε το μηχανισμό δημιουργίας των διεπιφανειών, την εξέλιξή και την αλληλεπίδρασή τους σε κάποια σημαντικά στάδια και για τα δύο μοντέλα διεπιφανειών που αναφέραμε πιο πάνω. Αυτό που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η σύνδεση των δύο μοντέλων. Έχει να κάνει με την ενέργεια  $F_\varepsilon(u)$  και με την κατανομή της στο  $\Omega$ . Αν και η περισσότερη ενέργεια συγκεντρώνεται στη διεπιφάνεια (αφού και οι δύο όροι στο ολοκλήρωμα εξαφανίζονται) υπάρχει κάποια ενέργεια η οποία διαχέεται μέσα από το  $\Omega$ .

Παίρνοντας ως βασικό συναρτησιακό χώρο τον  $L^2(\Omega)$ , επιλέγουμε τον  $H^1(\Omega)$  ως την επιτρεπτή κλάση συναρτήσεων για το συναρτησιακό. Για να ελαχιστοποιήσουμε την τιμή του συναρτησιακού, είναι προτιμότερο να θέσουμε  $\pm 1$  στο  $u$  κατά σημείο και την ίδια στιγμή να μειώσουμε τη χωρική βαθμίδα του  $u$  όσο περισσότερο γίνεται. Έτσι, αν δεν υπάρχει περιορισμός για το  $u$  τότε μία από τις δύο ομογενείς καταστάσεις του  $u \equiv \pm 1$  αυξάνει την ελάχιστη τιμή του συναρτησιακού. Από την άλλη μεριά στην περίπτωση όπου επιβάλλουμε στη  $u$  τη συνθήκη διατήρησης μάζας, όπως στη φάση διαχωρισμού ενός δυαδικού κράματος, η εξίσωση Cahn - Hilliard την οποία θα δούμε παρακάτω, θα είναι κατάλληλη. Στην τελική κατάσταση ο ελαχιστοποιητής του συναρτησιακού είναι μη σταθερή συνάρτηση και οδηγούμαστε έτσι στο ενδιαφέρον πρόβλημα του γεωμετρικού χαρακτηρισμού του σχήματος της διεπιφάνειας.

Επιπλέον, κάτι που έχει τραβήξει την προσοχή μας τα τελευταία χρόνια είναι τα διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με το συναρτησιακό της μορφής (2.2.1) με επιπλέον μη τοπικούς όρους, και το «gradient dynamics» που παράγεται από ένα τέτοιο συναρτησιακό. Σε ένα τέτοιο σύστημα εμφανίζονται ενδιαφέροντες τύποι λύσεων παραγόμενες από την αλληλεπίδραση τοπικών και καθολικών φαινομένων όπως ένας ελαχιστοποιητής με μία καλή δομή.

Τα δυναμικά συστήματα κλίσης μπορεί να είναι είτε διατηρητικά, όπου επιβάλλεται μία συνθήκη διατήρησης, είτε μη διατηρητικά. Ως τυπικό παράδειγμα δυναμικού συστήματος κλίσης θα έχουμε να κάνουμε με έναν τύπο μη διατηρητικού συστήματος που περιγράφεται από μία βαθμωτή διευσταθή εξίσωση αντίδρασης - διάχυσης. Ενώ θα δούμε και έναν τύπο διατηρητικού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση Cahn - Hilliard.

## 2.3 Μη διατηρητικά Συστήματα Κλίσης

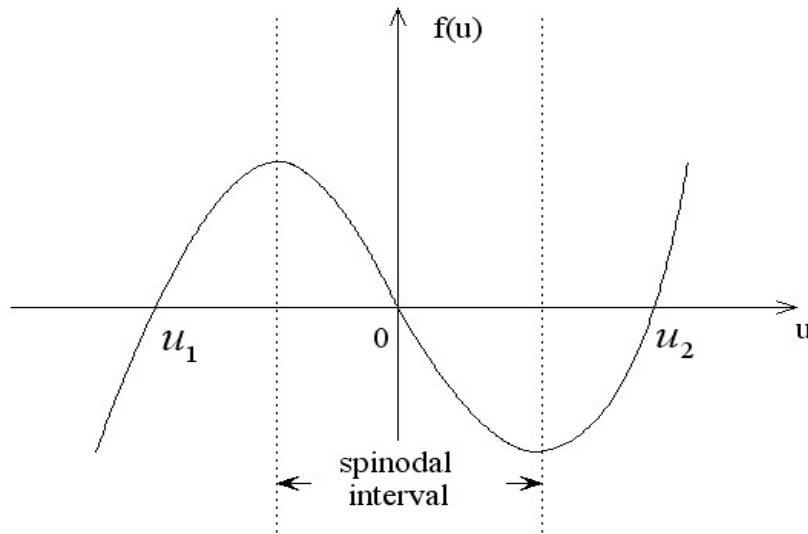
### 2.3.1 Βαθμωτή διευσταθή εξίσωση αντίδρασης διάχυσης

Αν κάποιος σκεφτεί τις καταστάσεις  $u = \pm 1$  που σχετίζονται με το συναρτησιακό (2.2.1) σαν τις κατευθύνσεις του spin, πάνω ή κάτω, υγρή ή αέρια κατάσταση, ως οξειδωμένη ή μη οξειδωμένη κατάσταση, τότε η ελάχιστη τιμή του συναρτησιακού επιτυγχάνεται στις καταστάσεις  $u = \pm 1$ . Έτσι, σε ένα τέτοιο σύστημα μας ενδιαφέρουν κυρίως πώς οι τροχιές καταλήγουν στις καταστάσεις  $u = \pm 1$ . Το  $L^2(\Omega)$  - σύστημα κλίσης που έχει σχέση με το συναρτησιακό στην (2.2.1) είναι η ακόλουθη εξίσωση Euler - Lagrange:

$$\begin{aligned} u_t &= \varepsilon^2 \Delta u + f(u) \quad \in \Omega, \quad f(u) = -W'(u) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

όπου  $f(u)$  η συνάρτηση που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα 2.3

Αν ο όρος της δεύτερης παραγώγου στην (2.3.6) λείπει, το σύστημα συγκλίνει είτε στο



Σχήμα 2.3: Η συνάρτηση  $f(u)$

+1 είτε στο -1 (εκτός από την περίπτωση όπου η αρχική τιμή είναι το 0), παρουσιάζοντας διευστάθεια. Για το λόγο αυτό η (2.3.6) καλείται *βαθμωτή διευσταθής εξίσωση αντίδρασης - διάχυσης* μη διατηρητικού τύπου ή αλλιώς εξίσωση Allen - Cahn. Αυτή είναι μία από τις θεμελιώδεις εξισώσεις στη θεωρία του σχηματισμού δομών.

### 2.3.2 Μιγαδικές εξισώσεις Ginzburg - Landau

Όπως στο δεύτερο παράδειγμα δυναμικών συστημάτων κλίσης, έχουμε να κάνουμε με την περίπτωση στην οποία το συναρτησιακό είναι ορισμένο στο χώρο των μιγαδικών παραμέτρων. Δηλαδή δίνεται από την

$$E(\Phi) = \int_{\Omega} |\nabla\Phi|^2 + \frac{\lambda}{2}(1 - |\Phi|^2)^2 dx \quad (2.3.7)$$

και η σχετική εξίσωση είναι η:

$$\Phi_t = \Delta\Phi + \lambda(1 - |\Phi|^2)^2\Phi, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (2.3.8)$$

Η εξίσωση στην (2.3.8) καλείται *χρονοανεξάρτητη μιγαδική εξίσωση Ginzburg - Landau* (χωρίς μαγνητικές επιπτώσεις). Απλά υπεραγωγίμες καταστάσεις παριστάνονται με  $|\Phi| =$

1, ενώ η  $\Phi = 0$  αντιστοιχεί σε κανονική κατάσταση. Το συναρτησιακό ελαχιστοποιείται στο  $|\Phi| = e^{ic}$  (με το  $c$  να είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός), που καλείται ελαχιστοποιητής και αντιστοιχεί στις απλά υπεραγωγίμες καταστάσεις. Επομένως, από άλλη οπτική γωνία, μη σταθεροί τοπικοί ελαχιστοποιητές είναι ενδιαφέροντες.

## 2.4 Διατηρητικά Συστήματα Κλίσης

### 2.4.1 Η εξίσωση Cahn - Hilliard

Είναι φυσιολογική και συχνή η περίπτωση όπου τα συναρτησιακά πρέπει να υποβάλλονται σε κάποιους περιορισμούς.

Για παράδειγμα, αν οι καταστάσεις  $\pm 1$  στο διπλό πηγάδι δυναμικού, αναπαριστούν διαφορετικά υλικά σε ένα κράμμα, τότε η λύση του συστήματος καθορίζεται από την αρχική συνθήκη  $u_0(x)$  που πρέπει να διατηρείται:

$$\overline{u(t, \cdot)} \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(t, x) dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x) dx \quad -1 < \bar{u}_0 < 1 \quad (2.4.9)$$

Η εξίσωση που ελαχιστοποιεί το (2.2.1) υπό τον περιορισμό (2.4.9) στον  $L^2(\Omega)$  δίνεται από την

$$\begin{aligned} u_t &= \varepsilon^2 \Delta u + f(u) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u) \quad \text{στο } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{στο } \partial \Omega \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

όπου είναι ένα παράδειγμα μίας εξίσωσης με μη-τοπικό όρο (με ολοκληρωτικό). Αυτή η εξίσωση, εν τούτοις δεν είναι ικανοποιητικό μοντέλο για το πραγματικό φαινόμενο, επειδή δεν είναι ρεαλιστικό να φανταζόμαστε την κατάσταση ολόκληρου του συστήματος του κράμματος στιγμιαία και να αντιστοιχούμε σ' αυτή μία μη τοπική συμπεριφορά. Επομένως, είναι απαραίτητο να βρούμε ένα μοντέλο που να εξαρτάται μόνο από τοπικές αλληλεπιδράσεις και την ίδια στιγμή να διατηρείται και η μάζα. Ο Fife στο [31] τονίζει ότι αν κάποιος θεωρήσει την (2.2.1) ορισμένη στον  $H_0^{-1}(\Omega)$  που είναι ο χώρος των  $L^2(\Omega)$  συναρτήσεων με μηδενικό

μέσο όρο ο οποίος είναι εφοδισμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv \, dx$$

όπου η  $w$  ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta w = u & , \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & , \partial\Omega \end{cases}$$

τότε η εξίσωση που θα πάρει γίνεται φυσιολογικά διατηρητική. Η αντίστοιχη εξίσωση στην περίπτωση αυτή γίνεται:

$$\begin{aligned} u_t &= -\Delta(\varepsilon^2 \Delta u + f(u)), & x \in \Omega \\ \vec{n} \cdot \nabla u &= \vec{n} \cdot \nabla \Delta u = 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

που είναι τέταρτης τάξης. Η εξίσωση αυτή λέγεται Cahn - Hilliard και είναι μία από τις βασικές εξισώσεις από τις διατηρητικές εξισώσεις αντίδρασης - διάχυσης [8]. Αφού στην (2.4.11) ο  $-\Delta$  δρα στο γραμμικό όρο  $u$  που προέρχεται από τη μη γραμμικότητα της  $f(u)$ , παίρνουμε μια εξίσωση κακώς τεθειμένη. Όμως, εξ' αιτίας του όρου τέταρτης τάξης  $-\varepsilon^2 \Delta^2 u$ , το πρόβλημα γίνεται αμέσως καλώς τεθειμένο και μάλιστα η ύπαρξη και η ομαλότητα των λύσεων του αποδεικνύεται στα [16], [32], [33].

Με απ' ευθείας υπολογισμούς μπορούμε να πάρουμε για την εξίσωση Cahn - Hilliard ότι

$$\frac{d}{dt} F_{\varepsilon}(u(x, t)) \leq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_{\varepsilon}(u) &= \int_{\Omega} \{ \varepsilon^2 \nabla u \nabla u_t + W'(u) u_t \} dx = \int_{\Omega} \{ (-\varepsilon^2 \Delta u + W'(u)) u_t \} dx = \\ &= \int_{\Omega} (-\varepsilon^2 \Delta u + W'(u)) \Delta (-\varepsilon^2 \Delta u + W'(u)) dx = - \int_{\Omega} |\nabla (-\varepsilon^2 \Delta u + W'(u))|^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

Έστω ο  $H_E^2(\Omega)$  που ορίζεται ως

$$H_E^2(\Omega) = \{ u \in H^2(\Omega) | \vec{n} \cdot \nabla u = 0, \bar{u} = 0 \}$$

(για λόγους απλότητας θέτουμε  $\bar{u} = 0$ ). Τότε ο γραμμικός τελεστής  $L = \varepsilon^2 \Delta^2$  με πεδίο ορισμού το

$$D(L) = \{u \in H_E^2(\Omega) \mid \Delta u \in H_E^2(\Omega)\}$$

είναι ένας τομεακός τελεστής στο  $X = L^2(\Omega)$  με  $X^{1/2} = D(L^{1/2}) = H_E^2(\Omega)$ . Επιπλέον, το συναρτησιακό (2.2.1) είναι μία συνάρτηση Liapunov για την (2.4.11).

**Θεώρημα 2.4.1** Έστω  $u_0 \in H_E^2(\Omega)$ . Τότε η λύση  $u(t, x)$  της (2.4.11) υπάρχει καθολικά στο χρόνο και το  $\omega$ -οριακό σύνολό της είναι ένα συμπαγές συνεκτικό και αναλλοίωτο σύνολο στον  $H_E^2(\Omega)$ . Αν, επιπλέον, οι λύσεις ισορροπίας είναι όλες μεμονωμένες, τότε η  $u(t, x)$  συγκλίνει σε μια απ' αυτές για  $t \rightarrow \infty$

**Σχόλιο 2.4.1** Σημειώνουμε εδώ ότι η εξίσωση (2.3.6) (Allen - Cahn) είναι δεύτερης τάξης και υπακούει στην αρχή μεγίστου και όπως είπαμε δεν ικανοποιεί τη διατήρηση μάζας ενώ η εξίσωση (2.4.11) (Cahn - Hilliard) δεν υπακούει στην αρχή μεγίστου αφού εμφανίζεται η τέταρτης τάξης παράγωγος αλλά είναι διατηρητική, ικανοποιεί δηλαδή τη διατήρηση μάζας.

Η εξίσωση Cahn - Hilliard είναι ένα από τα βασικότερα συστήματα μοντελοποίησης που περιγράφει τη δυναμική της αποσύνθεσης, της πυρηνοποίησης και του διαχωρισμού φάσης. Βλέπε [34] για μια στοιχειώδη εισαγωγή.



## Κεφάλαιο 3

# Αποσύνθεση, Πυρηνοποίηση και Διαχωρισμός Φάσης

### 3.1 Θερμοστατική

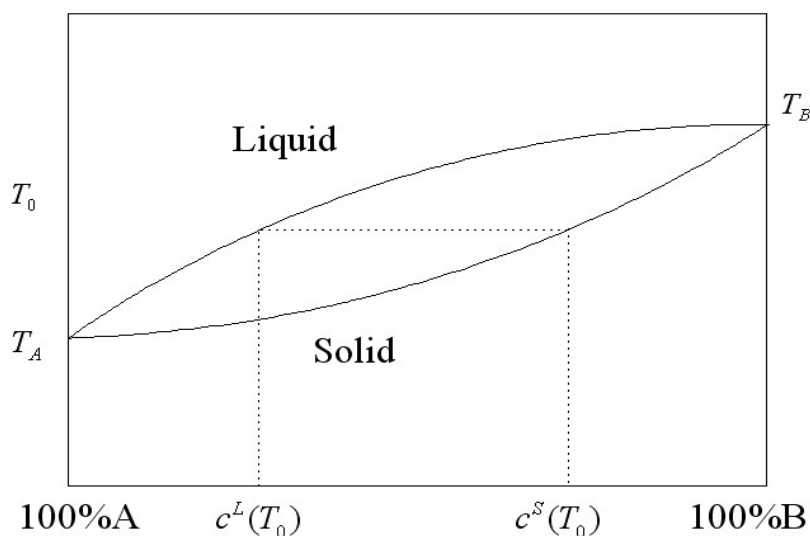
Θεωρούμε ένα δυαδικό κράμα A-B στο οποίο τα μόρια του A και του B φτιάχνουν ένα νέο μείγμα. Για παράδειγμα παίρνουμε Al - Si, Cu - Ni. Θεωρούμε ότι η μάζα του κράματος είναι  $m$ . Η μάζα του συστατικού A είναι  $m_A$  ενώ η μάζα του συστατικού B είναι  $m_B$ . Προφανώς  $m_A + m_B = m$ . Οι λόγοι των μαζών

$$c_A = \frac{m_A}{m}, \quad c_B = \frac{m_B}{m}$$

μετράνε την αναλογία του A και του B αντίστοιχα και καλούνται συγκέντρωση του A και του B. Αφού  $c_A + c_B = 1$  μόνο ένας από τους λόγους αρκεί για να καθορίσει τη σύνθεση του κράματος. Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε  $c = c_B$  σαν μεταβλητή που καθορίζει τη συγκέντρωση.

Η αλλαγή φάσης σε ένα κράμα περιγράφεται από το διάγραμμα φάσης του. Το διάγραμμα αυτό περιγράφει τις θερμοδυναμικές καταστάσεις στις οποίες συνυπάρχουν διαφορετικές φάσεις σε θερμοδυναμική ισορροπία. Το απλούστερο διάγραμμα φάσης έχει την εικόνα του

σχήματος 3.1



**Σχήμα 3.1:** Το διάγραμμα φάσης δυαδικού κράματος

Κάτω από σταθερή πίεση η θερμοδυναμική κατάσταση του κράματος καθορίζεται από δύο μεταβλητές: τη θερμοκρασία  $T$  και τη συγκέντρωση με  $c$ ,  $0 < c < 1$ . Οι θερμοκρασίες  $T_A$  και  $T_B$  δηλώνουν τις θερμοκρασίες τήξης των συστατικών του κράματος. Αν η θερμοδυναμική κατάσταση  $(c, T)$  βρίσκεται μεταξύ της στερεής και της υγρής φάσης τότε το κράμα είναι ταυτόχρονα και υγρό και στερεό με συγκέντρωση  $c^L(T)$  και  $c^S(T)$  αντίστοιχα. Επομένως σε κάθε θερμοκρασία  $T$  με  $T_A < T < T_B$ , συνυπάρχουν οι δύο φάσεις σε θερμοδυναμική ισορροπία σε αυτές τις συγκεντρώσεις. Έστω  $\lambda$  η επι τοις εκατό παρουσία του υλικού σε υγρή μορφή. Η διατήρηση μάζας υπαγορεύει:

$$c = \lambda c^L(T_1) + (1 - \lambda) c^S(T_1)$$

Το τι συμβαίνει στο κράμα όταν η θερμοκρασία είναι μεταξύ του  $T_A$  και του  $T_B$  είναι ένα πολύπλοκο φαινόμενο. Ανακατεύονται τα συστατικά και απελευθερώνεται θερμότητα. Διαχωρίζονται τα συστατικά του έτσι ώστε να εμπλουτιστεί η στερεή φάση και να μειωθεί η υγρή. Το φαινόμενο αυτό περιγράφεται πολύ καλά από την εξίσωση Cahn - Hilliard.

## 3.2 Επισκόπηση του φαινομένου

Η εξίσωση Cahn-Hilliard είναι ένα καλό μαθηματικό μοντέλο για πολλά φαινόμενα με χρονικές κλίμακες που διαφέρουν ανάλογα με την τάξη μεγέθους που αντιστοιχεί σε διαφορετικούς ρυθμούς κατανάλωσης ενέργειας. Σε γενικές γραμμές ξεχωρίζουμε δύο καταστάσεις που είναι

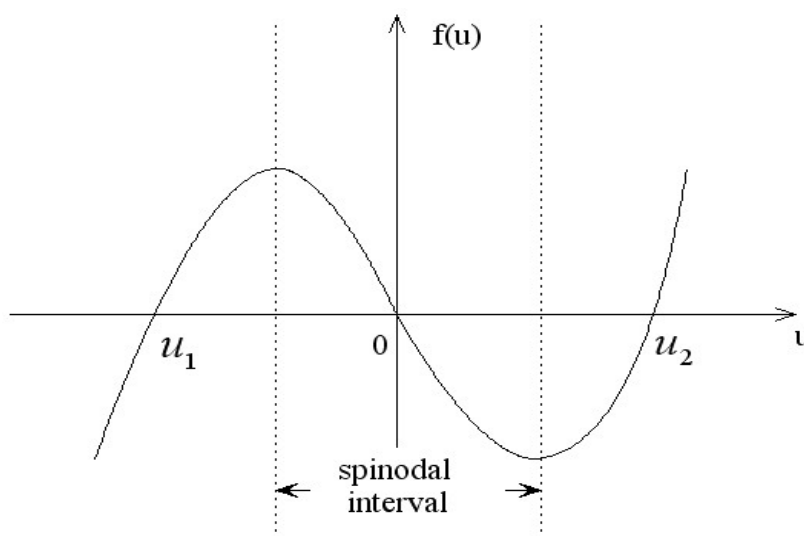
1. Διαχωρισμός (Separation)
2. Αδροποίηση (Coarsening)

Στο στάδιο του διαχωρισμού παρατηρούμε τις φάσεις της αποσύνθεσης (Spinodal Decomposition) και της πυρηνοποίησης (nucleation) οι οποίες θα αναλυθούν στην παράγραφο που ακολουθεί. Ο διαχωρισμός αφορά τα πρώιμα στάδια του φαινομένου της αλλαγής φάσης του κράμματος που μελετούμε και παρέχει πιθανούς μηχανισμούς αποσταθεροποίησης της ομοιόμορφης συγκέντρωσης  $u$ . Η αδροποίηση ή αλλιώς Ostwald ripening είναι μία διαδικασία διάχυσης που γίνεται στο τελευταίο στάδιο της αλλαγής φάσης. Συνήθως κάθε αλλαγή φάσης έχει σαν αποτέλεσμα τη μίξη δύο καταστάσεων (φάσεων). Αρχικά το μέσο μέγεθος των διασκορπισμένων κομματιών στο μείγμα είναι πολύ μικρό και έτσι η ενέργεια της διεπιφάνειας του συστήματος είναι μεγάλη και το μείγμα δε βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Αυτό που οδηγεί το σύστημα σε ισορροπία είναι το gradient του χημικού δυναμικού το οποίο, σύμφωνα με τη συνθήκη Gibbs-Thomson, πάνω στην επιφάνεια, είναι ανάλογο της μέσης καμπυλότητας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη διάχυση ύλης από περιοχές μεγάλης καμπυλότητας σε περιοχές μικρότερης καμπυλότητας και έτσι τα μεγάλα κομμάτια μεγαλώνουν εις βάρος των μικρότερων τα οποία τελικά εξαφανίζονται. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας γνωστής ως Ostwald ripening ή Αδροποίησης είναι η αύξηση του μέσου μεγέθους των σωματιδίων και η ελάττωση του αριθμού τους που κάνει το μείγμα πιο αδρό (χοντροκομμένο). Μια ποσοτική περιγραφή του φαινομένου αυτού [23] έχει περιγραφεί από τους Lifschitz και Slyozov και ανεξάρτητα από τον Wagner κάτω από την υπόθεση ότι το σχετικό κλάσμα της διασκορπισμένης φάσης είναι πολύ μικρό. Η θεωρία τους (Θεωρία LSW απο δω και στο

εξής) είναι σε τρεις διαστάσεις και υποθέτει ότι υπάρχουν πολλά σωματίδια στο σύστημα με πολύ μικρό μέγεθος συγκρινόμενα με την απόσταση την οποία απέχουν. Τελικά η διαδικασία οδηγεί στο διαχωρισμό του  $\Omega$  σε δύο ξεχωριστές περιοχές που καθε μια έχει και ξεχωριστή φάση.

### 3.3 Διαχωρισμός

Θα αναφερθούμε τώρα στο στάδιο του διαχωρισμού που όπως είπαμε γίνεται σε δύο φάσεις, την αποσύνθεση (Spinodal Decomposition) και την πυρηνοποίηση (Nucleation). Είμαστε λοιπόν στο μικρό διάστημα γύρω από το  $u = 0$  (spinodal interval) που βρίσκεται ανάμεσα στις εξωτερικές ρίζες της  $f(u)$  που ορίσαμε προηγουμένως



Σχήμα 3.2: Η συνάρτηση  $f(u)$

Αρχικά παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε  $u = \text{σταθερά}$  είναι λύση ισορροπίας της εξίσωσης Cahn - Hilliard (2.4.11). Αυτό που θα κάνουμε στην παράγραφο αυτή είναι μία γραμμικοποιημένη ανάλυση σταθερότητας για τη λύση ισορροπίας  $u = 0$  της εξίσωσης Cahn - Hilliard. Θα μελετήσουμε δηλαδή την ευστάθεια της λύσης αυτής. Πριν από αυτό όμως, για λόγους

απλότητας θα δούμε τι γίνεται στη μία διάσταση ξεκινώντας από την εξίσωση Allen - Cahn.

### 3.3.1 Μονοδιάστατη Εξίσωση Allen - Cahn

Υποθέτουμε ότι έχουμε τη μονοδιάστατη εξίσωση Allen - Cahn:

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - W'(u) \quad (3.3.1)$$

Θα κάνουμε λοιπόν όπως είπαμε πιο πάνω μία γραμμικοποιημένη ανάλυση σταθερότητας για τη λύση  $u = 0$ . Έτσι λοιπόν, αντικαθιστούμε την  $u = h$  στην (3.3.1) και παίρνουμε

$$h_t = \varepsilon^2 h_{xx} - W'(h) \quad (3.3.2)$$

και κάνοντας Taylor στην  $W'$  έχουμε

$$W'(h) = W'(0) + hW''(0) = hW''(0) \quad (3.3.3)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (3.3.2) παίρνουμε ότι

$$h_t = \varepsilon^2 h_{xx} - hW''(0) \quad (3.3.4)$$

με συνοριακές συνθήκες που γίνονται

$$h_x(0) = h_x(1) = 0 \quad (3.3.5)$$

Για τη λύση της (3.3.4) ξεκινάμε από το πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 h'' - W''(0)h = -\lambda h & (0, 1) \\ h_x(0) = h_x(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

και υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 p^2 + (\lambda - W''(0)) &= 0 \\ p &= \pm \frac{i}{\varepsilon} \sqrt{\lambda - W''(0)} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

και επομένως

$$h = c_1 \cos \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\lambda - W''(0)} + c_2 \sin \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\lambda - W''(0)} \quad (3.3.8)$$

και λόγω των συνοριακών συνθηκών παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} h_x(0) = 0 &\Rightarrow c_2 \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\lambda - W''(0)} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad \text{και} \\ h_x(1) = 0 &\Rightarrow \sin \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\lambda - W''(0)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\lambda - W''(0)} = k\pi \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

επομένως καταλήγουμε στις ιδιοτιμές

$$\lambda_k = \varepsilon^2 k^2 \pi^2 + W''(0)$$

Τώρα μπορούμε να λύσουμε τη γραμμικοποιημένη (3.3.4)

$$\begin{cases} h_t = \varepsilon^2 h_{xx} - W''(0)h \\ h_x = 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε λύσεις της μορφής:

$$h(x, t) = e^{\sigma t} \cos k\pi x$$

και αντικαθιστούμε στην παραπάνω, οπότε παίρνουμε:

$$\sigma = -k^2 \pi^2 \varepsilon^2 - W''(0)$$

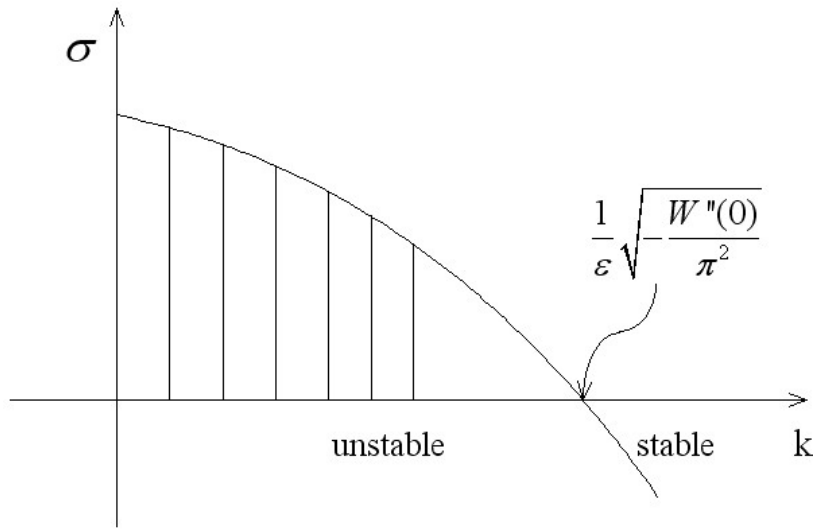
η καμπύλη της  $\sigma$  συναρτήσει της του  $k$  ονομάζεται καμπύλη διασποράς και έχει τη μορφή

Παρατηρούμε ότι για  $k < -\frac{1}{\varepsilon^2 \pi^2} W''(0)$  το  $\sigma > 0$  επομένως η λύση ισορροπίας είναι ασταθής ενώ για  $k < -\frac{1}{\varepsilon^2 \pi^2} W''(0)$  το  $\sigma > 0$  η λύση είναι ευσταθής. Σημειώνουμε εδώ ότι η καμπύλη αυτή είναι μονότονη και ότι η πιο ασταθής ιδιοσυνάρτηση είναι η τετριμμένη για  $k = 0$ . Περιμένουμε ότι αυτή η ιδιοσυνάρτηση θα είναι η κυρίαρχη της εξέλιξης της (3.3.1) για αρχικές συνθήκες  $u_0$  που είναι μικρές διαταραχές από την λύση ισορροπίας  $u = 0$ .

### 3.3.2 Μονοδιάστατη Εξίσωση Cahn - Hilliard

Θεωρούμε τώρα τη μονοδιάστατη Cahn - Hilliard:

$$u_t = -[\varepsilon^2 u_{xx} - W'(u)]_{xx} \quad u_x = u_{xxx} = 0 \quad (3.3.10)$$



Σχήμα 3.3: Καμπύλη διασποράς για την μονοδιάστατη εξίσωση Allen - Cahn

Γραμμικοποιούμε την (3.3.10) γύρω από τη μηδενική συνάρτηση και παίρνουμε:

$$\begin{cases} h_t = -[\varepsilon^2 h_{xx} - W''(0)h]_{xx} \\ h_x = h_{xxx} = 0 \end{cases}$$

Όπως και παραπάνω αναζητούμε λύσεις της μορφής

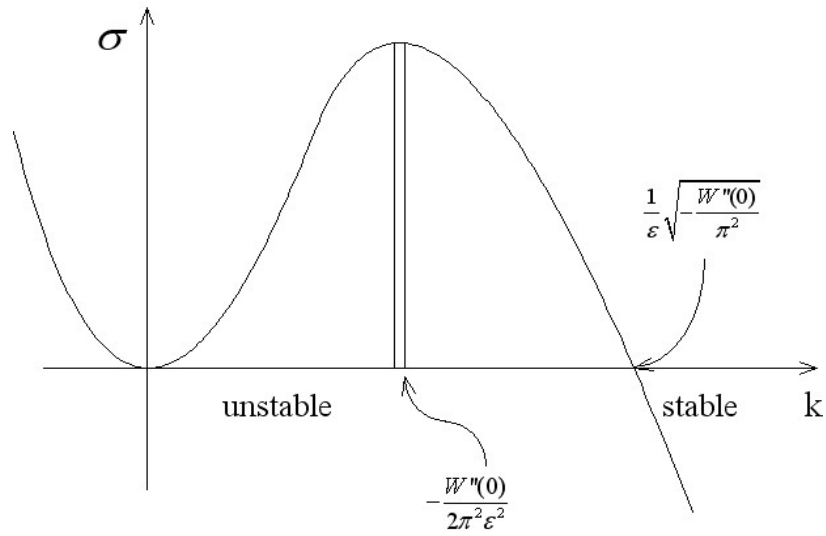
$$h(x, t) = e^{\sigma t} \cos k\pi x$$

και καταλήγουμε στη σχέση διασποράς

$$\sigma = -\varepsilon^2 \pi^4 k^4 - W''(0)k^2 \pi^2$$

η καμπύλη διασποράς τώρα έχει τη μορφή

Υπάρχουν κάποιες σημαντικές διαφορές με την εξίσωση Allen - Cahn. Οι πιο ασταθείς ιδιοσυναρτήσεις εδώ αντιστοιχούν σε συχνότητες κοντά στον αριθμό  $-\frac{W''(0)}{2\pi^2\varepsilon^2}$  και επομένως δεν είναι πια η τετριμμένη. Η επιθυμία να έχουμε μία εξίσωση με τέτοια καμπύλη διασποράς φαίνεται να είναι το κύριο κίνητρο για την εξίσωση Cahn - Hilliard. Φυσικά η πιο ασταθής κατάσταση είναι η ιδιότητα του υλικού και επομένως θα πρέπει να αντιστοιχεί σε μία ειδική συχνότητα.



Σχήμα 3.4: Καμπύλη διασποράς για την εξίσωση Cahn-Hilliard

### 3.3.3 Η Εξίσωση Cahn - Hilliard στις $n$ διαστάσεις

Περνώντας τώρα στην  $n$ -διάστατη εξίσωση, θεωρούμε τη γραμμικοποίηση της Cahn - Hilliard στο  $u = \bar{u}$  στο «spinodal interval» κοντά στο 0.

$$\begin{cases} h_t = -\Delta(\varepsilon^2 \Delta h - W''(\bar{u})h), & x \in \Omega \\ \frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial \Delta h}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \\ \int_{\Omega} h dx = 0 \end{cases} \quad (3.3.11)$$

και ψάχνουμε λύσεις της μορφής

$$h(x, t) = e^{\sigma t} v(x)$$

Ένας υπολογισμός δείχνει ότι το  $v$  πρέπει να είναι ιδιοσυνάρτηση του

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v, & x \in \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \\ \int_{\Omega} v dx = 0 \end{cases}$$

και ότι οι ιδιοτιμές  $\sigma$  και  $\mu$  συνδέονται με τη σχέση διασποράς

$$\sigma = -\varepsilon^2 \mu^2 - W''(\bar{u})\mu$$



Όλες οι ιδιοτιμές  $\mu$  είναι αυστηρά θετικές. Έτσι αν η  $W''(\bar{u}) > 0$ , το αντίστοιχο  $\sigma$  είναι αυστηρά αρνητικό και έχουμε σταθερότητα. Στην άλλη περίπτωση όπου το  $W''(\bar{u}) < 0$  η καμπύλη διασποράς είναι μη μονότονη, κάτι που συμφωνεί με τον τέταρτης τάξης τελεστή και τα  $\sigma$  που αντιστοιχούν στο  $\mu < -\frac{W''(\bar{u})}{\varepsilon^2}$  είναι θετικά και έτσι έχουμε αστάθεια.

Επιπλέον η μέγιστη ιδιοτιμή  $\sigma_M$  σχετίζεται με το  $\mu \simeq -\frac{W''(\bar{u})}{2\varepsilon^2}$  και είναι κοντά στην τιμή  $\sigma \simeq \frac{(W''(\bar{u}))^2}{4\varepsilon^2}$ . Είναι γνωστό από εργασία των Courant - Hilbert ότι η  $N$ -οστή ιδιοτιμή  $\mu_N$  δίνεται ασυμπτωτικά για  $N \rightarrow \infty$  από

$$\mu_N \sim C_n \left( \frac{N}{|\Omega|} \right)^{\frac{2}{n}}$$

Όπου  $C_n$  είναι μία σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από τη διάσταση.

Επομένως η τιμή του  $N_M$  του  $N$  που αντιστοιχεί στο  $\sigma_M$  είναι κατα προσέγγιση  $N_M \sim -\frac{W''(\bar{u})^{\frac{n}{2}}}{2C_n} |\Omega| e^{-\frac{1}{n}}$ . Έτσι το  $N_M \rightarrow \infty$  για  $\varepsilon \rightarrow 0$  και αυτό σημαίνει ότι η πιο ασταθής ιδιοσυνάρτηση  $v = v_{N_M}$  που σχετίζεται με το  $\sigma_M$ , γίνεται όλο και πιο σύνθετη για  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Για παράδειγμα σε μία διάσταση το χαρακτηριστικό μήκος (το μήκος ενός διαστήματος στο οποίο το  $v_{N_M}$  έχει σταθερό πρόσημο) είναι τάξης  $O(\varepsilon)$ . Η παραπάνω γραμμικοποιημένη ανάλυση μας λέει ότι μία μικρή διαταραχή γύρω από το  $u = \bar{u}$  θα εξελιχθεί σαν την

$$h(x, t) = e^{\sigma_M t} v_{N_M}(x)$$

και επομένως θα έχουμε χρονική κλίμακα τάξης  $O(\varepsilon^2)$  (θυμόμαστε ότι  $\sigma_M = O(\varepsilon^{-2})$ ), με χαρακτηριστικό μήκος που πηγαίνει στο μηδέν με το  $\varepsilon$ . Αυτό είναι μόνο μία ένδειξη του πώς η  $u = \bar{u}$  μπορεί να αποσταθεροποιηθεί όταν  $W''(\bar{u}) < 0$ . Στην πράξη τα μη γραμμικά φαινόμενα κυριαρχούν γρήγορα. Παρά τους περιορισμούς που συζητήσαμε πιο πάνω, φαίνεται καθαρά ότι αν  $W''(\bar{u}) < 0$  και  $\varepsilon \ll 1$  η αστάθεια της  $\bar{u}$  οδηγεί στη δημιουργία πολύ πολύπλοκων δομών. Αυτό επίσης αποδεικνύεται από αριθμητικές προσομοιώσεις που δείχνουν τη γρήγορη αποσταθεροποίηση του  $\bar{u}$  σε μία συνάρτηση που είναι κοντά στη συνάρτηση βήματος με πολύ μεγάλο αριθμό ταλαντώσεων μεταξύ του  $\pm 1$  επί του  $\Omega$ .

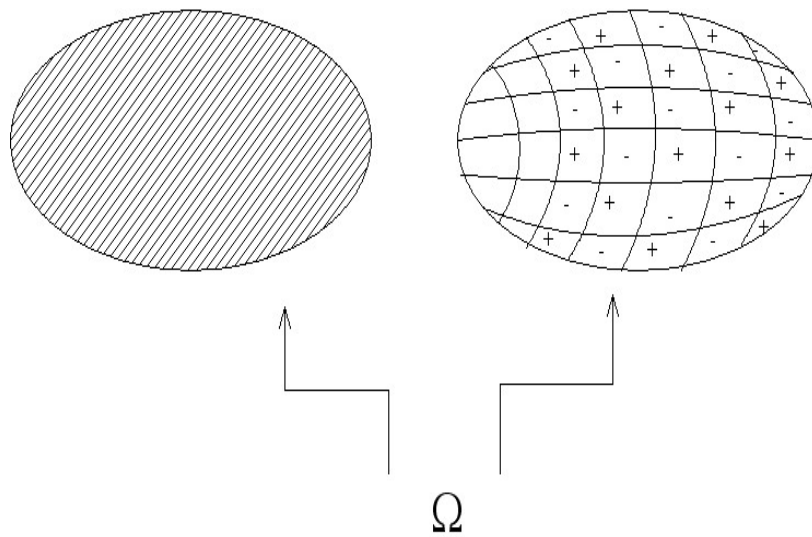
Αυτή η συμπεριφορά απεικονίζει πολύ καλά αυτό που λέει η επιστήμη των υλικών *Αποσύνθεση* δυαδικού κράματος. Το φαινόμενο του ξαφνικού σχηματισμού μιας κοκκώδους

δομής όπου οι δύο ευσταθείς φάσεις με συγκεντρώσεις  $c^L(T_1)$  και  $c^S(T_1)$  ενώνονται σε μικρά κομματάκια μετά από απότομη ψύξη, από  $T_0$  σε  $T_1$  του αρχικού ομογενούς κράμματος με συγκέντρωση  $c_0$ . Θα αναφερόμαστε στο διάστημα  $\{\bar{u} | W''(\bar{u}) < 0\}$  σαν το διάστημα αποσύνθεσης (spinodal interval). Σημειώνουμε ότι η εξίσωση

$$u_t = \Delta(W'(u))$$

που προέρχεται θέτοντας  $\varepsilon = 0$  στην εξίσωση Cahn - Hilliard, δεν είναι καλώς τοποθετημένη για  $u$  στο διάστημα αποσύνθεσης. Αυτός είναι ένας ακόμη λόγος για αστάθειες και για τη δημιουργία κατακερματισμένων δομών των λύσεων της Cahn - Hilliard όταν  $\varepsilon \ll 1$  (βλέπε σχήμα 3.5)

Εαν το  $c_0$  είναι επαρκώς κοντά στο  $c^L(T_1)$  ή  $c^S(T_1)$ , για παράδειγμα στο  $c^L(T_1)$ , τότε ο διαχωρισμός του κράματος ακολουθεί διαφορετική πορεία. Πυρήνες με διαφορετική συγκέντρωση, έστω  $c_{nu}$ , όπου το  $c^L(T_1) < c_{nu} < c^S(T_1)$ , εμφανίζονται τυχαία στον πυρήνα της προηγούμενης ομογενούς φάσης με συγκέντρωση  $c_0$ . Τότε οι πυρήνες μεγαλώνουν σε μέγεθος και την ίδια στιγμή η συγκέντρωσή τους πλησιάζει την  $c^S(T_1)$ . Αυτό είναι σχηματικά αυτό που η επιστήμη υλικών ονομάζει *πυρηνοποίηση*.



Σχήμα 3.5: Αποσύνθεση του ομοιόμορφου μήγματος

### 3.4 Μέθοδος Ιδιόμορφων διαταραχών

Όταν παρατηρούμε τις δομές, συχνά καταλαβαίνουμε τη συμπεριφορά τους από τις διεπιφάνειες όπου οι καταστάσεις της ύλης αλλάζουν απότομα (νερό - πάγος), ή από την ανίχνευση της κίνησης του συνόρου όπου χωρίζει τα δύο διαφορετικά υλικά (νερό - λάδι). Δηλαδή, αντί να κοιτάμε ολόκληρο το σύστημα, συγκεντρώνουμε την προσοχή μας στην κίνηση των διεπιφανειών. Η μέθοδος των ιδιόμορφων διαταραχών είναι πολύ χρήσιμη γιατί συνοψίζει την πληροφορία ολόκληρου του συστήματος στη δυναμική των διεπιφανειών. Όπως έχουμε ήδη δει, υπάρχουν πολλά ιδιόμορφα όρια (διακεκριμένα όρια) ανάλογα με την κλίμακα που επιλέγουμε να δούμε τα πράγματα. Αφ' ενός η ύπαρξη πολλών ιδιόμορφων ορίων μας επιτρέπει να κατανοήσουμε την αμοιβαία σχέση μεταξύ διάφορων μοντέλων εξισώσεων που έχουμε δει μέχρι τώρα. Από την άλλη μεριά, η μέθοδος της ανάλυσης των εξισώσεων των διεπιφανειών σαν ιδιόμορφα όρια είχε πρόσφατα μία μεγάλη πρόοδο. Θα θεωρήσουμε πρώτα τη μέση καμπυλότητα σαν ένα τυπικό παράδειγμα τέτοιων εξισώσεων διεπιφανειών.

### 3.4.1 Μέση Καμπυλότητα

Έχουμε ήδη εξηγήσει ότι η καταγραφή της κίνησης της διεπιφάνειας είναι πολύ σημαντική για να καταλάβουμε τη δυναμική σχηματισμού των δομών. Θα μιλήσουμε τώρα για το απλούστερο μέχρι τώρα θεμελιώδες παράδειγμα της μέσης καμπυλότητας. Η μέθοδος που περιγράφουμε παρακάτω, είναι αποτελεσματική ακόμη και αν δημιουργηθούν ανωμαλίες. Αυτή η μέθοδος θα παίζει αργότερα έναν σημαντικό ρόλο που θα δούμε ότι ένα ιδιόμορφο όριο μίας βαθμωτής εξίσωσης αντίδρασης - διάχυσης είναι όντως η μέση καμπυλότητα.

**Τι είναι η μέση καμπυλότητα;**

Έστω  $\Gamma_0$  μία  $(n - 1)$ -διάστατη, κλειστή, ομαλή υπερεπιφάνεια στον  $\mathbb{R}^n$ . Ξεκινώντας από αυτή την επιφάνεια, κάθε σημείο στην υπερεπιφάνεια κινείται στην κάθετη κατεύθυνση με ταχύτητα ανάλογη της μέσης καμπυλότητας στο συγκεκριμένο σημείο. Μια τέτοια κίνηση διεπιφάνειας, που περιγράφεται από την οικογένεια  $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$ , καλείται **μέση καμπυλότητα** ξεκινώντας από το  $\Gamma_0$ . Πιο συγκεκριμένα, έστω  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη  $\Gamma_t$  εξωτερικά του  $\Gamma_t$ . Η μέση καμπυλότητα  $H$  στην κατεύθυνση του  $\mathbf{n}$  ορίζεται από την

$$H = H_1 + H_2 + \dots + H_{n-1}$$

με  $H_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) οι κύριες καμπυλότητες. Η μέση καμπυλότητα είναι μία οικογένεια κινούμενων υπερεπιφανειών στις οποίες η κάθετη ταχύτητα δίνεται από την

$$\mathbf{V} = H\mathbf{n}$$

Αφού η μέση καμπυλότητα δίνεται επίσης και από την  $H = -\text{div}(\mathbf{N})$  μπορεί να εκφραστεί και ως

$$V = -\text{div}(\mathbf{n})\mathbf{n}$$

Εδώ, η απόκλιση υπολογίζεται ως προς το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{n}$  που έχει επεκταθεί ομαλά σε μια γειτονιά του  $\Gamma_t$ .

**Σχόλιο 3.4.1 (Εξίσωση σταθερής αύξησης)** Για σταθερά  $c > 0$  ας υποθέσουμε

$$V = cn$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει την κίνηση των διεπιφανειών που μεγαλώνουν στην εξωτερική κατεύθυνση με σταθερή ταχύτητα. Αν και τέτοια κίνηση μπορεί να φαίνεται απλή, είναι συχνή η περίπτωση κατά την οποία δημιουργούνται ανωμαλίες σε πεπερασμένο χρόνο αν η αρχική διεπιφάνεια είναι ομαλή.

### 3.5 Από την εξίσωση Cahn - Hilliard στο πρόβλημα Mullins - Sekerka

Η εξίσωση Cahn - Hilliard δίνεται από τον τύπο:

$$u_t = -\Delta(\varepsilon^2 \Delta u + f(u)), \quad x \in \Omega$$

Κάνοντας λοιπόν κατάλληλο scaling στο χρόνο, παίρνουμε

$$\begin{cases} u_t = -\Delta v \\ v = \varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} f(u) \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο διαταραχών ώστε να περάσουμε στο όριο για  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### Εξωτερικό ανάπτυγμα

Αρχικά λοιπόν παίρνουμε το εξωτερικό ανάπτυγμα για  $x$  μακριά από τη διεπιφάνεια και γράφουμε:

$$u(x, t) = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$$

$$v(x, t) = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots$$

Θα αντικαταστήσουμε τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση

$$\begin{cases} u_t = -\Delta v & (1) \\ v = \varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} f(u) & (2) \end{cases}$$

Και έχουμε:

$$v_0 + \varepsilon v_1 = \varepsilon \Delta(u_0 + \varepsilon u_1) - \frac{1}{\varepsilon} (f(u_0) + \varepsilon f'(u_0)u_1)$$

Συγκεντρώνουμε τους όρους τάξης  $O(1/\varepsilon)$  και έχουμε:

$$f(u_0) = 0, \quad \text{δηλαδή } u_0 = \pm 1$$

Συγκεντρώνουμε τώρα τους όρους τάξης  $O(1)$  και παίρνουμε:

$$v_0 = -f'(u_0)u_1 \quad \text{δηλαδή } f'(u_0)u_1 = -v_0 \quad \text{όπου παίρνουμε } u_1 = \frac{-v_0}{f'(u_0)}$$

Αφού  $u_0$  σταθερό τότε  $\partial_t u_0 = 0$ . Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\partial_t(u_0 + \varepsilon u_1) = -\Delta(v_0 + \varepsilon v_1) \quad \text{δηλαδή } \partial_t u_0 + \varepsilon \partial_t u_1 = -\Delta v_0 - \varepsilon \Delta v_1$$

και συγκεντρώνοντας τους όρους τάξης  $O(1)$  παίρνουμε:

$$-\Delta v_0 = 0 \quad \text{δηλαδή } \Delta v_0 = 0 \quad \text{και άρα } \Delta(-f'(u_0)u_1) = 0$$

Τώρα συγκεντρώνοντας όρους τάξης  $O(\varepsilon)$  στη (1) παίρνουμε:

$$\partial_t u_1 = -\Delta v_1$$

και

$$u_1 = \frac{-v_0}{f'(u_0)}$$

## Εσωτερικό Ανάπτυγμα

Για κάθε  $t$  το σύνολο

$$\{x \in \Omega : d(x, t) = 0\}$$

είναι μία υπερεπιφάνεια όπου  $d(x, t)$  είναι η απόσταση από αυτή. Επίσης  $d(x, t) = 0$  πάνω στην υπερεπιφάνεια,  $d_t(x, t) = V$  και  $\Delta d = H$

Το εσωτερικό ανάπτυγμα για  $x$  κοντά στη διεπιφάνεια είναι

$$u(x, t) = q\left(\frac{d(x, t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon Q\left(\frac{d(x, t)}{\varepsilon}\right) + \dots$$

$$v(x, t) = \tilde{q}\left(\frac{d(x, t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \tilde{Q}\left(\frac{d(x, t)}{\varepsilon}\right) + \dots$$

Θέτουμε  $z = \frac{d(x, t)}{\varepsilon}$  και υπολογίζουμε πρώτα τα εξής:

- $\Delta u = \frac{\partial_z q}{\varepsilon} \Delta d + \frac{\partial_{zz}^2 q}{\varepsilon^2} + \partial_z Q \Delta d + \frac{\partial_{zz}^2 Q}{\varepsilon}$
- $\Delta v = \frac{\partial_z \tilde{q}}{\varepsilon} \Delta d + \frac{\partial_{zz}^2 \tilde{q}}{\varepsilon^2} + \partial_z \tilde{Q} \Delta d + \frac{\partial_{zz}^2 \tilde{Q}}{\varepsilon}$
- $f(u) = f(q) + \varepsilon f'(q)Q$
- $u_t = \frac{\partial_z q}{\varepsilon} d_t + \partial_z Q d_t$

Έτσι από την εξίσωση (2) του συστήματος έχουμε:

$$\tilde{q} + \varepsilon \tilde{Q} = \varepsilon \left( \frac{\partial_z q}{\varepsilon} \Delta d + \frac{\partial_{zz}^2 q}{\varepsilon^2} + \partial_z Q \Delta d + \frac{\partial_{zz}^2 Q}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon} (f(q) + \varepsilon f'(q)Q) \quad (3)$$

Τώρα αντικαθιστώντας στην (1) τους προηγούμενους υπολογισμούς παίρνουμε το παρακάτω ανάπτυγμα:

$$\frac{\partial_z q}{\varepsilon} d_t + \partial_z Q d_t = - \left( \frac{\partial_z \tilde{q}}{\varepsilon} \Delta d + \frac{\partial_{zz}^2 \tilde{q}}{\varepsilon^2} + \partial_z \tilde{Q} \Delta d + \frac{\partial_{zz}^2 \tilde{Q}}{\varepsilon} \right) \quad (4)$$

Συγκεντρώνουμε τους όρους τάξης  $O(1/\varepsilon^2)$  και παίρνουμε:

$$\partial_{zz}^2 \tilde{q} = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \tilde{q} = a(x, t)z + b(x, t)$$

## Συναρμογή εξωτερικής και εσωτερικής λύσης

Τώρα πρέπει να κατασκευαστούν οι συνθήκες συναρμογής της εσωτερικής και της εξωτερικής λύσης: Σταθεροποιούμε ένα  $x \in \Gamma$  και απαιτούμε

$$\tilde{q} + \varepsilon \tilde{Q} = v_0 + \varepsilon v_1$$

$$\begin{cases} \tilde{q} = v_0 \\ v_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{q} = \lim_{z \rightarrow \infty} (a(x, t)z + b(x, t)) \end{cases}$$

Για  $z \rightarrow \infty$  δηλαδή  $a = 0, b = v_0$ .

Συγκεντρώνοντας τους όρους τάξης  $O(1)$  στην (3) έχουμε:

$$\tilde{q} = \partial_z q \Delta d + \partial_{zz}^2 Q - f'(q)Q$$

$$\tilde{q} - \partial_z q \Delta d = \partial_{zz}^2 Q - f'(q)Q \quad \text{δηλαδή} \quad \tilde{q} - \partial_z q \Delta d = LQ$$

και από το Fredholm Alternative

$$\chi \perp (\tilde{q} - \partial_z q \Delta d)$$

όπου  $\chi \in \text{Ker} L^*$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi \tilde{q} dz - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_z q \chi \Delta d dz = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_z q \chi \Delta d dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi \tilde{q} dz$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \mu &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \chi \partial_z q dz \right)^{-1} \\ \Rightarrow \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_z q \chi dz \right) \Delta d &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi \tilde{q} dz \quad \text{δηλαδή} \quad \mu^{-1} \Delta d = \tilde{q} \Rightarrow \tilde{q} = cH \end{aligned}$$

Επομένως παίρνουμε  $v_0 = cH$  στην επιφάνεια.

Αυτό που λείπει είναι ο νόμος της εξέλιξης, που θα πρέπει να προέλθει από το εσωτερικό ανάπτυγμα. Από την (4) συγκεντρώνουμε τους όρους τάξης  $O(1/\varepsilon)$  και παίρνουμε:

$$\partial_z q d_t = -\partial_z \tilde{q} \Delta d + \partial_{zz}^2 \tilde{Q}$$



Επειδή όμως  $\tilde{q} = v_0$  έπεται ότι  $\partial_z \tilde{q} = 0$ . Επίσης θυμόμαστε ότι  $d_t = V$ ,  $\Delta d = H$  και έτσι

$$\partial_z qV = -\partial_z \tilde{q}H + \partial_{zz}^2 \tilde{Q} \quad \text{δηλαδή} \quad \partial_z qV = \partial_{zz}^2 \tilde{Q}$$

Ολοκληρώνουμε ως προς  $z$  στο  $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_z qV dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{zz}^2 \tilde{Q} dz$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες συναρμογής

$$q(+\infty) = 1, \quad q(-\infty) = -1$$

παίρνουμε από πάνω ότι:

$$2V = \tilde{Q}_z(+\infty) - \tilde{Q}_z(-\infty)$$

## Κεφάλαιο 4

### Αδροποίηση

#### 4.1 Προβλήματα στο σχεδόν στατικό πρόβλημα Stefan (Mullins - Sekerka)

##### 4.1.1 Ο εξελικτικός νόμος

Εστω  $u(x, t)$  μία συνάρτηση του  $x$  και  $t$  (όπου  $t$  μία παράμετρος) που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{εκτός της } \Gamma(t), \text{ στο } \Omega \\ u = -H & \text{στη } \Gamma(t) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1.1)$$

όπου το  $\Omega$  είναι ένα απλό φραγμένο χωρίο στον  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma(t)$  είναι μία απλή κλειστή καμπύλη, που χωρίζει το χωρίο  $\Omega$  στο εσωτερικό  $\Omega_i$  και στο εξωτερικό  $\Omega_e$ , και  $H$  είναι η καμπυλότητα της  $\Gamma$  με τη σύμβαση προσήμου ότι  $H > 0$  για ένα κύκλο. Το πρόβλημα (4.1.1) περιέχει ένα εσωτερικό πρόβλημα Dirichlet πάνω στο  $\Omega_i$ , και ένα εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet - Neumann πάνω στο  $\Omega_e$ , που καθορίζουν τα  $u_i$  και  $u_e$  αντίστοιχα.

Ο νόμος της εξέλιξης της  $\Gamma(t)$  δίνεται καθορίζοντας τη

$$V = - \left( \frac{\partial u_i}{\partial n_i} + \frac{\partial u_e}{\partial n_e} \right) \quad \text{στη } \Gamma(t) \quad (4.1.2)$$

όπου  $V$  είναι η κάθετη ταχύτητα στη  $\Gamma(t)$  που ορίζεται ως εξής:

Για κάθε δοσμένο  $t$ , η  $\Gamma(t)$  παριστάνει μία καμπύλη που παραμετρικοποιείται από την

$$s \in [0, 1] : \Gamma(t) = \{X(t, s) | s \in [0, 1]\} \quad (4.1.3)$$

Η κάθετη ταχύτητα ορίζεται ως εξής:

$$V(s, t) = -\frac{\partial X(s, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{N}(s, t) \quad (4.1.4)$$

όπου  $\mathbf{N}(s, t)$  είναι το μοναδιαίο κάθετο στη  $\Gamma(t)$

Στην (4.1.2) συμβολίζουμε με  $\frac{\partial}{\partial n_i}$  την παράγωγο στην κάθετη κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος στο  $\Omega_i$  εφόσον το  $\frac{\partial}{\partial n_e}$  παριστάνει την παράγωγο στην κάθετη κατεύθυνση του εξωτερικού κάθετου στο  $\Omega_e$ .

Η εξέλιξη μίας αρχικής καμπύλης  $\Gamma(0)$  γίνεται ως εξής:

Αρχικά ορίζουμε την  $u(x, 0)$  λύνοντας το (4.1.1) πάνω στα  $\Omega_i(0)$ ,  $\Omega_e(0)$ . Μετά μέσω της (4.1.2) παίρνουμε την κάθετη ταχύτητα  $V$ . Ύστερα η  $\Gamma(0)$  εξελίσσεται σε μία νέα καμπύλη μετακινούμενη κατά μήκος της κάθετης ταχύτητας  $V$ . Αυτό οδηγεί σε ένα νέο  $\Omega_i(t_1)$ ,  $\Omega_e(t_1)$ . Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή με τα  $\Omega_i(0)$ ,  $\Omega_e(0)$  να αντικαθίστανται από τα  $\Omega_i(t_1)$ ,  $\Omega_e(t_1)$ , κ.λπ.

## 4.1.2 Πρόβλημα 1 (Green's Theorem)

1. Υποθέτουμε ότι ο παραπάνω νόμος της εξέλιξης είναι καλώς τεθειμένος και ότι η  $\Gamma(t)$  είναι  $C^2$ , τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &\leq 0 \quad (\text{Νόμος ελαχιστοποίησης της περιμέτρου}) \\ \frac{dA(t)}{dt} &= 0 \quad (\text{Νόμος διατήρησης του εμβαδού}) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Το  $L(t)$  παριστάνει το μήκος της  $\Gamma(t)$  και το  $A(t)$  παριστάνει το περιεχόμενο εμβαδό. Μπορούμε να πάρουμε έτοιμους τους τύπους από τη διαφορική γεωμετρία

$$\frac{dL}{dt} = \int_{\Gamma(t)} HVdS, \quad \frac{dA}{dt} = \int_{\Gamma(t)} VdS \quad (4.1.6)$$

2. Δείχνουμε ότι η  $\Gamma(t)$  είναι λύση ισορροπίας (δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου) αν και μόνο αν η  $\Gamma(t)$  είναι κύκλος.

### 4.1.3 Πρόβλημα 2 (Αρχή Μεγίστου)

Έστω ότι η  $\Gamma(0)$  περιέχει δύο κύκλους διαφορετικών ακτίνων  $R_1 < R_2$ ,  $S(\xi^1; R_1)$  και  $S(\xi^2; R_2)$ . Έστω  $H_j$  που παριστάνει την καμπυλότητα της  $S(\xi^j; R_j)$  και ας σημειώσουμε  $H_1 = \frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2} = H_2$ . Σημειώνουμε εδώ ότι η αρμονική επέκταση των καμπυλοτήτων μέσα στους κύκλους είναι σταθερές.

Θυμόμαστε την αρχή του Hopf η οποία λέει ότι αν έχουμε μία αρμονική συνάρτηση  $u$  σε μία μπάλα  $B_r(0)$  και  $x_0 \in \partial B_r(0)$  το μέγιστο της  $u$  τότε ισχύει ότι

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x_0) \geq \frac{k}{r}(u(x_0) - u(0))$$

για κάποια σταθερά  $k$  αυστηρά θετική.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την αρχή μεγίστου και την αρχή του Hopf δείχνουμε ότι

$$V|_{S(\xi^1; R_1)} < 0, \quad V|_{S(\xi^2; R_2)} > 0$$

εννοώντας ότι η μικρότερη σφαίρα θα ξεκινήσει να συρρικνώνεται και η μεγαλύτερη θα μεγαλώνει.

### 4.1.4 Πρόβλημα 3 (Θεωρία Δυναμικού)

Να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα (4.1.1) μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα που ζει εξολοκλήρου πάνω στη διεπιφάνεια κάνοντας τα ακόλουθα βήματα:

## Βήμα 1

Έστω  $G(x, y)$  η συνάρτηση Green του προβλήματος Neumann:

$$\begin{cases} \Delta_y G(x, y) = \delta_x(y) - \frac{1}{|\Omega|}, & \text{στο } \Omega, x \in \Omega, y \in \Omega \\ \frac{\partial G}{\partial n_y} = 0 \\ \int_{\Omega} G(x, y) dy = 0 \end{cases} \quad (4.1.7)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει. Δείχνουμε ότι

$$\int_{\Gamma(t)} V dS = 0 \quad (4.1.8)$$

## Βήμα 2

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον  $\delta$ -δακτύλιο  $\Omega_\delta = \{x \in \Omega | d(x, \Gamma(t)) < \delta\}$  και έστω  $\Omega_\delta^-, \Omega_\delta^+$  παριστάνουν το εσωτερικό και το εξωτερικό,  $\Omega \setminus \Omega_\delta = \Omega_\delta^- \cup \Omega_\delta^+$ . Διαπιστώνουμε από τα (4.1.1) και (4.1.7) ότι

$$\begin{aligned} -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_\delta^-} u dy &= \int_{\partial\Omega_\delta^-} \left( \frac{\partial G}{\partial n_y^-} - G \frac{\partial u}{\partial n_y^-} \right) dS_y \\ -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_\delta^+} u dy &= \int_{\partial\Omega_\delta^+} \left( \frac{\partial G}{\partial n_y^+} - G \frac{\partial u}{\partial n_y^+} \right) dS_y \quad n^+ = -n^- \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

όπου  $n^+, n^-$  τα εξωτερικά μοναδιαία κάθετα στα  $\Omega_\delta^+$  και  $\Omega_\delta^-$  και το  $|\Omega|$  είναι το μέτρο του  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} -\frac{1}{|\Omega|} \left[ \int_{\Omega_\delta^-} u dy + \int_{\Omega_\delta^+} u dy \right] &= \int_{\partial\Omega_\delta^-} \frac{\partial G}{\partial n_y^-} u dS_y + \int_{\partial\Omega_\delta^+} \frac{\partial G}{\partial n_y^+} u dS_y \\ &- \int_{\partial\Omega_\delta^-} \frac{\partial u}{\partial n_y^-} G dS_y - \int_{\partial\Omega_\delta^+} \frac{\partial u}{\partial n_y^+} G dS_y \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

### Βήμα 3

Μετά παίρνουμε το όριο  $\delta \rightarrow 0$  στην (4.1.9) και χρησιμοποιώντας βασική θεωρία δυναμικού παίρνουμε:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\delta^-} \frac{\partial G}{\partial n_y^-} u dS_y = \frac{1}{2}H + \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial G}{\partial n_y^-} H dS_y \quad (4.1.11)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\delta^+} \frac{\partial G}{\partial n_y^+} u dS_y = \frac{1}{2}H + \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial G}{\partial n_y^+} H dS_y$$

από την οποία παίρνουμε

$$-\bar{u} = H - \int_{\Gamma(t)} VG(x, y) dS_y \quad (4.1.12)$$

όπου  $\bar{u}$  η μέση τιμή του  $u$  στο  $\Omega$ .

### Βήμα 4

Από την (4.1.12) έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma(t)} G(x, y)V(y) dS_y - \frac{1}{|\Gamma(t)|} \int_{\Gamma(t)} \int_{\Gamma(t)} G(x, y)V(y) dS_y dS_x \\ &= H - \frac{1}{|\Gamma(t)|} \int_{\Gamma(t)} H dS_y \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

## 4.2 Mullins - Sekerka Δυναμική

Το μοντέλο Mullins-Sekerka όπως είδαμε προκύπτει σαν μοναδικό όριο για την εξίσωση Cahn-Hilliard, μία παραβολική εξίσωση τέταρτης τάξης που όπως είπαμε χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση του διαχωρισμού φάσης και για τα φαινόμενα αδροποίησης σε ένα δυαδικό κράμα που είναι υπό τήξη [1], [7], [8], [24]. Το σχεδόν στατικό πρόβλημα Mullins-Sekerka

[20] ή αλλιώς πρόβλημα Stefan:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{εκτός } \Gamma(t), \text{ στο } \Omega \subset \mathbb{R}^m, m = 2, 3 \\ u = H, & \text{στην } \Gamma(t) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{στο } \partial\Omega \\ V = \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right], & \text{στη } \Gamma(t) \end{cases} \quad (4.2.14)$$

όπου  $u$  είναι η συγκέντρωση,  $H$  είναι η μέση καμπυλότητα της  $\Gamma$ . η σύμβαση προσήμου για την  $H$  είναι ότι η  $H$  είναι θετική για σφαίρα που συρρικνώνεται,  $\vec{\nu}$  είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο  $\partial\Omega$ ,  $V$  είναι η κάθετη ταχύτητα θετική για σφαίρα που συρρικνώνεται.  $\left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] = \frac{\partial u^+}{\partial n^+} + \frac{\partial u^-}{\partial n^-}$  είναι το άλμα της παραγώγου του  $u$  στην κάθετη κατεύθυνση του  $\Gamma(t)$  όπου  $u^+$ ,  $u^-$  είναι οι περιορισμοί του  $u$  στο εξωτερικό  $\Omega^+(t)$  και το εσωτερικό  $\Omega^-(t)$  της  $\Gamma(t)$  στο  $\Omega$  και  $n^-, n^+$  τα μοναδιαία εξωτερικά κάθετα στο  $\Omega^+(t)$  και στο  $\Omega^-(t)$  αντίστοιχα. Εδώ  $\Gamma(t) = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i(t)$  είναι η ένωση των συνόρων των  $N$  σωματιδίων και το  $\Omega$  είναι ένα φραγμένο, απλό χωρίο (αυτό που περιέχει το μείγμα). Το μοντέλο Mullins-Sekerka είναι ένας μη τοπικός εξελικτικός νόμος όπου η κάθετη ταχύτητα της διαδιδόμενης διεπιφάνειας εξαρτάται από το άλμα στη διεπιφάνεια της κάθετης παραγώγου μίας συνάρτησης που είναι αρμονική και στις δύο πλευρές της διεπιφάνειας και που ισούται με τη μέση καμπυλότητα της διαδιδόμενης διεπιφάνειας. Αν  $H = \text{σταθερά}$  στη  $\Gamma(t)$  τότε  $u(x) = H = \text{σταθερά}$ ,  $\forall x \in \Omega$  και  $V \equiv 0$  λύνει την (4.2.14). Επομένως  $\Omega^-$  είναι η ένωση των  $N \geq 1$  ίσων μπαλών με την ίδια ακτίνα που είναι ισοδύναμες στην (4.2.14). Σ' αυτή την παράγραφο ενδιαφερόμαστε για την εξέλιξη σε δύο διαστάσεις.

Συμβολίζουμε με  $Per(\Gamma(t))$ ,  $Vol(\Omega^-(t))$ , την περίμετρο της επιφάνειας και το περιεχόμενο εμβαδό αντίστοιχα, τότε η (4.2.14) είναι η διατήρηση όγκου και ο νόμος ελαχιστοποίησης της επιφάνειας. Ένας υπολογισμός (για παράδειγμα [9]) δείχνει ότι

$$\frac{d}{dt} Per(\Gamma(t)) = - \int_{\Gamma} HV = - \int_{\Gamma} u \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq 0 \quad (4.2.15)$$

$$\frac{d}{dt} Vol(\Omega^-(t)) = - \int_{\Gamma} V = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \Delta u = 0 \quad (4.2.16)$$

Θεωρούμε την περίπτωση όπου το  $\Omega^-$  είναι η ένωση των  $N \geq 1$  μικρών «σωματιδίων» που είναι αρχικά πολύ κοντά στις μπάλες  $B_{\xi_i, R_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$  με κέντρα  $\xi_i$  και ακτίνες  $R_i$ . Υποθέτουμε ότι οι ακτίνες είναι μικρές σε σχέση με την απόσταση των σωματιδίων. Οι υποθέσεις αυτές συνεπάγονται ότι δουλεύουμε υπό την προϋπόθεση ότι το κλάσμα του όγκου, που είναι ο λόγος  $\varphi$  μεταξύ του όγκου της διασκορπισμένης φάσης  $|\Omega^-| \cong \sum_{i=1}^N \pi R_i^2$  και του μέτρου του συνόλου  $\Omega$  είναι μικρός

$$\varphi = \frac{|\Omega^-|}{|\Omega|} \cong \frac{\sum_{i=1}^N \pi R_i^2}{|\Omega|} \ll 1 \quad (4.2.17)$$

Δείχνουμε ότι κάτω από αυτούς του περιορισμούς για τις αρχικές συνθήκες τα σωματίδια διατηρούν το σχεδόν κυκλικό σχήμα τους μέχρι να συμβεί μία ιδιομορφία που πάντα θα έχει ως αποτέλεσμα ότι ένα ή περισσότερα σωματίδια εξαφανίζονται αφού συρρικνωθούν. Θα εξάγουμε τις σωστές εξισώσεις για τις ακτίνες παίρνοντας υπόψιν στους υπολογισμούς την απόσταση και το μέγεθος των γειτονικών σωματιδίων και επίσης τις εξισώσεις κίνησης των κέντρων των σωματιδίων. Στην περίπτωση όπου το σύνορο  $\partial\Omega$  έχει αφαιρεθεί, οι εξισώσεις των ακτίνων και των κέντρων παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{R}_i = & \frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{R_i} \left\{ \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_i} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2}{|\log \varphi|} \left[ \log \frac{R_i}{\varphi^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_i} \right) + \sum_{h \neq i} \log |\xi_i - \xi_h| \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_h} \right) - E \right] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

$$\dot{\xi}_i = -\frac{4}{|\log \varphi|} \sum_{h \neq i} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_h} \right) \frac{\xi_h - \xi_i}{|\xi_h - \xi_i|^2} + \dots \quad (4.2.19)$$

όπου οι «τελίτσες» αντικαθιστούν όρους υψηλότερης τάξης,  $\bar{R}$  είναι ο αρμονικός μέσος των  $R_i$  που ορίζεται από:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{R_j} \quad (4.2.20)$$



και  $E$  ορίζεται από τη διατήρηση του όγκου που δίνεται από την:

$$E = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \log \frac{R_k}{\varphi^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_k} \right) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{h \neq k} \log |\xi_h - \xi_k| \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_h} \right) \quad (4.2.21)$$

Σημειώνουμε ότι τα παραπάνω γινόμενα και αθροίσματα τα πήραμε μόνο για τα σωματίδια με θετικές ακτίνες. Όπως είναι γνωστό το πρόβλημα Mullins-Sekerka έχει μία αναλλοίωτη ιδιότητα. Πράγματι, αν  $t \rightarrow \Omega^-(t)$  είναι μία λύση και  $\mu > 0$  μία θετική σταθερά τότε  $t \rightarrow \tilde{\Omega}^-(t) =: \mu \Omega^-\left(\frac{t}{\mu^3}\right)$  είναι πάλι λύση. Οι εξισώσεις

$$\dot{R}_i = \frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{R_i} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_i} \right) \quad (4.2.22)$$

$$\dot{\xi}_i = -\frac{4}{|\log \varphi|} \sum_{h \neq i} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_h} \right) \frac{\xi_h - \xi_i}{|\xi_h - \xi_i|^2} \quad (4.2.23)$$

που προκύπτουν από τις (4.2.18), (4.2.19) κρατώντας τους κύριους όρους με την ίδια αναλλοίωτη ιδιότητα: αν  $t \rightarrow (R(t), \xi(t))$  είναι μια λύση τότε  $t \rightarrow (\tilde{R}(t), \tilde{\xi}(t)) =: (\mu R(\frac{t}{\mu^3}), \mu \xi(\frac{t}{\mu^3}))$  είναι πάλι λύση. Οι πλήρεις εξισώσεις (4.2.18) αποδεικνύουν ακριβώς την ιδιότητα αυτή που μοιράζονται με τις εξισώσεις (4.2.14), και (4.2.22).

Οι εξισώσεις (4.2.20), (4.2.22) δείχνουν ότι δοσμένου  $t$ , η ακτίνα  $R_i(t)$  του  $i$ -οστού σωματιδίου, φθίνει ή αυξάνει σύμφωνα με τη χρονική στιγμή που είναι πάνω ή κάτω από τη μέση τιμή  $\bar{R}$ . Επιπλέον, οι εξισώσεις (4.2.22) διατηρούν τη συνολική περιεχόμενη επιφάνεια και ελαττώνουν τη συνολική περίμετρο,

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N R_i^2 = 0 \quad (4.2.24)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N R_i \leq 0 \quad (4.2.25)$$

αντικατοπτρίζοντας τη διατήρηση της περιεχόμενης επιφάνειας και την ελάττωση της περιμέτρου, ιδιότητας του προβλήματος Mullins-Sekerka. Υποθέτουμε ότι

$$0 < R_1(0) < R_2(0) < \dots < R_N(0),$$

και δείχνουμε ότι η λύση της (4.2.22) διατηρεί τη  $R_1(t) < \dots < R_N(t)$  στο μέγιστο διάστημα ύπαρξης  $[0, T_1)$  και ότι  $T_1$  είναι φραγμένο και χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι

$$\lim_{t \rightarrow T_1^-} R_1(t) = 0.$$

Μετά το  $t = T_1$ , η λύση της (4.2.22) μπορεί να γίνει συνεχής σε ένα διάστημα  $[T_1, T_2)$  αφαιρώντας την πρώτη εξίσωση: αλλάζοντας το  $N$  σε  $N - 1$ , και παίρνοντας  $R_j(T_1)$ ,  $j = 2, \dots, N$  ως αρχική συνθήκη. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μπορεί κάποιος να ορίσει μία χρονική ακολουθία  $T_1 < T_2 < \dots < T_{N-1}$  χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι  $\lim_{t \rightarrow T_j^-} R_j(t) = 0$ . Δείχνουμε ότι κάτω από την παραπάνω υπόθεση ότι  $\Omega^-(0) \cong \bigcup_{i=1}^N B_{\xi_i(0), R_i(0)}$ , κάτι παρόμοιο ισχύει για το πρόβλημα Mullins-Sekerka ελεύθερου συνόρου. Μάλιστα ισχύει ότι υπάρχουν χρόνοι  $\hat{T}_1 < \hat{T}_2 < \dots < \hat{T}_{N-1}$  κοντά στα  $T_1, \dots, T_{N-1}$  τέτοιοι ώστε στο χρόνο  $\hat{T}_j$  να συμβαίνει μία ιδιομορφία και το  $j$ -οστό σωματίδιο να συρρικνώνεται μέχρι την εξαφάνισή του. Οι εξισώσεις (4.2.22) για την περίπτωση του 2 που πρώτα παράχθηκαν στο [30] από τη μέθοδο των εικόνων. Οι εξισώσεις (4.2.22) που επίσης προέκυψε από το [22] ξεκινώντας από μία διαφοροποίηση του μοντέλου Mullins-Sekerka όπου υποθέτει τη σχέση Gibbs-Thomson σε μέση ολοκληρωτική μορφή.

### 4.3 Εξισώσεις ακτίνων και κέντρων σε δύο διαστάσεις

Τώρα παρουσιάζουμε το πως προκύπτουν οι εξισώσεις των ακτίνων και των κέντρων σε δύο διαστάσεις. Παρακάτω θα δείξουμε ότι σε οριακά μικρό μέγεθος η απόκλιση από τη σφαιρικότητα που μετρείται από τη συνάρτηση  $r_i$ , που εισάγεται στην παράγραφο 5.3 δεν επηρεάζει την εξέλιξη των κέντρων και των ακτίνων των σωματιδίων. Έτσι στην παράγραφο αυτή παράγοντας φορμαλιστικά τις εξισώσεις θα υποθέσουμε ότι το  $\Omega^-$  είναι η ένωση των  $N \geq 1$  τέλειων μπαλών κέντρων  $\xi_i$  και ακτίνων  $R_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  που είναι  $\Omega^- = \bigcup_{i=1}^N B_{\xi_i, R_i}$ . Αναπαριστούμε το σύνορο  $\partial B_{\xi_i, R_i}$  του  $B_{\xi_i, R_i}$  με την απεικόνιση  $X^i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$

που ορίζεται μεσω της

$$S^1 \ni u \rightarrow x = X^i(u) := \xi_i + R_i u \quad (4.3.26)$$

Δουλεύουμε κάτω από την υπόθεση ότι οι ακτίνες  $R_i$  είναι μικρές, έτσι υποθέτουμε ότι  $R_i \ll 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Για το λόγο αυτό στην ανάλυση που ακολουθεί δουλεύουμε με ακτίνες  $\rho_i$  που ορίζονται

$$R_i = \epsilon \rho_i$$

όπου το  $\epsilon > 0$  είναι μία μικρή παράμετρος  $\epsilon \ll 1$ . Η παράμετρος  $\epsilon$  μπορεί να ταυτοποιηθεί με την τετραγωνική ρίζα του κλάσματος όγκου  $\varphi$ .

$$\varphi = \frac{|\Omega^-|}{|\Omega|} \cong \frac{\epsilon^2 \sum_{i=1}^N \pi \rho_i^2}{|\Omega|}$$

Θεωρώντας τις  $\xi_i$  και  $R_i = \epsilon \rho_i$  στην (4.3.26) ως συναρτήσεις του χρόνου  $t$  και παραγωγίζοντας ως προς  $t$  παίρνουμε  $\dot{x} = \dot{\xi}_i + \epsilon \dot{\rho}_i u$ . Προβάλλοντας αυτή την εξίσωση στο μοναδιαίο διάνυσμα  $u$  που συμπίπτει με το εξωτερικό κάθετο στην  $B_{\xi_i, R_i}$  παίρνουμε την παρακάτω έκφραση για την κάθετη ταχύτητα  $V$  του  $\partial B_{\xi_i, R_i}$  στο  $X^i(u)$

$$V(u) = -\epsilon \dot{\rho}_i - \sum_{j=1}^2 \dot{\xi}_{ij} \langle u, e_j \rangle, \quad \dot{\xi}_{ij} = \langle \dot{\xi}_i, e_j \rangle \quad (4.3.27)$$

όπου  $\{e_1, e_2\}$  είναι η βάση του  $\mathbb{R}^2$ ,  $\langle, \rangle$  το εσωτερικό γινόμενο του  $\mathbb{R}^2$  και το πρόσημο " - " για τη σύμβαση προσήμου που υποθέσαμε για το  $V$  θετικό για μπάλα που συρρικνώνεται. Η (4.2.14) ανάγεται μέσω της θεωρίας δυναμικού (βλ. επίσης [30]) σε ένα πρόβλημα που ζει εξολοκλήρου πάνω στη διεπιφάνεια:

$$\int_{\Gamma(t)} g(x, y) V(y) dy = H(x) - E, \quad x \in \Gamma \quad (4.3.28)$$

όπου  $g(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x-y| + \gamma(x, y)$  είναι η συνάρτηση Green του προβλήματος Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \\ \int_{\Omega} u = \int_{\Omega} f = 0 \end{cases}$$

$\Gamma = \Gamma(t)$ ,  $E = E(t)$ ,  $V$  και  $H$  επίσης εξαρτάται από το χρόνο και το  $E(t)$  επιλέγεται έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_{\Gamma} V = 0$$

που συνεπάγεται τη διατήρηση του όγκου.

Στο υπολογισμό που ακολουθεί δεν θεωρούμε τη συνεισφορά του ομαλού όρου της συνάρτησης Green. Παραθέτουμε στο τέλος τους επιπλέον όρους που παίρνει κανείς όταν συνεχτιμάται η συνεισφορά της  $\gamma$

Αν η  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \partial B_{\xi_i, \epsilon \rho_i}$  τότε, στο  $\partial B_{\xi_i, \epsilon \rho_i} \ni x = \xi_i + \epsilon \rho_i u$ ,  $u \in S^1$ , η εξίσωση (4.3.28) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} & \epsilon \rho_i \int_{S^1} -\frac{1}{2\pi} \log |\epsilon \rho_i (u - v)| V_i(v) dv + \\ & \sum_{h \neq i} \epsilon \rho_h \int_{S^1} \left[ -\frac{1}{2\pi} \log |\xi_i - \xi_h + \epsilon (\rho_i u - \rho_h v)| \right] V_h(v) dv \\ & = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E, \quad \forall u \in S^1, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.3.27) στην εξίσωση (4.3.29) για  $x \in \Gamma_i(t)$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \epsilon \rho_i \int_{S^1} \left[ -\frac{1}{2\pi} \log |\epsilon \rho_i| - \frac{1}{2\pi} \log |u - v| \right] \left[ -\epsilon \dot{\rho}_i - \sum_{j=1}^2 \dot{\xi}_{ij} \langle v, e_j \rangle \right] dv \\ & + \sum_{h \neq i} \epsilon \rho_h \int_{S^1} \left[ -\frac{1}{2\pi} \log |\xi_i - \xi_h| - \frac{\epsilon}{2\pi} \rho_i \frac{\langle \xi_i - \xi_h, u \rangle}{|\xi_i - \xi_h|^2} + \frac{\epsilon}{2\pi} \rho_h \frac{\langle \xi_i - \xi_h, v \rangle}{|\xi_i - \xi_h|^2} + O(\epsilon^2) \right] \\ & \left[ -\epsilon \dot{\rho}_h - \sum_{j=1}^2 \dot{\xi}_{hj} \langle v, e_j \rangle \right] dv = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E, \quad \forall u \in S^1, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\begin{aligned} \int_{S^1} -\frac{1}{2\pi} \log |u - v| dv &= 0, & \int_{S^1} -\frac{1}{2\pi} \log |u - v| \langle v, e_j \rangle dv &= \frac{1}{2} \langle u, e_j \rangle, \\ \int_{S^1} du &= 2\pi, & \int_{S^1} \langle u, e_j \rangle du &= 0 \\ \int_{S^1} \langle u, e_j \rangle^2 du &= \pi, & \int_{S^1} \langle u, e_1 \rangle \langle u, e_2 \rangle du &= 0 \end{aligned}$$

Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε

$$\langle \xi_i - \xi_h, u \rangle = \sum_{j=1}^2 \langle \xi_i - \xi_h, e_j \rangle \langle u, e_j \rangle$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε από την εξίσωση (4.3.30)

$$\begin{aligned} & \epsilon \rho_i \left[ \epsilon \dot{\rho}_i \log |\epsilon \rho_i| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \dot{\xi}_{ij} \langle u, e_j \rangle \right] + \sum_{h \neq i} \epsilon \rho_h \left[ \epsilon \dot{\rho}_h \log |\xi_i - \xi_h| \right. \\ & \left. + \epsilon^2 \rho_i \dot{\rho}_h \frac{1}{|\xi_i - \xi_h|^2} \sum_{j=1}^2 \langle \xi_i - \xi_h, e_j \rangle \langle u, e_j \rangle + O(\epsilon^3) - \frac{\epsilon}{2} \rho_h \sum_{j=1}^2 \dot{\xi}_{hj} \frac{\langle \xi_i - \xi_h, e_j \rangle}{|\xi_i - \xi_h|^2} \right] = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Η εξίσωση αυτή συνεπάγεται ότι

$$\begin{cases} \epsilon \rho_i \epsilon \dot{\rho}_i \log |\epsilon \rho_i| + \sum_{h \neq i} \epsilon \rho_h \left[ \epsilon \dot{\rho}_h \log |\xi_i - \xi_h| - \frac{\epsilon}{2} \rho_h \sum_{j=1}^2 \dot{\xi}_{hj} \frac{\langle \xi_i - \xi_h, e_j \rangle}{|\xi_i - \xi_h|^2} \right] = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E \\ \epsilon \rho_i \left( -\frac{1}{2} \dot{\xi}_{ij} \right) + \sum_{h \neq i} \epsilon \rho_h \epsilon^2 \rho_i \dot{\rho}_h \frac{1}{|\xi_i - \xi_h|^2} \langle \xi_i - \xi_h, e_j \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2 \end{cases} \quad (4.3.32)$$

Από την εξίσωση (4.3.32)<sub>2</sub> παίρνουμε

$$\dot{\xi}_{ij} = 2\epsilon^2 \sum_{h \neq i} \rho_h \dot{\rho}_h \frac{\langle \xi_i - \xi_h, e_j \rangle}{|\xi_i - \xi_h|^2} \quad (4.3.33)$$

αφού η εξίσωση (4.3.32)<sub>1</sub> είναι ισοδύναμη με

$$\epsilon \rho_i \epsilon \dot{\rho}_i \log |\epsilon \rho_i| + \sum_{h \neq i} \epsilon \rho_h \epsilon \dot{\rho}_h \log |\xi_i - \xi_h|$$

$$-\epsilon \rho_h \sum_{j=1}^2 \sum_{k \neq h} \epsilon^2 \rho_k \dot{\rho}_k \frac{\langle \xi_h - \xi_k, e_j \rangle \langle \xi_i - \xi_h, e_j \rangle}{|\xi_h - \xi_k|^2 |\xi_i - \xi_k|^2} = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E \quad (4.3.34)$$

Αν στην εξίσωση (4.3.34) αγνοήσουμε τον τρίτο όρο στο αριστερό μέλος παίρνουμε

$$\epsilon \rho_i \epsilon \dot{\rho}_i \log \epsilon + \epsilon \rho_i \epsilon \dot{\rho}_i \log \rho_i + \sum_{h \neq i} \epsilon \rho_h \epsilon \dot{\rho}_h \log |\xi_i - \xi_h| = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E \quad (4.3.35)$$

Από αυτό αν ορίσουμε το  $E$  επιβάλλοντας τη συνθήκη  $\sum_{k=1}^N \rho_k \dot{\rho}_k = 0$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{\rho}_i &= -\frac{1}{|\log \epsilon|} \frac{1}{\epsilon \rho_i} \left( \frac{1}{\epsilon \rho_i} - \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} \right) + \frac{1}{|\log \epsilon|} \left[ \epsilon \dot{\rho}_i \log \rho_i + \frac{1}{\epsilon \rho_i} \sum_{h \neq i} \epsilon \rho_h \epsilon \dot{\rho}_h \log |\xi_i - \xi_h| \right] \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon \rho_i |\log \epsilon| N} \left[ \sum_{k=1}^N \epsilon \rho_k \epsilon \dot{\rho}_k \log \rho_k + \sum_{k, h} \epsilon \rho_h \epsilon \dot{\rho}_h \log |\xi_k - \xi_h| \right] \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

Αφού έχουμε  $\sum_{k=1}^N \rho_k \dot{\rho}_k = 0$  αν  $t \rightarrow \rho_i(t)$  είναι μία λύση της (4.3.36) τότε  $t \rightarrow \hat{\rho}_i(t) = \mu \rho_i(\frac{t}{\mu^3})$  είναι πάλι λύση. Αφού αν  $L(\rho)$ ,  $R(\rho)$  αντίστοιχα στο αριστερό και στο δεξί μέλος της (4.3.36) έχουμε

$$L(\hat{\rho}) = \frac{1}{\mu^2} L(\rho)$$

$$R(\hat{\rho}) = \frac{1}{\mu^2} R(\rho) + \frac{\log \mu}{\epsilon \rho_i |\log \epsilon|} \sum_{h=1}^N \epsilon \rho_h \epsilon \dot{\rho}_h - \frac{\log \mu}{\epsilon \rho_i |\log \epsilon| N} \sum_{h=1}^N \epsilon \rho_h \epsilon \dot{\rho}_h = \frac{1}{\mu^2} R(\rho)$$

Από αυτό τον υπολογισμό φαίνεται ότι οι επιπλέον όροι στην  $R(\hat{\rho})$  εξουδετερώνονται ακόμη κι αν  $\sum_{k=1}^N \rho_k \dot{\rho}_k \neq 0$ . Έστω  $Q_i(\rho)$  μία οποιαδήποτε συνάρτηση που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

$$c_1 - Q_i(\mu \rho) = \frac{1}{\mu^2} Q_i(\rho)$$

$$c_2 - \sum_{i=1}^N \rho_i Q_i(\rho) = 0$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν αντικαταστήσουμε στο δεξί μέλος της (4.3.36) το  $\epsilon \dot{\rho}_i$  με  $Q_i(\epsilon \rho)$ , τότε η συνθήκη διαφορική εξίσωση που παίρνουμε έχει την επιθυμητή αναλλοίωτη

κλίμακα. Η συνάρτηση

$$Q_i(\rho) = -\frac{1}{|\log \epsilon|} \frac{1}{\rho_i} \left( \frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right)$$

ικανοποιεί τις  $c_1$  και  $c_2$ . Αυτό οδηγεί στη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{\rho}_i = & \frac{1}{\epsilon \rho_i} \frac{1}{|\log \epsilon|} \left\{ \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_i} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{|\log \epsilon|} \left[ \log \rho_i \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_i} \right) + \sum_{h \neq i} \log |\xi_i - \xi_h| \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_h} \right) - E \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

όπου

$$E = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \log \rho_k \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_k} \right) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{h \neq k} \log |\xi_h - \xi_k| \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_h} \right)$$

κι αυτή η εξίσωση ικανοποιεί το σωστό νόμο κλίμακας.

Τελικά παίρνουμε από την (4.3.33)

$$\dot{\xi}_i = -2 \sum_{h \neq i} \frac{1}{|\log \epsilon|} \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_h} \right) \frac{\xi_h - \xi_i}{|\xi_h - \xi_i|^2} \quad (4.3.38)$$

Αυτό καταλήγει στο ζητούμενο.

### Σημείωση

Η παραπάνω ανάλυση μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε να περιλάβει την επίδραση του συνόρου.

Με παρόμοιους υπολογισμούς βρίσκουμε ότι η συνεισφορά του συνόρου βρίσκεται στους παρακάτω όρους

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{\rho}_i = & \frac{1}{|\log \epsilon|} \frac{1}{\epsilon \rho_i} \left\{ \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_i} \right) + \frac{1}{|\log \epsilon|} \left[ (\log \rho_i + \gamma(\xi_i, \xi_i)) \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_i} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{h \neq i} (\log |\xi_i - \xi_h| + \gamma(\xi_i, \xi_h)) \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_h} \right) - E \right] \right\} \end{aligned}$$

όπου

$$E = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\log \rho_k + \gamma(\xi_k, \xi_k)) \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_k} \right)$$

$$+\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{h \neq k} (\log |\xi_h - \xi_k| + \gamma(\xi_h, \xi_k)) \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_h} \right)$$

χαλ

$$\dot{\xi}_i = -\frac{2}{|\log \epsilon|} \sum_{h \neq i} \left( \frac{1}{\epsilon \bar{\rho}} - \frac{1}{\epsilon \rho_h} \right) \left( \frac{\xi_h - \xi_i}{|\xi_h - \xi_i|^2} + \frac{\partial \gamma(\xi_i, \xi_h)}{\partial x} \right)$$



## 4.4 Εξισώσεις ακτίνων και κέντρων σε τρεις διαστάσεις

Τώρα επεκτείνουμε τα επιχειρήματά μας για να παράγουμε τις εξισώσεις των ακτίνων και των κέντρων στις τρεις διαστάσεις. Η διεπιφάνεια του  $i$ -οστού σωματιδίου μπορεί να αναπαρασταθεί από την

$$x = X^i(u) = \xi_i + \epsilon \rho_i u, \quad u \in S^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4.39)$$

όπου  $S^2$  είναι η μοναδιαία σφαίρα. Η κάθετη ταχύτητα  $V_i$  του  $i$ -οστού σωματιδίου, θετική για σφαίρα που συρρικνώνεται είναι

$$V_i = -\epsilon \dot{\rho}_i - \sum_{j=1}^3 \dot{\xi}_{ij} \langle u, e_j \rangle,$$

όπου

$$\dot{\xi}_{ij} = \langle \dot{\xi}_i, e_j \rangle.$$

Αντικαθιστώντας την (4.4.39) για  $x \in \Gamma_i$  στην

$$\int_{\Gamma} g(x, y) V(y) dy - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} g(x, y) V(y) dy dx = H(x) - \bar{H},$$

και χρησιμοποιώντας την τρισδιάστατη συνάρτηση Green  $g(x, y) = 1/(4\pi|x - y|)$ , παίρνουμε

$$\epsilon \rho_i \int_{S^2} \frac{V_i(v) dv}{4\pi|u - v|} + \epsilon^2 \sum_{k \neq i} \rho_k^2 \int_{S^2} \frac{V_k(v) dv}{4\pi|\xi_k - \xi_i + \epsilon(\rho_k v - \rho_i u)|} = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E \quad (4.4.40)$$

όπου

$$E = \bar{H} - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} g(x, y) V(y) dy dx$$

και

$$H_i = \frac{1}{\epsilon \rho_i}.$$

Υπολογίζουμε το

$$\int_{S^2} \frac{V_k(v) dv}{4\pi|\xi_k - \xi_i + \epsilon(\rho_k v - \rho_i u)|} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^N \frac{\epsilon \rho_k}{d_{ik}^2} \dot{\xi}_{kj} \langle \bar{\xi}_{ki}, e_j \rangle - \frac{\epsilon \dot{\rho}_k}{d_{ik}} \left( 1 + \frac{\epsilon \rho_i}{d_{ik}} \langle u, \bar{\xi}_{ki} \rangle \right) \quad (4.4.41)$$

$$d_{ij} = |\xi_i - \xi_j|, \quad \bar{\xi}_{ij} = \frac{\xi_i - \xi_j}{|\xi_i - \xi_j|}, \quad (4.4.42)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την (4.4.39), μαζί με τους υπολογισμούς

$$\frac{1}{|\xi_i - \xi_j + \epsilon(\rho_i v - \rho_j u)|} = \frac{1}{d_{ij}} \left[ 1 - \epsilon \left( \frac{\rho_i}{d_{ij}} \langle u, \bar{\xi}_{ij} \rangle - \frac{\rho_j}{d_{ij}} \langle v, \bar{\xi}_{ij} \rangle \right) \right], \quad (4.4.43)$$

$$\int_{S^2} \langle v, e_j \rangle dv = 0, \quad \int_{S^2} \langle v, e_i \rangle \langle v, e_j \rangle dv = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}.$$

Επομένως η (4.4.40) γίνεται

$$\epsilon \rho_i \int_{S^2} \frac{V_i(v) dv}{4\pi|u-v|} + \epsilon^2 \sum_{k \neq i} \rho_k^2 \left[ \frac{1}{3} \frac{\epsilon \rho_k}{d_{ik}^2} \dot{\xi}_{kj} \langle \bar{\xi}_{ki}, e_j \rangle - \frac{\epsilon \dot{\rho}_k}{d_{ik}} \left( 1 + \frac{\epsilon \rho_i}{d_{ki}} \langle u, \bar{\xi}_{ki} \rangle \right) \right] = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E. \quad (4.4.44)$$

Ύστερα δουλεύουμε με τον  $T_0$ , τον τελεστή τύπου Dirichlet-Neumann που είναι στενά συνδεδεμένος με τον ορισμό του  $V$ , που ορίζουμε τώρα. Έστω  $B$  η μοναδιαία μπάλα, και δοσμένο ομαλό  $\chi$ , ορίζουμε  $\varphi_i, \varphi_e$ , μέσω των

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_i = 0, & \text{στο } B, \\ \varphi_i = \chi, & \text{στην } S^2, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta \varphi_e = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^3 - B, \\ \varphi_e = \chi, & \text{στην } S^2. \end{cases} \quad (4.4.45)$$

Θέτουμε

$$T_0(\chi) := \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_e}{\partial n}. \quad (4.4.46)$$

Απο τις γνωστές ιδιότητες των σφαιρικών αρμονικών, έχουμε ότι

$$T_0(1) = 1, \quad T_0(\langle u, e_i \rangle) = 3 \langle u, e_i \rangle \quad (4.4.47)$$

και επίσης από την κλασική θεωρία δυναμικού

$$T_0 \int_{S^2} \frac{V_i(v) dv}{4\pi|u-v|} = V_i(u). \quad (4.4.48)$$

Έτσι από την (4.4.44), παίρνουμε

$$\epsilon \rho_i V_i + \sum_{k \neq i} \frac{1}{3} \frac{\epsilon^3 \rho_k^3}{d_{ik}^2} \dot{\xi}_{kj} \langle \bar{\xi}_{ki}, e_j \rangle - \sum_{k \neq i} \frac{\epsilon^3 \dot{\rho}_k \rho_k^2}{d_{ik}} - \sum_{k \neq i} 3 \frac{\epsilon^4 \dot{\rho}_k \rho_k^2 \rho_i}{d_{ik}^2} \langle u, \bar{\xi}_{ki} \rangle = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E. \quad (4.4.49)$$

Από την (4.4.39) μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $V_i$  με

$$-\epsilon \dot{\rho}_i - \sum_{j=1}^3 \dot{\xi}_{ij} \langle u, e_j \rangle. \quad (4.4.50)$$

Αντικαθιστούμε την (4.4.50) για  $V_i$  στις ιδιοσυναρτήσεις 1,  $\langle u, e_i \rangle$  του  $T_0$ . Τώρα προβάλουμε την (4.4.49) στον  $L^2$ . Πρώτα προβάλουμε στον 1 και παίρνουμε

$$-\epsilon^2 \rho_i \dot{\rho}_i + \epsilon^3 \sum_{k \neq i} \frac{1}{3} \frac{\rho_k^3}{d_{ik}^2} \dot{\xi}_{kj} \langle \bar{\xi}_{ki}, e_j \rangle - \epsilon^3 \sum_{k \neq i} \frac{\dot{\rho}_k \rho_k^2}{d_{ik}} = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E.$$

Σημειώνουμε ότι ο τέταρτος όρος στο αριστερό μέλος της (4.4.49) εξαφανίζεται μετά την προβολή στο 1. Ο δεύτερος όρος στο αριστερό μέλος μπορεί να αγνοηθεί επειδή όπως θα δούμε από τις  $\dot{\xi}$ -εξισώσεις, είναι υψηλότερης τάξης. Επομένως παίρνουμε ότι

$$-\epsilon^2 \rho_i \dot{\rho}_i - \epsilon^3 \sum_{k \neq i} \frac{\dot{\rho}_k \rho_k^2}{d_{ik}} = \frac{1}{\epsilon \rho_i} - E. \quad (4.4.51)$$

Για να καθορίσουμε τον  $E$  χρησιμοποιούμε τη διατήρηση του όγκου και οδηγούμαστε στο :

$\sum_{i=1}^N \dot{\rho}_i \rho_i^2 = 0$ . Μετά από κάποιους υπολογισμούς παίρνουμε ότι

$$\dot{\rho}_i = \frac{1}{\epsilon^3 \rho_i} \left\{ \left( \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\rho_i} \right) + \epsilon \left[ \frac{1}{N \bar{\rho}} \sum_{k=1}^N \sum_{h \neq k} \frac{\rho_h}{|\xi_h - \xi_k|} \epsilon^3 \dot{\rho}_k \rho_k^2 - \sum_{j \neq i} \frac{1}{|\xi_j - \xi_i|} \epsilon^3 \dot{\rho}_j \rho_j^2 \right] \right\}.$$

Τώρα οι όροι στο δεξί μέλος μπορούν να εκτιμηθούν υποθέτοντας ότι  $\epsilon^3 \dot{\rho}_k \rho_k^2 = \frac{\rho_k}{\bar{\rho}} - 1$  και  $\epsilon^3 \dot{\rho}_j \rho_j^2 = \frac{\rho_j}{\bar{\rho}} - 1$  αφού αυτή είναι η κύρια συνεισφορά. Τελικά παίρνουμε ότι

$$\dot{\rho}_i = \frac{1}{\epsilon^3 \rho_i} \left\{ \left( \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\rho_i} \right) + \epsilon \left[ \frac{1}{N \bar{\rho}} \sum_{k=1}^N \sum_{h \neq k} \frac{\rho_h}{|\xi_h - \xi_k|} \left( \frac{\rho_k}{\bar{\rho}} - 1 \right) - \sum_{j \neq i} \frac{1}{|\xi_j - \xi_i|} \left( \frac{\rho_j}{\bar{\rho}} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (4.4.52)$$

Η προβολή στο  $\langle u, e_i \rangle$  δίνει τις  $\xi$  εξισώσεις

$$-\epsilon \rho_i \dot{\xi}_{ij} - \epsilon^4 \sum_{k \neq i} 3 \frac{\dot{\rho}_k \rho_k^2 \rho_i}{d_{ik}^2} \langle \bar{\xi}_{ki}, e_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

και επομένως χρησιμοποιώντας πάλι το ότι  $\epsilon^3 \dot{\rho}_k \rho_k^2 = \left( \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\rho_k} \right) \rho_k$  (ως προς τον κύριο όρο) παίρνουμε ότι

$$\dot{\xi}_i = -3 \sum_{k \neq i} \left( \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\rho_k} \right) \rho_k \frac{\xi_k - \xi_i}{|\xi_k - \xi_i|^3}.$$

Θα δούμε τώρα με συνοπτικό τρόπο πώς μπορούν να εξαχθούν οι εξισώσεις των ακτίνων ως προς τον κύριο όρο σε δύο διαστάσεις [3]. Θα δείξουμε ότι δοσμένης μίας διεπιφάνειας  $\Gamma$  σχεδόν κυκλική, θέλουμε να τη συσχετίσουμε με ένα μοναδικό τρόπο με ένα κύκλο και να τη δούμε σαν μια μικρή διαταραχή αυτού του κύκλου. Έτσι, κάθε διεπιφάνεια θα έχει μοναδικό  $\xi \in \mathbb{R}^2, \rho > 0$  και  $r \in C^1(S^1)$  και θα ικανοποιεί

$$\Gamma(t) = \{x/x = \xi + \epsilon\rho(1 + \epsilon r(u))u, u \in S^1\} \quad (4.4.53)$$

$$\int_{S^1} r(u)du = 0, \quad \int_{S^1} r(u)\langle u, e_i \rangle du = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.4.54)$$

**Θεώρημα 4.4.1** Έστω  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  φραγμένο, συνεκτικό και απλό χωρίο. Υποθέτουμε ότι  $\Gamma(0) = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i(0)$ ,  $N \geq 2$ , με  $\Gamma_i(0)$  της μορφής (4.4.53),  $\xi_i(0) \in \Omega$ ,  $R_i(0) > 0$  και  $r_i(0) \in C^{3+\alpha}(S^1)$  που ικανοποιεί την (4.4.54). Υποθέτουμε ότι

$$\xi_i(0) \neq \xi_j(0) \quad \text{για } i \neq j$$

$$R_1(0) < R_2(0) < \dots < R_N(0)$$

τότε υπάρχει  $\bar{\epsilon} > 0$  τέτοιο ώστε

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^N \pi R_i^2(0)}{|\Omega|} < \bar{\epsilon}^2$$

$$\|r_i(0)\|_{C^{3+\alpha}(S^1)} < \bar{\epsilon}$$

που έπεται ότι η λύση  $t \rightarrow \Gamma(t)$  του προβλήματος Mullins-Sekerka (4.2.14) ικανοποιεί  $\Gamma(t) = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i(t)$  με  $\Gamma_i(t)$  της μορφής (4.4.53) με  $\xi_i(t), R_i(t) > 0, r_i(t) \in C^{3+\alpha}(S^1)$  να ικανοποιεί τη (4.4.54) και να υπάρχει ολικά ως ασθενής λύση με την έννοια του [26].

Επιπλέον,

1. Υπάρχουν χρόνοι  $\hat{T}_1 < \dots < \hat{T}_{N-1}$  τέτοιοι ώστε  $\lim_{t \rightarrow \hat{T}_i} R_i(t) = 0, i = 1, \dots, N-1$ . Η λύση είναι κλασική εκτός από τους χρόνους.

2. Υπάρχουν σταθερές  $C_r, C_R, > 0$  που εξαρτώνται από το  $\frac{R_i(0)}{R_1(0)}$   $i = 2, \dots, N$  τέτοιες ώστε

$$\dot{R}_i = \frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{R_i} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_i} \right) + C_R g_i \quad (4.4.55)$$

όπου  $\bar{R}$  είναι ο αρμονικός μέσος των  $R_i$  που ορίζεται από την

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{R_j}$$

και  $g_i(R, \xi, r)$  απλή συνάρτηση που ικανοποιεί

$$|g_i| < \frac{1}{|\log \varphi|^2}$$

Η παραπάνω έκφραση ισχύει για  $\hat{T}_{i-1} < t < \hat{T}_i$  ενώ για  $t > \hat{T}_i$   $i = 1, \dots, N$  έχουμε ότι  $R_i(t) = 0$ . Επίσης,

$$\|r_i\|_{C^{3+\alpha}(S^1)} < C_r$$

## 4.5 Ολοκληρωτική αναπαράσταση και η εξίσωση του φαινομένου της αδροποίησης

Θέλουμε να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα Mullins - Sekerka με ολοκληρωτικές εξισώσεις στην κλάση των  $C^{3+\alpha}$  διεπιφανειών. Το άμεσο πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι οι διαστάσεις του προβλήματος ελαττώνονται σε μία. Θα χρειαστεί μόνο να λύσουμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις κατά μήκος των συνόρων των σχετικών χωρίων αντί να λύσουμε τη διδιάστατη μερική διαφορική εξίσωση του προβλήματος. Αυτή η προσέγγιση έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλά προβλήματα όπως το Ostwald ripening, σε κύματα νερού κ.λπ. Είναι γνωστό [30] ότι έχουμε την εξής ολοκληρωτική αναπαράσταση του προβλήματος Mullins - Sekerka (4.2.14):

$$\int_{\Gamma(t)} g(x, y) V(y) dS_y - \frac{1}{|\Gamma(t)|} \int_{\Gamma(t)} \int_{\Gamma(t)} g(x, y) V(y) dS_y dS_x = H(x) - \bar{H} \quad (4.5.56)$$

με

$$\bar{H} = \frac{1}{|\Gamma(t)|} \int_{\Gamma(t)} H dS_y$$

Το πρόβλημα (4.2.14) παίρνει τη μορφή  $S(V) = H - \bar{H}$  όπου  $S$  είναι ο γραμμικός τελεστής,  $V$  είναι η κάθετη ταχύτητα,  $H$  είναι η μέση καμπυλότητα,  $\bar{H}$  είναι μέση τιμή της  $H$  πάνω στη  $\Gamma(t)$  και  $|\Gamma(t)|$  είναι το εμβαδό της  $\Gamma(t)$ . Επιπλέον, έχουμε ότι η συνάρτηση Green στις δύο διαστάσεις έχει τη μορφή:

$$g(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x - y| + \gamma(x, y) \quad (4.5.57)$$

όπου η  $g$  είναι η συνάρτηση που σχετίζεται με το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{στο } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} f dx = 0 \end{cases} \quad (4.5.58)$$

και ικανοποιεί

$$\begin{cases} -\Delta_y g(x, y) = \delta_x(y) - \frac{1}{|\Omega|}, & \text{στο } \Omega \\ \frac{\partial g}{\partial \nu_y} = 0, & \text{στο } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} g(x, y) dy = 0 \end{cases} \quad (4.5.59)$$

Από την άλλη, το  $\gamma$  είναι το ομαλό κομμάτι της συνάρτησης Green και ικανοποιεί

$$\begin{cases} -\Delta_y \gamma(x, y) = -\frac{1}{|\Omega|}, & x \in \Omega, \quad y \in \Omega \\ \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial \nu_y} = \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{2\pi} \log|x - y| \right), & x \in \Omega, \quad y \in \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \gamma(x, y) dy = \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi} \log|x - y| dy \end{cases} \quad (4.5.60)$$

όπου το  $\Omega$  είναι ανοιχτό, φραγμένο, συνεκτικό, απλό σύνολο στο  $\mathbb{R}^2$ , (αυτό που περιέχει το μείγμα) και  $\delta_x(y)$  είναι η Dirac  $\delta$  με φορέα  $x \in \Omega$ .

Από την κλασική ελλειπτική θεωρία έχουμε την εκτίμηση

$$|\gamma(x, y)| \leq C \log(\text{dist}(x, \partial\Omega)), \quad \left| \frac{\partial\gamma(x, y)}{\partial y} \right| \leq C \log^2(\text{dist}(x, \partial\Omega)) \quad (4.5.61)$$

**Πρόταση 4.5.1** Θεωρούμε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \frac{dR_i}{dt} = \frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{R_i} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_i} \right), & T_{i-1} < t < T_i, \quad i = 1, \dots, N \\ \frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{4}{|\log \varphi|} \sum_{h \neq i} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_h} \right) \frac{\xi_h - \xi_i}{|\xi_h - \xi_i|^2} \end{cases} \quad (4.5.62)$$

όπου

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{R_j}$$

και υποθέτουμε ότι  $R_1(0) < R_2(0) < \dots < R_N(0)$ .

Για το σύστημα (4.5.62) ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(α) Αν  $R_i(0) < R_j(0)$  τότε  $R_i(t) < R_j(t)$  στο κοινό πεδίο ορισμού τους.

(β)  $\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N R_i^2(t) \right) = 0$ .

(γ)  $\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N R_i(t) \right) \leq 0$ .

(δ)  $R_1(t)$  δεν αυξάνει στο χρόνο και  $R_N(t)$  δε φθίνει.

(ε) Αν υποθέσουμε ότι  $R_{N-1}(0) < R_N(0)$  τότε όλα εκτός από το  $N$ -οστό σωματίδιο εξαφανίζονται σε πεπερασμένους χρόνους  $T_1 < \dots < T_{N-1}$  και έχουμε την εκτίμηση

$$\frac{|\log \varphi|}{6} R_1^3(0) \leq T_1 \leq \frac{|\log \varphi|}{6} R_1^3(0) \frac{NR_N(0)}{R_N(0) - R_1(0)}$$

(στ) Το σύστημα (4.5.62) έχει αναλλοίωτη κλίμακα σύμφωνα με το νόμο  $t^{\frac{1}{3}}$ , που αν  $R(t), \xi(t)$  είναι μια λύση τότε είναι λύση και η  $\mu R(\frac{t}{\mu^3}), \mu \xi(\frac{t}{\mu^3}), \mu > 0$ .

### Απόδειξη

(α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει  $t^* > 0$  τέτοιο ώστε  $R_i(t^*) = R_j(t^*) > 0$ . Παρατηρούμε τώρα ότι τα  $R_i(t)$  και  $R_j(t)$  ικανοποιούν την ίδια εξίσωση. Απο μοναδικότητα, συμπεραίνουμε ότι  $R_i(0) = R_j(0)$ , σε αντίθεση με την υπόθεση.

(β) Μεταξύ των χρόνων που εξαφανίζονται τα σωματίδια έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N R_i^2(t) \right) &= \sum_{i=1}^N 2R_i \dot{R}_i = \sum_{i=1}^N 2R_i \frac{1}{R_i} \frac{2}{|\log \varphi|} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_i} \right) = \frac{4}{|\log \varphi|} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_i} \right) = \\ &= \frac{4}{|\log \varphi|} \left( \frac{N}{\bar{R}} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

(γ) Μεταξύ των χρόνων που εξαφανίζονται τα σωματίδια έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N R_i(t) &= \sum_{i=1}^N \dot{R}_i(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \frac{2}{|\log \varphi|} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_i} \right) = \\ &= \frac{2}{|\log \varphi|} \left( \frac{1}{\bar{R}} \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i^2} \right) = \frac{2}{|\log \varphi|} \left( \frac{N}{\bar{R}^2} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i^2} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

(δ) Έχουμε ότι

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{R_j} \leq \frac{1}{N} \frac{N}{R_1} = \frac{1}{R_1}$$

Ανάλογα

$$\frac{1}{\bar{R}} \geq \frac{1}{R_N}$$

Έτσι,

$$\frac{1}{R_N} \leq \frac{1}{\bar{R}} \leq \frac{1}{R_1} \Leftrightarrow R_1(t) \leq \bar{R}(t) \leq R_N(t)$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από την παραπάνω έκφραση και χρησιμοποιώντας το σύστημα (4.5.62).



(ε) Έχουμε ότι

$$\frac{dR_1(t)}{dt} = \frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{R_1^2} \left( \frac{R_1}{\bar{R}} - 1 \right) \geq -\frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{R_1^2}$$

Με ολοκλήρωση, παίρνουμε την ανισότητα στα αριστερά

$$R_1^3(t) \geq -\frac{6}{|\log \varphi|} t + R_1^3(0)$$

Για την ανισότητα στα δεξιά, έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{N} \left( \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_N} \right) - \frac{N}{NR_1} = \frac{1}{N} \left[ \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \dots + \left( \frac{1}{R_N} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{N} \left( \frac{1}{R_N} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{1}{N} \left( \frac{R_1 - R_N}{R_1 R_N} \right) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{dR_1(t)}{dt} &= \frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_1} \right) \leq \frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{R_1} \frac{1}{N} \left( \frac{R_1 - R_N}{R_1 R_N} \right) \\ &\leq \frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{N} \frac{1}{R_1^2} \left( \frac{R_1 - R_N}{R_N} \right) \leq \frac{2}{|\log \varphi|} \frac{1}{N} \frac{1}{R_1^2} \left( \frac{R_1(0) - R_N(0)}{R_N(0)} \right) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε το δεξί μέλος στην (ε).

(στ) Προκύπτει άμεσα.

# Βιβλιογραφία

- [1] N. Alikakos, P. Bates, and X. Chen, The convergence of solutions of the Cahn-Hilliard equation to the solution of the Hele-Shaw model, *Arch. Rational Mech. Anal.* **128** (1994), 165-205.
- [2] N. D. Alikakos, G. Fusco, The Equations of Ostwald Ripening for Dilute Systems, *Journal of Statistical Physics* **95** (1999), 851-866.
- [3] N. D. Alikakos, G. Fusco, G. Karali, Ostwald Ripening in two dimensions - The rigorous derivation of the equations from the Mullins - Sekerka dynamics, *J. Diff. Eq.* 205, no1, 1-49, (2004)
- [4] N. D. Alikakos, G. Fusco and G. Karali, The Effect of the Geometry of the Particle Distribution in Ostwald Ripening, *Comm. Math. Phys.*,238, 480-488 (2003)
- [5] H. Amann, "Linear and quasilinear parabolic. I. Abstract linear theory", *Monogr. Mathem.*, 89, Birkhäuser Verlag, Basel, (1995).
- [6] S. B. Angenent, Nonlinear analytic semigroups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A* **115** (1990), 91-107.
- [7] J. W. Cahn, On spinodal decomposition, *Acta Metall.* **9** (1961),795-801.
- [8] J. W. Cahn and J. E. Hilliard, Free energy of a nonuniform system I. Interfacial free energy, *J. Phys. Chem.* **28** 1958, 258-267.

- [9] X. Chen, The Hele-Shaw problem and area-preserving curve shortening motion, *Arch. Rational Mech. Anal.* **123** (1993), 117-151.
- [10] X. Chen, X. Hong and F. Yi, Existence, uniqueness and regularity of solutions of the Mullins-Sekerka problem, *Comm. Partial Differential Equations* **21** (1996), 1705-1727.
- [11] M.P. Do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, New York: Prentice-Hall, 1976.
- [12] J. Duchon and R. Robert, Evolution d'une interface par capillarite et diffusion de volume I, Existence locale en temps, *Ann. Inst. H.Poincare, Anal. Non Lineaire* **1** (1984), 361-378.
- [13] J. Escher and G. Simonett, Classical solutions for Hele Shaw models with surface tension, *Adv. Differential Equations* **2** (1997), 619-642.
- [14] G. Folland, "Introduction to Partial Differential Equations", Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton N.J., 1976.
- [15] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer.
- [16] D. Henry, "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1981.
- [17] I. M. Lifschitz and V. V. Slyozov, The kinetics of precipitation from supersaturated solid solutions, *J. Phys. Chem. Solids* **19** (1961), 35-50.
- [18] C. Miranda, Sulle proprieta di regolarita di certe trasformazioni integrali, *Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I* **8** no 7 (1965), 303-336.
- [19] W. W. Mullins, Grain Growth of Uniform Boundaries with Scaling, *Acta Mater.* **46** (1998), 6219-6226.

- [20] W. W. Mullins and R. F. Sekerka, Morphological stability of a particle growing by diffusion and heat flow, *J. Appl. Physics* **34** (1963), 323-329.
- [21] B. Niethammer, Derivation of the LSW - Theory for Ostwald Ripening by Homogenization Methods, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **147** no2 (1999), 119-178.
- [22] B. Niethammer, F. Otto, Domain Coarsening in thin films, *Comm. Pure Appl. Math.* **54** no 3 (2001), 361-384.
- [23] W. Ostwald, *Z. Phys. Chem.* **37** (1901),385.
- [24] R. L. Pego, Front migration in the nonlinear Cahn-Hilliard equation, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **422** (1989), 261-278.
- [25] G. da Prato and P. Grisvard, Equations d'évolution abstraites non lineaires de type parabolique, *Ann. Mat. Pura Appl.* **4** 120 (1979), 329-396.
- [26] H. M. Soner, Convergence of the Phase-Field Equations to the Mullins-Sekerka Problem with kinetic undercooling, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **131** (1995), 139-197.
- [27] J. Vinals and W. W. Mullins, Self-similarity and coarsening of three dimensional particles on a two dimensional matrix, *J. Appl. Phys.* **83** no 2 (1998).
- [28] P. W. Voorhees and Schaffer, In situ observation of particle motion and diffusion interactions during coarsening, *Acta Metall.* **33** (1987), 327-339.
- [29] C. Wagner, Theorie der Alterung von Niederschlagen dursch Umlosen, *Z. Elektrochem.* **65**, (1961).
- [30] J. Zhu, X. Chen, and T. Y. Hou, An Efficient Boundary Integral Method for the Mullins-Sekerka Problem, *Journal of Computational Physics* **126** no2 (1996), 246-267.

- [31] Fife, P.C., Dynamical aspects of the Cahn - Hilliard equation, Barrett Lectures, University of Tennessee, Spring (1991)
- [32] Novick - Cohen, A. and Segel, L.A., *Nonlinear aspects of the Cahn - Hilliard equation*, Physica D **10** (1984) 277-298
- [33] Elliot, C.M. and Zheng, S., *On the Cahn - Hilliard equation*, Arch. Rational Mech. Anal, **96** (1986) 339-357
- [34] Fife, P.C., *Models for phase separation and their mathematics*, Electron. J. Diff. Eqs. **48** (2000) (electronic)
- [35] Yasumasa Nishiura, *Far from Equilibrium dynamics*, translations of Mathematical Monographs, Vol 209 AMS
- [36] J. David Logan, *Applied Mathematics*, second edition 1997 by John Wiley & Sons, Inc