ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ BUSEMANN-PETTY

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Πρόλογος

Το πρόβλημα των Busemann-Petty έχει καταφατική απάντηση για $n \leq 4$ και αρνητική για $n \geq 5$.
Η εργασία αυτή χωρίζεται σε 3 κεφάλαια.

Το πρώτο κεφάλαιο αποτελείται από κάποια ιστορικά στοιχεία και μερικούς βασικούς ορισμούς, χρήσιμους για την ανάγνωση της εργασίας. Αναφέρονται μερικές από τις κυριότερες εργασίες που έγιναν πάνω στο θέμα, οι οποίες άλλοτε επηρέασαν κι άλλοτε επιβεβαίωσαν την πορεία προς την ολοκληρωμένη λύση.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τα τέσσερα σημαντικότερα αντιπαραδείγματα. Στο 2.1 μελετάμε το αντιπαράδειγμα που πιθανοθεωρητικά δημιούργησαν οι Larman-Rogers, [LR] για διαστάσεις μεγαλύτερες από 11. Το 2.2 περιέχει δύο εργασίες του Ball, [B1],[B2], ο οποίος αφού αρχικά παρατήρησε ότι η μέγιστη τομή του μοναδιαίου κύβου στον $\mathbb{R}^n$ με $(n-1)-$διάστατους υπόχωρους είναι $\sqrt{2}$, κατασκεύασε ένα αντιπαράδειγμα για $n \geq 10$. Στο 2.3 μελετάμε ένα αντιπαράδειγμα για $n \geq 7$, του Γιαννόπουλου, [Gi], ενώ το 2.4 αποτελείται από ένα αντιπαράδειγμα του Παπαδημητράκη [Pa] για τις διαστάσεις 5 και 6.

Το τρίτο κεφάλαιο της εργασίας αυτής ασχολείται με το πρόβλημα γενικά για όλες τις διαστάσεις. Αναφέρονται αρχικά κάποιες χρήσιμες έννοιες-εργαλεία για την μελέτη του προβλήματος (παρ.3.1). Δίνονται οι ορισμοί των μετασχηματισμών Fourier και Radon γενικά για κατανομές και πιο ειδικά για θετικά ορισμένες κατανομές. Παρουσιάζουμε επίσης την συνάρτηση παράλληλων τομών, η οποία αποτέλεσε βασικό κλειδί για μια ενιαία λύση. Ορίζουμε ακόμα τα αστερόμορφα σώματα καθώς και τα σώματα τομών, μια έννοια που ο Lutwak πρώτος συνέδεσε με το πρόβλημα, ([Lu2]). Επίσης δίνονται και κάποιες

χρήσιμες σχέσεις που χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις.
Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται επίσης τρία κύρια θεωρήματα.

Το πρώτο δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει το πρόβλημα καταφατική απάντηση στον $\mathbb{R}^n$. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται οτι αυτό ισχύει αν και μόνο αν κάθε κυρτό συμμετρικό,ως προς το 0, σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι σώμα τομών. Παρουσιάζουμε την απόδειξη, η οποία οφείλεται, για την μία κατεύθυνση (ικανή συνθήκη) στον Lutwak, [Lu2], ενώ η αναγκαιότητα της ιδιότητας αυτής των σωμάτων οφείλεται στον Zhang, [Z3].

Το δεύτερο θεώρημα είναι μια εργασία του Koldobsky, [K5] ο οποίος μελετάει πότε ένα αστερόμορφο σώμα είναι σώμα τομών.Το θεώρημα αυτό δίνει οτι ένα αστερόμορφο σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι σώμα τομών αν και μόνο αν η $\|x\|_K^{-1}$ είναι μια θετικά ορισμένη κατανομή.

Με το τρίτο θεώρημα ολοκληρώνεται μια ενιαία απόδειξη στο πρόβλημα των Busemann-Petty. Είναι μια εργασία των Gardner-Koldobsky-Schlumprecht, [GKS] στην οποία εξετάζεται πότε η $\|x\|_K^{-1}$ είναι μια θετικά ορισμένη κατανομή.

Στο τέταρτο μέρος του κεφαλαίου αυτού με χρήση των τριών θεωρημάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω δίνεται μια απόδειξη η οποία δίνει άμεσα την απάντηση στο πρόβλημα για όλες τις διαστάσεις και «επιβεβαιώνει» κατα κάποιο τρόπο όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα.

1.2 Ιστορικά

Το 1956 οι Busemann και Petty, [BP] δημοσίευσαν ένα άρθρο, θέτοντας μια σειρά από ανοικτά προβλήματα κυρτών σωμάτων. Ένα από αυτά ήταν και το πρόβλημα με το οποίο ασχολούμαστε στην εργασία αυτή.

Το πρόβλημα των Busemann-Petty

Έστω k, L κυρτά, συμμετρικά ως προς το 0, σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Αν για κάθε $(n-1)-$διάστατο υπόχωρο H ισχύει ότι

$$|K \cap H|_{(n-1)} \leq |L \cap H|_{(n-1)},$$

συνεπάγεται ότι

$$|K|_{(n)} \leq |L|_{(n)};$$

Παρόλο που το πρόβλημα μπορεί πλέον να θεωρηθεί κλεισμένο, αξίζει να γίνει μια μικρή αναφορά στις εργασίες που έχουν γίνει, μια και πολλοί μαθηματικοί ασχολήθηκαν με το θέμα αυτό. Πολλοί περισσότεροι από αυτούς που αναφέρονται στην εργασία αυτή. Παρακάτω τις παρουσιάζουμε συνοπτικά χωρίζοντας τα αποτελέσματα σ' αυτά που δίνουν αρνητική και σ' αυτά που δίνουν καταφατική απάντηση, ακολουθώντας χρονολογική σειρά.

Το 1975 οι Larman και Rogers, [LR] απέδειξαν ότι η απάντηση είναι αρνητική αν $n \geq 12$. Με πιθανοθεωρητικές μεθόδους έδειξαν την ύπαρξη σώματος L -μικρης παραλλαγής της Ευκλείδειας μπάλας (με την έννοια της Hausdorff απόστασης), του οποίου ο $n-$διάστατος όγκος είναι μεγαλύτερος από αυτόν της μπάλας, ενώ ο όγκος της τομής του με $(n-1)-$διάστατο υπόχωρο H δεν ξεπερνάει τον όγκο της B_{n-1}.

Αργότερα (1986-1989) ο Ball, [B1], [B2] αφού υπολόγισε ότι η μέγιστη $(n-1)-$διάστατη τομή του μοναδιαίου κύβου με έναν υπόχωρο είναι $\sqrt{2}$, κατασκεύασε ένα αντιπαράδειγμα χρησιμοποιώντας τον μοναδιαίο κύβο και την Ευκλείδεια μπάλα, κατάλληλης ακτίνας, για να δείξει ότι η απάντηση είναι αρνητική και για $n \geq 10$.

Γύρω στο 1990 ο Γιαννόπουλος, [Gi] έδειξε ότι η απάντηση είναι επίσης αρνητική όταν η διάσταση είναι μεγαλύτερη ή ίση από 7. Η λύση προήλθε κατασκευαστικά, θεωρώντας κύλινδρο στον $\mathbb{R}^n$ του οποίου ο όγκος είναι ίσος με τον όγκο της B_n ενώ οι $(n-1)-$διάστατες τομές του με υποχώρους έχουν όγκο μικρότερο από αυτόν της μπάλας στις $n-1$ διαστάσεις.

Την ίδια χρονιά ο Bourgain, [Bo] έδειξε ότι παίρνοντας την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και σώμα προερχόμενο από μικρές διαταραχές της η απάντηση είναι αρνητική.

Το 1991 ο Παπαδημητράκης, [P] κατασκεύασε κατάλληλο σώμα L και παίρνοντας μικρές διαταραχές του απέδειξε ότι το πρόβλημα επιμένει να έχει αρνητική απάντηση και στις περιπτώσεις όπου $n = 5, 6$.

Λίγο αργότερα οι Gardner, [Ga2] και Zhang, [Z2], έδωσαν το ίδιο αποτέλεσμα κατασκευάζοντας αντιπαραδείγματα από σώματα που δεν ήταν σώματα τομών στον $\mathbb{R}^5$.

Το Πρόβλημα των Busemann-Petty αποδείχθηκε τελικά ότι δίνει καταφατική απάντηση μόνο για τις διαστάσεις 2,3 και 4.

Για $n = 2$ είναι σχεδόν προφανές ότι η απάντηση είναι καταφατική μια και ο μονοδιάστατος όγκος των τομών των δύο συμμετρικών ως προς το 0, σωμάτων, $|K \cap H| \leq |L \cap H|$ ισοδυναμεί με $K \subseteq L$.

Το 1963 ο Busemann, [Bu1] έδειξε ότι στην ειδική περίπτωση όπου το K είναι ελλειψοειδές η απάντηση είναι καταφατική. Λίγο αργότερα, [Bu2] παρατήρησε ότι το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί κανείς να πάρει αν K είναι ένα ελλειψοειδές με κέντρο συμμετρίας το 0 και L ένα οποιοδήποτε συμπαγές σύνολο που περιέχει το 0.

Ο Lutwak, [Lu2] το 1988 έδωσε καταφατική απάντηση στον $\mathbb{R}^n$ για σώματα

που ανήκουν στην κλάση των αστερόμορφων σωμάτων, όπου το σώμα με την πιο μικρή κεντρική τομή είναι σώμα τομών, συνδέοντας έτσι τα σώματα τομών αστερόμορφων σωμάτων με το πρόβλημα των Busemann-Petty. Στην απόδειξη χρησιμοποίησε τη θεωρία των δυικών μικτών όγκων, την οποία ο ίδιος είχε πριν χρόνια ορίσει, [Lu1].
Επιπλέον έδειξε ότι αν L ένα σώμα με C^∞ σύνορο και θετική καμπυλότητα το οποίο δεν είναι σώμα τομών τότε μπορούμε με μικρές διαταραχές του να πάρουμε ένα σώμα K το οποίο μαζί με το αρχικό L δίνουν αρνητική απάντηση.

Έτσι δόθηκε ένα γενικό θεώρημα για το πότε η απάντηση στο πρόβλημα των Busemann-Petty είναι καταφατική. Και αυτό ισχύει αν και μόνο αν κάθε κυρτό συμμετρικό ως προς το 0, σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι σώμα τομών.

Το 1990 ο Bourgain, [Bo] έδειξε ότι για $n = 3$ η απάντηση είναι καταφατική παίρνοντας $L = B_3$ και K σώμα προερχόμενο από μικρές διαταραχές της μπάλας.

Το αποτέλεσμα του Lutwak βελτιώθηκε λίγο από τους Gardner, [Ga2] και Zhang, [Z2], [Z3]. Στην εργασία μας παρουσιάζουμε την απόδειξη του Zhang, [Z3], στην οποία η ικάνη συνθήκη για να ισχύει το θεώρημα οφείλεται στον Lutwak, [Lu2].

Το 1992 ο Zhang στο ίδιο άρθρο έδειξε ότι ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^4$ δεν είναι σώμα τομών, οπότε η απάντηση για τις τέσσερις διαστάσεις ήταν αρνητική.

Το 1994 ο Gardner, [Ga1] απέδειξε ότι κάθε κυρτό, συμμετρικό με κέντρο το 0, σώμα στον $\mathbb{R}^3$ είναι σώμα τομών, οπότε η απάντηση για τις τρεις διαστάσεις ήταν καταφατική.

Για μερικά χρόνια το πρόβλημα έδειχνε να έχει κλείσει, οι διαστάσεις 2 και 3 έδιναν καταφατική απάντηση, ενώ από τις 4 και πάνω αρνητική.

Το 1997 ο Koldobsky, [K4] απέδειξε ότι ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$ είναι σώμα τομών αν και μόνο αν $n \leq 4$. Οπότε το αποτέλεσμα του Zhang αποδείχθηκε ότι ήταν λανθασμένο. Λίγο αργότερα ο ίδιος, [Z1], επιβεβαίωσε το αποτέλεσμα του Koldobsky δείχνιντας ότι όλα τα κυρτά, συμμετρικά ως προς το 0, σώματα στον $\mathbb{R}^4$ είναι σώματα τομών.

Την ίδια χρονιά ο Koldobsky, [K5] έδωσε έναν χαρακτηρισμό για τα σώματα τομών, αποδεικνύοντας ότι ένα αστερόμορφο σώμα είναι σώμα τομών αν και μόνο αν η ακτινική του συνάρτηση είναι μια θετικά ορισμένη κατανομή.

Το πρόβλημα έκλεισε από τους Gardner-Koldobsky-Schlumprecht, [GKS], όπου έδωσαν μια γενική απόδειξη, η οποία δίνει απάντηση για όλες τις διαστάσεις. Στην απόδειξη αυτή φαίνεται πλέον «φυσιολογικό» γιατί το πρόβλημα των Busemann-Petty έχει καταφατική απάντηση για τις διαστάσεις 2,3 και 4, και αρνητική απάντηση για όλες τις παραπάνω.
Θα δούμε παρακάτω αναλυτικά τις αποδείξεις και των δύο τελευταίων αποτελεσμάτων που αναφέραμε.

Μια λίγο διαφορετική απόδειξη απο αυτή των Gardner-Koldobsky-Schlumprecht, έδωσαν τελευταία οι Barthe-Fradelizi-Maurey, [BFM].

1.3 Ορισμοί-Εισαγωγικά

Στην εργασία αυτή ο χώρος πάνω στον οποίο εργαζόμαστε είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$.

Συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα της λατινικής αλφαβήτου $A, B, ..K, L..$ τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Ο όγκος ενός τέτοιου συνόλου A στις k διαστάσεις θα είναι $|A|_{(k)}$.
Με B_k θα συμβολίζουμε την μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα διάστασης k και με S^{k-1} την μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^k$. Με w_k θα συμβολίζουμε τον όγκο της B_k, οπότε ο όγκος της S^{k-1} θα είναι kw_k.
Έτσι αν έχουμε μια $k-$διάστατη μπάλα ακτίνας ρ, ο όγκος της θα είναι $|B(\rho)|_{(k)} = \rho^k w_k$.

Η συνάρτηση Γάμμα είναι μια συνάρτηση $\Gamma : \ (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

και για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες

i. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

ii. $\Gamma(1) = 1$

iii. αν $n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!$

([W], σελ.208-9)

Ένα ολοκλήρωμα που θα χρησιμοποιήσουμε πολύ, ιδιαίτερα στο πρώτο μέρος της εργασίας αυτής, είναι το

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.3.1}$$

Για την ακολουθία αυτή ισχύει

$$I_{n+1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \cos \theta d\theta \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = I_n,$$

δηλαδή η $\{I_n\}$ είναι φθίνουσα.

Με την βοήθεια του I_n και της συνάρτησης Γαμμα, υπολογίζεται ότι ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$, είναι

$$w_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$\frac{w_n}{w_{n-1}} = I_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.3.2}$$

ή αλλιώς

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \tag{1.3.3}$$

([W], σελ.278-9)

Με $H(u)$ ή $u^{\perp}$ θα συμβολίζουμε τον $(n-1)-$διάστατο γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι κάθετος στο διάνυσμα $u \in S^{n-1}$, δηλαδή

$$H(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = 0\}.$$

Το σύμβολο $\langle x, y \rangle$ θα δίνει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Στα ολοκληρώματα, τα σύμβολα $dx, d\xi, \ldots$, αντιστοιχούν στην ολοκλήρωση ως προς το μέτρο Lebesgue κατάλληλης διάστασης ή το επιφανειακό μέτρο πάνω στην σφαίρα κατάλληλης διάστασης. Σε κάθε τέτοια περίπτωση θα είναι προφανές το μέτρο που θα χρησιμοποιείται από τα σύνολα πάνω στα οποία θα ολοκληρώνουμε.
Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, όπου το μέτρο δεν είναι κάποιο από τα παραπάνω, αυτό θα αναφέρεται, καθώς και ο ορισμός του.

Πρόταση 1.3.1 *Η συνάρτηση του όγκου των $(n-1)$-διάστατων τομών του μοναδιαίου κύβου $Q_n = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ με υπόχωρο που δεν είναι παράλληλος με κάποια από τις έδρες του Q_n, είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη
Θα δείξουμε γενικότερα το εξής:

Έστω K κυρτό, συμπαγές σώμα στον $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό). Έστω H ένας $(n-1)-$διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}^n \backslash H$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(r) = |(H+ra) \cap K| =: |K_r|_{(n-1)}$.
Αν $r_m \longrightarrow r$ και $K_{r_m} \neq \emptyset$, τότε $f(r_m) \longrightarrow f(r)$.
Για να αποδείξουμε το παραπάνω ισχυρισμό πρέπει να δείξουμε τα εξής:

1. $K_{r_m} \longrightarrow K_r$ (ως προς την μετρική του $Hausdorff$)

2. Αν $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow H$ η συνάρτηση προβολής πάνω στον υπόχωρο H τότε $\pi(K_{r_m}) \longrightarrow \pi(K_r)$

Οπότε θα έχουμε ότι $|\pi(K_{r_m})|_{(n-1)} \longrightarrow |\pi(K_r)|_{(n-1)}$ και συνεπώς

$$|K_{r_m}|_{(n-1)} \longrightarrow |K_r|_{(n-1)}$$

1.) : Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

i. αν $x_{m_n} \in K_{r_{m_n}}$ και $x_{m_n} \longrightarrow x,\ n \to +\infty$ τότε $x \in K_r$

ii. αν $x \in K_r$, τότε υπάρχουν $x_m \in K_{r_m}$ με $x_m \longrightarrow x$.

i] : Θεωρούμε ακολουθία x_{m_n} με $x_{m_n} \in K_{r_{m_n}} = (H + r_{m_n}a) \cap K$, για μια υποακολουθία δεικτών m_n με $x_{m_n} \longrightarrow x,\ n \to +\infty$.

Έστω $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}$, ϕ γραμμικό συναρτησοειδές, $\phi \neq 0$.
Αν $y \in H + ra \Rightarrow x - ra \in H$ τότε $\phi(x - ra) = 0 \Rightarrow \phi(x) = r\phi(a)$.
Έτσι, κάθε ένα από τα σώματα K_{r_m} μπορούν να περιγραφούν ως

$$K_{r_m} = \{y \in K :\ \phi(y) = r_m\phi(a)\}.$$

Έστω

$$x_{m_n} \longrightarrow x$$

τότε

$$\phi(x_{m_n}) \longrightarrow \phi(x)$$

δηλαδή

$$r_m\phi(a) \longrightarrow r\phi(a)$$

οπότε

$$r_{m_n} \to r.$$

Κι επειδή $\phi(x_{m_n}) = r_m\phi(a)$, η ισότητα θα ισχύει και για τα αντίστοιχα όρια, δηλαδή

$$\phi(x) = r\phi(a)$$

Άρα $x \in K_r$.

ii] : Θεωρούμε την ακολουθία αριθμών r_m, με $r_m \to r$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r < r_m < r_1$ για $m > m_0$. Τότε υπάρχουν $\lambda_m \in (0,1)$ τέτοια ώστε

$$r_m = \lambda_m r_1 + (1 - \lambda_m)r.$$

Έστω $x \in K_r$ και $y \in K \cap H$. Για κάθε $\lambda_m,\ m \in \mathbb{N}$ ορίζεται ακολουθία σημείων

$$x_m = \lambda_m y + (1 - \lambda_m)x.$$

Για κάθε ένα απο τα σημεία αυτά και με βάση τον παραπάνω ορισμό των K_{r_m}, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(x_m) &= \phi\big(\lambda_m y + (1-\lambda_m)x\big) \\ &= \lambda_m \phi(y) + (1-\lambda_m)\phi(x) \\ &= [\lambda_m r_1 + (1-\lambda_m)r]\phi(a) \end{aligned}$$

Άρα $x_m \in K_{r_m}$.
Αφού $r_m \longrightarrow r$, $\lambda_m \longrightarrow 0$, παίρνουμε ότι $x_m \longrightarrow x$. Συνεπώς υπάρχει ακολουθία x_m με $x_m \in K_{r_m}$ και $x_m \longrightarrow x$.

2.) : Έστω $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow H$ η προβολή στον υπόχωρο H. Θέλουμε

$$\pi(K_{r_m}) \longrightarrow \pi(K_r)$$

Όμοια με το (1.) αρκεί να δείξουμε ότι

i. αν $x_{m_n} \in K_{r_m}$ και $\pi x_{m_n} \longrightarrow y$, τότε $y \in \pi(K_r)$

ii. αν $\pi x \in \pi(K_r)$, τότε υπάρχουν $\pi x_m \in \pi(K_{r_m})$ με $\pi x_m \longrightarrow \pi x$

i] : Έστω $x_{m_n} \in K_{r_m}$ και $\pi x_{m_n} \longrightarrow \pi x$.
Στο (1.) δείξαμε ότι $K_{r_m} \longrightarrow K$, οπότε υπαρχει συμπαγές σύνολο που περιέχει όλα τα K_{r_m}. Αφού $x_{m_n} \in K_{r_m}$ και $K_{r_m} \longrightarrow K_r$, από το (1.i]) παίρνουμε οτι κάθε συγκλίνουσα υποακολουθία της x_{m_n} συγκλίνει σε στοιχείο του K_r. Η π είναι συνεχής απεικόνιση . Αφού $\pi x_{m_n} \in \pi(K_{r_m})$, έπεται οτι $y \in \pi(K_r)$.

ii] : Έστω $\pi x \in \pi(K_r)$. Δηλαδή $x \in K_r$.
Από το 1.ii] υπάρχουν $x_m \in K_{r_m}$ τ.ω. $x_m \longrightarrow x$.
Αφού $x_m \in K_{r_m}$ έχουμε ότι $\pi x_m \in \pi(K_{r_m})$ και $(x_m - x) \longrightarrow 0$
άρα $\pi(x_m - x) \longrightarrow \pi(0) = 0$
ή αλλιώς

$$\pi x_m - \pi x \longrightarrow 0$$

δηλαδή

$$\pi x_m \longrightarrow \pi x$$

Άρα $\pi(K_{r_m}) \longrightarrow \pi(K_r)$, καθώς $r_m \longrightarrow r,\ m \to +\infty$.
Συνεπώς $|\pi(K_{r_m})|_{(n-1)} \longrightarrow |\pi(K_r)|_{(n-1)}$.
Άρα

$$|K_{r_m}|_{(n-1)} \longrightarrow |K_r|_{(n-1)}.$$

Κεφάλαιο 2

Αρνητική απάντηση για $n \geq 5$

2.1 Αντιπαράδειγμα για $n \geq 12$

Θεωρούμε την μοναδιαία μπάλα $B_n \subseteq \mathbb{R}^n$. Διάλεγουμε N μοναδιαία διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Αφαιρώντας από την B_n, $2N$ σφαιρικά «καπάκια» γωνιακής ακτίνας $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, με κέντρα τα $\pm u_1, \ldots, \pm u_N$, κατασκευάζεται ένα κυρτό σώμα, το οποίο θα συμβολίζουμε $K(u_1, u_2, \ldots, u_N)$. Η επιλογή των $u_1, u_2, \ldots, u_N$ γίνεται τυχαία, οπότε υπάρχει περίπτωση τα καπάκια αυτά να επικαλύπτονται. Γι΄ αυτό υπολογίζουμε την πιθανότητα να συμβαίνει αυτό κι επιλέγουμε τις παραμέτρους ε και N, έτσι ώστε η πιθανότητα αυτή να είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}$.

Πιο συγκεκριμένα, το σώμα $K(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ θα είναι το σύνολο των $x \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία $\|x\| \leq 1$ και $|x \cdot u_i| \leq \cos\varepsilon, \ 1 \leq i \leq N$.

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$V_n(u_1, u_2, \ldots, u_N) := |B_n|_{(n)} - \sum_{i=1}^{N} |C(u_i) \cup C(-u_i)|_{(n)},$$

όπου $C(u), \ u \in S^{n-1}$ είναι το καπάκι που αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| \leq 1$ και $x \cdot u > \cos\varepsilon$.

Όπως θα δούμε παρακάτω ένα τέτοιο καπάκι, γωνιακής ακτίνας ε, καλύπτει ποσοστό της επιφάνειας της S^{n-1} που είναι της τάξης $c\varepsilon^{n-1}$, όπου $c > 0$ σταθερά που εξαρτάται από την διάσταση.

ΒΗΜΑ 1.

Όπως είναι γνωστό μια μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ με ακτίνα $r > 0$ έχει όγκο $|rB_n|_{(n)} =$

$\frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$, οπότε ο όγκος του $C(u)$ θα είναι

$$|C(u)|_{(n)} = \int_{\cos\varepsilon}^{1} \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})} dx = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})} \int_0^{\varepsilon} \sin^n \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})} \Big[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{6(n+3)} \varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+5}) \Big],$$

καθώς $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ και η συνάρτηση O θα εξαρτάται μόνο από την διάσταση. Αυτό μπορούμε να το δούμε, αν πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$. Οπότε

$$\sin^n x = \Big[\big(x - \frac{x^3}{6}\big) + O(x^5) \Big]^n$$

$$= \big(x - \frac{x^3}{6}\big)^n + n\big(x - \frac{x^3}{6}\big)^{n-1} O(x^5) + \binom{n}{2} \big(x - \frac{x^3}{6}\big)^{n-2} O(x^{10}) + \ldots$$

$$= \big(x - \frac{x^3}{6}\big)^n + O(x^{n+4})$$

$$= x^n - n x^{n-1} \frac{x^3}{6} + \binom{n}{2} x^{n-2} \frac{x^6}{36} + \binom{n}{3} x^{n-3} \frac{x^9}{6^3} + \ldots + O(x^{n+4})$$

$$= x^n - \frac{n}{6} x^{n+2} + O(x^{n+4})$$

Τότε,

$$\int_0^{\varepsilon} \sin^n x dx = \int_0^{\varepsilon} \big[x^n - \frac{n}{6} x^{n+2} + O(x^{n+4})\big] dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \varepsilon^{n+1} - \frac{n}{6(n+3)} \varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+5}).$$

ΒΗΜΑ 2.

Θα μελετήσουμε τώρα την συνάρτηση $V(u_1, u_2, \ldots, u_N)$. Έχουμε

$$V(u_1, u_2, \ldots, u_N) = |B_n|_{(n)} - \sum_{i=1}^{N} |C(u_i) \cup C(-u_i)|_{(n)}$$

$$= |B_n|_{(n)} - 2N |C(u)|_{(n)} = |B_n|_{(n)} \Big(1 - 2N \frac{|C(u)|_{(n)}}{|B_n|_{(n)}}\Big)$$

(από το βήμα 1.)

$$= |B_n|_{(n)}\Bigg(1 - 2N\frac{\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}}{\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{6(n+3)}\varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+5})\Big\}\Bigg)$$

$$= |B_n|_{(n)}\Big(1 - 2N\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{6(n+3)}\varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+5})\big\}\Big)$$

$$= |B_n|_{(n)} r_1^n,$$

όπου

$$r_1 = \Bigg(1 - 2N\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{6(n+3)}\varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+5})\Big\}\Bigg)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \Bigg(1 - 2N\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{6(n+3)}\varepsilon^{n+3}\Big\} + NO(\varepsilon^{n+5})\Bigg)^{\frac{1}{n}}$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\Bigg(-2N\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{6(n+3)}\varepsilon^{n+3}\Big\} + NO(\varepsilon^{n+5})\Bigg)$$

$$+O\Bigg((-2N\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{6(n+3)}\varepsilon^{n+3}\Big\} + NO(\varepsilon^{n+5})\Big)^2\Bigg)$$

$$= 1 - 2N\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)}\Big\} + \frac{1}{n}NO(\varepsilon^{n+5})$$

$$+O\Bigg(-2N\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{n}{6(n+3)}\varepsilon^{n+3}\Big\} + NO(\varepsilon^{n+5})\Big)^2\Bigg).$$

Θα επιλέξουμε το N ώστε να είναι της τάξης του ε^{-a}, για κάποιο $a > 0$, το οποίο θα προσδιορισθεί αργότερα. Για να μπορεί να παραλειφθεί ο τελευταίος όρος θα πρέπει να ισχύει

$$\big(N\varepsilon^{n+1}\big)^2 < N\varepsilon^{n+5}$$

δηλαδή
$\varepsilon^{-2a+2n+2} < \varepsilon^{-a+n+5}$, για $0 < \varepsilon < 1$, οπότε

$$n > a + 3. \tag{2.1.1}$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$r_1 = 1 - \frac{2N\Gamma(1+\frac{1}{2}n)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\left\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)}\right\} + O(N\varepsilon^{n+5}). \qquad (2.1.2)$$

ΒΗΜΑ 3.
Υπολογίζουμε την πιθανότητα όταν επιλέγουμε τα $u_1, \ldots, u_N$ ανεξάρτητα στην S^{n-1}, με ομοιόμορφη κατανομή, δύο ή περισσότερα από τα διπλά καπάκια $C(u_i) \cap C(-u_i)$, $i = 1, \ldots, N$, να επικαλύπτονται.
Αν p είναι το ποσοστό του εμβαδού της S^{n-1} που καλύπτεται από ένα διπλό καπάκι γωνιακής ακτίνας 2ε, τότε

$$p = \frac{2|C(u)|_{(n)}}{|B_n|_{(n)}} = \frac{2}{|B_n|_{(n)}}\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\int_0^\varepsilon \sin^n\theta d\theta$$

Όμως $\int_0^\varepsilon \sin^n\theta d\theta \leq \int_0^\varepsilon \sin^{n-2}\theta d\theta$, αφού $0 \leq \sin\theta \leq 1$. Οπότε,

$$p \leq c\int_0^\varepsilon \sin^{n-2}\theta d\theta \leq c\int_0^\varepsilon \theta^{n-2} d\theta = \frac{c}{n-1}\theta^{n-1}\Big|_0^\varepsilon = O(\varepsilon^{n-1}).$$

Όταν λοιπόν θα έχουμε επιλέξει r, $1 \leq r \leq N$, διανύσματα πάνω στην S^{n-1}, το ποσοστό που θα έχει καλυφθεί από τα διπλά καπάκια γωνιακής ακτίνας 2ε με κέντρα τα $\pm u_1, \ldots, \pm u_N$, θα είναι το πολύ rp. Το διπλό καπάκι $C(u_{r+1}) \cup C(-u_{r+1})$ θα τέμνει ένα από τα προηγούμενα αν και μόνο αν το u_{r+1} «πέφτει» στην ένωση των r διπλών καπακιών γωνιακής ακτίνας 2ε. Οπότε η πιθανότητα να έχουμε επικάλυψη στο στάδιο αυτό θα είναι το πολύ rp.
Συνεπώς η πιθανότητα επικάλυψης σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας αυτής θα είναι

$$\leq \sum_{r=1}^{N-1} rp = p(1+2+\cdots N-1) = \frac{1}{2}N(N-1)p = O(N^2\varepsilon^{n-1})$$

Θέλουμε η πιθανότητα αυτή, για μικρά ε, να είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}$. Αν λοιπόν $N \approx \varepsilon^{-a}$, $a > 0$, πρέπει

$$-2a + n - 1 > 0. \qquad (2.1.3)$$

ΒΗΜΑ 4.
Θεωρούμε τώρα έναν γραμμικό $(n-1)-$διάστατο υπόχωρο L του $\mathbb{R}^n$ και ορίζουμε την ποσότητα

$$V_{n-1}\big(L; u_1, \ldots, u_N\big) := \big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} - \sum_{i=1}^{N}\Big|L \cap \big\{C(u_i) \cup C(-u_i)\big\}\Big|_{(n-1)}.$$

Η ποσότητα αυτή εξαρτάται από τα τυχαία επιλεγόμενα $u_1, \dots, u_N$, άρα είναι μια τυχαία μεταβλητή.
Θα υπολογίσουμε την μέση τιμή αυτής της τυχαίας μεταβλητής και στην συνέχεια επιλέγοντας μια τιμή λίγο μεγαλύτερή της, έστω ν_1, θα παρατηρήσουμε ότι η πιθανότητα να έχουμε $V_{n-1}\big(L; u_1, \dots, u_N\big) > \nu_1$ είναι πολύ μικρή. Παρ΄ όλα αυτά κάτι τέτοιο δεν μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε να επιλέξουμε $u_1, \dots, u_N$ ώστε να ισχύει $V_{n-1}\big(L; u_1, \dots, u_N\big) \leq \nu_1$, για όλους τους $(n-1)-$διάστατους υποχώρους L.
Για τον λόγο αυτό θα θεωρήσουμε $v_1, v_2, \dots, v_M$ μοναδιαία διανύσματα, με M κατάλληλο (μέγιστο πλήθος) έτσι ώστε τα σφαιρικά καπάκια με κέντρα τα $v_1, v_2, \dots, v_M$ και κατάλληλη γωνιακή ακτίνα να μην επικαλύπτονται. Οπότε αν πάρουμε τους $L_1, L_2, \dots, L_M$ κάθετους υπόχωρους των $v_1, v_2, \dots, v_M$, θα μπορούμε με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων να διαλέξουμε τα $u_1, \dots, u_N \in S^{n-1}$ έτσι ώστε

i. τα $C(u_i) \cup C(-u_i),\ 1 \leq i \leq N$, ανα δύο να μην επικαλύπτονται,

ii. $V_{n-1}\big(L_j; u_1, \dots, u_N\big) \leq \nu_1,\ 1 \leq j \leq M$.

Τότε το σώμα $K(u_1, u_2, \dots, u_N)$ θα μπορεί να κατασκευαστεί ώστε να δίνει το αρνητικό αποτέλεσμα για κατάλληλα n.

ΒΗΜΑ 5.
Θέτουμε

$$W(L; u) := \Big| L \cap \big\{ C(u \cup C(-u) \big\} \Big|_{(n-1)}$$

Θα μελετήσουμε την τυχαία μεταβλητή

$$V_{n-1}\big(L; u_1, \dots, u_N\big) := \big| L \cap B_n \big|_{(n-1)} - \sum_{i=1}^{N} W(L; u_i).$$

Έστω $v = v(L)$ ένα από τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα του γραμμικού υπόχωρου L και έστω $\phi = \phi(v, u)$, η συμπληρωματική γωνία της οξείας γωνίας που σχηματίζουν τα μοναδιαία διανύσματα $\pm u,\ \pm v$ μεταξύ τους. Μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $\phi > 0$.

Αν $\varepsilon \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, ο γραμμικός υπόχωρος L δεν τέμνει το καπάκι γωνιακής ακτίνας ε και κέντρου u, οπότε

$$\big| L \cap C(u) \big|_{(n-1)} = 0.$$

Αν $0 \leq \phi \leq \varepsilon$, ο L τέμνει το καπάκι γωνιακής ακτίνας ε και κέντρου u σε ένα $(n-1)-$διάστατο καπάκι, του οποίου η γωνιακή ακτίνα υπολογίζεται ως εξης:

Αν x η ζητούμενη γωνία, τότε θα έχουμε ότι $\cos x = \frac{a}{1}$, όπου $a = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi}$.

Οπότε $\cos x = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi}$ κι άρα η τομή του υποχώρου L με το $n-$διάστατο καπάκι κέντρου u και γωνιακής ακτίνας ε είναι ένα $(n-1)-$διάστατο καπάκι γωνιακής ακτίνας $\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi})$ και

$$\big|L \cap C(u)\big|_{(n-1)} = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi})} \sin^{n-1}\theta d\theta$$

Έτσι αν $\varepsilon \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$,

$$W(L;u) = \Big|L \cap \big\{C(u) \cup C(-u)\big\}\Big|_{(n-1)} = 0 \tag{2.1.4}$$

και αν $0 \leq \phi < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} W(L;u) = \Big|L \cap \big\{C(u \cup C(-u)\big\}\Big|_{(n-1)} &= \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi})} \sin^{n-1}\theta d\theta \\ < \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\varepsilon} \theta^{n-1} d\theta &= \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}\varepsilon^n = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\varepsilon^n \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

καθώς $0 < \arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi}) \leq \varepsilon$.

ΒΗΜΑ 6.

Κρατώντας σταθερό τον L θα υπολογίσουμε την πιθανότητα, αν το u επιλεγεί τυχαία στην S^{n-1}, η συμπληρωματική γωνία της οξείας γωνίας μεταξύ των u και $\pm v$, να είναι μεταξύ των ϕ και $\phi + \delta\phi$. Αν ονομάσουμε $S(u)$ την επιφάνεια της σφαιρικής ζώνης, διάστασης $n-1$, που παίρνουμε απο την παραπάνω απαίτηση, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι

$$\frac{|S(u)|_{(n-1)}}{|S^{n-1}|_{(n-1)}}.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την σφαιρική επιφάνεια, το $|S(u)|_{(n-1)}$. Αν θεωρήσουμε γωνία ψ, με $\phi \leq \psi \leq \phi + \delta\phi$ και θέσουμε $x = \sin\psi$, τότε $\cos\psi = \sqrt{1-x^2}$ και $\sin\phi \leq x \leq \sin(\phi+\delta\phi)$.
Οπότε η επιφάνεια θα είναι

$$|S(u)|_{(n-1)} = 2\frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\int_{\sin\phi}^{\sin(\phi+\delta\phi)}(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}\frac{dx}{\cos\psi}$$
$$= 2\frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\int_{\sin\phi}^{\sin(\phi+\delta\phi)}\cos^{n-2}\psi\frac{dx}{\cos\psi}$$
$$= 2\frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\int_{\sin\phi}^{\sin(\phi+\delta\phi)}\cos^{n-3}\psi dx$$

με $x = \cos\psi,\ \psi \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Οπότε η επιφάνεια της σφαιρικής ζώνης θα είναι περίπου ίση με

$$\begin{aligned} & 2\frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\cos^{n-3}\phi\big(\sin(\phi+\delta\phi)-\sin\phi\big) \\ \approx\ & 2\frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\cos^{n-3}\phi\cos\phi\cdot\delta\phi \\ =\ & 2\frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\cos^{n-2}\phi\cdot\delta\phi \end{aligned}$$

Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι

$$2\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{n\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\cos^{n-2}\phi\cdot\delta\phi$$

ΒΗΜΑ 7.
Όπως περιγράψαμε και στο βήμα 4., θέλουμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της $V_{n-1}(L; u_1, \ldots, u_N) := \big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} - \sum_{i=1}^{N} W(L; u_i)$. Αρχικά όμως υπολογίζουμε την μέση τιμή της $W(L; u_i)$ με την βοήθεια των αποτελεσμάτων στα βήματα 5 και 6.

$$E(W) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} W(L; u) \frac{2\Gamma(1+\frac{n}{2})}{n\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})} \cos^{n-2}\phi d\phi$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{n\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})} \cos^{n-2}\phi \left(\frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi})} \sin^{n-1}\theta d\theta \right) d\phi$$

$$= \frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})2\pi^{\frac{n-3}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})} \int_0^{\varepsilon} \cos^{n-2}\phi \left(\int_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi})} \sin^{n-1}\theta d\theta \right) d\phi \quad (2.1.6)$$

Ύστερα από πράξεις και υπολογισμούς τους οποίους θα περιγράψουμε στο βήμα 9, καταλήγουμε στο

$$E(W) = |L \cap B_n|_{(n-1)} \times$$

$$\frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \Big[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} + O(\varepsilon^{n+5}) \Big] \quad (2.1.7)$$

Οπότε για την μέση τιμή της $V_{n-1}(L; u_1, \ldots, u_N)$ θα έχουμε

$$EV_{n-1}(L; u_1, \ldots, u_N) := E\Big(\big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} \Big) - E\big(\sum_{i=1}^{N} W(L; u_i) \big)$$

$$= \big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} - NE\big(W(L; u_i)\big),$$

αφού οι τυχαίες μεταβλητές $W(L; u_i),\ i = 1, \ldots, N$, είναι ισόνομες.
Έτσι, από την σχέση (2.1.7)

$$EV_{n-1}(L; u_1, \ldots, u_N) = |L \cap B_n\big|_{(n-1)} - N|L \cap B_n\big|_{(n-1)} \times$$

$$\frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \Big[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} + O(\varepsilon^{n+5}) \Big]$$

$$= |L \cap B_n|\Big|_{(n-1)} \times$$

$$\left[1 - N\frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\Big(\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} + O(\varepsilon^{n+5})\Big)\right]$$

$$= \big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} r_2^{n-1}, \tag{2.1.8}$$

όπου

$$r_2 = \left[1 - N\frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \times \right.$$

$$\left.\Big(\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} + O(\varepsilon^{n+5})\Big)\right]^{\frac{1}{n-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{n-1}\frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\Big(\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} + O(\varepsilon^{n+5})\Big)$$

$$+O\Bigg(\frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\Big(\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$-\frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} + O(\varepsilon^{n+5})\Big)^2\Bigg).$$

Αν το N επιλεγεί όπως στο βήμα 2, (δηλαδή να ικανοποιεί την (2.1.1)), έχουμε

$$r_2 = 1 - \frac{2N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\Big(\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}\Big) + O(\varepsilon^{n+5})$$

Από την σχέση αυτή και την (2.1.2) έπεται ότι

$$r_1 - r_2 = \frac{2N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} + O(N\varepsilon^{n+5}),$$

οπότε

$$r_1 > r_2$$

για αρκετά μικρά ε.
Αν

$$\nu_0 := EV_{n-1}\big(L; u_1, \ldots, u_N\big)$$

και

$$\beta = \big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} \frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}. \tag{2.1.9}$$

Γράφουμε $\nu_1 = \nu_0 + \frac{1}{3}\beta > \nu_0$, οπότε

$$\nu_1 = \big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} \times$$

$$\Big(1 - \frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \Big(\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}\Big) + O(N\varepsilon^{n+5})\Big)$$

$$+\frac{1}{3}\big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} \frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}$$

$$= \big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} \times$$

$$\Big(1 - \frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \Big(\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}\Big) + O(N\varepsilon^{n+5})\Big) \tag{2.1.10}$$

ΒΗΜΑ 8.
Θα υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα να ισχύει

$$V_{n-1} > \nu_1$$

όταν ο υπόχωρος είναι σταθεροποιημένος και τα $u_1, \ldots, u_N$ επιλέγονται τυχαία στην S^{n-1}. Έστω $p(\nu)$ η πιθανότητα να ισχύει $V_{n-1} = V_{n-1}(L; u_1, \ldots u_N) > \nu$.
Αρχικά θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της $\exp(\lambda V_{n-1})$, $\lambda \geq 0$ και στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα για να πάρουμε μια εκτίμηση για την $p(\nu_1)$.

$$E\exp(\lambda V_{n-1}) = E\exp\Big(\lambda\big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} - \lambda\sum_{i=1}^{N} W(L; u_i)\Big)$$

$$= \exp\Big(\lambda\big|L \cap B_n\big|_{(n-1)}\Big) E\exp\Big(-\lambda\sum_{i=1}^{N} W(L; u_i)\Big)$$

$$= \exp\Big(\lambda\big|L \cap B_n\big|_{(n-1)}\Big)\Big(E\exp\big(-\lambda W(L;u_i)\big)\Big)^N,$$

αφού τα $u_1, \dots, u_N$ είναι ανεξάρτητα.

Έχουμε δει ότι, αν η συμπληρωματική γωνία ϕ της γωνίας που σχηματίζουν τα $\pm u$, $\pm v$, όπου v είναι ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στον υπόχωρο L, είναι $\varepsilon \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, τότε $W(L;u) = 0$, ενώ αν $0 \leq \phi < \varepsilon$, τότε $W(L;u) < \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\varepsilon^n$, (σχέσεις (2.1.4),(2.1.5)).
Αν πάρουμε

$$\lambda = \frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\varepsilon^{-n}\varepsilon^2\eta, \tag{2.1.11}$$

με $0 < \eta < 1$ και η ανεξάρτητο του ε, τότε για $\varepsilon < 1$ ισχύει ότι

$$\lambda \sup W(L;u) \leq \varepsilon^2\eta < 1,$$

όπου το supremum λαμβάνεται πάνω από όλους τους υποχώρους που σχηματίζουν γωνία ϕ με το u, αφού

$$\lambda \sup W(L;u) \leq \frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\varepsilon^{-n}\varepsilon^2\eta\frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\varepsilon^n = \varepsilon^2\eta < 1.$$

Από την ανισότητα $e^{-x} < 1 - x + \frac{1}{2}x^2$, για $x > 0$, παίρνουμε ότι

$$\exp\big(-\lambda W(L;u)\big) < 1 - \lambda W(L;u) + \frac{1}{2}\lambda^2\big(W(L;u)\big)^2$$

$$< 1 - \lambda W(L;u) + \frac{1}{2}\lambda\varepsilon^2\eta W(L;u).$$

Οπότε για την μέση τιμή ισχύει

$$\begin{aligned} E\exp\big(-\lambda W(L;u)\big) &< 1 - \lambda\big(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\eta\big)E\big(W(L;u)\big) \\ &< \exp\big(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\eta\big)E\big(W(L;u)\big) \end{aligned}$$

από την ανισότητα $1 - x < e^{-x}$, $x > 0$.
Και έτσι

$$E\exp\big(\lambda V_{n-1}\big) < \exp\Big[\lambda\big|L \cap B_n\big|_{(n-1)} - \lambda N\big(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\eta\big)EW(L;u)\Big].$$

Αν λοιπόν $p(\nu_1)$ είναι η πιθανότητα να ισχύει $V_{n-1} > \nu_1$, από την ανισότητα Markov, παίρνουμε ότι

$$p(\nu_1)\exp(\lambda\nu_1) \leq E\exp(\lambda V_{n-1})$$

Οπότε

$$p(\nu_1) \leq \exp(-\lambda\nu_1)E\exp(\lambda V_{n-1})$$
$$< \exp\Big[-\lambda\nu_1 + \lambda\big|L\cap B_n\big|_{(n-1)} - \lambda NEW(L;u) + \frac{1}{2}\lambda N\varepsilon^2\eta EW(L;u)\Big].$$

Από την σχέση (2.1.7) και τους ορισμούς των β και ν_1 ,σχέσεις (2.1.9) και (2.1.10) αντίστοιχα, έχουμε ότι

$$\nu_1 - \big|L\cap B_n\big|_{(n-1)} + NEW(L;u) - \frac{1}{2}N\varepsilon^2\eta EW(L;u)$$
$$= \nu_0 + \frac{1}{3}\beta - \big|L\cap B_n\big|_{(n-1)} + NEW(L;u) - \frac{1}{2}N\varepsilon^2\eta EW(L;u)$$
$$= \big|L\cap B_n\big|_{(n-1)} - NEW(L;u) + \frac{1}{3}\beta - \big|L\cap B_n\big|_{(n-1)}$$
$$+NEW(L;u) - \frac{1}{2}N\varepsilon^2\eta EW(L;u)$$
$$= \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{2}N\varepsilon^2\eta EW(L;u)$$
$$= \frac{1}{3}\big|L\cap B_n\big|_{(n-1)}\frac{2(n-1)N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}$$
$$-\frac{1}{2}N\varepsilon^2\eta\big|L\cap B_n\big|_{(n-1)}\frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\times$$
$$\Big[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} + O(\varepsilon^{n+5})\Big]$$
$$= \frac{1}{3}\big|L\cap B_n\big|_{(n-1)}\frac{2(n-1)N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}$$
$$-\frac{1}{2}N\varepsilon^2\eta\big|L\cap B_n\big|_{(n-1)}\frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\Big(\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} + O(\varepsilon^{n+3})\Big)$$
$$> \frac{1}{6}\big|L\cap B_n\big|_{(n-1)}\frac{2(n-1)N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{6}\beta,$$

αν πάρουμε $\eta = \frac{1}{4(n+3)}$ και ε αρκετά μικρό.

Η τελευταία ανισότητα επιτυγχάνεται γιατί, αν πάρουμε $\eta = \frac{1}{4(n+3)}$, η ανισότητα ισοδυναμεί με την

$$\frac{1}{6}\big|L\cap B_n\big|_{(n-1)}\frac{2(n-1)N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}$$

$$> \frac{1}{2}N\varepsilon^2\big|L \cap B_n\big|_{(n-1)}\frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\Big(\frac{1}{4}\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)(n+3)} + O(\varepsilon^{n+3})\Big)$$

ή

$$\frac{1}{3}\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} > \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} + \varepsilon^2 O(\varepsilon^{n+3})$$

ή

$$4\varepsilon^{n+3} > 3\varepsilon^{n+3} + \varepsilon^2 O(\varepsilon^{n+3})$$

ή

$$\varepsilon^{n+3} > \varepsilon^2 O(\varepsilon^{n+3}),$$

το οποίο ισχύει για αρκετά μικρά ε.
Οπότε για την $p(\nu_1)$ από τις σχέσεις (2.1.9) και (2.1.11), παίρνουμε οτι

$$p(\nu_1) < \exp\big(-\frac{1}{6}\lambda\beta\big) = \exp\big(-\gamma_n\varepsilon^{-n}\varepsilon^2 N\varepsilon^{n+3}\big),$$

όπου $\gamma_n > 0$ που εξαρτάται μόνο από την διάσταση n.
Το N θα επιλεγεί ώστε να είναι της τάξης του ε^{-a}, $a > 0$. Οπότε $p(\nu_1) < \exp\big(-\gamma_n\varepsilon^{5-a}\big)$.
Θέλουμε το $p(\nu_1)$ να τείνει στο 0, για $\varepsilon \longrightarrow 0$, οπότε θα πρέπει να ισχύει $5-a<0$ δηλαδή $a>5$. Επιλέγουμε λοιπόν $a = 5\frac{1}{4}$, άρα $N = \Big[\varepsilon^{-5\frac{1}{4}}\Big] + 1$.
Λόγω της σχέσης (2.1.3) πρέπει να ισχύει $n > 2a+1$, δηλαδή πρέπει $n \geq 12$.
Η σχέση (2.1.1) την οποία επίσης έχουμε απαιτήσει, ($n > a+3$), προφανώς ικανοποιείται. Με αυτή την επιλογή έχουμε

$$p(\nu_1) < \exp\big(-\gamma_n\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\big). \tag{2.1.12}$$

ΒΗΜΑ 9.
Πήραμε μια εκτίμηση για την πιθανότητα να ισχύει $V_{n-1} > \nu_1$.
Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη της κατασκευής του σώματος $K\big(u_1,\ldots,u_N\big)$ που θα αποτελεί το αντιπαράδειγμα στο πρόβλημα για $n \geq 12$, θα δώσουμε μια απόδειξη της σχέσης (2.1.7):

$$E\big(W\big) = \big|L \cap B_n|_{(n-1)}\times$$

$$\frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\Big[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)} + O(\varepsilon^{n+5})\Big].$$

Απο την (2.1.6) έχουμε ότι

$$E(W) = \frac{2(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})2\pi^{\frac{n-3}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})} \int_0^{\varepsilon} \cos^{n-2}\phi \Big(\int_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi})} \sin^{n-1}\theta d\theta \Big) d\phi.$$

Θέτουμε $\theta = \arccos(\frac{\cos\psi}{\cos\phi})$, άρα $\cos\theta = \frac{\cos\psi}{\cos\phi}$, οπότε $\sin\theta d\theta = \frac{\sin\psi}{\cos\phi} d\psi$. Οπότε

$$I := \int_0^{\varepsilon} \cos^{n-2}\phi \Big(\int_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi})} \sin^{n-1}\theta d\theta \Big) d\phi$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \Big(\int_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi})} \big(\sin^2\theta\big)^{\frac{n-2}{2}} \cos^{n-2}\phi \sin\theta d\theta \Big) d\phi$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \Big(\int_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\phi})} \big(1-\cos^2\theta\big)^{\frac{n-2}{2}} \cos^{n-2}\phi \sin\theta d\theta \Big) d\phi$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \Big(\int_{\phi}^{\varepsilon} \Big(1 - \frac{\cos^2\psi}{\cos^2\phi}\Big)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\sin\psi}{\cos\phi} d\psi \Big) \cos^{n-2}\phi d\phi$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \Big(\int_{\phi}^{\varepsilon} \Big(\frac{\cos^2\phi - \cos^2\psi}{\cos^2\phi}\Big)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\sin\psi}{\cos\phi} d\psi \Big) \cos^{n-2}\phi d\phi$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \Big(\int_{\phi}^{\varepsilon} \Big(\sin^2\psi - \sin^2\phi\Big)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\sin\psi}{\cos\phi} d\psi \Big) d\phi$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \int_0^{\psi} \Big(\sin^2\psi - \sin^2\phi\Big)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\sin\psi}{\cos\phi} d\phi d\psi$$

Τώρα, επειδή $\sin\psi = \psi - \frac{1}{6}\psi^3 + \psi O(\psi^4)$ και $\sin\phi = \phi - \frac{1}{6}\phi^3 + \phi O(\phi^4)$, έχουμε ότι

$$\sin\psi - \sin\phi = \psi - \phi - \frac{1}{6}(\psi^3 - \phi^3) + (\psi - \phi) O(\varepsilon^4)$$

$$= \psi - \phi - \frac{1}{6}(\psi - \phi)(\psi^2 + \psi\phi + \phi^2) + (\psi - \phi) O(\varepsilon^4)$$

$$= (\psi - \phi)\big(1 - \frac{1}{6}(\psi^2 + \psi\phi + \phi^2) + O(\varepsilon^4)\big).$$

και
$$\sin\psi + \sin\phi = (\psi+\phi)\big(1 - \frac{1}{6}(\psi^2 - \psi\phi + \phi^2) + O(\varepsilon^4)\big),$$
για $0 \leq \psi, \phi \leq \varepsilon$.
Οπότε,
$$\sin^2\psi - \sin^2\phi = (\psi-\phi)\Big(1 - \frac{1}{6}(\psi^2 + \psi\phi + \phi^2) + O(\varepsilon^4)\Big)\times$$
$$(\psi+\phi)\Big(1 - \frac{1}{6}(\psi^2 - \psi\phi + \phi^2) + O(\varepsilon^4)\Big)$$
$$= (\psi^2-\phi^2)\Big(1 - \frac{1}{6}(\psi^2 + \psi\phi + \phi^2) + O(\varepsilon^4) - \frac{1}{6}(\psi^2 - \psi\phi + \phi^2)$$
$$+\frac{1}{36}(\psi^2 + \psi\phi + \phi^2)(\psi^2 - \psi\phi + \phi^2) + O(\varepsilon^4)\Big)$$
$$= (\psi^2-\phi^2)\Big(1 - \frac{1}{3}(\psi^2+\phi^2) + \frac{1}{36}(\psi^4+\phi^4+\psi^2\phi^2) + O(\varepsilon^4)\Big)$$
$$= (\psi^2-\phi^2)\Big(1 - \frac{1}{3}(\psi^2+\phi^2) + O(\varepsilon^4)\Big)$$
$$= (\psi^2-\phi^2)\Big(1 - \frac{2}{3}\psi^2 + \frac{1}{3}(\psi^2-\phi^2) + O(\varepsilon^4)\Big)$$
άρα
$$\Big(\sin^2\psi - \sin^2\phi\Big)^{\frac{n-2}{2}} = (\psi^2-\phi^2)^{\frac{n-2}{2}}\Big(1 - \frac{2}{3}\psi^2 + \frac{1}{3}(\psi^2-\phi^2) + O(\varepsilon^4)\Big)^{\frac{n-2}{2}}$$
$$= (\psi^2-\phi^2)^{\frac{n-2}{2}}\Big[1 + \frac{n-2}{2}\Big(-\frac{2}{3}\psi^2 + \frac{1}{3}(\psi^2-\phi^2) + O(\varepsilon^4)\Big)\Big]$$
$$+O\Big(\big(-\frac{2}{3}\psi^2 + \frac{1}{3}(\psi^2-\phi^2) + O(\varepsilon^4)\big)^2\Big)$$
$$= (\psi^2-\phi^2)^{\frac{n-2}{2}}\Big(1 - \frac{n-2}{3}\psi^2 + \frac{n-2}{6}(\psi^2-\phi^2) + O(\varepsilon^4)\Big) \tag{2.1.13}$$
Επιπλέον, αφού $\frac{1}{\cos\phi} = 1 + \frac{1}{2}\phi^2 + O(\phi^4)$, έχουμε
$$\frac{\sin\psi}{\cos\phi} = \big(\psi - \frac{1}{6}\psi^3 + \psi O(\varepsilon^4)\big)\big(1 + \frac{1}{2}\phi^2 + O(\varepsilon^4)\big)$$
$$= \psi\big(1 - \frac{1}{6}\psi^2 + O(\varepsilon^4)\big)\big(1 + \frac{1}{2}\phi^2 + O(\varepsilon^4)\big)$$
$$= \psi\Big(1 + \frac{1}{2}\phi^2 + O(\varepsilon^4) - \frac{1}{6}\psi^2 - \frac{1}{12}\psi^2\phi^2 + O(\varepsilon^4)\Big)$$

$$= \psi\Big(1 + \frac{1}{3}\psi^2 - \frac{1}{2}(\psi^2 - \phi^2) + O(\varepsilon^4)\Big) \tag{2.1.14}$$

Οπότε θέτοντας στο I, $\phi = \psi t$, παίρνουμε

$$I = \int_0^{\varepsilon}\int_0^{\psi}\big(\sin^2\psi - \sin^2\phi\big)^{\frac{n-2}{2}}\frac{\sin\psi}{\cos\phi}d\phi d\psi$$

$$= \int_0^{\varepsilon}\Big(\int_0^1\big(\sin^2\psi - \sin^2\psi t\big)^{\frac{n-2}{2}}\frac{\sin\psi}{\sin\psi t}\psi dt\Big)d\psi$$

απο τις (2.1.13) και (2.1.14)

$$= \int_0^{\varepsilon}\Big[\int_0^1\psi\big(\psi^2 - \psi^2 t^2\big)^{\frac{n-2}{2}}\Big(1 - \frac{n-2}{3}\psi^2 + \frac{n-2}{6}(\psi^2 - \psi^2 t^2) + O(\varepsilon^4)\Big)\times$$

$$\Big(1 + \frac{1}{3}\psi^2 - \frac{1}{2}(\psi^2 - \psi^2 t^2) + O(\varepsilon^4)\Big)\psi dt\Big]d\psi$$

$$= \int_0^{\varepsilon}\Big[\int_0^1\psi^n(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}\Big(1 + \frac{1}{3}\psi^2 - \frac{1}{2}(\psi^2 - \psi^2 t^2)$$

$$-\frac{n-2}{3}\psi^2 + \frac{n-2}{6}(\psi^2 - \psi^2 t^2) + O(\varepsilon^4)\Big)dt\Big)d\psi$$

$$= \int_0^{\varepsilon}\Big[\int_0^1\psi^n(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}\big(1 - \frac{n-3}{3}\psi^2 + \frac{n-5}{6}\psi^2(1-t^2) + O(\varepsilon^4)\Big)dt\Big]d\psi$$

$$= \int_0^{\varepsilon}\Big[\int_0^1\big(\psi^n(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}} - \frac{n-3}{3}\psi^{n+2}(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$+\frac{n-5}{6}\psi^{n+2}(1-t^2)^{\frac{n}{2}} + O(\varepsilon^{n+4})\Big)dt\Big]d\psi$$

$$= \int_0^{\varepsilon}\int_0^1(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}\big(\psi^n - \frac{n-3}{3}\psi^{n+2}\big)dtd\psi$$

$$+\frac{n-5}{6}\int_0^{\varepsilon}\int_0^1\psi^{n+2}(1-t^2)^{\frac{n}{2}}dtd\psi + \varepsilon O(\varepsilon^{n+4})$$

$$= \int_0^1(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}\int_0^{\varepsilon}\big(\psi^n - \frac{n-3}{3}\psi^{n+2}\big)d\psi dt$$

$$+\frac{n-5}{6}\int_0^1(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\int_0^{\varepsilon}\psi^{n+2}d\psi dt + O(\varepsilon^{n+5})$$

$$= \big(\frac{1}{n+1}\varepsilon^{n+1} - \frac{n-3}{3}\frac{1}{n+3}\varepsilon^{n+3}\big)\int_0^1(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}dt$$

$$+\frac{n-5}{6}\frac{1}{n+3}\varepsilon^{n+3}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}}dt + O(\varepsilon^{n+5}) \qquad (*)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

και

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{n\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{(n+1)\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

(βλ. σχέση (1.3.3)), η $(*)$ γίνεται

$$\left(\frac{1}{n+1}\varepsilon^{n+1} - \frac{n-3}{3}\frac{1}{n+3}\varepsilon^{n+3}\right)\frac{1}{2}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

$$+\frac{n-5}{6}\frac{1}{n+3}\varepsilon^{n+3}\frac{1}{2}\frac{n\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{(n+1)\Gamma(\frac{n+1}{2})} + O(\varepsilon^{n+5})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\Big[\frac{1}{n+1}\varepsilon^{n+1} - \frac{n-3}{3}\frac{1}{n+3}\varepsilon^{n+3}$$

$$+\frac{n-5}{6}\frac{1}{(n+3)}\frac{n}{(n+1)}\varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+5})\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\Big[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n-2}{6(n+1)}\varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+5})\Big].$$

Οπότε η μέση τιμή της $W(L;u)$ θα είναι

$$EW(L;u) = \frac{2(n-1)\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}\Big[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n-2}{6(n+1)}\varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+5})\Big]$$

$$= \frac{(n-1)\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\frac{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}\Big[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n-2}{6(n+1)}\varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+5})\Big]$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\frac{2(n-1)}{\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\Big[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{n-2}{6n(n+1)}\varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+5})\Big]$$

$$= \big|L \cap B_n\big|_{(n-1)}\times$$

$$\frac{2(n-1)\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\Big[\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)}-\frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)}+\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}+O(\varepsilon^{n+5})\Big]$$

παίρνουμε δηλαδή την σχέση (2.1.7).

ΒΗΜΑ 10.

Συνεχίζουμε την μελέτη της κατασκευής του $K(u_1,\dots,u_N)$. Σταθεροποιούμε το $u \in S^{n-1}$.

Αν η οξεία γωνία που σχηματίζουν τα $\pm u, \pm v$, όπου v μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στον υπόχωρο L, είναι $\frac{\pi}{2}-\phi$, ορίζουμε $\psi := \min\{\varepsilon, \phi\}$.

Η ποσότητα $W(L;u)$ εξαρτάται από τον $(n-1)-$διάστατο υπόχωρο L και με την βοήθεια των σχέσεων (2.1.4) και (2.1.5), μπορούμε να γράψουμε

$$W(L;u) = \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi})}\sin^{n-1}\theta d\theta.$$

Θεωρούμε τώρα έναν δεύτερο $(n-1)-$διάστατο γραμμικό υπόχωρο L', με μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\pm v'$, τα οποία σχηματίζουν με τα $\pm u$ οξεία γωνία $\frac{\pi}{2}-\phi'$. Ορίζουμε $\psi' := \min\{\varepsilon, \phi'\}$ και έχουμε

$$\big|W(L';u)-W(L;u)\big|$$

$$=\Big|\frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi'})}\sin^{n-1}\theta d\theta - \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi})}\sin^{n-1}\theta d\theta\Big|$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\Big|\int_{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi})}^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi'})}\sin^{n-1}\theta d\theta\Big|$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\psi < \psi'$. Τότε $\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi'} \leq \frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi}$. Επειδή τώρα

$$\arccos\Big(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi}\Big) < \theta < \arccos\Big(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi'}\Big)$$

έπεται ότι

$$0 < \frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi'} < \cos\theta < \frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi}$$

άρα

$$\sqrt{1-\frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi'}} > \sin\theta > \sqrt{1-\frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi}}$$

και

$$\sqrt{1-\frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi'}} \leq \sqrt{1-\cos^2\varepsilon} = \sqrt{1-\big(1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\cdots\big)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \left(1 - \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)\right)} = \sqrt{\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)} = O(\varepsilon)$$

Οπότε $\sin^{n-1}\theta = O(\varepsilon^{n-1})$. Έτσι έχουμε ότι

$$\left|W(L'; u) - W(L; u)\right|$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Big| \int_{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi})}^{\arccos(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi'})} \sin^{n-1}\theta d\theta \Big|$$

$$= O\Bigg(\varepsilon^{n-1} \Big| \arccos\Big(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi'}\Big) - \arccos\Big(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\psi}\Big)\Big|\Bigg)$$

$$= O\Bigg(\varepsilon^{n-1} \Big| \arcsin\sqrt{\frac{\cos^2\psi' - \cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi'}} - \arcsin\sqrt{\frac{\cos^2\psi - \cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi}}\Big|\Bigg).$$

Στα επόμενα περιοριζόμαστε σε $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$. Τότε $\frac{\cos^2\psi - \cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi} = 1 - \frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi} < \frac{1}{2}$. Η συνάρτηση arcsin είναι Lipschitz στο διάστημα $[0, \sqrt{\frac{1}{2}}]$, οπότε

$$O\Bigg(\varepsilon^{n-1} \Big| \arcsin\sqrt{\frac{\cos^2\psi' - \cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi'}} - \arcsin\sqrt{\frac{\cos^2\psi - \cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi}}\Big|\Bigg)$$

$$= O\Bigg(\varepsilon^{n-1} \Big| \sqrt{\frac{\cos^2\psi' - \cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi'}} - \sqrt{\frac{\cos^2\psi - \cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi}}\Big|\Bigg)$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\psi < \varepsilon$, αφού αν $\psi = \psi' = \varepsilon$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε 0.

Για το $\Big|\sqrt{\frac{\cos^2\psi' - \cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi'}} - \sqrt{\frac{\cos^2\psi - \cos^2\varepsilon}{\cos^2\psi}}\Big|$ εκτελώντας μια σειρά απο στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε ότι ισούται με

$$\Big|\frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi'}}{\cos\psi'} - \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi}}{\cos\psi}\Big|$$

$$= \Big|\frac{\cos^2\psi\left(\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi'\right) - \cos^2\psi'\left(\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi\right)}{\cos\psi'\cos\psi\Big(\cos\psi\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi'} + \cos\psi'\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi}\Big)}\Big|$$

$$= \frac{|\sin^2\psi - \sin^2\psi'|(1 - \sin^2\varepsilon)}{\Big|\cos\psi'\cos\psi\Big(\cos\psi\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi'} + \cos\psi'\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi}\Big)\Big|}$$

Η παράσταση αυτή φράσσεται από την

$$\frac{|\sin\psi - \sin\psi'|(\sin\psi + \sin\psi')}{c_1\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi}},$$

και χρησιμοποιώντας τις ανισότητες $\frac{2}{\pi} \leq \sin x \leq x$ και $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$, έχουμε για τον μεν αριθμητή ότι

$$|\sin\psi - \sin\psi'|(\sin\psi + \sin\psi') \leq |\psi - \psi'|2\psi' \leq |\psi - \psi'|2\varepsilon,$$

για τον δε παρανομαστή, έχοντας υποθέσει ότι $0 < \psi < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$,

$$\sin\varepsilon - \sin\psi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon - \psi)$$

και

$$\sin\varepsilon + \sin\psi \geq \sin\varepsilon \geq \frac{2}{\pi}\varepsilon$$

Οπότε

$$\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon(\varepsilon - \psi) \geq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\varepsilon(\psi' - \psi).$$

Έτσι

$$\frac{|\sin\psi - \sin\psi'|(\sin\psi + \sin\psi')}{c_1\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi}} \leq \frac{|\psi - \psi'|2\varepsilon}{c_2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\psi' - \psi}} \leq c\sqrt{\varepsilon}|\psi - \psi'|^{\frac{1}{2}}$$

δεδομένου ότι το ε είναι μικρό και $0 < \psi \leq \psi' < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$.
Οπότε τελικά καταλήγουμε στην σχέση

$$\Big|\frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi'}}{\cos\psi'} - \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi}}{\cos\psi}\Big| = O\Big(\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\psi - \psi'|^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Άρα

$$\begin{aligned}
&\big|W(L';u) - W(L;u)\big| \\
&= O\left(\varepsilon^{n-1}\Big|\frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi'}}{\cos\psi'} - \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\psi}}{\cos\psi}\Big|\right) \\
&= O\Big(\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}|\psi - \psi'|^{\frac{1}{2}}\Big) = O\Big(\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}|\phi - \phi'|^{\frac{1}{2}}\Big),
\end{aligned}$$

αφού $\psi = \min\{\varepsilon, \phi\}$ και $\psi' = \min\{\varepsilon, \phi'\}$.

Αν $\Theta(L', L)$ είναι η οξεία γωνία που σχηματίζουν τα δύο κάθετα διανύσματα των υποχώρων L και L', για κάθε τυχαία επιλογή του u έχουμε ότι

$$\big|W(L';u) - W(L;u)\big| = O\Big(\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}\big(\Theta(L', L)\big)^{\frac{1}{2}}\Big),$$

αφού $|\phi - \phi'| \leq \Theta(L', L)$.

Αν τώρα θεωρήσουμε μια τυχαία επιλογή $u_1, \ldots, u_N$, παίρνουμε ότι

$$\left|V_{n-1}(L'; u_1, \ldots, u_N) - V_{n-1}(L; u_1, \ldots, u_N)\right|$$

$$= O\Big(N\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}\big(\Theta(L', L)\big)^{\frac{1}{2}}\Big) = O\Big(\varepsilon^{n-5\frac{3}{4}}\big(\Theta(L', L)\big)^{\frac{1}{2}}\Big),$$

δεδομένου ότι έχουμε επιλέξει $N = \left[\varepsilon^{-5\frac{3}{4}}\right] + 1$.

Είχαμε ορίσει (με τον τύπο (2.1.9)) το

$$\beta = \left|L \cap B_n\right|_{(n-1)} \frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}$$

το οποίο είναι κάτω φραγμένο από $c\varepsilon^{n-2\frac{1}{4}}$, με $c > 0$ σταθερά, αφού $N = \left[\varepsilon^{-5\frac{3}{4}}\right] + 1$. Οπότε

$$\left|V_{n-1}(L'; u_1, \ldots, u_N) - V_{n-1}(L; u_1, \ldots, u_N)\right| < \frac{1}{3}\beta \tag{2.1.15}$$

αν πάρουμε $|\Theta(L', L)| \leq \varepsilon^8$ και ε αρκετά μικρό, διότι

$$O\Big(\varepsilon^{n-5\frac{3}{4}}\big(\Theta(L', L)\big)^{\frac{1}{2}}\Big) = O\Big(\varepsilon^{n-5\frac{3}{4}}\varepsilon^4\Big) = O(\varepsilon^{n-1\frac{3}{4}}).$$

ΒΗΜΑ 11.

Θεωρούμε ένα σύνολο σημείων $v_1, \ldots, v_M$ πάνω στην S^{n-1}, έτσι ώστε τα σύνολα $C(v_j) \cup C(-v_j)$, $j = 1, \ldots M$, όπου οι γωνιακές ακτίνες παίρνονται ίσες με $\frac{1}{2}\varepsilon^8$, να μην επικαλύπτονται κι έτσι ώστε το πλήθος M να είναι το μέγιστο δυνατό.

Τότε η $(n-1)-$διάστατη επιφάνεια που καλύπτουν τα καπάκια αυτά είναι φραγμένη από την συνολική επιφάνεια της σφαίρας του $\mathbb{R}^n$. Η επιφάνεια που καλύπτει ένα καπάκι γωνιακής ακτίνας $\frac{1}{2}\varepsilon^8$ είναι της μορφής $c\varepsilon^{8(n-1)}$, όπου $c > 0$ σταθερά που εξαρτάται από την διάσταση. Συνεπώς $Mc\varepsilon^{8(n-1)} \leq s$, όπου s η επιφάνεια της S^{n-1}, οπότε

$$M = O(\varepsilon^{-8(n-1)}).$$

Αν θεωρήσουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα v, θα υπάρχει ένα από τα $v_1, \ldots, v_M$, το οποίο θα σχηματίζει με το v γωνία όχι μεγαλύτερη από ε^8.

Άρα, αν πάρουμε τους $(n-1)-$διάστατους υποχώρους $L_1, \ldots, L_M$ που έχουν τα $\pm v_1, \ldots, \pm v_M$ ως κάθετα διανύσματά τους, τότε για έναν δοσμένο $(n-$

1)−διάστατο υπόχωρο L, θα υπάρχει ένα j, $1 \leq j \leq M$ για το οποίο θα ισχύει $\Theta(L, L_j) \leq \varepsilon^8$. Τότε από την σχέση (2.1.15) θα έχουμε ότι

$$V_{n-1}(L; u_1, \ldots, u_N) < V_{n-1}(L_j; u_1, \ldots, u_N) + \frac{1}{3}\beta \tag{2.1.16}$$

για οποιαδήποτε μοναδιαία διανύσματα $u_1, \ldots, u_N$.

Σταθεροποιούμε τους $L_1, \ldots, L_M$, παίρνουμε $N = \left[\varepsilon^{-5\frac{1}{4}}\right] + 1$ και επιλέγουμε (ομοιόμορφα στην S^{n-1} κι ανεξάρτητα μεταξύ τους) σημεία $u_1, \ldots, u_N$. Για κάθε j, $1 \leq j \leq M$, από την σχέση (2.1.12) παίρνουμε ότι η πιθανότητα να ισχύει $V_{n-1}(L_j; u_1, \ldots, u_N) > \nu_1$ είναι μικρότερη από $\exp(-\gamma_n \varepsilon^{-\frac{1}{4}})$.
Συνεπώς η πιθανότητα να υπάρχει καποιο j, $1 \leq j \leq M$ για το οποίο να ισχύει $V_{n-1}(L_j; u_1, \ldots, u_N) > \nu_1$, θα είναι το πολύ

$$M \exp(-\gamma_n \varepsilon^{-\frac{1}{4}}) = O\big(\varepsilon^{-8(n-1)} \exp(-\gamma_n \varepsilon^{-\frac{1}{4}})\big).$$

Έχοντας πάρει μια εκτίμηση για την πιθανότητα να υπάρχει κάποιο j, $1 \leq j \leq M$, για το οποίο $V_{n-1}(L_j; u_1, \ldots, u_N) > \nu_1$, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα το ε, έτσι ώστε η πιθανότητα αυτή να είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}$. Κι αυτό γιατί $\varepsilon^{-8(n-1)} \exp\big(-\gamma_n \varepsilon^{-\frac{1}{4}}\big) \longrightarrow 0$, καθώς $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.
Άρα η πιθανότητα να ισχύει

$$V_{n-1}(L_j; u_1, \ldots, u_N) \leq \nu_1,$$

για κάθε j με $1 \leq j \leq M$ είναι μεγαλύτερη από $\frac{1}{2}$.

Επιπλέον, στο βήμα 3 υπολογίσαμε την πιθανότητα να υπάρχουν επικαλύψεις μεταξύ των N διπλών καπακιών και είδαμε ότι για κατάλληλη επιλογή του N η πιθανότητα αυτή είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}$. Έτσι η πιθανότητα να μην επικαλύπτονται ανα δύο τα διπλά καπάκια θα είναι μεγαλύτερη από $\frac{1}{2}$.
Συνεπώς είναι δυνατό (θετική πιθανότητα) να επιλεγούν $u_1, \ldots, u_N \in S^{n-1}$ ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι

i. ανα δύο τα σφαιρικά καπάκια $C(u_i) \cup C(-u_i)$, $i = 1, \ldots, N$, να μην επικαλύπτονται,

ii. $V_{n-1}(L_j; u_1, \ldots, u_N) \leq \nu_1$, για κάθε j, με $1 \leq j \leq M$.

Έτσι θα έχουμε ότι το κυρτό συμμετρικό σώμα $K = K(u_1, \ldots, u_N)$, το οποίο κατασκευάζεται αφαιρώντας από την B_n τα N σφαιρικά καπάκια κατάλληλης γωνιακής ακτίνας, θα έχει όγκο

$$V_n(u_1, \ldots, u_N) = |B_n|_{(n)} r_1^n,$$

όπου

$$r_1 = 1 - 2N\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{6(n+3)}\varepsilon^{n+3}\Big\} + O(N\varepsilon^{n+5}),$$

(σχέση (2.1.2)).
Επιπλέον, για κάθε $(n-1)-$διάστατο υπόχωρο L, από την σχέση (2.1.15), θα ισχύει ότι για κάποιον υπόχωρο $L_j,\ 1 \leq j \leq M$,

$$|K(u_1,\ldots,u_N)\cap L|_{(n-1)} = V_{n-1}(L;u_1,\ldots,u_N) < V_{n-1}(L_j;u_1,\ldots,u_N) + \frac{1}{3}\beta$$

και από το ii.] και τις σχέσεις (2.1.9) και (2.1.10), είναι

$$\leq \nu_1 + \frac{1}{3}\beta = |L\cap B_n|_{(n-1)}\times$$

$$\Big[1 - \frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\Big(\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}\Big) + O(N\varepsilon^{n+5})\Big]$$

$$+\frac{1}{3}|L\cap B_n|_{(n-1)}\frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{\varepsilon^{n+3}}{n(n+1)(n+3)}$$

$$= |L\cap B_n|_{(n-1)}\times$$

$$\Big[1 - \frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{3n(n+1)(n+3)}\Big\} + O(N\varepsilon^{n+5})\Big]$$

$$= |L\cap B_n|_{(n-1)}r_3^{n-1},$$

όπου

$$r_3 = \Big[1 - \frac{2N(n-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{3n(n+1)(n+3)}\Big\} + O(N\varepsilon^{n+5})\Big]^{\frac{1}{n-1}}$$

$$= 1 - \frac{2N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{3n(n+1)(n+3)}\Big\} + O(N\varepsilon^{n+5})$$

$$+O\Bigg(\Big(\frac{2N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{3n(n+1)(n+3)}\Big\} + O(N\varepsilon^{n+5})\Big)^2\Bigg)$$

Η επιλογή του N και της διάστασης n έχει γίνει έτσι ώστε το $N^2\varepsilon^{2n+2}$ να είναι μικρότερης τάξης από το $N\varepsilon^{n+5}$, οπότε το

$$O\Bigg(\Big(\frac{2N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{3n(n+1)(n+3)}\Big\} + O(N\varepsilon^{n+5})\Big)^2\Bigg)$$

μπορούμε να το φράξουμε με μια συνάρτηση της τάξης του $N\varepsilon^{n+5}$.
Έτσι θα έχουμε

$$r_3 = 1 - \frac{2N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\Big\{\frac{\varepsilon^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{\varepsilon^{n+3}}{6(n+3)} + \frac{\varepsilon^{n+3}}{3n(n+1)(n+3)}\Big\} + O(N\varepsilon^{n+5}).$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι έχοντας επιλέξει κατάλληλο N και $n \geq 12$ από την σχέση (2.1.2), παίρνουμε ότι

$$r_3 = r_1 - \frac{2N\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{1/2}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\frac{\varepsilon^{n+3}}{3n(n+1)(n+3)} + O(N\varepsilon^{n+5}) \qquad (2.1.17)$$

(Αν $N = \left[\varepsilon^{-5\frac{1}{4}}\right] + 1$, για να πάρει το r_1 αυτή τη μορφή αρκεί να ισχύει $n \geq 9$.)
Παρατηρούμε δηλαδή ότι για αρκετά μικρά ε ο δεύτερος όρος στην σχέση αυτή είναι μεγαλύτερης τάξης από τον τρίτο, οπότε ισχύει ότι $r_3 < r_1$.
Για να κατασκευάσουμε λοιπόν το κατάλληλο κυρτό συμμετρικό σώμα K^* της μορφής του $K(u_1,\dots,u_N)$ που θα μας δώσει το αντιπαράδειγμα, θα πρέπει να ζητήσουμε

$$|K^* \cap L|_{(n-1)} < |B_n \cap L|_{(n-1)},$$

για κάθε $(n-1)-$διάστατο υπόχωρο L, ενώ

$$|K^*|_{(n)} > |B_n|_{(n)}.$$

Αν πάρουμε

$$K^* := \frac{1}{\sqrt{r_1 r_3}}K(u_1,\dots,u_N)$$

και $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, θα έχουμε

$$|K^* \cap L|_{(n-1)} = \Big|\frac{1}{\sqrt{r_1 r_3}}K(u_1,\dots,u_N) \cap L\Big|_{(n-1)}$$

$$\leq \frac{1}{(r_1 r_3)^{\frac{n-1}{2}}} |B_n \cap L|_{(n-1)} r_3^{n-1} = \big(\frac{r_3}{r_1}\big)^{\frac{n-1}{2}} |B_n \cap L|_{(n-1)}.$$

Κι επειδή για κατάλληλα μικρά $\varepsilon > 0$, $r_3 < r_1$, παίρνουμε ότι

$$|K^* \cap L|_{(n-1)} < |B_n \cap L|_{(n-1)}.$$

Και

$$|K^*|_{(n)} = \big|\frac{1}{\sqrt{r_1 r_3}} K\big|_{(n)} = \frac{1}{(r_1 r_3)^{\frac{n}{2}}} r_1^n |B_n|_{(n)} = \big(\frac{r_1}{r_3}\big)^{\frac{n}{2}} |B_n|_{(n)} > |B_n|_{(n)}.$$

2.2 Αντιπαράδειγμα για $n \geq 10$

Μέγιστες τομές κύβου

Εστω H ένας $(n-1)$-διάστατος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στον H. Υποθέτουμε οτι $n \geq 2$ και $|a_i| < 1$, για όλα τα $i = 1, \cdots, n$.

Ορίζουμε $f = f_H : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ με $f(r) = |(H + ra) \cap Q_n|$. Η $f(r)$ δηλαδή είναι ο όγκος διάστασης $n-1$ της τομής του Q_n με ένα υπερεπίπεδο παράλληλο στον H που βρίσκεται σε απόσταση $|r|$ από αυτόν, όπου $Q_n = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n \subset \mathbb{R}^n$, ο μοναδιαίος κύβος.

Η υπόθεση ότι $n \geq 2$ και $|a_i| < 1$, για κάθε $i = 1, \dots, n$, εξασφαλίζει ότι ο H δεν είναι παράλληλος σε καμία έδρα του Q_n, αφού το $a = (a_i)_{i=1}^n$ δεν μπορεί να είναι κάποιο από τα $\pm e_i$. Οπότε η f είναι συνεχής (βλ. εισαγωγικά, παραγρ.1.3 ,πρόταση 1.1).

Με πιθανοθεωρητικές μεθόδους μπορούμε να πάρουμε μια έκφραση για το

$$f(0) = |H \cap Q_n|.$$

Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Αν (Ω, p) ο χώρος πιθανότητας στον οποίο ορίζονται οι X_i, $i = 1, \dots, n$, τότε η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $(X_1, \dots, X_n)$ είναι το μέτρο Lebesgue στο Q_n. Η f είναι συνεχής οπότε

$$f(r) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{2s} \int_{r-s}^{r+s} f(t)dt.$$

Ολοκληρώνοντας την $f(t) = |(H + ta) \cap Q_n|$ παίρνουμε τον n-διάστατο όγκο του τμήματος του κύβου που σχηματίζεται από όλες τις παράλληλες τομές του H κατα την μετατόπισή του στην κατεύθυνση του a με $r - s \leq t \leq r + s$.

Ο όγκος αυτός είναι ίσος με τον όγκο του τμήματος του κύβου που παίρνουμε από τις τομές όλων των υποχώρων $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle = \rho\}$, $r - s \leq \rho \leq r - s$ με τον κύβο, δηλαδή

$$f(r) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2s} \int_{r-s}^{r+s} f(t)dt = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2s} |\{x \in Q_n : | \langle x, a\rangle - r| \leq s\}| =$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{2s} |\{x \in Q_n : | \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - r| \leq s\}| = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2s} p\big(| \sum_{i=1}^{n} a_i X_i - r| \leq s\big).$$

Δηλαδή, η f είναι συνεχής συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$. Με χρήση της ανισότητας Brunn-Minkowski

$$|\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B|_{(k)} \geq \big(\frac{1}{2}|A|_{(k)}^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{2}|B|_{(k)}^{\frac{1}{k}}\big)^k$$

για A, B κυρτά υποσύνολα στον $\mathbb{R}^k$, θα αποδείξουμε οτι η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο 0.

Ο H είναι γραμμικός χώρος διάστασης $n-1$, οπότε μπορούμε να τον ταυτίσουμε με τον $\mathbb{R}^{n-1}$ κι έτσι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κυρτά υποσύνολά του με $k = n - 1$.

Αν λοιπόν πάρουμε $A = H \cap (Q_n + ra)$ και $B = H \cap (Q_n - ra)$, τότε λόγω της συμμετρίας του Q_n ως προς το 0, ισχύει ότι $B = -A$. Εστω $x, y \in Q_n$. Τότε $\frac{(x+ra)+(y-ra)}{2} = \frac{x+y}{2} \in Q_n$, αφού αυτό είναι κυρτό. Αρα

$$H \cap Q_n \supseteq \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(A - A).$$

Οπότε από την ανισότητα Brunn-Minkowski, παίρνουμε ότι

$$f(0) = |H \cap Q_n| \geq |\frac{1}{2}(A - A)| \geq \Big(\frac{1}{2}|A|^{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{2}|A|^{\frac{1}{n-1}}\Big)^{n-1} = |A| = f(r).$$

Έπεται ότι, αν το $\sqrt{2}$ είναι άνω φράγμα για τους όγκους των τομών του Q_n με υποχώρους διάστασης $n-1$, το ίδιο ισχύει και για τις τομές του με υπερεπίπεδα. Κι αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής:
Αν έχουμε ότι $|H \cap Q_n| \leq \sqrt{2}$, όπου H υπόχωρος διάστασης $n - 1$, τότε θεωρώντας ένα $(n - 1)$-διάστατο υπερεπίπεδο E, αυτό θα είναι της μορφής $E = H + ra$ και τότε με βάση τα παραπάνω θα έχουμε

$$|E \cap Q_n| = |H \cap (Q_n - ra) \leq |H \cap Q_n| \leq \sqrt{2}.$$

Κάτω φράγμα

Θεώρημα 2.2.1 *Κάθε τομή του μοναδιαίου κύβου Q_n στον $\mathbb{R}^n$ με έναν $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο H έχει όγκο τουλάχιστον 1. Ο όγκος είναι ακριβώς 1 ανν ο H είναι παράλληλος προς μια έδρα του Q_n.*

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια μιας απλής πιθανοθεωρητικής ανισότητας, η οποία συγκρίνει μια τυχαία μεταβλητή με μια ομοιόμορφα κατανεμημένη τ.μ. με την ίδια L_p-νόρμα. Την ανισότητα αυτήν την παίρνουμε από το παρακάτω

Λήμμα 2.2.1 *Έστω Y μια τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$. Τότε για $p > 0$, ισχύει*

$$\|g\|_\infty \|Y\|_p \geq \frac{1}{2}(p+1)^{-\frac{1}{p}}.$$

Ισότητα έχουμε ανν η Y είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε κάποιο διάστημα $[-t, t] \subset \mathbb{R}$.

Απόδειξη του Λήμματος
Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η Y είναι συμμετρική. Πράγματι, αν πάρουμε μια τυχαία μεταβλητή X, με πυκνότητα πιθανότητας f, μπορούμε να θεωρήσουμε την Y με πυκνότητα πιθανότητας

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

η οποία είναι συμμετρική και οι $|X|, |Y|$ είναι ισόνομες. Επιπλέον,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \leq \|f\|_\infty$$

άρα

$$\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Οπότε, $\|g\|_\infty \|Y\|_p \leq \|f\|_\infty \|X\|_p$, αφού οι $|X|, |Y|$ είναι ισόνομες $\big(\|X\|_p = \|Y\|_p\big)$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η Y είναι συμμετρική. Τότε θέτοντας

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad x \geq 0$$

έχουμε ότι $G(0) = 0,\ G(\infty) = \frac{1}{2}$ (διότι η g είναι άρτια συνάρτηση) και $G(x) \leq x\|g\|_\infty$. Οπότε, δεδομένου ότι η G^{p+1} είναι απολύτως συνεχής (απόδειξη στο τέλος της απόδειξης του λήμματος) και κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της παραγώγου της, έχουμε

$$2^{-p} = 2(\frac{1}{2})^{p+1} = 2G(\infty)^{p+1} = 2\int_0^\infty \left((G(x))^{p+1}\right)' dx$$

$$= 2\int_0^\infty (p+1)[G(x)]^p G(x)' dx = 2\int_0^\infty (p+1)[G(x)]^p g(x) dx$$

$$\leq (p+1)2\int_0^\infty g(x)x^p \|g\|_\infty^p dx = (p+1)\|g\|_\infty^p 2\int_0^\infty g(x)x^p dx = (p+1)\|g\|_\infty^p \|Y\|_p^p$$

άρα

$$\frac{1}{2} \leq (p+1)^{\frac{1}{p}} \|g\|_\infty \|Y\|_p,$$

από όπου έχουμε την ζητούμενη ανισότητα.

Ισότητα έχουμε ανν $g(t) = \|g\|_\infty$ ή 0 $\sigma.\pi.$ Το ευθύ του ισχυρισμού είναι προφανές από τις παραπάνω σχέσεις.

Για το αντίστροφο τώρα, θέλουμε να δούμε πότε ισχύει

$$\int_0^\infty [G(x)]^p g(x) dx = \int_0^\infty x^p \|g\|_\infty^p g(x) dx,$$

όπου $G(x) = \int_0^x g(t)dt,\ x > 0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in [0, \infty) : G(x) = x\|g\|_\infty\},$$

δηλαδή για κάθε $x \in A$,

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x \|g\|_\infty dt,$$

από όπου παίρνουμε ότι $g(t) = \|g\|_\infty$ $\sigma.\pi.$ στο $[0, x],\ x \in A$. Άρα, $g(t) = \|g\|_\infty$ $\sigma.\pi.$ στο $[0, supA]$.

Έστω τώρα $x \notin A$, και $\int_0^\infty [G(x)]^p g(x) dx = \int_0^\infty x^p \|g\|_\infty^p g(x) dx$. Τότε θα πρέπει

$$[G(x)]^p g(x) = x^p \|g\|_\infty^p g(x)\ \sigma.\pi.$$

Όμως $x \notin A$ και $A = \{x \in [0, \infty) : G(x) = x\|g\|_\infty\}$, οπότε για να ισχύει η ισότητα $\sigma.\pi.$, θα πρέπει $g(x) = 0$ $\sigma.\pi.$ στο A^c.

Η G^{p+1} είναι απολύτως συνεχής. Αυτό μπορούμε να το δούμε αν θεωρήσουμε την G^{p+1} σαν σύνθεση των συναρτήσεων $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, η οποία είναι απόλυτα συνεχής και της $h(t) = t^{p+1}$, η οποία ειναι Lipshitz στο $[0, 1]$. Σχεδόν άμεσα παίρνουμε οτι η σύνθεσή τους δίνει μια απολύτως συνεχή συνάρτηση.

Απόδειξη του Θεωρήματος

Έστω $(a_i)_{i=1}^n$, $(X_i)_{i=1}^n$ όπως παραπάνω ($|a_i| < 1$, για κάθε i) και έστω f η συνεχής συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ.

$$X = \sum_{i=1}^n a_i X_i.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$|H \cap Q_n| = f(0) > 1.$$

Οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ., με μέση τιμή 0, οπότε έχουμε,

$$EX^2 = \sum_{i=1}^n E\big((a_i X_i)^2\big) = \sum_{i=1}^n a_i^2 E(X_1^2)$$

$$= E(X_1^2) \sum_{i=1}^n a_i^2 = E(X_1^2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Οπότε

$$\|X\|_2 = \Big(\int_\Omega X^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω λήμμα για $p = 2$ και $g = f$, παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \|X\|_2 \|f\|_\infty = \|X\|_2 f(0)$$

άρα

$$1 \leq f(0). \qquad (*)$$

Η f δεν είναι 0. Επιπλέον η f είναι πυκνότητα της ομοιόμορφης κατανομής σε κάποιο $[-t, t]$, γιατί είναι συνεχής.

Ισότητα στην σχέση $(*)$ παίρνουμε μόνο στην περίπτωση που ο H είναι παράλληλος με μια έδρα του κύβου, γιατί τότε $f(t) = \|f\|_\infty = 1$, για $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(H + ta) \cap Q_n \neq \emptyset$.

Άνω φράγμα

Θεώρημα 2.2.2 *Κάθε τομή του μοναδιαίου κύβου Q_n με έναν $(n-1)$-διάστατο γραμμικό υπόχωρο H, έχει όγκο το πολύ $\sqrt{2}$. Το άνω φράγμα πιάνεται ανν ο H περιέχει μια $(n-2)$-διάστατη έδρα του Q_n.*

Απόδειξη
Θεωρούμε τα $(a_i)_{i=1}^n$ όπως πριν, για τα οποία μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $a_i \geq 0$, για κάθε i, διότι λόγω της συμμετρίας του Q_n ως προς τα κύρια επίπεδα, αν για παράδειγμα πάρουμε $a = (a_1, \dots, a_n)$ και $a^{'} = (a_1, \dots, -a_i, \dots, a_n)$ για κάποιο $i = 1, \dots, n$ και H, $H^{'}$ οι αντίστοιχοι κάθετοι προς τα a και $a^{'}$ υπόχωροι, οι όγκοι των τομών

$$H \cap Q_n, \quad H^{'} \cap Q_n$$

είναι ίσοι. Η απόδειξη χωρίζεται σε δυο περιπτώσεις, ανάλογα με τις τιμές των a_i.

Στην πρώτη περίπτωση υποθέτουμε ότι $a_i > \frac{1}{\sqrt{2}}$, για κάποιο i. Για παράδειγμα $a_1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Θεωρούμε την τομή $H \cap C_n$, όπου C_n είναι το κυλινδροειδές

$$C_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \frac{1}{2},\ 2 \leq i \leq n\},$$

την ορθογώνια προβολή T επί του υποχώρου $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ και S την ορθογώνια προβολή επί του H. Τότε $T(H \cap C_n)$ είναι ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^{n-1}$ και

$$|H \cap C_n| = |T(H \cap C_n)| \frac{\|Se\|}{\|TSe\|} = \frac{\|Se\|}{\|TSe\|}, \tag{2.2.1}$$

όπου $e = (1, 0, \dots, 0)$ το μοναδιαίο διάνυσμα και $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Οπότε παίρνουμε

$$|H \cap C_n| = \frac{1}{a_1} < \sqrt{2}. \tag{2.2.2}$$

Και συνεπώς,

$$|H \cap Q_n| \leq |H \cap C_n| < \sqrt{2},$$

διότι $H \cap Q_n \subseteq H \cap C_n$.

Στην δεύτερη περίπτωση, έχουμε ότι $a_i \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, για κάθε i. Στην περίπτωση που για κάποιο i έχουμε $a_i = 0$ το πρόβλημα μπορεί να μελετηθεί στον $\mathbb{R}^{n-1}$. Διότι σ᾽ αυτήν την περίπτωση ($a_i = 0$, για κάποιο i), οι όγκοι των τομών δεν αλλάζουν.
Αν για παράδειγμα έχουμε ότι $a_1 = 0$, τότε θεωρώντας τον $(n-2)$-διάστατο υπόχωρο

$$F = \{(x_2, \dots, x_n) : x = (x_1, \dots, x_n) \in H\}$$

παίρνουμε ότι

$$H = \mathbb{R} \times F$$

και αφού $Q_n = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times Q_{n-1}$, έχουμε

$$H \cap Q_n = \big(\mathbb{R} \times F\big) \cap \big([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times Q_{n-1}\big),$$

δηλαδή $|H \cap Q_n| = 1 \cdot |F \cap Q_{n-1}|$.

Συνεπώς, επαγωγικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_i > 0$, για κάθε i. Οπότε η περίπτωση της ισότητας θα συνάγεται αν δείξουμε ότι

$$|H \cap Q_n| < \sqrt{2},$$

εκτός αν $n = 2$ και $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Έτσι σε κάθε τέτοια περίπτωση, που θα έχουμε δηλαδή ότι $a = (a_1, \ldots, a_n)$ με $a_i = a_j = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $i \neq j$ και $a_k = 0 \ \ \forall k \neq i, j$ με $i, j = 1, \ldots, n$, ο H θα περιέχει μια $(n-2)$-διάστατη έδρα του Q_n. Αν για παράδειγμα $a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0)$, τότε ο H περιγράφεται ως

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = -x_2\},$$

οπότε ο H περιέχει την $(n-2)$-διάστατη έδρα του Q_n, $\{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} \times Q_{n-2}$.

Αντίστροφα, αν ο H περιέχει μια $(n-2)$-διάστατη έδρα του Q_n, τότε ο H έχει τη μορφή $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = -x_j\}$ για κάποια i, j, οπότε το ορθοκανονικό στον H, διάνυσμα a θα είναι της μορφής $a = (a_1, \ldots, a_n)$ με $a_i = a_j = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $i \neq j$ και $a_k = 0 \ \ \forall\, k \neq i, j$ με $i, j = 1, \ldots, n$.

Έστω $\big(X_i\big)_{i=1}^n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και f η συνεχής πυκνότητα πιθανότητας της $X = \sum\limits_{i=1}^n a_i X_i$. Η τ.μ. $a_i X_i$ έχει χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\phi_i(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i a_i t \cdot x} dx = \frac{e^{i\frac{a_i}{2}t} - e^{-i\frac{a_i}{2}t}}{i a_i t} = \frac{2\sin\frac{a_i}{2}t}{a_i t}.$$

Οπότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της X θα είναι

$$\phi(t) = \prod_{i=1}^n \phi_i(t) = \prod_{i=1}^n \frac{2\sin\frac{a_i}{2}t}{a_i t}$$

Χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, η ανισότητα Hölder και το

Λήμμα 2.2.2

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big|\ \frac{\sin t}{t}\ \Big|^p dt \leq \sqrt{\frac{2}{p}},$$

αν $p \geq 2$, με ισότητα ανν $p = 2$.

δίνουν για $p_i = \frac{1}{a_i^2}$, $i = 1, \ldots, n$, ότι

$$|H \cap Q_n| = f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{2 \sin \frac{a_i}{2} t}{a_i t} dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \Big| \frac{\sin a_i t}{a_i t} \Big| dt$$

$$\leq \prod_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{\sin a_i t}{a_i t} \Big|^{p_i} dt \Big)^{1/p_i} \leq \prod_{i=1}^{n} \Big(\frac{\sqrt{2}}{a_i \sqrt{p_i}} \Big)^{1/p_i} = \prod_{i=1}^{n} (\sqrt{2})^{1/p_i}, \quad (2.2.3)$$

Ισότητα ισχύει αν $p_i = 2$, για κάθε i, δηλαδή $n = 2$ και $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Λεπτομερείς αποδείξεις

Απόδειξη της σχέσης (2.2.1).
Συμβολίζουμε με T τον περιορισμό στον υπόχωρο H της ορθογώνιας προβολής στον $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$. Ισχύει ότι

$$|T(H \cap C_n)| = |detT||H \cap C_n|.$$

Αν θ η γωνία που σχηματίζει ο υπόχωρος H με τον υπόχωρο $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, τότε

$$\frac{\|TSe\|}{\|Se\|} = \cos\theta$$

Αν τώρα θεωρήσουμε μια ορθοκανονική βάση $\{f_i\}$ του $(n-2)$-διάστατου υπόχωρου $H \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$, μπορούμε να πάρουμε μια ορθοκανονική βάση στον H, $\big(f_1, \ldots, f_{n-2}, \eta\big)$, όπου η, κανονικό διάνυσμα στον H και μια ορθοκανονική βάση στον $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$, $\big(f_1, \ldots, f_{n-2}, \xi\big)$, ξ κανονικό διάνυσμα στον $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$, με το ξ να είναι συγγραμμικό με την προβολή του η στον $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$.
Τότε ο $T : H \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$, προβάλλει τα διανύσματα ως εξής

$$\begin{aligned} f_1 &\longmapsto f_1 \\ &\cdots \\ &\cdots \\ f_{n-2} &\longmapsto f_{n-2} \\ \eta &\longmapsto \xi \cos\theta \end{aligned}$$

οπότε ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \cos\theta \end{pmatrix},$$

και έτσι $|detT| = \cos\theta$. Συνεπώς,

$$|T(H \cap C_n)| = \frac{\|TSe\|}{\|Se\|}|H \cap C_n|$$

άρα

$$|H \cap C_n| = |T(H \cap C_n)|\frac{\|Se\|}{\|TSe\|} = \frac{\|Se\|}{\|TSe\|},$$

αφού ο $T(H \cap C_n)$ είναι ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^{n-1}$.

Απόδειξη της σχέσης (2.2.2).
Αν $e = (1, 0, \ldots, 0)$ τότε $Se = (1 - a_1^2, -a_1a_2, \ldots, -a_1a_n)$, αφού $Se = e - \langle e, a\rangle a$. Επιπλέον $TSe = (0, -a_1a_2, \ldots, -a_1a_n)$, οπότε από την σχέση (2.2.1) έχουμε ότι

$$|H \cap C_n| = \frac{\|Se\|}{\|TSe\|} = \frac{\big(\,(1-a_1^2)^2 + a_1^2a_2^2 + \cdots + a_1^2a_n^2\,\big)^{1/2}}{\big(a_1^2a_2^2 + \cdots + a_1^2a_n^2\big)^{\frac{1}{2}}} = \Big(\frac{(1-a_1^2)^2}{a_1^2\sum\limits_{i=2}^{n} a_i^2} + 1\Big)^{1/2}$$

$$= \Big(\frac{(1-a_1^2)^2}{a_1^2(1-a_1^2)} + 1\Big)^{1/2} = \frac{1}{a_1} < \sqrt{2}.$$

Απόδειξη του Λήμματος 2.2.2.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\,\frac{\sin t}{t}\,\Big|^p dt \leq \sqrt{\frac{2}{p}},$$

αν $p \geq 2$.

Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία μέρη, ως προς τις τιμές του p.
α.] $p \geq 4$
Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} - \frac{t^6}{7!} + \frac{t^8}{9!} - \ldots < 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120}, \quad t^2 < 72 \qquad (2.2.4)$$

και

$$e^{-\frac{t^2}{6}} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{72} - \frac{t^6}{1296} + \frac{t^8}{6^4 4!} + \ldots > 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{72} - \frac{t^6}{1296},$$

αν $t^2 < 30$, δηλαδή

$$-e^{\frac{t^2}{6}} < -1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{72} + \frac{t^6}{1296} \qquad (2.2.5)$$

Προσθέτοντας κατα μέλη τις σχέσεις (2.2.4), (2.2.5), έχουμε

$$\frac{\sin t}{t} - e^{\frac{t^2}{6}} < \frac{t^4}{120} - \frac{t^4}{72} + \frac{t^6}{1296} = -\frac{t^4}{180} + \frac{t^6}{1296} \leq 0,$$

αν $t^2 \leq \frac{36}{5}$. Οπότε

$$0 \leq \frac{\sin t}{t} \leq e^{-\frac{t^2}{6}},$$

αν $t^2 \leq \frac{36}{5}$, αφού $\frac{36}{5} \leq \pi^2$.
Έστω $m = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Αφού $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω έχουμε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt + \frac{1}{\pi} \int_{-m}^{m} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt + \frac{1}{\pi} \int_{m}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{m} \left| \frac{\sin(-t)}{t} \right|^p (-1)dt + \frac{1}{\pi} \int_{-m}^{m} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt + \frac{1}{\pi} \int_{m}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{m}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt + \frac{1}{\pi} \int_{-m}^{m} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_{m}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt + \frac{1}{\pi} \int_{-m}^{m} e^{-p\frac{t^2}{6}} dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\frac{t^2}{6}} dt + \frac{2}{\pi} \int_{m}^{\infty} t^{-p} dt$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{p}\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\pi(p-1)m^{p-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\pi m^3} \right) < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p}},$$

για $p \geq 4$.
Την προτελευταία ανισότητα την παίρνουμε με στοιχειώδεις πράξεις λογι-σμού, για $p \geq 4$ και $m = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Αφού

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{p}\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\pi(p-1)m^{p-1}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\pi(p-1)m^{p-1}} \sqrt{p} \right)$$

και

$$\frac{2\sqrt{p}}{\pi(p-1)m^{p-1}} \leq \frac{4}{3\pi m^3} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{p}}{p-1} \leq 2m^{p-4} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{p}}{p-1} \leq 2 \left(\frac{6}{\sqrt{5}} \right)^{p-4},$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sqrt{p} \leq 2 \left(\frac{6}{\sqrt{5}} \right)^{p-4},$$

αφού $\frac{3\sqrt{p}}{p-1} \leq \sqrt{p}$, για $p \geq 4$. Μελετώντας την συνάρτηση

$$h(x) = \log 2\,\Big(\,\frac{6}{\sqrt{5}}\,\Big)^{x-4} - \log\sqrt{x} = x\log\frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\log x + \log\frac{50}{6^4},$$

μπορούμε να δούμε ότι $h(x) \geq 0$, για $x \geq 4$.
Η τελευταία ανισότητα ισχύει, αφού για $m = \frac{6}{\sqrt{5}}$,

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\pi m^3} = 1,4039477 < \sqrt{2}.$$

β.]$2 < p < 4$
Θέτουμε $s = \frac{p}{2} - 1$ και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\sin^2 t}{t^2}\Big)^{1+s}dt < \frac{1}{\sqrt{1+s}} \quad \Big(= \sqrt{\frac{2}{p}}\Big), \tag{2.2.6}$$

για $0 < s < 1$.

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$, ορίζουμε

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\pi}}\Big(1 - e^{-\frac{t^2}{\pi}}\Big)^n dt$$

και

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin^2 t}{t^2}\Big(1 - \frac{sin^2 t}{t^2}\Big)^n dt.$$

Τότε

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\frac{1}{t})'\sin^2 t dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}2\sin t\cos t dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2t}{2t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = 1.$$

Τώρα, για $t \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, ισχύει

$$\Big(\frac{\sin^2 t}{t^2}\Big)^{1+s} = \frac{\sin^2 t}{t^2}\Big(1 - \big(1 - \frac{\sin^2 t}{t^2}\big)\Big)^s = \frac{\sin^2 t}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}(-1)^n\Big(1 - \frac{\sin^2 t}{t^2}\Big)^n$$

$$= \frac{\sin^2 t}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\big(1 - \frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n(-1)^n$$

$$= \frac{\sin^2 t}{t^2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s(s-1)\cdots(s-n+1)|}{n!} \big(1 - \frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n \right],$$

διότι $(-1)^n s(s-1)\cdots(s-n+1) \leq 0$, αν $n \geq 1$.
Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης αφού οι όροι του αθροίσματος είναι μη αρνητικοί, παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\sin^2 t}{t^2} \Big)^{1+s} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{\sin^2 t}{t^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s(s-1)\cdots(s-n+1)|}{n!} \big(1 - \frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n \frac{\sin^2 t}{t^2} \Big] dt$$

$$= b_0 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s(s-1)\cdots(s-n+1)|}{n!} \big(1 - \frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s(s-1)\cdots(s-n+1)|}{n!} b_n.$$

Επιπλέον, με αλλαγή μεταβλητής $t\sqrt{\frac{1+s}{\pi}} = t'$ έχουμε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{-\frac{t^2}{\pi}} \Big)^{1+s} dt = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{1+s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{1+s}}.$$

Ανάλογα, επειδή

$$\frac{1}{\sqrt{1+s}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{-\frac{t^2}{\pi}} \Big)^{1+s} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\pi}} \Big(1 - (1 - e^{-\frac{t^2}{\pi}}) \Big)^s dt,$$

παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1+s}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s(s-1)\cdots(s-n+1)|}{n!} a_n.$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $a_n < b_n, \quad n \in N$. Διότι τότε

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s(s-1)\cdots(s-n+1)|}{n!} b_n < 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s(s-1)\cdots(s-n+1)|}{n!} a_n$$

κι έτσι θα έχουμε την ζητούμενη ανισότητα.

Για τις πρώτες εξι τιμές του n, όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα, ισχυει ότι $a_n < b_n$.

n	a_n	b_n
1	0,29	0,33
2	0,16	0,22
3	0,11	0,17
4	0,08	0,15
5	0,07	0,13
6	0,05	0,12

Οι υπολογισμοί έγιναν από τον K.Ball με προσέγγιση δυο δεκαδικών ψηφιών και για την περίπτωση του b_n, όπως αναφέρει, χρησιμοποίησε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Για $n \geq 7$ ισχύει οτι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} < \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2en} \qquad (*)$$

αφού

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} < \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2en} \Leftrightarrow en2\sqrt{\pi}\sqrt{n+1} < (en - \sqrt{\pi}\sqrt{n+1})\sqrt{2\pi n},$$

με στοιχειώδεις πράξεις καταλήγουμε στην ισοδύναμη ανισότητα

$$\frac{e^2}{2e^2 + 2e\sqrt{2\pi} + \pi} > \frac{n+1}{n^2}$$

και για $n = 7$ ισχύει $\frac{8}{49} \simeq 0,1632 < 0,756 \simeq \frac{e^2}{2e^2+2e\sqrt{2\pi}+\pi}$.
Επιπλέον, η συνάρτηση $h(x) = \frac{x+1}{x^2}$ είναι φθίνουσα στο $(-\infty, -2)$ και στο $(0, +\infty)$, αφού $h'(x) = -\frac{(x+2)}{x^3}$.
Μένει να δείξουμε ότι

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \qquad (**)$$

και

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2en} \qquad (***),$$

για $n \geq 7$.
Για $0 < x \leq 1$, ισχύει ότι $2(1-x)^2 \leq |\log x|$, αφού αν πάρουμε την συνάρτηση $g(x) = -logx - 2(1-x)^2$, έχουμε $g'(x) = -\frac{1}{x}(2x-1)^2 < 0$, δηλαδή η g είναι φθίνουσα και συνεπώς $-\log x - 2(1-x)^2 \geq 0$, για κάθε $x \in (0, 1]$.

Για το

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\pi}}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{\pi}}\right)^n dx$$

με διαδοχικές αλλαγές μεταβλητών $u = \frac{x}{\sqrt{\pi}}$ και $x = e^{-u^2}$, οπότε $\frac{1}{2\sqrt{|\log x|}}\big(-\frac{1}{x}\big)dx = du$, έχουμε

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\big(1-e^{-u^2}\big)^n du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\big(1-e^{-u^2}\big)^n du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{x(1-x)^n}{\sqrt{|\log x|}}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 (1-x)^{n-1}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}n}.$$

Κι έτσι αποδείχθηκε η (∗∗).
Επίσης,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\big(1-\frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin^2 t}{t^2}\big(1-\frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n dt + \frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\big(1-\frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2 t}{t^2}\big(1-\frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\big(1-\frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2 t}{t^2}\big(1-\frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n dt$$

$$\geq \frac{2}{\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\big(1-\frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n dt$$

Άρα

$$b_n \geq \frac{2}{\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\big(1-\frac{\sin^2 t}{t^2}\big)^n dt \tag{2.2.7}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η $\frac{1}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n$ είναι αύξουσα για $1 \leq t \leq \sqrt{n+1}$ και φθίνουσα για $t \geq \sqrt{n+1}$, αφού

$$\Big[\frac{1}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n\Big]' = -2\frac{1}{t^3}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n + \frac{1}{t^2}n\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^{n-1}2\frac{1}{t^3}$$

$$= \Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^{n-1}\Big(-\frac{2}{t^3}+\frac{2}{t^5}+\frac{2n}{t^5}\Big) = \Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^{n-1}\frac{2}{t^3}\Big(\frac{n+1}{t^2}-1\Big)$$

$$= \frac{2}{t^3}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^{n-1}\frac{1+n-t^2}{t^2}.$$

Οπότε, αν $n \geq 6$ τότε $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{7} > 2,57 \simeq 1+\frac{\pi}{2}$ κι έχουμε οτι

$$\int\limits_{1+\pi/2}^{\sqrt{n+1}} \frac{\sin^2 t}{t^2}\big(1-\frac{1}{t^2}\big)^n dt = \int\limits_{1}^{\sqrt{n+1}-\pi/2} \frac{\sin^2(t+\frac{\pi}{2})}{(t+\frac{\pi}{2})^2}\Big(1-\frac{1}{(t+\frac{\pi}{2})^2}\Big)^n dt$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{n+1}-\pi/2} \frac{\cos^2 t}{(t+\frac{\pi}{2})^2}\Big(1-\frac{1}{(t+\frac{\pi}{2})^2}\Big)^n dt$$

Όμως η $\frac{1}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n$ είναι αύξουσα για $1 \leq t \leq \sqrt{n+1}$, οπότε

$$\int_{1+\pi/2}^{\sqrt{n+1}} \frac{\sin^2 t}{t^2}(1-\frac{1}{t^2})^n dt \geq \int_{1}^{\sqrt{n+1}-\pi/2} \frac{\cos^2 t}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n dt$$

και

$$\int_{\sqrt{n+1}}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}(1-\frac{1}{t^2})^n dt \geq \int_{\sqrt{n+1}+\pi/2}^{\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n dt,$$

αφού η $\frac{1}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n$ είναι φθίνουσα για $t \geq \sqrt{n+1}$,
Έτσι

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}(1-\frac{1}{t^2})^n dt \geq \frac{1}{2}\Big[\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}(1-\frac{1}{t^2})^n dt + \int_{1+\pi/2}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}(1-\frac{1}{t^2})^n dt\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}(1-\frac{1}{t^2})^n dt + \frac{1}{2}\int_{1+\pi/2}^{\sqrt{n+1}} \frac{\sin^2 t}{t^2}(1-\frac{1}{t^2})^n dt + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{n+1}}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}(1-\frac{1}{t^2})^n dt$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n dt - \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{cos^2 t}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{1}^{\sqrt{n+1}-\pi/2} \frac{cos^2 t}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n dt + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{n+1}+\pi/2}^{\infty} \frac{cos^2 t}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n dt - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{n+1}-\pi/2}^{\sqrt{n+1}+\pi/2} \frac{cos^2 t}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n dt$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n dt - \frac{1}{2}\max_{1 \leq t < \infty}\Big[\frac{1}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n\Big] \int_{\sqrt{n+1}-\pi/2}^{\sqrt{n+1}+\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n dt - \max_{1\leq t<\infty}\Big[\frac{1}{t^2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^n\Big]\frac{\pi}{4}$$

και με αλλαγή μεταβλητης $\frac{1}{t} = u$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u^2)^n du - \frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1}\big(1-\frac{1}{n+1}\big)^n$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u^2)^n du - \frac{\pi}{4}\frac{1}{n}\big(1-\frac{1}{n+1}\big)^{n+1}. \qquad (2.2.8)$$

Για το ολοκλήρωμα τώρα, έχουμε, με αλλαγή μεταβλητής $u = \sin t$,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (1-u^2)^n du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)^n \cos t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1} t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n} t\cos t dt = \frac{1}{2}\sin t\cos^{2n} t\,\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\ 2n\cos^{2n-1} t dt$$

$$= \frac{1}{2}2n\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)\cos^{2n-1} t dt$$

$$= \frac{1}{2}2n\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1} t dt - \frac{1}{2}2n\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1} t dt \qquad (2.2.9)$$

Αν λοιπόν,

$$I_{2n+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1} t dt \qquad (2.2.10)$$

παίρνουμε ότι

$$I_{2n+1} = 2nI_{2n-1} - 2nI_{2n+1}$$

άρα

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}I_{2n-1} \qquad (2.2.11)$$

Κάνοντας τα ίδια για το I_{2n-1}, παίρνουμε οτι

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3}$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, παίρνουμε οτι

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{2n2(n-1)2(n-2)2(n-3)\cdots 2}{\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots 1}{2n2(n-1)2(n-2)\cdots 2}}\ \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2^n n! 2^n n!}{(2n+1)(2n)! 2} = \frac{4^n}{2(2n+1)} \binom{2n}{n}^{-1} \tag{2.2.12}$$

Από τις σχέσεις (2.2.10),(2.2.11),(2.2.12), η σχέση (2.2.9) γίνεται

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (1-u^2)^n du = 2nI_{2n-1} - 2nI_{2n+1}$$

$$= (2n+1)I_{2n+1} - 2nI_{2n+1} = \frac{4^n}{2(2n+1)} \binom{2n}{n}^{-1}.$$

Οπότε η σχέση (2.2.8) παίρνει τη μορφή

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}(1-\frac{1}{t^2})^n dt$$

$$\geq \frac{4^n}{2(2n+1)} \binom{2n}{n}^{-1} - \frac{\pi}{4}\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1} \geq \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{n+1}} - \frac{\pi}{4en} \tag{2.2.13}$$

Η τελευταία ανισότητα επιτυγχάνεται με την βοήθεια της προσέγγισης του $n!$ με τον τύπο του Stirling,

$$\frac{n!}{n^n\sqrt{n}e^{-n}\sqrt{2\pi}} \longrightarrow 1$$

και της παρατήρησης οτι η ακολουθία

$$\frac{4^n\sqrt{n+1}}{2(2n+1)} \binom{2n}{n}^{-1}$$

είναι φθίνουσα ενώ η $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα. Πιο συγκεκριμένα, από τον τύπο του Stirling παίρνουμε

$$\lim_n \frac{4^n n! n! \sqrt{n+1}}{2(2n+1)(2n)!} = \lim_n \frac{4^n n^{2n} n e^{-2n} 2\pi\sqrt{n+1}}{2(2n+1)(2n)^{2n}\sqrt{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \lim_n \frac{\sqrt{n^2+n}\sqrt{\pi}}{2(2n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Επιπλέον,

$$\frac{\frac{4^n\sqrt{n+1}n!n!}{2(2n+1)(2n)!}}{\frac{4^{n+1}\sqrt{n+2}(n+1)!(n+1)!}{2(2n+3)(2n+2)!}} = \frac{2n+3}{2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}} > 1.$$

Από την σχέση (2.2.13) τώρα, καταλήγουμε στην

$$\frac{2}{\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\big(1-\frac{1}{t^2}\big)^n \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2en}$$

και συνεπώς έχουμε την ζητούμενη σχέση $(***)$,

$$b_n \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2en}.$$

γ.] αν $p=2$, είναι γνωστό οτι ισχύει

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{\sin t}{t}\Big|^2 dt = 1.$$

Το αντιπαράδειγμα

Θεώρημα 2.2.3 *Έστω $n \geq 10$, Q_n ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει Ευκλείδεια μπάλα C_n με κέντρο το 0 και κατάλληλη ακτίνα έτσι ώστε αν και*

$$|C_n|_{(n)} < 1 = |Q_n|_{(n)}$$

ισχύει ότι

$$|H\cap Q_n|_{(n-1)} \leq |H\cap C_n|_{(n-1)},$$

για κάθε $(n-1)-$διάστατο υπόχωρο $H \subseteq \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη
Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα αν H ένας $(n-1)-$διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, ισχύει ότι $|H\cap Q_n|_{(n)} \leq \sqrt{2}$. Αρκεί να δείξουμε ότι για $n \geq 10$ η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έχει κεντρικές τομές των οποίων ο όγκος είναι μεγαλύτερος από $\sqrt{2}$. Γιατί τότε θα μπορούμε να βρούμε μπάλα κατάλληλης ακτίνας με όγκο μικρότερο από 1, της οποίας οι κεντρικές τομές της με κάθε $(n-1)-$διάστατο υπόχωρο H είναι τουλάχιστον $\sqrt{2}$.

Ορίζουμε c_n να είναι ο $(n-1)-$διάστατος όγκος της τομής της μπάλας C_n, $n-$διάστατου όγκου 1, με τον υπόχωρο H. Αν ρ η ακτίνα της C_n, δηλαδή $C_n = B_n(\rho)$ και B_n η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $c_n = |B_{n-1}(\rho)|_{(n-1)}$, και

$$1 = |C_n|_{(n)} = |B_n(\rho)|_{(n)} = \rho^n |B_n|_{(n)}$$

άρα $\rho^n = \frac{1}{w_n}$ δηλαδή $\rho = \frac{1}{w_n^{1/n}}$, όπου w_n ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε

$$c_n = |B_{n-1}(\rho)|_{(n-1)} = \rho^{n-1}|B_{n-1}|_{(n-1)} = \frac{1}{w_n^{n-1/n}} w_{n-1}.$$

Από τις σχέσεις

$$w_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \quad w_{n-1} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

παίρνουμε ότι

$$c_n = \frac{w_{n-1}}{w_n^{n-1/n}} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{n-1}{n}}}{\pi^{\frac{n}{2}\frac{n-1}{n}}\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{n-1}{n}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling, έχουμε

$$\begin{aligned} c_n &\approx \frac{(\sqrt{2\pi})^{\frac{n-1}{n}} e^{-(\frac{n}{2}+1)\frac{n-1}{n}} e^{(\frac{n}{2}+1-\frac{1}{2})\log(\frac{n}{2}+1)\frac{n-1}{n}}}{\sqrt{2\pi}e^{-(\frac{n-1}{2}+1)}e^{(\frac{n-1}{2}+1+\frac{1}{2})\log(\frac{n-1}{2}+1)}} \\ &= e^{-\frac{n^2+n-2}{2n}+\frac{n+1}{2}} \frac{\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{n^2+2n-3}{2n}}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}} (2\pi)^{-\frac{1}{2n}} \\ &= e^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}+1}(n+2)^{-\frac{3}{2n}}2^{\frac{3}{2n}}(2\pi)^{-\frac{1}{2n}} \\ &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e}{\sqrt{2(n+2)}}\right)^{\frac{1}{n}}(2\pi)^{-\frac{1}{2n}} \end{aligned}$$

Από όπου παίρνουμε ότι

$$c_n \longrightarrow \sqrt{e},$$

καθώς $n \longrightarrow +\infty$.
Υπολογίζουμε το a_{10}, και βρίσκουμε $a_{10} \approx 1,420$ δηλ. $a_{10} > \sqrt{2}$.
Μένει να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{c_n\}$ είναι αύξουσα, οπότε θα έχουμε ότι

$$|H \cap Q_n|_{(n-1)} \leq \sqrt{2} < c_n = |H \cap C_n|_{(n-1)}$$

για $n \geq 10$.

Λήμμα 2.2.3 *Έστω c_n ο όγκος της κεντρικής τομής μπάλας όγκου 1 με έναν $(n-1)-$διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$. Τότε η ακολουθία (c_n) είναι αύξουσα.*

Απόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(x) = \Big(\frac{x+1}{x}\Big)^{2x+1} \tag{2.2.14}$$

Η F είναι φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Αν την παραγωγίσουμε, παίρνουμε

$$F'(x) = \Big(\frac{x+1}{x}\Big)^{2x+1}\Big(2\log(x+1) - 2\log x - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\Big)$$

Για να είναι η F φθίνουσα αρκεί

$$2\log(x+1) - 2\log x - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leq 0$$

ή ισοδύναμα

$$\log\frac{x+1}{x} \leq \frac{2x+1}{2x(x+1)} \tag{2.2.15}$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει, γιατί

$$\log\frac{x+1}{x} = \log(x+1) - \log x = \int\limits_x^{x+1} \frac{1}{t}dt$$

(λογω του οτι η $\frac{1}{t}$ είναι κυρτή)

$$\leq \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{2x(x+1)}.$$

Άρα η F είναι φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$G(x) = \Big(\frac{x}{x-1}\Big)^{2x-1-\frac{1}{x}}, \tag{2.2.16}$$

$x \in (1, +\infty)$. Η G είναι αύξουσα.

Για την παράγωγό της ισχύει

$$G'(x) = \Big(\frac{x}{x-1}\Big)^{2x-1-\frac{1}{x}}\Big[(2 + \frac{1}{x^2})\log\frac{x}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2}\Big]$$

Για να είναι η G αύξουσα, αρκεί να ισχύει

$$\Big(\log\frac{x}{x-1}\Big) \geq \frac{2x+1}{2x^2+1}, \quad x > 1.$$

Ισχύει

$$\log x - \log(x-1) = \int\limits_{x-1}^{x} \frac{1}{t} dt$$

(λόγω του οτι η γραφική παράσταση της $\frac{1}{t}$ βρίσκεται πάνω απο την εφαπτομένη στο σημείο $(x, \frac{1}{x})$)

$$\geq \int\limits_{x-1}^{x} (\frac{1}{x} - \frac{t-x}{x^2})dt = \frac{2x+1}{2x^2} \geq \frac{2x+1}{2x^2+1}$$

Χρησιμόποιώντας τη μονοτονία των συνάρτήσεων (2.2.14) και (2.2.16), μπορούμε να δείξουμε ότι για $n \geq 3$,

$$\Big(\frac{n-1}{n-2}\Big)^{\frac{n-3}{2n-5}} \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} < \frac{n}{n-1} \tag{2.2.17}$$

Η (2.2.14), όπως είδαμε, είναι φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε

$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{2n+1} < \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{2n-1}$$

άρα

$$\frac{n+1}{n} < \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

δηλαδή

$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} < \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{\frac{n}{2n+1}} \tag{2.2.18}$$

και η (2.2.16) είναι φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, οπότε

$$\Big(\frac{n-1}{n-2}\Big)^{2n-3-\frac{1}{n-1}} < \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{2n-1-\frac{1}{n}}$$

άρα

$$\Big(\frac{n-1}{n-2}\Big)^{\frac{(n-2)(2n-1)}{n-1}} < \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{\frac{(2n+1)(n-1)}{n}}$$

δηλαδή

$$\frac{n-1}{n-2} < \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{\frac{(2n+1)(n-1)^2}{n(n-2)(2n-1)}}$$

ή

$$\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{\frac{n-3}{2n-5}} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{(2n+1)(n-1)^2(n-3)}{n(n-2)(2n-1)(2n-5)}} \tag{2.2.19}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.2.18) και την (2.2.19), παίρνουμε

$$\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{\frac{n-3}{2n-5}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2n-1}} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{(2n+1)(n-1)^2(n-3)}{n(n-2)(2n-1)(2n-5)}+\frac{n}{2n+1}}.$$

Μένει να δείξουμε ότι για $n \geq 3$

$$\frac{(2n+1)(n-1)^2(n-3)}{n(n-2)(2n-1)(2n-5)} + \frac{n}{2n+1} \leq 1,$$

οπότε θα έχουμε την (2.2.17). Ισοδύναμα αρκεί

$$\frac{(2n+1)(n-1)^2(n-3)}{n(n-2)(2n-1)(2n-5)} \leq 1 - \frac{n}{2n+1}$$

ή

$$(2n+1)^2(n-1)^2(n-3) \leq n(n+1)(n-2)(2n-1)(2n-5)$$

και με στοιχειώδεις πράξεις καταλήγουμε στο $8n^2-5n+3 \geq 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε τώρα για $n \geq 1$,

$$u_n = \left(\frac{I_{n-1}}{I_n}\right)^{n-1},$$

όπου $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta,\ n \geq 0$.
Ισχύει ότι

$$c_n = \frac{w_{n-1}}{w_n^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{w_{n-1}}{w_n} w_n^{\frac{1}{n}}$$

και χρησιμοποιώντας την $\frac{w_n}{w_{n-1}} = I_n$, σχέση (1.3.2), παίρνουμε ότι

$$c_n = \frac{w_n^{\frac{1}{n}}}{I_n}.$$

Τότε, παίρνουμε διαδοχικά τις σχέσεις

$$c_{n-1} = \frac{w_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{I_{n-1}} \Leftrightarrow c_{n-1}^{n-1} = \frac{w_{n-1}}{I_{n-1}^{n-1}} \Leftrightarrow c_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} = \frac{w_{n-1}^{\frac{1}{n}}}{I_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$\Leftrightarrow u_n^{\frac{1}{n}} c_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} = u_n^{\frac{1}{n}} \frac{w_{n-1}^{\frac{1}{n}}}{I_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}} = \left(\frac{u_n}{I_{n-1}^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} w_{n-1}^{\frac{1}{n}}$$

κι επειδή $I_{n-1}^{n-1} = u_n I_n^{n-1}$, παίρνουμε ότι

$$u_n^{\frac{1}{n}} c_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} = I_n^{\frac{1-n}{n}} w_{n-1}^{\frac{1}{n}} = \frac{(I_n w_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{I_n} = \frac{w_n^{\frac{1}{n}}}{I_n},$$

δηλαδή

$$c_n = u_n^{\frac{1}{n}} c_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}, \tag{2.2.20}$$

για $n \geq 2$.
Ορίζουμε $c_1 := 1$.
Για $n = 2,\ c_2 = \frac{w_2^{1/2}}{I_2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = u_2^{1/2} c_1^{1/2}$.
Ισχύει ότι $c_1 = 1 < u_2 = \frac{I_1}{I_2} = \frac{4}{\pi}$. Από την σχέση (2.2.20) και υποθέτοντας επαγωγικά ότι

$$c_{n-1} < u_n$$

παίρνουμε

$$u_n^{\frac{1}{n}} c_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} < u_n^{\frac{1}{n}} u_n^{\frac{n-1}{n}} = u_n,$$

άρα

$$c_n < u_n, \quad n \geq 2.$$

Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι η $\{u_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία κι έτσι θα έχουμε ότι $c_n < u_{n+1}$. Οπότε θα ισχύει ότι $c_{n-1} < u_n$, για κάθε $n \geq 2$, και παίρνουμε ότι

$$c_{n-1}^{\frac{1}{n}} < u_n^{\frac{1}{n}}$$

ή

$$c_{n-1}^{\frac{1}{n}} c_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} < u_n^{\frac{1}{n}} c_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}$$

και λόγω της (2.2.20) παίρνουμε ότι

$$c_{n-1} < c_n, \quad n \geq 2.$$

Μένει να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{u_n\}$ είναι αύξουσα.
Ορίζουμε

$$x_n := \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Ισχύει ότι

$$I_{n+1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta d\theta = \sin\theta\cos^n\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta\sin^2\theta d\theta$$

$$= n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta(1-\cos^2\theta)d\theta = n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-1}\theta - \cos^{n+1}\theta)d\theta$$

$$= nI_{n-1} - nI_{n+1}$$

άρα

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1}I_{n-1}$$

ή

$$\frac{I_{n-1}}{I_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \tag{2.2.21}$$

Οπότε

$$x_n = \frac{\left(\frac{I_n}{I_{n+1}}\right)^{\frac{n}{2n-1}}}{\left(\frac{I_{n-1}}{I_n}\right)^{\frac{n-1}{2n-1}}} = \frac{I_n}{I_{n-1}^{\frac{n-1}{2n-1}} I_{n+1}^{\frac{n}{2n-1}}}$$

$$= \frac{I_n}{I_{n-1}}\Big(\frac{I_{n-1}}{I_{n+1}}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} = \frac{I_n}{I_{n-1}}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} \tag{2.2.22}$$

Έχουμε ότι $x_n < x_{n-2}$, για $n \geq 3$, αφού

$$x_n < x_{n-2}$$

δηλαδή

$$\frac{I_n}{I_{n-1}}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} < \frac{I_{n-2}}{I_{n-3}}\Big(\frac{n-1}{n-2}\Big)^{\frac{n-2}{2n-5}}$$

οπότε

$$\frac{I_{n-3}}{I_{n-1}}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} < \frac{I_{n-2}}{I_n}\Big(\frac{n-1}{n-2}\Big)^{\frac{n-2}{2n-5}}.$$

Λογω της (2.2.21), η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{n-1}{n-2}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} < \frac{n}{n-1}\Big(\frac{n-1}{n-2}\Big)^{\frac{n-2}{2n-5}}$$

δηλαδή με την

$$\Big(\frac{n-1}{n-2}\Big)^{\frac{n-3}{2n-5}}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} < \frac{n}{n-1},$$

η οποία είναι ακριβώς η σχέση (2.2.17).

Επιπλέον, μπορούμε να δούμε ότι $x_n \longrightarrow 1$, καθώς $n \longrightarrow +\infty$. Εξετάζοντας ξεχωριστά για άρτια και περιττά n, έχουμε:
Για $n = 2k, \quad n \geq 4$, από την (2.2.21)

$$\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{(n-1)}{n}\frac{I_{n-2}}{I_{n-1}} = \frac{(n-1)}{n}\frac{(n-1)}{(n-2)}\frac{I_{n-2}}{I_{n-3}} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{(n-1)}{n}\frac{(n-1)}{(n-2)}\frac{(n-3)}{(n-2)}\frac{(n-3)}{(n-4)}\cdots\frac{5}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2\cdots 5^2 4^2 3^2 2^2}{n(n-2)^4(n-4)^4\cdots 4^4 2^4}\frac{\pi}{2} = \frac{\big[(2k-1)!\big]^2}{2k2^{4(k-1)}\big[(k-1)!\big]^4}\frac{\pi}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling, παίρνουμε

$$\frac{I_n}{I_{n-1}} \approx \frac{2\pi\big[e^{-(2k-1)}e^{(2k-1+\frac{1}{2})\log(2k-1)}\big]^2}{k2^{4k-3}(2\pi)^2\big[e^{-(k-1)}e^{(k-1+\frac{1}{2})(\log(k-1))}\big]^4}\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{e^{-4k+2}e^{2(2k-\frac{1}{2})\log(2k-1)}}{k2^{4k-2}e^{4(k-\frac{1}{2})\log(k-1)}e^{-4k+4}}\frac{1}{2} = \frac{e^{(4k-1)\log(2k-1)}}{k2^{4k-2}e^{(4k-2)\log(k-1)}}\frac{1}{2}\frac{1}{e^2}$$

$$= \frac{(2k-1)^{4k-1}}{k2^{4k-2}(k-1)^{4k-2}}\frac{1}{2e^2} = \frac{1}{2k}\frac{(2k-1)^{4k-1}}{(2k-2)^{4k-2}}e^{-2}$$

$$= \frac{1}{2k}\Big(\frac{2k-1}{2k-2}\Big)^{4k-1}(2k-2)e^{-2}$$

$$= \frac{k-1}{k}\left[\Big(1+\frac{1}{2k-2}\Big)^{2k-2}\right]^2\Big(\frac{2k-1}{2k-2}\Big)^3 e^{-2}$$

$$= \Big(1-\frac{1}{k}\Big)\left[\Big(1+\frac{1}{2k-2}\Big)^{2k-2}\right]^2\Big(\frac{2k-1}{2k-2}\Big)^3 e^{-2}$$

$$= \Big(1-\frac{1}{k}\Big)\left[\Big(1+\frac{1}{2k-2}\Big)^{2k-2}\right]^2 \longrightarrow 1e^2e^{-2} = 1. \tag{2.2.23}$$

Για $n = 2k+1, \quad n \geq 3$, παίρνουμε

$$\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = \frac{1}{\frac{I_{2k}}{I_{2k+2}}\frac{I_{2k+2}}{I_{2k+1}}} = \frac{1}{\frac{2k+2}{2k+1}\frac{I_{2k+2}}{I_{2k+1}}} \longrightarrow 1, \tag{2.2.24}$$

από την προηγούμενη περίπτωση (για n άρτιο).
Και επειδή $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2n-1}} \longrightarrow 1$, καταλήγουμε στο ότι

$$x_n \longrightarrow 1,$$

καθώς $n \longrightarrow +\infty$.
Έχουμε λοιπόν ότι $x_n < x_{n-2}$, για $n \geq 3$ και $x_n \longrightarrow 1$, οπότε $x_n \geq 1$, για κάθε $n \geq 1$.Δηλαδή

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{\frac{1}{2n-1}} \geq 1$$

άρα

$$u_{n+1} \geq u_n,$$

για κάθε $n \geq 1$.

2.3 Αντιπαράδειγμα για $n \geq 7$

Θεωρούμε το συμμετρικό κυρτό σώμα (κύλινδρος)

$$A_n(a,\beta) = \Big\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq a^2, \ |x_n| \leq \beta\Big\}, \quad a\beta > 0,$$

στον $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $\gamma = \left(\frac{a}{\beta}\right)^2$ και ορίζουμε την συνάρτηση $f : \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \sqrt{1+\gamma x}\int_0^1 (1-xt^2)^{\frac{n-2}{2}}dt.$$

Πρόταση 2.3.1 *Αν $n \geq 4$, η f είναι φθίνουσα στο $[0,1]$ αν και μόνο αν $\gamma \leq \frac{n-2}{3}$.*

Απόδειξη
Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής, $s = \sqrt{x}t$, η f παίρνει την μορφή

$$f(x) = \sqrt{1+\gamma x}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} (1-s^2)^{\frac{n-2}{2}}ds.$$

Οπότε

$$f'(x) = \frac{\gamma}{2\sqrt{1+\gamma x}}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}}(1-s^2)^{\frac{n-2}{2}}ds - \sqrt{1+\gamma x}\frac{1}{2x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}}(1-s^2)^{\frac{n-2}{2}}ds$$

$$+\sqrt{1+\gamma x}\frac{1}{\sqrt{x}}(1-x)^{\frac{n-2}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ισχύει

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma x\int_0^{\sqrt{x}}(1-s^2)^{\frac{n-2}{2}} - (1+\gamma x)\int_0^{\sqrt{x}}(1-s^2)^{\frac{n-2}{2}}ds + (1+\gamma x)\sqrt{x}(1-x)^{\frac{n-2}{2}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^{\sqrt{x}}(1-s^2)^{\frac{n-2}{2}}ds + (1+\gamma x)\sqrt{x}(1-x)^{\frac{n-2}{2}} \leq 0$$

Έχουμε δηλαδή ότι η f είναι φθίνουσα στο [0,1] αν και μόνο αν

$$x(1+\gamma x^2)(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} \leq \int_0^x (1-s^2)^{\frac{n-2}{2}}ds, \quad x \in [0,1]. \tag{2.3.1}$$

Θέτουμε

$$g(x) := x(1+\gamma x^2)(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} - \int_0^x (1-s^2)^{\frac{n-2}{2}}ds.$$

Τότε $g(0) = 0$ και

$$g'(x) = (1+\gamma x^2)(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} - (1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} +$$
$$x2\gamma x(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} - (n-2)x^2(1+\gamma x^2)(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}.$$

Οπότε

$$g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}3\gamma \leq (n-2)(1+\gamma x^2)(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 3\gamma(1-x^2) \leq (n-2)(1+\gamma x) \Leftrightarrow 3\gamma - 3\gamma x^2 \leq (n-2) + (n-2)\gamma x^2$$

$$\Leftrightarrow 3\gamma - (n-2) \leq \Big(3\gamma + (n-2)\gamma\Big)x^2, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε οτι για να ισχύει η σχέση (2.3.1) πρέπει να ισχύει $3\gamma \leq n-2$.
Αντίστροφα, αν $3\gamma \leq n-2$, έχουμε ότι

$$(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}3\gamma \leq (1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}(n-2) = (1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}(n-2)(1-x^2)$$

$$\leq (n-2)(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}(1+\gamma x^2)$$

άρα
$$(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}3\gamma-(n-2)(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}(1+\gamma x^2)\leq 0,$$
δηλαδή $g'(x)\leq 0, \quad x\in[0,1]$.
Οπότε για $x>0$ ισχύει ότι $g(x)\leq g(0)$ δηλαδή $g(x)\leq 0$.
Συνεπώς, η συνθήκη $3\gamma\leq n-2$ είναι ικανή κι αναγκαία για να ισχύει η σχέση (2.3.1).

Θεώρημα 2.3.1 *Για* $u\in S^{n-1}$, *θέτουμε* $H(u)=\Big\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle = 0\Big\}$, $\Big((n-1)-$*διάστατος υπόχωρος του* $\mathbb{R}^n\Big)$. *Τότε για* $n\geq 4$ *ισχύει*
$$\sup_u |A_n(a,\beta)\cap H(u)|_{(n-1)} = 2w_{n-2}a^{n-2}\beta\max_{0\leq x\leq 1} f(x),$$
με $\gamma=\left(\frac{a}{\beta}\right)^2, \quad n\geq 4$.

Απόδειξη
Έστω $u=(u_1,\dots,u_n)\in S^{n-1}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_n\geq 0$.
Θέτουμε $\phi_0=arccot\big(\frac{a}{\beta}\big)$ και $\phi_u=\arccos u_n$.
Δηλαδή ϕ_0 είναι η μέγιστη γωνία που μπορεί να σχηματίζει κάποιος υπόχωρος $H(u_0)$ με τον $H(e_n)$, χωρίς να τέμνει τις βάσεις του κυλίνδρου, όπου $e_n=(0,\dots,0,1)$ και ϕ_u είναι η γωνία που σχηματίζει ο $H(u)$ με τον $H(e_n)$.
Μπορούμε έτσι να χωρίσουμε την απόδειξη σε δυο περιπτώσεις:

α.] $0\leq\phi_u\leq\phi_0$,
δηλαδή $\phi_u\leq arccot\Big(\frac{a}{\beta}\Big)$. Επειδή η συνεφαπτομένη είναι φθίνουσα συνάρτηση

στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, παίρνουμε ότι $\cot^2\phi_u\geq\left(\frac{a}{\beta}\right)^2$
ή $\cos^2\phi_u\geq\left(\frac{a}{\beta}\right)^2(1-\cos^2\phi_u)$
ή $\left(1+\frac{a^2}{\beta^2}\right)\cos^2\phi_u\geq\frac{a^2}{\beta^2}$
ή $\cos^2\phi_u\geq\frac{a^2}{a^2+\beta^2}$
ή $|u_n|^2\geq\frac{a^2}{a^2+\beta^2}$ ή $|u_n|\geq\frac{a}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$.

Έστω $P_n:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, η ορθογώνια προβολή στον $H(e_n)$.
Η προβολή της τομής του υπόχωρου $H(u)$ με τον κύλινδρο $A_n(a,\beta)$, στον $H(e_n)$ είναι μπάλα διάστασης $n-1$, με κέντρο το 0 κι ακτίνα a.
Δηλαδή,
$$P_n\big(A_n(a,\beta)\cap H(u)\big)=B_{n-1}(a)$$

$$= \Big\{ x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in H(e_n) : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq a^2 \Big\}.$$

Οπότε

$$|A_n(a,\beta) \cap H(u)|_{(n-1)} = \frac{1}{|\langle u, e_n \rangle|} |P_n\big(A_n(a,\beta) \cap H(u)\big)|_{(n-1)},$$

δηλαδή

$$|A_n(a,\beta) \cap H(u)|_{(n-1)} = \frac{1}{|\cos\phi_u|} w_{n-1} a^{n-1} = \frac{1}{|u_n|} w_{n-1} a^{n-1}.$$

Κι επειδή ισχύει ότι $|u_n| \geq \frac{a}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$, παίρνουμε ότι

$$|A_n(a,\beta) \cap H(u)|_{n-1} \leq w_{n-1} a^{n-2} \sqrt{a^2+\beta^2}$$

$$= 2w_{n-2} a^{n-2} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}} dt \sqrt{a^2+\beta^2} = 2w_{n-2} a^{n-2} \beta f(1), \qquad (2.3.2)$$

αφού $w_{n-1} = 2w_{n-2} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}} dt$ (σχέσεις (1.3.1) , (1.3.2)).
Έχουμε δηλαδή ότι στην περίπτωση που ο υπόχωρος $H(u)$ δεν τέμνει τις βάσεις του κυλίνδρου $A_n(a,\beta)$, $(\phi_u \leq \phi_0)$ ισχύει

$$|A_n(a,\beta) \cap H(u)|_{(n-1)} \leq 2w_{n-2} a^{n-2} \beta f(1).$$

Και αν $\phi_u = \phi_0$, δηλαδή $|u_n| = \frac{a}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$, έχουμε ισότητα.

β.] $\phi_0 \leq \phi_u \leq \frac{\pi}{2}$,
δηλαδή $arccot\big(\frac{a}{\beta}\big) \leq \phi_u$ άρα $\frac{a}{\beta} \geq \cot\phi_u > 0$ άρα $\frac{a^2}{\beta^2} \geq \cot^2\phi_u$.

Θεωρούμε το $v = \frac{1}{\sqrt{1-u_n^2}}(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0) \in S^{n-1}$ και την ορθογώνια προβολή $P_v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ στον υπόχωρο $H(v)$.
Για $|t| \leq \beta$, ορίζουμε

$$\Big[P_v\Big(A_n(a,\beta) \cap H(u)\Big)\Big]_t := P_v\Big(A_n(a,\beta) \cap H(u)\Big) \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = t\big\}.$$

Έστω $x \in A_n(a,\beta) \cap H(u),\ x_n = t$ και $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2 = d^2 \leq a^2$.
Παρατηρώντας το σχήμα μπορούμε να δούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$P_v(x) = x - \langle x, v\rangle\, v\ , \qquad P_v(x) = x + (t\cot\phi_u)v$$

και

$$|P_v(x) - te_n|^2 = d^2 - t^2\cot\phi_u^2.$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$P_v(x) - te_n \in [v, te_n]^{\perp}.$$

Τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να τις πάρουμε κι ως εξής
Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$ του $(n-2)-$διάστατου υπόχωρου $H := H(u) \cap H(e_n) \subseteq H(v)$. Τότε, τα $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}, v, e_n$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, αφού είναι μοναδιαία κι επιπλέον καθε ένα από τα $f_i,\ i = 1, \ldots, n-2$ είναι κάθετο στο $e_n,\ (f_i \in H(e_n),\ i = 1, \ldots, n-2)$, το v είναι κάθετο στον H $\Big(H \subseteq H(v)\Big)$ και το v είναι κάθετο στο $e_n,\ (v_n = 0)$.

Άρα υπάρχουν $a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$ τ.ω.

$$x = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_{n-2} f_{n-2} + a_{n-1} v + a_n e_n$$

και τότε,

$$P_v(x) = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_{n-2} f_{n-2} + a_n e_n,$$

οπότε

$$x - P_v(x) = a_{n-1} v$$

Και

$$\langle x, v \rangle = a_1 \langle f_1, v \rangle + a_2 \langle f_2, v \rangle + \cdots + a_{n-2} \langle f_{n-2}, v \rangle + a_{n-1} + a_n \langle e_n, v \rangle = a_{n-1}$$

άρα

$$\langle x, v \rangle v = a_{n-1} v$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι

$$P_v(x) = x - \langle x, v \rangle v.$$

Για την δεύτερη σχέση τώρα, γράφουμε $v = \frac{u - u_n e_n}{|u - u_n e_n|}$. Από την πρώτη σχέση έχουμε ότι $x - P_v(x) = \langle x, v \rangle v$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\langle x, v \rangle v = -(t \cot \phi_u) v$. Ισχύει ότι

$$\langle x, v \rangle = \frac{1}{|u - u_n e_n|} \langle x, u - u_n e_n \rangle = -\frac{u_n}{|u - u_n e_n|} \langle x, e_n \rangle$$

$$= -\frac{t u_n}{\sqrt{1 - u_n^2}} = -\frac{t \cos \phi_u}{\sqrt{1 - u_n^2}} = -t \cot \phi_u$$

άρα

$$\langle x, v \rangle v = -(t \cot \phi_u) v,$$

αφού

$$\langle x, u \rangle = 0, \quad \langle x, e_n \rangle = t, \quad \cos \phi_u = \langle e_n, u \rangle = u_n.$$

Η τρίτη σχέση $|P_v(x) - t e_n|^2 = d^2 - t^2 \cot \phi_u^2$ προκύπτει άμεσα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ενώ το διάνυσμα $P_v(x) - t e_n$ ανήκει εξ ορισμού του στον κάθετο υπόχωρο του υποχώρου που παράγουν τα διανύσματα v και $t e_n$.

Συνεχίζοντας τον προηγούμενο συλλογισμό, αν πάρουμε ένα y κάθετο στο v, δηλαδή $\langle y, v \rangle = 0$, με $y_n = t,\ |t| \leq \beta$ και $|y - t e_n|^2 = d^2 - t^2 \cot \phi_u^2$, όπου $0 \leq d \leq a$ και θέσουμε $x = y - (t \cot \phi_u) v$ έχουμε $x_n = t$, αφού $v_n = 0$. Επιπλέον

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \Big(y_i - (t \cot \phi_u) v_i \Big)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i v_i (t\cot\phi_u) + t^2\cot^2\phi_u \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2. \tag{2.3.3}$$

Αφού $|y-te_n|^2 = d^2 - t^2\cot\phi_u^2$ και $y - te_n = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, 0)$, έχουμε ότι $\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i^2 = d^2 - t^2\cot\phi_u^2$.

Επιπλέον $\langle y, v\rangle = 0$, οπότε $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i v_i$ και τέλος $u \in S^{n-1}$. Συνεπώς η σχέση (2.3.3) γίνεται

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = d^2 - t^2\cot\phi_u^2 + t^2\cot\phi_u^2 = d^2 \leq a^2.$$

Άρα $x \in A_n(a,\beta)$. Επίσης

$$\langle x, u\rangle = \langle y - (t\cot\phi_u)v, |u - u_n e_n| v + u_n e_n\rangle$$

$$= -t\cot\phi_u |u - u_n e_n| + t u_n = 0.$$

Άρα $x \in A_n(a,\beta) \cap H(u)$. Τέλος ισχύει

$$P_v(x) = P_v(y) - (t\cot\phi_u)P_v(v) = P_v(y) = y$$

αφού $\langle y, v\rangle = 0$.
Δηλαδή, για κάθε t, με $|t| \leq \beta$, αν $x \in A_n(a,\beta) \cap H(u)$ με $x_n = t$, τότε η προβολή $P_v(x)$ στον $H(v)$ ανήκει στον αφφινικό υπόχωρο $te_n + [v, te_n]^\perp$. Αντίστροφα, κάθε σημείο της τομής του αφφινικού υποχώρου $te_n + [v, te_n]^\perp$ με το $A_n(a,\beta)$ είναι προβολή μέσω της P_v ακριβώς ενός σημείου του $A_n(a,\beta) \cap H(u)$. (Ο περιορισμός της P_v στον $H(v)$ είναι 1-1, αφού $v \neq H(u)$.) Τα σημεία της τομής του $te_n + [v, te_n]^\perp$ με το $A_n(a,\beta) \cap H(u)$ είναι ακριβώς εκείνα τα σημεία αυτού του αφφινικού υποχώρου, των οποίων η απόσταση απο το te_n είναι μικρότερη ή ίση απο $a^2 - t^2\cot^2\phi_u$, οπότε όλα αυτά τα σημεία αποτελούν μια $(n-2)-$διάστατη μπάλα ακτίνας $(a^2 - t^2\cot^2\phi_u)^{1/2}$ $H(v)$.
Έτσι το σύνολο

$$\Big[P_v\big(A_n(a,\beta) \cap H(u)\big)\Big]_t = P_v\big(A_n(a,\beta) \cap H(u)\big) \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = t\big\}$$

είναι ακριβώς μια $(n-2)-$διάστατη μπάλα με κέντρο το te_n και ακτίνα $(a^2 - t^2\cot^2\phi_u)^{1/2}$ στον αφφινικό υπόχωρο $te_n + [v, te_n]^\perp$. Οπότε

$$|P_v\big(A_n(a,\beta) \cap H(u)\big)|_{(n-1)} = w_{n-2}\int_{-\beta}^{\beta} (a^2 - t^2\cot^2\phi_u)^{\frac{n-2}{2}}\, dt.$$

Κι επειδή

$$|A_n(a,\beta)\cap H(u)|_{(n-1)} = \frac{1}{|\langle u,v\rangle|}|P_v\big(A_n(a,\beta)\cap H(u)\big)|_{(n-1)}$$

και $|\cos(\widehat{u,v})| = \sin\phi_u$, έχουμε ότι

$$|A_n(a,\beta)\cap H(u)|_{(n-1)} = \frac{1}{\sin\phi_u} w_{n-2}\int_{-\beta}^{\beta}(a^2 - t^2\cot^2\phi_u)^{\frac{n-2}{2}}dt$$

$$= \sqrt{1+\cot^2\phi_u}\, w_{n-2}\int_{-\beta}^{\beta}(a^2 - t^2\cot^2\phi_u)^{\frac{n-2}{2}}dt.$$

Θέτοντας $\cot\phi_u = \frac{a}{\beta}x$ έχουμε ότι $x\in[0,1]$ αφού $0\leq\cot\phi_u\leq\frac{a}{\beta}$ και

$$|A_n(a,\beta)\cap H(u)|_{(n-1)} = w_{n-2}\sqrt{1+\frac{a^2}{\beta^2}x^2}\int_{-\beta}^{\beta}(a^2 - \frac{a^2}{\beta^2}x^2t^2)^{\frac{n-2}{2}}dt$$

$$= w_{n-2}a^{n-2}\sqrt{1+\gamma x^2}\int_{-\beta}^{\beta}(1-\frac{1}{\beta^2}x^2t^2)^{\frac{n-2}{2}}dt$$

και με αλλαγή μεταβλητής $\frac{1}{\beta}t = s$

$$= w_{n-2}a^{n-2}\beta\sqrt{1+\gamma x^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2s^2)^{\frac{n-2}{2}}ds$$

οπότε καταλήγουμε στην σχέση

$$|A_n(a,\beta)\cap H(u)|_{(n-1)} = 2w_{n-2}a^{n-2}\beta f(x^2). \tag{2.3.4}$$

Όταν η γωνία ϕ_u παίρνει τις τιμές μεταξύ ϕ_0 και $\frac{\pi}{2}$, το $x = \frac{\beta}{a}\cot\phi_u$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ 0 και 1, άρα το ίδιο ισχύει και για το x^2. Η σχέση (2.3.4) δείχνει δηλαδή οτι

$$\sup_{\phi_0\leq\phi_u\leq\pi/2}|A_n(a,\beta)\cap H(u)|_{(n-1)} = 2w_{n-2}a^{n-2}\beta\max_{0\leq x\leq 1}f(x),$$

λαμβάνοντας υπ΄ οψιν και την σχέση (2.3.2) παίρνουμε το θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.2 *Αν $n\geq 7$ μπορούμε να διαλέξουμε $a,\beta>0$ τέτοια ώστε για τον κύλινδρο*

$$A_n(a,\beta) = \Big\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ \sum_{i=1}^{n-1}x_i^2\leq a^2,\ |x_n|\leq\beta\Big\},$$

να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

i. $|A_n(a,\beta)|_{(n)} = w_n$

ii. $\forall\ u \in S^{n-1},\ |A_n(a,\beta) \cap H(u)|_{(n-1)} < w_{n-1}$.

Απόδειξη

Θα δείξουμε αρχικά το θεώρημα για την περίπτωση όπου $n = 7$.
Θέλουμε να βρούμε $a, \beta > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $A_7 = w_7$.
O $n-$διάστατος όγκος του $A_n(a,\beta)$ είναι

$$|A_n(a,\beta)|_{(n)} = 2w_{n-1}a^{n-1}\beta \tag{2.3.5}$$

Θέλουμε δηλαδή

$$2w_6a^6\beta = w_7 \tag{2.3.6}$$

και επιπλέον για την $(ii.)$ θέλουμε

$$\sup_{u\in S^{n-1}} |A_7(a,\beta) \cap H(u)|_{(6)} = 2w_5a^5\beta \max_{0\leq x\leq 1} \sqrt{1+\gamma x}\int_0^1 (1-xt^2)^{\frac{5}{2}}dt < w_6.$$

Αν ισχύει η σχέση (2.3.6) έχουμε ότι

$$\beta = \frac{w_7}{2w_6a^6} = \frac{I_7}{2a^6},$$

αφού, όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο, ισχύει ότι $I_n = \frac{w_n}{w_{n-1}}$, με $I_n = 2\int_0^1(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}dt$ (σχέσεις (1.3.1), (1.3.2)). Οπότε $\gamma = \frac{a^2}{\beta^2} = \left(\frac{2a^7}{I_7}\right)^2$, άρα

$$\gamma = \frac{4a^{14}}{I_7^2} \tag{2.3.7}$$

και

$$\frac{2w_5a^5\beta}{w_6} = \frac{2a^5I_7}{I_6 2a^6} = \frac{I_7}{I_6}\frac{1}{a}.$$

Οπότε από την σχέση (2.3.7) έχουμε

$$\frac{2w_5a^5\beta}{w_6} = \frac{I_7}{I_6}\Big(\frac{2}{I_7}\Big)^{1/7}\frac{1}{\gamma^{1/14}}.$$

Θέλουμε λοιπόν να βρούμε $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{I_7}{I_6}\Big(\frac{2}{I_7}\Big)^{1/7}\frac{1}{\gamma^{1/14}} \max_{0\leq x\leq 1} \sqrt{1+\gamma x}\int_0^1 (1-xt^2)^{\frac{5}{2}} < 1.$$

Ισχύει ότι

$$(1-xt^2)^{\frac{5}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5/2}{k} (-1)^k x^k t^{2k} \leq 1 - \frac{5}{2}xt^2 + \frac{15}{8}x^2t^4$$

γιατί οι υπόλοιποι όροι είναι αρνητικοί.
Έτσι

$$\int_0^1 (1-xt^2)^{\frac{5}{2}} dt \leq \int_0^1 \Big(1 - \frac{5}{2}xt^2 + \frac{15}{8}x^2t^4\Big) dt = 1 - \frac{5}{6}x + \frac{3}{8}x^2.$$

Ορίζουμε

$$f_\gamma(x) = \sqrt{1+\gamma x}\Big(1 - \frac{5}{6}x + \frac{3}{8}x^2).$$

Θα υπολογίσουμε το γ έτσι ώστε να ισχύει

$$\frac{I_7}{I_6}\Big(\frac{2}{I_7}\Big)^{1/7} \frac{1}{\gamma^{1/14}} \max_{0 \leq x \leq 1} f_\gamma(x) < 1 \tag{2.3.8}$$

Είναι φανερό οτι αν καθορισθεί το γ, υπάρχουν $a, \beta > 0$, με $\gamma = \left(\frac{a}{\beta}\right)^2$, ώστε να ικανοποιείται η σχέση (2.3.6).
Στην Πρόταση 2.3.1 είδαμε ότι η f είναι φθίνουσα στο [0,1] με μέγιστη τιμή στο 0, το 1, ανν $\gamma \leq \frac{n-2}{3}$. Στην περίπτωση που $n = 7$, η συνθήκη αυτή είναι $\gamma \leq \frac{5}{3}$. Θα επιλέξουμε το γ λίγο μεγαλύτερο από $\frac{5}{3}$ έτσι ώστε η f_γ να έχει μέγιστο κοντά στο 0 με τιμή λίγο μεγαλύτερη από 1.
Παραγωγίζουμε την f_γ και παίρνουμε

$$\begin{aligned} f'_\gamma(x) &= \frac{\gamma}{2\sqrt{1+\gamma x}}\Big(1 - \frac{5}{6}x + \frac{3}{8}x^2\Big) + \sqrt{1+\gamma x}\Big(-\frac{5}{6} + \frac{3}{4}x\Big) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma x}}\Big(\frac{15}{8}\gamma x^2 - \frac{15}{6}\gamma x + \frac{3}{2}x + \gamma - \frac{5}{3}\Big). \end{aligned}$$

Αν λοιπόν ζητάμε η f_γ να έχει μέγιστο στο $\frac{1}{20}$, θα πρέπει

$$f'_\gamma(\frac{1}{20}) = 0$$

ή

$$\frac{1}{2\sqrt{1+\gamma\frac{1}{20}}}\Big(\frac{15}{8}\gamma\frac{1}{400} - \frac{15}{6}\gamma\frac{1}{20} + \frac{3}{2}\frac{1}{20} + \gamma - \frac{5}{3}\Big) = 0$$

ή

$$\Big(\frac{3}{640} - \frac{1}{8} + 1\Big)\gamma = \frac{5}{3} - \frac{3}{40}$$

ή

$$\gamma = \frac{3056}{1689} \approx 1,8 > 1,666 \approx \frac{5}{3}.$$

Για την τιμή αυτή του γ, η f_γ έχει δύο μέγιστα κι ένα ελάχιστο. Μέγιστο η f_γ παρουσιάζει στα $x_1 = \frac{1}{20}$, $x_2 = 1$ κι ελάχιστο στο $x_3 = 0,841$. Με

$$f_\gamma(\frac{1}{20}) = \sqrt{1 + \frac{3056}{1689}\frac{1}{20}}(1 - \frac{5}{6}\frac{1}{20} + \frac{3}{8}\frac{1}{400}) = \sqrt{\frac{18418}{16890}\frac{9209}{9600}} \approx 1,0014 > 1,$$

$f_\gamma(1) \approx 0,9$ και $f_\gamma(0,841) \approx 0,897$.
Έτσι λοιπόν η σχέση (2.3.8) γίνεται

$$\frac{I_7}{I_6}\Big(\frac{2}{I_7}\Big)^{1/7}\frac{1}{\gamma^{1/14}}f_\gamma\Big(\frac{1}{20}\Big) =$$

$$\frac{512}{175\pi}\Big(\frac{35}{16}\Big)^{\frac{1}{7}}\Big(\frac{1689}{3056}\Big)^{\frac{1}{14}}\Big(\frac{18418}{16890}\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{9209}{9600} \approx 0,999998... < 1$$

Τώρα θα δείξουμε το θεώρημα για $n \geq 8$.
Θέλουμε να βρούμε $a, \beta > 0$ έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

i. $|A_n(a,\beta)|_{(n)} = w_n$

ii. $2w_{n-2}a^{n-2}\beta < w_{n-1}$

iii. $\gamma \leq \frac{n-2}{3}$

Από την σχέση (2.3.5) η $(i.)$ γράφεται

$$2w_{n-1}a^{n-1}\beta = w_n$$

ή

$$a^{n-1}\beta = \frac{w_n}{2w_{n-1}}.$$

Τότε η $(ii.)$ γίνεται

$$w_{n-2}\frac{1}{a}\frac{w_n}{w_{n-1}} < w_{n-1}$$

ή

$$a > \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \tag{2.3.9}$$

και η $(iii.)$

$$\gamma = \Big(\frac{a}{\beta}\Big)^2 = \Big(\frac{2w_{n-1}a^n}{w_n}\Big)^2 \leq \frac{n-2}{3} \tag{2.3.10}$$

Παίρνουμε

$$a = \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2}$$

και από την σχέση (1.3.2), η (2.3.10) γίνεται

$$\Big(\frac{2w_{n-1}}{w_n}\frac{w_n^n w_{n-2}^n}{w_{n-1}^{2n}}\Big)^2 = \Big(\frac{2w_n^{n-1}w_{n-2}^n}{w_{n-1}^{2n-1}}\Big)^2 \leq \frac{n-2}{3}$$

ή

$$\Big(\frac{2w_n^n w_{n-2}^n}{w_{n-1}^n w_{n-1}^n}\frac{w_{n-1}}{w_n}\Big)^2 \leq \frac{n-2}{3}$$

ή

$$\Big(2\frac{I_n^n}{I_{n-1}^n}\frac{1}{I_n}\Big)^2 \leq \frac{n-2}{3}$$

ή

$$\Big[2\Big(\frac{I_n}{I_{n-1}}\Big)^{n-1}\frac{1}{I_{n-1}}\Big]^2 \leq \frac{n-2}{3}$$

ή

$$2\Big(\frac{I_n}{I_{n-1}}\Big)^{n-1} \leq \sqrt{\frac{n-2}{3}}I_{n-1} \tag{2.3.11}$$

Για $n = 8$ η σχέση (2.3.11) αληθεύει διότι

$$2\Big(\frac{I_8}{I_7}\Big)^7 = 2\Big(\frac{w_8 w_6}{w_7^2}\Big)^7$$

$$= 2\Big(\frac{1225\pi}{4096}\Big)^7 \approx 1,29274... < 1,29299... = \sqrt{2}\frac{32}{35} = \sqrt{2}\frac{w_7}{w_6} = \sqrt{2}I_7.$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$p_n = \Big(\frac{I_n}{I_{n-1}}\Big)^{n-1}, \qquad s_n = \sqrt{\frac{n-2}{3}}I_{n-1}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$2p_n \leq s_n,$$

για $n \geq 8$.

α.]Η $\{p_n\}$ είναι φθίνουσα.

Απόδειξη
Θέτουμε

$$y_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)^n}{\left(\frac{I_n}{I_{n-1}}\right)^{n-1}} = \frac{I_{n+1}^n I_{n-1}^{n-1}}{I_n^{2n-1}}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.2.21), η $\{y_n\}$ παίρνει την μορφή

$$y_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{I_{n-1}^{2n-1}}{I_n^{2n-1}}.$$

Θέλουμε να ισχύει $y_n \leq 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$y_n^{\frac{1}{2n-1}} = \frac{I_{n-1}}{I_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n-1}} \leq 1$$

Η ακολουθία $\{I_n\}$ είναι φθίνουσα (βλ. παραγραφο 1.3) οπότε

$$1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1},$$

οπότε

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n-1}} \leq y_n^{\frac{1}{2n-1}} \leq \frac{n}{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n-1}}$$

Άρα

$$y_n^{\frac{1}{2n-1}} \longrightarrow 1,$$

καθώς $n \longrightarrow +\infty$, αφού

$$\lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n-1}} = \lim_n \frac{n}{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n-1}} = 1$$

Θέτουμε $z_n := y_n^{\frac{1}{2n-1}}$.
Μένει να δείξουμε ότι για $n \geq 3,\ z_{n-2} < z_n$, γιατί τότε θα έχουμε ότι $z_n = y_n^{\frac{1}{2n-1}} < 1$, οπότε η $\{p_n\}$ θα είναι φθίνουσα.
Θέλουμε λοιπόν

$$\frac{I_{n-3}}{I_{n-2}}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2n-5}} < \frac{I_{n-1}}{I_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n-1}}$$

ή

$$\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2n-5}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2n-1}} < \frac{I_{n-1}}{I_n}\frac{I_{n-2}}{I_{n-3}}$$

ή

$$\Big(\frac{n-2}{n-1}\Big)^{\frac{n-2}{2n-5}}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} < \frac{n-2}{n-1}\frac{n}{n-1}$$

ή

$$\frac{n-1}{n-2}\Big(\frac{n-2}{n-1}\Big)^{\frac{n-2}{2n-5}}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} < \frac{n}{n-1}$$

ή

$$\Big(\frac{n-1}{n-2}\Big)^{\frac{n-3}{2n-5}}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{\frac{n}{2n-1}} < \frac{n}{n-1},$$

το οποίο ισχύει (σχέση (2.2.17)).

β.]Η $\{s_n\}$ είναι αύξουσα.

Απόδειξη
Ορίζουμε $t_n = \sqrt{n} I_n$. Τότε

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\frac{I_{n+1}}{I_n} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{I_{n+1}}{I_n} \longrightarrow 1,\ n \longrightarrow +\infty,$$

(σχέσεις (2.2.23), (2.2.24)).
Παίρνουμε το πηλίκο

$$\frac{\frac{t_{n+3}}{t_{n+2}}}{\frac{t_{n+1}}{t_n}} = \frac{t_{n+3}t_n}{t_{n+2}t_{n+1}} = \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}\frac{I_{n+3}}{I_{n+1}}\frac{I_n}{I_{n+2}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}\Big(\frac{n+2}{n+3}\Big)\Big(\frac{n+2}{n+1}\Big) = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}\frac{n+2}{n+1},$$

από όπου με στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε ότι

$$\frac{\frac{t_{n+3}}{t_{n+2}}}{\frac{t_{n+1}}{t_n}} < 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι, έχουμε οτι $x_n := \frac{t_{n+1}}{t_n} \longrightarrow 1,\ n \longrightarrow +\infty$, και $x_{n+2} < x_n$. Συνεπώς $x_n > 1$ για κάθε n. Οπότε η $\{t_n\}$ είναι αύξουσα κι έτσι για την $s_n = \sqrt{\frac{n-2}{3}} I_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{n-2}{n-1}} t_{n-1}$, θα έχουμε

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\sqrt{\frac{n-1}{n}}t_n}{\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}t_{n-1}} = \sqrt{\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}}\frac{t_n}{t_{n-1}} > 1,$$

αφού $(n-1)^2 > n(n-2)$.
Παίρνουμε δηλαδή ότι η $\{s_n\}$ είναι αύξουσα.

Συνοψίζοντας, παίρνουμε ότι $2p_n \leq s_n$ για $n \geq 8$, οπότε ισχύει η σχέση (2.3.11) και μάλιστα ισχυρότερα έχουμε ότι για κάθε $n \geq 8$

$$2\Big(\frac{I_n}{I_{n-1}}\Big)^{n-1} < \sqrt{\frac{n-2}{3}} I_{n-1}.$$

Έχοντας δηλαδή επιλέξει $a = \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2}$ παίρνουμε ότι ισχύει με γνήσια ανισότητα

$$\gamma = \Big(\frac{2w_{n-1}a^n}{w_n}\Big)^2 < \frac{n-2}{3}.$$

Αν τώρα διαλέξουμε λίγο μεγαλύτερο a, θα ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις (2.3.9) και (2.3.10). Κι έτσι έχοντας επιλέξει το a μπορούμε με την βοήθεια της (i) να πάρουμε και το κατάλληλο β.

2.4 Αντιπαράδειγμα για $n = 5, 6$

Θεωρούμε σύνολο

$$A = \big\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ |x_n| \leq \varphi\big(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\big),$$

όπου η φ είναι (μη σταθερή) φθίνουσα και κοίλη συνάρτηση. Αν $t = r(\theta)\cos\theta,\ s = r(\theta)\sin\theta,\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, τότε η $r(\theta)$ είναι συνεχής συνάρτηση του θ.

Επειδή η φ είναι φθίνουσα, κοίλη, είναι μη αρνητική μόνο σε ένα φραγμένο διάστημα. Άρα το A είναι φραγμένο. Είναι κλειστό λόγω της συνέχειας της φ και κυρτό λόγω του ότι η φ είναι κοίλη και φθίνουσα.

Μπορούμε να ελεγξουμε ότι το A είναι κυρτό ως εξής:
Έστω $x, y \in A,\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$ και $t \in [0, 1]$. Πρέπει

$$tx + (1-t)y \in A$$

Ισχύει $|x_n| \leq \varphi\big(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\big)$, και $|y_n| \leq \varphi\big(\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2}\big)$.
Θέλουμε

$$|tx_n + (1-t)y_n| \leq \varphi\Big(\sqrt{\big(tx_1 + (1-t)y_1\big)^2 + \cdots + \big(tx_{n-1} + (1-t)y_{n-1}\big)^2}\Big)$$

Ισχύει

$$|tx_n + (1-t)y_n| \leq t|x_n| + (1-t)y_n|$$

$$
\begin{aligned}
&\le t\varphi\big(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\big) + (1-t)\varphi\big(\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2}\big) \\
&\le \varphi\Big(t\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} + (1-t)\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2}\Big) \\
&= \varphi\Big(\sqrt{(tx_1)^2 + \cdots + (tx_{n-1})^2} + \sqrt{(1-t)^2 y_1^2 + \cdots + (1-t)^2 y_{n-1}^2}\Big) \\
&\le \varphi\Big(\sqrt{\big(tx_1 + (1-t)y_1\big)^2 + \cdots + \big(tx_{n-1} + (1-t)y_{n-1}\big)^2}\Big),
\end{aligned}
$$

αφού για την φ ισχύει $t\varphi(v) + (1-y)\varphi(u) \le \varphi\big(tv + (1-t)u\big)$, είναι φθίνουσα και

$$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} + \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2} \ge \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} + y_{n-1})^2}.$$

Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ δηλαδή $|x_n| \le \varphi\big(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\big)$.

Αφού $\varphi\big(r(\theta)\cos\theta\big) = r(\theta)\sin\theta$, με $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} = r(\theta)\cos\theta$, το A είναι η ένωση ενός συνόλου $(n-1)-$διάστατων μπαλών, που έχουν αντίστοιχες ακτίνες $r(\theta)\cos\theta$, κέντρα στο ύψος $r(\theta)\sin\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και άξονα συμμετρίας τον $\{x: \ x_n = 0\}^{\perp}$.

Το A είναι συμμετρικό ως προς τον υπόχωρο $\{x: \ x_n = 0\}$, οπότε ο όγκος του θα είναι

$$|A|_{(n)} = 2w_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta)^{n-1}\cos^{n-1}\theta d\big(r(\theta)\sin\theta\big)$$

(Η περιγραφή του όγκου του A με την βοήθεια του ολοκληρώματος προκύπτει με τρόπο ανάλογο με αυτόν του υπολογισμού της σφαιρικής επιφάνειας στο αντιπαράδειγμα για $n \ge 12$ στο βήμα 6, (παράγραφος 2.1)).
Έτσι,

$$|A|_{(n)} = 2w_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{n-1}(\theta)\cos^{n-1}(\theta)\big(r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta\big)d\theta$$

$$= 2w_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(r^{n-1}(\theta) r'(\theta) \cos^{n-1}(\theta) \sin\theta + r^n(\theta)\cos^n\theta\big) d\theta$$

$$= 2w_{n-1} \frac{1}{n} r^n(\theta) \cos^{n-1}\theta \sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-2w_{n-1} \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^n(\theta)\big(-(n-1)\cos^{n-2}\theta \sin^2\theta + \cos^{n-1}\theta\cos\theta\big) d\theta$$

$$+2w_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^n(\theta) \cos^n\theta d\theta$$

$$= 2w_{n-1} \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^n(\theta) \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta d\theta$$

$$-2w_{n-1} \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^n(\theta) \cos^n\theta d\theta + 2w_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^n(\theta)\cos^n\theta d\theta$$

$$= 2w_{n-1} \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^n(\theta) \cos^{n-2}\theta (1-\cos^2\theta) d\theta$$

$$+2w_{n-1} \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^n(\theta) \cos^n\theta d\theta$$

$$= 2w_{n-1} \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^n(\theta) \cos^{n-2}\theta d\theta.$$

Θεωρούμε τώρα έναν $(n-1)-$διάστατο υπόχωρο $L \subseteq \mathbb{R}^n$.
Αν ο υπόχωρος είναι ο $\{x \in \mathbb{R}^n : \ x_n = 0\}$, τότε ο όγκος της τομής του A με τον L θα είναι

$$|A \cap L|_{(n-1)} = w_{n-1} r^{n-1}(0).$$

Στην περίπτωση που ο L σχηματίζει γωνία $\theta > 0$ με τον $\{x \in \mathbb{R}^n : \ x_n = 0\}$, τότε η τομή του $A \cap L$ με κάθε υπερεπίπεδο
$\{x : \ x_n = a\}$, θα είναι μια $(n-2)-$
διάστατη μπάλα, αν $|a| \leq r(\theta)\sin\theta$,
(η τομή είναι κενή αν $|a| > r(\theta)\sin\theta$.)
Έστω ότι ο υπόχωρος $\{x : \ x_n = a\}$,
βρίσκεται σε ύψος $r(\phi)\sin\phi$, με $0 < \phi \leq \theta$. Τότε η απόσταση του $(0, \ldots, 0, a)$ από τα σημεία τομής του συνόρου του A με το $L \cap \{x_n = a\}$ είναι $r(\phi)\sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = r(\phi)\cos\phi$. Το κέντρο της $(n-2)-$διάστατης μπάλας θα βρίσκεται σε απόσταση $|a|\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$ από το $(0, \ldots, 0, a)$, δηλ. $r(\phi)\sin\phi\cot\theta$.

Συνεπώς η ακτίνα ρ της μπάλας θα είναι

$$\rho = \sqrt{r^2(\phi)\cos^2\phi - r^2(\phi)\sin^2\phi\cot^2\theta} = r(\phi)\sqrt{\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta},$$

οπότε ο όγκος του $A \cap L$, θα είναι

$$|A \cap L|_{(n-1)} = 2w_{n-2}\int_0^\theta r^{n-2}(\phi)\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-2}{2}} d\Big(\frac{r(\phi)\sin\phi}{\sin\theta}\Big)$$

$$= 2w_{n-2}r^{n-2}(\phi)\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-2}{2}}\frac{r(\phi)\sin\phi}{\sin\theta}\Big|_0^\theta$$

$$-2w_{n-2}\frac{1}{\sin\theta}\int_0^\theta r(\phi)\sin\phi\Big[(n-2)r^{n-3}(\phi)r'(\phi)\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$+r^{n-2}(\phi)\frac{n-2}{2}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\cdot$$

$$\big(-2\cos\phi\sin\phi - 2\sin\phi\cos\phi\cot^2\theta\big)\Big]d\phi$$

$$= -2w_{n-2}(n-2)\int_0^\theta r^{n-2}(\phi)r'(\phi)\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-2}{2}}d\phi$$

$$+2w_{n-2}(n-2)\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\sin\phi\cos\phi\frac{1}{\sin^2\theta}d\phi$$

$$= -2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}r^{n-1}(\phi)\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-2}{2}}\Big|_0^\theta$$

$$+2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\int_0^\theta \frac{r^{n-1}(\phi)}{\sin\theta}\Big[\cos\phi\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$+\sin\phi\big(-2\cos\phi\sin\phi - 2\sin\phi\cos\phi\cot^2\theta\big)\frac{n-2}{2}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\Big]d\phi$$

$$+2w_{n-2}(n-2)\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\sin\phi\cos\phi\frac{1}{\sin^2\theta}d\phi$$

$$= 2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-2}{2}}d\phi$$

$$-2w_{n-2}\frac{(n-2)^2}{n-1}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\sin\phi\cos\phi\frac{1}{\sin^2\theta}d\phi$$

$$+2w_{n-2}(n-2)\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\sin\phi\cos\phi\frac{1}{\sin^2\theta}d\phi$$

$$= 2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-2}{2}}d\phi$$

$$+2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\sin\phi\cos\phi\frac{1}{\sin^2\theta}d\phi$$

Θέτουμε

$$I = 2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi-\sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\sin\phi\cos\phi\frac{1}{\sin^2\theta}d\phi$$

κι έχουμε

$$|A\cap L|_{(n-1)} = 2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\cdot$$

$$\big(1-\sin^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)d\phi + I$$

$$= 2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\big(1-\frac{\sin^2\phi}{\sin^2\theta}\big)d\phi + I$$

$$= 2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}d\phi$$

$$-2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}\frac{\sin^2\phi}{\sin^2\theta}d\phi + I$$

$$= 2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\frac{1}{\sin\theta}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\frac{\cos^{n-3}\phi}{\cos^{n-4}\phi}\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}d\phi$$

$$= 2w_{n-2}\frac{n-2}{n-1}\frac{1}{\sin\theta}\int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\cos^{n-3}\phi\big(1-\tan^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}d\phi.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο $(n-1)-$διάστατος όγκος της τομης $A\cap L$ εξαρτάται από την γωνία θ που σχηματίζει ο υπόχωρος L με τον $\{x:\ x_n=0\}$.
Έτσι μπορούμε να θέσουμε

$$R(\theta) := \int_0^\theta r^{n-1}(\phi)\cos^{n-3}\phi\big(1-\tan^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{n-4}{2}}d\phi$$

Βλέπουμε λοιπόν οτι αν τα σώματα της μορφής του A τα περιγράφουμε με την βοήθεια της συνάρτησης $r(\theta),\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, όπως στην αρχή της παραγράφου, τότε ο όγκος τους δίνεται από την συνάρτηση $R(\theta)$.
Αν λοιπόν ζητάμε ένα αντιπαράδειγμα στο πρόβλημα, πρέπει να βρούμε δύο συναρτήσεις $r_1(\theta),\ r_2(\theta)$ έτσι ώστε

i. οι r_1, r_2 να είναι κατα τμήματα δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες

ii. η $r_i(\theta)\sin\theta$ να είναι φθίνουσα και κοίλη συνάρτηση του $r_i(\theta)\cos\theta,\ i = 1, 2$

iii. αν $\theta = 0,\ r_1(0) \leq r_2(0)$, ενώ για $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}],\ R_1(\theta) \leq R_2(\theta)$

iv. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} r_1^n(\theta)\cos^{n-2}\theta d\theta > \int_0^{\frac{\pi}{2}} r_2^n(\theta)\cos^{n-2}\theta d\theta$.

I.] Εξετάζουμε την περίπτωση όπου **n=6**.

Θέλουμε να βρούμε δύο συναρτήσεις $r_1(\theta),\ r_2(\theta)$ που να ικανοποιούν τις i.-iv.. Ειδικότερα, θα ισχύει $R_1(\theta) \leq R_2(\theta)$ και

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r_1^6(\theta)\cos^4\theta d\theta > \int_0^{\frac{\pi}{2}} r_2^6(\theta)\cos^4\theta d\theta,\ \theta \in (0, \frac{\pi}{2}].$$

Επομένως ζητάμε μια αρνητική μεταβολή της $R(\theta)$, η οποία να δίνει θετική μεταβολή για την ποσότητα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^6(\theta)\cos^4\theta d\theta.$$

Εδώ ισχύει ότι

$$R(\theta) = \int_0^{\theta} r^5(\phi)\cos^3\phi\Big(1 - \tan^2\phi\cot^2\theta\Big)d\phi$$

$$= \int_0^{\theta} r^5(\phi)\cos^5\phi\Big(1 - \tan^2\phi\cot^2\theta\Big)\frac{d\phi}{\cos^2\phi}$$

$$= \int_0^{\theta} r^5(\phi)\cos^5\phi\Big(1 - \tan^2\phi\cot^2\theta\Big)d\big(\tan\phi\big)$$

Θέτουμε $x = \tan\theta,\ y = \tan\phi,\ \varphi(y) = r(\phi)\cos\phi,\ f(y) = \varphi^5(y)$ και $F(x) = R(\theta)$. Τότε η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$F(x) = \int_0^x f(y)\big(1 - \frac{y^2}{x^2}\big)dy = \int_0^x f(y)dy - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(y)y^2dy.$$

Θέτουμε $g(x) := \int_0^x f(y)dy$ κι έχουμε

$$F(x) = g(x) - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(y)y^2dy$$

$$= g(x) - \frac{1}{x^2} g(x) x^2 + \frac{1}{x^2} \int_0^x g(y) 2y dy$$

$$= \frac{2}{x^2} \int_0^x g(y) y dy = \frac{2}{x^2} \int_0^x y \Big(\int_0^y f(t) dt \Big) dy$$

άρα

$$\frac{x^2}{2} F(x) = \int_0^x y \Big(\int_0^y f(t) dt \Big) dy$$

ή

$$\frac{d}{dx} \Big(\frac{x^2}{2} F(x) \Big) = x \int_0^x f(t) dt$$

ή

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \Big(\frac{x^2}{2} F(x) \Big) = \int_0^x f(t) dt$$

ή

$$\frac{d}{dx} \bigg(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \Big(\frac{x^2}{2} F(x) \Big) \bigg) = f(x) \tag{2.4.1}$$

Με τις αλλαγές μεταβλητών που έγιναν παραπάνω, οι συνθήκες που ζητάμε για τις $r(\theta),\ r(\theta) \sin\theta$ αλλαζουν μορφή. Αφού $\varphi(x) = r(\theta) \cos\theta$ παίρνουμε ότι

$$x\varphi(x) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} r(\theta) \cos\theta = r(\theta) \sin\theta.$$

Θέλουμε η $\varphi(x)$ να είναι κατα τμήματα δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και η $x\varphi(x)$ να είναι φθίνουσα και κοίλη συνάρτηση της $\varphi(x)$.
Εφαρμόζουμε επιπλέον το μετασχηματισμό $\varphi(x) = z$ δηλαδή $x = \varphi^{-1}(z)$. Έτσι ζητάμε η $z\varphi^{-1}(z)$ να είναι φθίνουσα και κοίλη συνάρτηση του z. Δηλαδή

$$0 \geq \frac{d}{dz} \big(z\varphi^{-1}(z) \big) = \varphi^{-1}(z) + z \big(\varphi^{-1}(z) \big)' = \varphi^{-1}(z) + z \frac{1}{\varphi'(x)}$$

$$= \frac{x\varphi'(x) + \varphi(x)}{\varphi'(x)} = x + \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}.$$

Αφού $x \geq 0,\ \varphi(x) \geq 0$, η σχέση αυτή μπορεί να ισχύει μόνο αν $\varphi'(x) < 0$ και σε αυτή τη περίπτωση είναι ισοδύναμη με την

$$x\varphi'(x) + \varphi(x) \geq 0 \tag{2.4.2}$$

Επιπλέον, η $z\varphi^{-1}(z)$ είναι κοίλη αν και μόνο αν

$$0 \geq \bigg(\varphi^{-1}(z) + z \Big(\varphi^{-1}(z) \Big)' \bigg)' = \Big(\varphi^{-1}(z) \Big)' + \bigg(\frac{z}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(z) \big)} \bigg)'$$

$$= \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(z)\big)} + \frac{\varphi'\big(\varphi^{-1}(z)\big) - z\Big(\varphi'\big(\varphi_{-1}(z)\big)\Big)'}{\Big[\varphi'\big(\varphi^{-1}(z)\big)\Big]^2}$$

$$= \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(z)\big)} + \frac{\varphi'\big(\varphi^{-1}(z)\big) - z\varphi''\big(\varphi^{-1}(z)\big)\big(\varphi^{-1}(z)\big)'}{\Big[\varphi'\big(\varphi^{-1}(z)\big)\Big]^2}$$

$$= \frac{1}{\varphi'(x)} + \frac{\varphi'(x) - \varphi(x)\varphi''(x)\frac{1}{\varphi'(x)}}{\big[\varphi'(x)\big]^2} = \frac{2\varphi'^2(x) - \varphi(x)\varphi''(x)}{\big[\varphi'(x)\big]^3}$$

ή ισοδύναμα

$$2\big[\varphi'(x)\big]^2 \geq \varphi(x)\varphi''(x) \tag{2.4.3}$$

αφού $\varphi'(x) \leq 0$. Άρα η (ii) ισοδυναμεί με τις σχέσεις

$$\varphi'(x) \leq 0, \quad x\varphi'(x) + \varphi(x) \geq 0, \quad 2\big(\varphi'(x)\big)^2 \geq \varphi(x)\varphi''(x).$$

Θεωρούμε μια μικρή αρνητική μεταβολή της $R(\theta)$, δηλαδή της $F(x)$. Τότε από την σχέση (2.4.1), έχουμε

$$\delta f(x) = \frac{d}{dx}\bigg(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2}{2}\big(F + \delta F\big)\Big)\bigg) - \frac{d}{dx}\bigg(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2}{2}\big(F(x)\big)\Big)\bigg)$$

και λόγω της γραμμικότητας των παραγώγων, παίρνουμε

$$\delta f(x) = \frac{d}{dx}\bigg(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2}{2}\delta F\Big)\bigg) \tag{2.4.4}$$

Θεωρούμε τώρα το $V := \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^6(\theta)\cos^4\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^6(\theta)\cos^6\theta d\big(\tan\theta\big)$ και με τους ίδιους μετασχηματισμούς όπως παραπάνω (για την $R(\theta)$), δηλαδή $x = \tan\theta,\ f(x) = r^5(\theta)\cos^5\theta$ παίρνουμε

$$V = \int_0^\infty f^{\frac{6}{5}}(x)dx$$

Τότε η αντίστοιχη μεταβολή του V θα είναι

$$\delta V = \int_0^\infty \big(f + \delta f\big)^{\frac{6}{5}}(x)dx - \int_0^\infty f^{\frac{6}{5}}(x)dx$$

$$= \int_0^\infty f^{\frac{6}{5}}(x)\Big(1 + \frac{\delta f}{f}\Big)^{\frac{6}{5}}dx - \int_0^\infty f^{\frac{6}{5}}(x)dx$$

$$= \int_0^\infty f^{\frac{6}{5}}(x)\Big(1 + \frac{6}{5}\frac{\delta f}{f} + O\Big((\frac{\delta f}{f})^2\Big)dx - \int_0^\infty f^{\frac{6}{5}}(x)dx$$
$$= \frac{6}{5}\int_0^\infty f^{\frac{6}{5}}\frac{\delta f}{f}dx + \int_0^\infty f^{\frac{6}{5}}(x)O\Big((\frac{\delta f}{f})^2\Big)dx$$
$$= \frac{6}{5}\int_0^\infty f^{\frac{1}{5}}\delta f dx + \int_0^\infty f^{\frac{6}{5}}O\Big((\frac{\delta f}{f})^2\Big)dx$$

Θα επιλέξουμε την δF έτσι ώστε αυτή (άρα και η δf) να μηδενίζεται έξω από ένα διάστημα (α, β) με $0 < \alpha < \beta < \infty$, στο οποίο οι ανισότητες που απαιτούμε για την φ είναι γνήσιες. Τότε, αν η δf επιλεγεί έτσι ώστε αυτή, η πρώτη και η δεύτερη παράγωγός της να είναι μικρές, οι ανισότητες θα εξακολουθούν να ισχύουν για την $\varphi + \delta\phi$. Τότε

$$\int_0^\infty f^{\frac{6}{5}}O\Big((\frac{\delta f}{f})^2\Big)dx = \int_\alpha^\beta f^{\frac{6}{5}}O\Big((\frac{\delta f}{f})^2\Big)dx = O\Big((\frac{\delta f}{f})^2\Big).$$

Έτσι,

$$\delta V = \frac{6}{5}\int_0^\infty f^{\frac{1}{5}}\delta f dx + O\Big((\frac{\delta f}{f})^2\Big) = \frac{6}{5}\int_0^\infty \varphi(x)\delta f dx + O\Big((\frac{\delta f}{f})^2\Big). \quad (2.4.5)$$

Θέλουμε $\delta V > 0$, οπότε αρκεί να ισχύει

$$\int_0^\infty \varphi\delta f > 0.$$

Γιατί τότε, αν επιλέξουμε τη μεταβολή $\lambda\delta f$ για αρκετά μικρό $\lambda > 0$, έχουμε

$$\delta V = \lambda\Big(\frac{6}{5}\int_0^\infty \varphi(x)\delta f dx + \lambda O\Big((\frac{\delta f}{f})^2\Big) > 0.$$

Από την σχέση (2.4.4), έχουμε

$$\int_0^\infty \varphi\delta f dx = \int_0^\infty \varphi\frac{d}{dx}\bigg(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2}{2}\delta F\Big)\bigg)dx$$
$$= \varphi(x)\frac{1}{x}\Big(\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{2}\delta F)\Big)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi'(x)\frac{1}{x}\Big(\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{2}\delta F)\Big)dx.$$

Ο πρώτος προσθετέος είναι 0, αφού η δF μηδενίζεται έξω από το (α, β). Οπότε

$$\int_0^\infty \varphi\delta f dx = -\varphi'(x)\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\delta F\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big(\frac{\varphi'}{x}\Big)'x^2\delta F dx.$$

Θέλουμε λοιπόν να βρούμε μια φ, η οποία να ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες (i), (ii) κι επιπλέον $\left(\frac{\varphi'}{x}\right)' < 0$, σε κάποιο διάστημα, ως υποδιάστημα του οποίου θα επιλέξουμε το (α, β). Γιατί τότε

$$\int_0^\infty \left(\frac{\varphi'}{x}\right)' x^2 \delta F dx = 2\int_0^\infty \varphi \delta f dx > 0,$$

κι έτσι τελικά από την σχέση (2.4.5) θα έχουμε ότι $\delta V > 0$.
Μια τέτοια φ είναι

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{3-\alpha}{2}, & 0 \le x \le \alpha \\ \frac{3-\alpha}{2} - \frac{(x-\alpha)^2}{2(1-\alpha)}, & \alpha \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, & 1 \le x \le +\infty, \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Με στοιχειώδεις πράξεις μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί όλες τις συνθήκες που χρειαζόμαστε. Το διάστημα (α, β) που αναφέρθηκε παραπάνω εδώ είναι το $(\alpha, 1)$.

II.] n=5
Εδώ έχουμε

$$R(\theta) = \int_0^\theta r^4(\phi)\cos^2\phi\big(1 - \tan^2\phi\cot^2\theta\big)^{\frac{1}{2}} d\phi,$$

ενώ ο $n-$διάστατος όγκος του σώματος θα είναι

$$\frac{8}{5} w_4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5(\theta)\cos^3\theta d\theta$$

Όπως στην περίπτωση $n = 6$, κάνουμε αλλαγή μεταβλητών $x = \tan\theta$, $y = \tan\phi$, $\varphi(y) = r(\phi)\cos\phi$, $f(y) = \varphi^4(y)$, $F(x) = R(\theta)$. Τότε

$$R(\theta) = \int_0^\theta r^4(\phi)\cos^4\phi\Big(1 - \tan^2\phi\cot^2\theta\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{d\phi}{\cos^2\phi}$$

άρα

$$F(x) = \int_0^x f(y)\big(1 - \frac{y^2}{x^2}\big)^{\frac{1}{2}} dy$$

ή

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{x}\big(x^2 - y^2\big)^{\frac{1}{2}} dy$$

ή
$$xF(x) = \int_0^x f(y)\big(x^2 - y^2\big)^{\frac{1}{2}} dy$$
ή
$$2xF(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{y}\big(x^2 - y^2\big)^{\frac{1}{2}} 2ydy$$
Θέτουμε $s = x^2,\ t = y^2,\ G(s) = 2xF(x), g(t) = \frac{1}{y}f(y)$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται
$$G(s) = \int_0^s g(t)(s-t)^{\frac{1}{2}} dt.$$
Παραγωγίζοντας έχουμε
$$G'(s) = g(s)\cdot 0 + \int_0^s g(t)\frac{dt}{2\sqrt{s-t}} \tag{2.4.6}$$
Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα
$$\pi f(0) = \int_0^s \frac{f(0)}{\sqrt{t}\sqrt{s-t}} dt$$
Αυτή ισχύει διότι αν πάρουμε το $\int_0^s \frac{dt}{\sqrt{t(s-t)}}$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x = \sqrt{t}$ θα πάρουμε
$$\int_0^s \frac{dt}{\sqrt{t(s-t)}} = 2\int_0^{\sqrt{s}} \frac{dx}{\sqrt{s-x^2}}$$
και αν $x = \sqrt{s}\cos y$
$$= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{s}\sin y}{\sqrt{s - s\cos^2 y}} dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \pi$$
Συνεπώς, $\pi f(0) = \int_0^s \frac{f(0)}{\sqrt{t}\sqrt{s-t}} dt$
Έτσι από την σχέση (2.4.6), έχουμε
$$2G'(s) - \pi f(0) = \int_0^s \frac{g(t)}{\sqrt{s-t}} dt - \int_0^s \frac{f(0)}{\sqrt{t}\sqrt{s-t}} dt$$
και άρα
$$2G'(s) - \pi f(0) = \int_0^s \big(g(t) - \frac{f(0)}{\sqrt{t}}\big)\frac{dt}{\sqrt{s-t}}. \tag{2.4.7}$$

Εφαρμόζουμε τώρα το τύπο αντιστροφης του Abel (βλ. Συμπληρωματικά) με $a = 0,\ b = 1,\ h(x) = 2G'(s) - \pi f(0)$ και $f(t) = g(t) - \frac{f(0)}{\sqrt{t}}$, οπότε η σχέση (2.4.7) μας δίνει

$$g(s) - \frac{f(0)}{\sqrt{s}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}\int_0^s \frac{1}{\sqrt{s-t}}\big(2G'(t) - \pi f(0)\big)'dt$$

άρα

$$g(s) - \frac{f(0)}{\sqrt{s}} = \frac{2}{\pi}\int_0^s \frac{G''(t)}{\sqrt{s-t}}dt. \tag{2.4.8}$$

Ανάλογα με παραπάνω, εφαρμόζουμε τις αλλαγές μεταβλητών $s = x^2,\ t = y^2,\ G(t) = 2yF(y)$, και $g(s) = \frac{1}{x}f(x)$ οπότε έχουμε οτι

$$G'(t) = 2\frac{d}{dt}\big(yF(y)\big) = 2\Big[\frac{1}{2y}F(y) + y\frac{dF(y)}{dy}\frac{dy}{dt}\Big] =$$

$$\frac{1}{y}\Big[F(y) + yF'(y)\Big] = \frac{1}{y}\Big(yF(y)\Big)'$$

και

$$G''(t) = \Big(\frac{1}{y}\big(yF(y)\big)'\Big)'\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2y}\Big(\frac{1}{y}\big(yF(y)\big)'\Big)'.$$

Έτσι η σχέση (2.4.8) παίρνει τη μορφή

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(0)}{x} = \frac{2}{\pi}\int_0^x \Big(\frac{1}{y}\big(yF(y)\big)'\Big)'\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

ή

$$f(x) - f(0) = \frac{2}{\pi}x\int_0^x \Big(\frac{1}{y}\big(yF(y)\big)'\Big)'\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

Όμοια με την περίπτωση n=6, θεωρούμε μια μικρή αρνητική μεταβολή της $F(y)$, η οποία μηδενίζεται έξω απο ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, \beta),\ 0 < \alpha < \beta < \infty$. Έτσι,

$$\delta f(x) = \big(f + \delta f\big)(x) - f(x)$$

$$= \frac{2}{\pi}x\int_0^x \Big(\frac{1}{y}\big(y(F+\delta F)\big)'\Big)'\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{2}{\pi}x\int_0^x \Big(\frac{1}{y}\big(yF\big)'\Big)'\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

το οποίο ισούται με

$$\frac{2}{\pi}x\int_0^x \Big(\frac{1}{y}\big(y\delta F\big)'\Big)'\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}. \tag{2.4.9}$$

Έτσι, αν $x > \sqrt{\beta}$

$$\delta f(x) = \frac{2}{\pi} x \int_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' \Big)' \big(x^2 - y^2 \big)^{-1/2} dy$$

$$= \frac{2}{\pi} x \int_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' \Big)' \frac{1}{x} \big(1 - \frac{y^2}{x^2} \big)^{-1/2} dy$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' \Big)' \Big(1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} + \frac{3}{8} \frac{y^4}{x^4} + O\big(\frac{y^6}{x^6} \big) \Big) dy$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \Big(\frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' \Big)' dy + \frac{3}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \Big(\frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' \Big)' \frac{y^4}{x^4} dy$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \Big(\frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' \Big)' \frac{y^2}{x^2} dy + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' \Big)' O\big(\frac{y^6}{x^6} \big) dy$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' \frac{y^2}{x^2} \Big|_0^{\infty} - + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \big(y \delta F \big)' \frac{1}{x^2} dy + \frac{3}{4\pi} \frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' \frac{y^4}{x^4} \Big|_0^{\infty}$$

$$- \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} \big(y \delta F \big)' \frac{y^2}{x^4} dy + \frac{2}{\pi} \frac{1}{y} \big(y \delta F \big)' O\big(\frac{y^6}{x^6} \big) \Big|_0^{\infty} - \frac{2 \cdot 6}{\pi} \int_0^{\infty} \big(y \delta F \big)' O\big(\frac{y^4}{x^6} \big) dy.$$

Για να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα της παραπάνω παράστασης (εφαρμοζόντας παραγοντική ολοκλήρωση) πρέπει να παρατηρήσουμε οτι $O\big(\frac{y^6}{x^6} \big) = \sum_{k=3}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \Big(- \frac{y^2}{x^2} \Big)^k$, οπότε η παράσταση γίνεται

$$- \frac{2}{\pi} y \delta F \frac{1}{x^2} \Big|_0^{\infty} - \frac{3}{\pi} y \delta F \frac{y^2}{x^4} \Big|_{y^2} x^4 + \frac{3 \cdot 2}{\pi} \int_0^{\infty} \delta F \frac{y^2}{x^4} dy$$

$$- \frac{12}{\pi} y \delta F \cdot O\big(\frac{y^4}{x^6} \big) \Big|_0^{\infty} + \frac{12 \cdot 4}{\pi} \int_0^{\infty} \delta F \cdot O\big(\frac{y^4}{x^6} \big) dy$$

$$= \frac{6}{\pi x^4} \int_0^{\infty} y^2 \delta F dy + \frac{48}{\pi} \int_0^{\infty} \delta F \cdot O\big(\frac{y^4}{x^6} \big) dy$$

Ισχύει οτι

$$\int_0^{\infty} \delta F \cdot O\big(\frac{y^4}{x^6} \big) dy = O\big(\frac{1}{x^6} \big),$$

αφού $\delta F \equiv 0$ έξω απο το διάστημα (α, β), οπότε

$$\int_0^{\infty} \delta F \cdot O\big(\frac{y^4}{x^6} \big) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \delta F \cdot O\big(\frac{y^4}{x^6} \big) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \delta F y^4 dy \cdot O\big(\frac{1}{x^6} \big) \tag{2.4.10}$$

Οπότε έχουμε οτι

$$\delta f(x) = \frac{6}{\pi x^4} \int_0^\infty y^2 \delta F dy + O\big(\frac{1}{x^6}\big) \tag{2.4.11}$$

Από την σχέση (2.4.10) έπεται οτι το $O\big(\frac{1}{x^6}\big)$ είναι μικρό, αν το δF είναι μικρό.

Παίρνουμε τώρα το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον τύπο του $n-$διάστατου όγκου του σώματος Α,

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5(\theta) \cos^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5(\theta)\cos^5\theta d(\tan\theta)$$

Με αλλαγή μεταβλητής $r^4\cos^4\theta = \varphi^4(x) = f(x),\ x = \tan\theta$, έχουμε

$$V = \int_0^\infty f^{\frac{5}{4}}(x)dx$$

Οπότε για την μεταβολή δV του όγκου, που αντιστοιχεί στην μεταβολή δf θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\delta V = \Big(V + \delta V\Big) - V &= \int_0^\infty \big(f + \delta f\big)^{\frac{5}{4}}(x)dx - \int_0^\infty f^{\frac{5}{4}}(x)dx \\
&= \int_0^\infty f^{\frac{5}{4}}(x)\Big(1 + \frac{\delta f}{f}\Big)^{\frac{5}{4}} dx - \int_0^\infty f^{\frac{5}{4}}(x)dx \\
&= \int_0^\infty f^{\frac{5}{4}}(x)\bigg(1 + \frac{5}{4}\frac{\delta f}{f} + O\Big(\big(\frac{\delta f}{f}\big)^2\Big)\bigg)dx - \int_0^\infty f^{\frac{5}{4}}(x)dx \\
&= \frac{5}{4}\int_0^\infty f^{\frac{5}{4}}\frac{\delta f}{f}dx + \int_0^\infty f^{\frac{5}{4}}(x) O\Big(\big(\frac{\delta f}{f}\big)^2\Big)dx \\
&= \frac{5}{4}\int_0^\infty f^{\frac{1}{4}}\delta f dx + \int_0^\infty f^{\frac{5}{4}}(x) O\Big(\big(\frac{\delta f}{f}\big)^2\Big)dx \\
&= \frac{5}{4}\int_0^\infty \varphi(x)\delta f dx + \int_0^\infty f^{\frac{5}{4}}(x) O\Big(\big(\frac{\delta f}{f}\big)^2\Big)dx
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Θέλουμε η ποσότητα $\frac{\delta f}{f}$ να είναι ομοιόμορφα μικρή στο $[0, +\infty)$, γιατί τότε το $O\Big(\big(\frac{\delta f}{f}\big)^2\Big)$ θα είναι ομοιόμορφα μικρό και έτσι το 2^o ολοκλήρωμα στην σχέση (2.4.12) θα είναι μικρό.

Η $\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta f}{\varphi^4}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $(0, +\infty)$, διότι η $x\varphi(x) = r(\theta)\sin\theta$ είναι φραγμένη απο κάτω καθώς $x \longrightarrow +\infty$.

Η τελευταία παρατήρηση προκύπτει απο την σχέση (2.4.11) από την οποία έχουμε

$$\Big|\frac{\delta f(x)}{f(x)}\Big| \leq \frac{6}{\pi x^4 \varphi^4(x)}\Big|\int_0^\infty y^2 \delta F dy\Big| + O(\frac{1}{x^6})\frac{1}{\varphi^4(x)} = O\Big(\frac{1}{x^4\varphi^4(x)}\Big).$$

Επιπλέον, από την (2.4.11) έχουμε οτι η $\frac{\delta f}{f}$ είναι και ομοιόμορφα μικρή, όταν η δF είναι μικρή.

Έχουμε πάρει λοιπόν μια μικρή αρνητική μεταβολή της F και θέλουμε να έχουμε θετική μεταβολή του $n-$διάστατου όγκου V. Από την σχέση (2.4.12) αρκεί να ισχύει οτι

$$\int_0^\infty \varphi \cdot \delta f > 0,$$

διότι, αν $\left|\frac{\delta f(x)}{f(x)}\right| < n$ τότε

$$\delta V = \frac{5}{4}\int_0^\infty \varphi(x)\delta f(x) dx + \int_0^\infty \varphi(x)\delta f \cdot O\Big(\frac{\delta f}{f}\Big)dx.$$

Ύστερα απο μια σειρά πράξεων, χρησιμοποιώντας την σχέση (2.4.9), το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^\infty \varphi \cdot \delta f dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \delta F y^2 \int_y^\infty \Big(\frac{\varphi'}{x}\Big)' \frac{dx}{\sqrt{x^2-y^2}} dy \tag{2.4.13}$$

Η απόδειξη της (2.4.13) βρίσκεται στην τελευταία παράγραφο (βλ. Συμπληρωματικά).

Για να έχουμε λοιπόν

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \delta F y^2 \int_y^\infty \Big(\frac{\varphi'}{x}\Big)' \frac{dx}{\sqrt{x^2-y^2}} dy > 0$$

αρκεί

$$\int_y^\infty \Big(\frac{\varphi'}{x}\Big)' \frac{dx}{\sqrt{x^2-y^2}} < 0,$$

αφού έχουμε θεωρήσει $\delta F < 0$. Μάλιστα αφού $\delta F \equiv 0$ έξω απο ένα υποδιάστημα του (α, β) αρκεί να ισχύει

$$\int_y^\infty \Big(\frac{\varphi'}{x}\Big)' \frac{dx}{\sqrt{x^2-y^2}} < 0,$$

για $y \ \in (\alpha, \beta)$.

Συνεπώς, πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλη συνάρτηση φ, ομοίως με την περίπτωση n=6, η οποία να ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες

i. οι $\varphi(x)$ και $x\varphi(x)$ να είναι συνεχέις στο $[0, +\infty)$

ii. $x\varphi' + \varphi \geq 0,\ 2(\varphi')^2 - \varphi \cdot \varphi'' \geq 0$ και $\varphi' \leq 0$

iii. $\int_y^\infty \left(\frac{\varphi'}{x}\right)' \frac{dx}{\sqrt{x^2-y^2}} < 0$, σε κάποιο διάστημα (α, β) με $0 < \alpha < \beta < \infty$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + d(1-\alpha)^2, & 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 + d(1-\alpha)^2 - d(x-\alpha)^2 & \alpha \leq x \leq 1 \\ \frac{c}{x} - \frac{c-1}{x^2}, & 1 \leq x \leq +\infty, \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

με $0 < \alpha < 1,\ 1 < c < 2$ και $d = \frac{2-c}{2(1-\alpha)}$.
Εύκολα μπορούμε να δούμε οτι οι φ και $x\varphi$ είναι συνεχείς. Για την (ii) παρατηρούμε οτι στο $[0, \alpha]$ ισχύει $\varphi(x) = 1 + d(1-\alpha)^2$, άρα οι συνθήκες που απαιτούνται είναι άμεσες, αφού $x\varphi' + \varphi = 1 + d(1-\alpha)^2 > 0,\ 2\big(\varphi'\big)^2 - \varphi \cdot \varphi'' = 0$ και $\varphi' = 0$.
Στο $[\alpha, 1]$ ισχύει

$$x\varphi' + \varphi = x\big(-2(x-\alpha)\big) + 1 + d(1-\alpha)^2 - d(x-\alpha)^2.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει παράγωγο την $-2d(3x - 2\alpha)$ η οποία είναι αρνητική στο διάστημα $[\alpha, 1]$. Άρα η συνάρτηση είναι φθίνουσα σε αυτό το διάστημα. Στο 1 παίρνει την τιμή $c - 1 > 0$ άρα είναι θετική στο $[\alpha, 1]$. Επιπλέον,

$$2\big(\varphi'\big)^2 - \varphi \cdot \varphi'' = 8d^2(x-\alpha)^2 + 2d\big(1 + d(1-\alpha)^2 - d(x-\alpha)^2\big) > 0,$$

αφού $1 - \alpha > x - \alpha > 0$. Επίσης, $\varphi'(x) = -2d(x-\alpha) \leq 0$.
Για $x > 1$,

$$x\varphi' + \varphi = x\big(-\frac{c}{x^2}\big) + x\frac{2(c-1)}{x^3} + \frac{c}{x} - \frac{c-1}{x^2} = \frac{c-1}{x^2} > 0,$$

$$2\big(\varphi'\big)^2 - \varphi \cdot \varphi'' =$$

$$2\Big(-\frac{c}{x^2} + \frac{2(c-1)}{x^3}\Big)^2 - \Big(\frac{c}{x} - \frac{c-1}{x^2}\Big)\Big(\frac{2c}{x^3} - \frac{6(c-1)}{x^4}\Big) = \frac{2(c-1)^2}{x^6} > 0$$

και

$$\varphi'(x) = -\frac{c}{x^2} + \frac{2(c-1)}{x^3} = \frac{2c - 2 - cx}{x^3} \leq 0,$$

αφού $x \geq 1 \geq \frac{2(c-1)}{c}$.
Τέλος, για $x = 1,\ \varphi'(1) = c - 2 < 0,\ \varphi(1) = 1.$

Έχοντας επιλέξει την φ πρέπει να εξετάσουμε αν ικανοποιείται η συνθήκη (ii). Από την σχέση (2.4.11) παίρνουμε οτι

$$\varphi + \delta\varphi = \big(f + \delta f\big)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \Big[\varphi^4 + \frac{6}{\pi x^4}\int_0^\infty y^2 \delta F dy + O\big(\frac{1}{x^6}\big)\Big]^{\frac{1}{4}}$$

ή

$$1 + \frac{\delta\varphi}{\varphi} = \Big[1 + \frac{6}{\pi x^4}\frac{1}{\varphi^4}\int_0^\infty y^2\delta F dy + \frac{1}{\varphi^4}O\big(\frac{1}{x^6}\big)\Big]^{\frac{1}{4}}$$

οπότε

$$\frac{\delta\varphi}{\varphi} = -\rho + \frac{k}{x} + O\big(\frac{1}{x^2}\big) = -\rho + \frac{k}{x} + T(x) \tag{2.4.14}$$

όπου

$$\rho = 1 - \Big\{1 + \frac{6}{\pi c^4}\int_0^\infty y^2\delta F dy\Big\}^{\frac{1}{4}}$$

$$k = \frac{6(c-1)}{\pi c^5}\int_0^\infty y^2 \delta F dy\Big\{1 + \frac{6}{\pi c^4}\int_0^\infty y^2\delta F dy\Big\}^{-\frac{3}{4}}.$$

Αφού $\delta F \leq 0$, ισχύει οτι $\int_0^\infty y^2\delta F dy < 0$, δηλαδή $1 > 1 + \frac{6}{\pi c^4}\int_0^\infty y^2\delta F dy$, οπότε $\rho > 0$, $k < 0$. Επιπλέον όταν δF είναι μικρό τότε και τα ρ, k, O είναι μικρά. Επίσης δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε οτι $T'(x) = O(\frac{1}{x^3})$, $T''(x) = O\big(\frac{1}{x^4}\big)$.
Έτσι με τη βοήθεια των παραπάνω και της σχέσης (2.4.14) παίρνουμε οτι

$$2\Big(\big(\varphi + \delta\varphi\big)'\Big)^2 - \big(\varphi + \delta\varphi\big)\big(\varphi + \delta\varphi\big)'' > 0$$

και

$$x\big(\varphi + \delta\varphi\big)' + \big(\varphi + \delta\varphi\big) > 0,$$

καθώς $x \longrightarrow +\infty$.
Συνεπώς, αν το δF είναι μικρό, η $\big(\varphi + \delta\varphi\big)$ ικανοποιεί την (ii).

Τώρα μένει να αποδείξουμε την συνθήκη (iii):
Θ' αποδείξουμε οτι $\int_\alpha^\infty \Big(\frac{\varphi'(x)}{x}\Big)' \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} < 0$, οπότε θα ισχύει η (iii) για ένα διάστημα που θα περιέχει το α. Ισχύει οτι

$$\int_\alpha^\infty \Big(\frac{\varphi'(x)}{x}\Big)' \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = -\int_\alpha^1 \frac{2\alpha d}{x^2\sqrt{x^2-\alpha^2}}dx + A$$

με αλλαγή μεταβλητής $x = \alpha t$ το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$-\frac{2d}{\alpha}\int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}dx + A,$$

όπου A είναι ο φραγμένος όρος $\int_1^\infty \left[\frac{3c}{x^4} - \frac{8(c-1)}{x^5}\right]\frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$.
Έτσι αν $\alpha \to 0^+$ παίρνουμε οτι η τελευταία ποσότητα $\longrightarrow -\infty$.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ

1. Μετασχηματισμός Abel

Αν για δύο συναρτήσεις u και v ισχύει ότι

$$u(s) = \int_0^s \frac{v(t)}{(s-t)^\alpha}dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

Τότε

$$\begin{aligned} v(s) &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^s \frac{u(t)}{(s-t)^{1-\alpha}}dt \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left[\int_0^s \frac{du}{dt}\frac{dt}{(s-t)^{1-\alpha}} + \frac{u(0)}{s^{1-\alpha}}\right] \end{aligned}$$

Για την απόδειξη της σχέσης (2.4.8) εφαρμόζουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό με $u(s) = 2G'(s) - \pi f(0),\ v(t) = g(t) - \frac{f(0)}{\sqrt{t}}$ και $\alpha = \frac{1}{2}$. Οπότε με απλές πράξεις η σχέση (2.4.7) μας δίνει ότι

$$g(s) - \frac{f(0)}{\sqrt{s}} = \frac{2}{\pi}\int_- ^s \frac{G''(t)}{\sqrt{s-t}}dt$$

(σχέση (2.4.8)), αφού $2G'(0) - \pi f(0)$.

2. Απόδειξη της σχέσης (2.4.13)

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \phi(x)\delta f(x)dx = \int_0^\infty x\phi(x)\int_0^x \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)'\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}dx$$

$$= \int_b^\infty \varphi(x)\int_0^b \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)'\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2}\Big)dydx$$

$$+\int_0^b \phi(x)\int_0^x \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)'\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}dydx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^b \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)' \int_b^\infty \varphi(x)\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2}\Big)dxdy \\
&\quad + \int_0^b \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)' \int_y^b \varphi(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy \\
&= \int_0^b \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)' \int_b^\infty \varphi(x)\Big(\sqrt{x^2-y^2} - x + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x}\Big)'dxdy \\
&\quad + \int_0^b \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)' \int_y^b \varphi(x)\big(\sqrt{x^2-y^2}\big)'dxdy \\
&= \int_0^b \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)' \Big\{-\varphi(b)\Big(\sqrt{b^2-y^2} - b + \frac{1}{2}\frac{y^2}{b}\Big) \\
&\quad - \int_b^\infty \varphi'(x)\Big(\sqrt{x^2-y^2} - x + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x}\Big)dx\Big\}dy \\
&\quad + \int_0^b \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)' \Big\{\varphi(b)\sqrt{b^2-y^2} - \int_y^b \varphi'(x)\sqrt{x^2-y^2}dx\Big\}dy \\
&= -\int_0^b \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)' \int_b^\infty \varphi'(x)\Big(\sqrt{x^2-y^2} - x + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x}\Big)dxdy \\
&\quad - \int_0^b \big(\frac{1}{y}(y\delta F)'\big)' \int_y^b \varphi'(x)\sqrt{x^2-y^2}dxdy \\
&= \int_0^b \frac{1}{y}(y\delta F)' \int_b^\infty \varphi'(x)\Big(-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{y}{x}\Big)dxdy \\
&\quad - \int_0^b \frac{1}{y}(y\delta F)' \int_y^b \varphi'(x)\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy \\
&= \int_0^b (y\delta F)' \int_b^\infty \frac{\varphi'(x)}{x}\Big(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\Big)dxdy \\
&\quad - \int_0^b (y\delta F)' \int_y^b \frac{\varphi'(x)}{x}\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy \\
&= \int_0^b (y\delta F)'\Big\{-\frac{\varphi'(b)}{b}(b - \sqrt{b^2-y^2}) - \int_b^\infty \big(\frac{\varphi'(x)}{x}\big)'(x - \sqrt{x^2-y^2})dx\Big\}dy \\
&\quad - \int_0^b (y\delta F)'\Big\{\frac{\varphi'(b)}{b}\sqrt{b^2-y^2} - \int_y^b \big(\frac{\varphi'(x)}{x}\big)'\sqrt{x^2-y^2}dx\Big\}dy \\
&= -\int_0^b (y\delta F)' \int_b^\infty \big(\frac{\varphi'(x)}{x}\big)'(x - \sqrt{x^2-y^2})dxdy
\end{aligned}
$$

Κεφάλαιο 3

Μια ενιαία λύση στο πρόβλημα

3.1 Χρήσιμες έννοιες

3.1.1 Ορισμοί

Σώμα ονομάζουμε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό, οπότε κυρτό σώμα ονομάζεται κάθε σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που είναι κυρτό. Θα υποθέτουμε ότι όλα τα κυρτά σώματα περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους. Το σύνολο των κυρτών σωμάτων με την Hausdorff τοπολογία θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{K}^n$, ενώ το σύνολο των κυρτών συμμετρικών σωμάτων με κέντρο συμμετρίας το 0 θα είναι το $\mathcal{K}^n_e$.

Συνάρτηση στήριξης ενός σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ ονομάζουμε τη συνάρτηση

$$h_K(x) = \max\{\langle x, u\rangle, u \in K\},\ x \ \in \ R^n.$$

Η συνάρτηση στήριξης καθορίζει το κυρτό σώμα K. Δηλαδή, αν K, L κυρτά σώματα και $h_k = h_L$, τότε $K = L$.
Πράγματι: Έστω οτι υπάρχει $u \ \in K$ με $u \ \notin L$. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει το u απο το L, δηλαδή υπάρχει $x \ \in \mathbb{R}^n$ με $\langle x, u\rangle > \max\{\langle x, v\rangle :$ $v \ \in L\}$. Άρα $h_K(x) > h_L(x)$.
Αν η συνάρτηση στήριξης ενός σώματος είναι άρτια, τότε το σώμα θα είναι συμμετρικό με κέντρο συμμετρίας το 0. Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής:

$$\begin{aligned} h_{-K}(x) &= \max\{\langle x, u\rangle, u \in -K\} = \max\{\langle x, u\rangle, -u \in K\} \\ &= \max\{\langle x, -u\rangle, u \in K\} = \max\{\langle -x, u\rangle, u \in K\} \\ &= h_K(-x) = h_K(x). \end{aligned}$$

Στο εξής θα γράφουμε 0-συμμετρικό εννοώντας οτι το σώμα είναι συμμετρικό με κέντρο το 0.

Ακτινική συνάρτηση ενός σώματος K ονομάζεται η συνάρτηση

$$\rho_K(u) = sup\{\lambda > 0, \lambda u \in K\}, \quad u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Για σώματα που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους η ακτινική συνάρτηση είναι θετική και ομογενής τάξης -1, δηλαδή

$$\rho_K(cx) = c^{-1}\rho_K(x), \; c > 0$$

Συμβολίζουμε με $C(S^{n-1})$ τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων πάνω στη S^{n-1}, ενώ $C_e^\infty(S^{n-1})$ θα είναι ο χώρος των άρτιων C^∞ συναρτήσεων που ορίζονται πάνω στην S^{n-1}, εφοδιασμένος με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης όλων των παραγώγων.

Τρία βασικά εργαλεία του κεφαλαίου αυτού είναι ο μετασχηματισμός Fourier, ο μετασχηματισμός Radon καθώς και ο σφαιρικός μετασχηματισμός Radon.

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{S}$ το σύνολο των test functions, το οποίο ορίζεται να είναι η κλάση των C^∞ συναρτήσεων ϕ στο $\mathbb{R}^n$ με τιμές στο $\mathbb{C}$, οι οποίες ‘‘φθίνουν πολύ γρήγορα στο άπειρο’’, ενώ με $\mathcal{S}'$ θα συμβολίζουμε το χώρο των κατανομών πάνω απο το $\mathcal{S}$.
Πιο συγκεκριμένα, ο χώρος $\mathcal{S}$ αποτελείται από τις συναρτήσεις των οποίων όλες οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν, είναι συνεχείς και για τις οποίες ισχύει

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta \phi)(x)| < \infty,$$

για όλες τις n-άδες $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ και $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ μη αρνητικών ακεραίων. Τα α, β ονομάζονται πολυδείκτες και ορίζονται, για $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ και $D^\beta = \partial^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}/\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\cdots\partial x_n^{\beta_n}$.

Το σύνολο $\mathcal{S}'$ όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών στο $\mathcal{S}$ αποτελεί τον χώρο των tempered κατανομών, όταν στο $\mathcal{S}$ θεωρούμε την τοπολογία που περιγράφουμε παρακάτω.

Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) απο n-άδες μη αρνητικών ακεραίων ορίζουμε την ημινόρμα $\rho_{\alpha\beta}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta \phi)(x)|$ στον $\mathcal{S}$ και την ημι-μετρική $d'_{\alpha\beta}(\phi, \psi) = \rho_{\alpha\beta}(\phi - \psi)$. Αν $d'_1, d'_2, \ldots$ είναι όλες οι ημι-μετρικές αυτής της μορφής, θεωρούμε την $d_n := \frac{d'_n}{1+d'_n}$, $\; n = 1, 2, \ldots$. Η d_n είναι μια ημι-μετρική, ισοδύναμη με την d'_n και επιπλέον $d_n \leq 1$. Η μετρική η οποία ορίζει την τοπολογία του $\mathcal{S}$, ορίζεται τότε να είναι η

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n.$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$ αν και μόνο αν $\phi_k \to \phi$ ως προς κάθε d_n, καθώς $k \to +\infty$. Έτσι, παίρνουμε ότι οι διανυσματικές πράξεις

$$\begin{aligned} (\phi, \psi) &\longrightarrow \phi + \psi \\ (\alpha, \phi) &\longrightarrow \alpha\phi, \ \ \alpha \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

είναι συνεχείς, οπότε ο χώρος $\big(\mathcal{S}, d\big)$ είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

Έχοντας ορίσει την τοπολογία του $\mathcal{S}$, μπορούμε να δούμε ότι
Ένα γραμμικό συναρτησοειδές L στον $\mathcal{S}$ είναι tempered κατανομή αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ και ακέραιοι αριθμοί m και l τ.ω.

$$|L(\phi)| \leq c \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha\beta}(\phi),$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$ ([S.W.], σελ.22).

Αν $f \in \mathcal{S}'$, $\phi \in \mathcal{S}$, χρησιμοποιούμε και το σύμβολο $\langle f, \phi \rangle$ αντί του $f(\phi)$.

Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ορίζεται ως εξής:

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i\xi \cdot x} d\xi.$$

Αν $\phi \in \mathcal{S}$, ισχύει και $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$. Αν $f \in \mathcal{S}'$, ο μετασχηματισμός Fourier $\hat{f}$ της κατανομής ορίζεται ως η κατανομή που δίνεται απο τον τύπο

$$\left\langle \hat{f}, \phi \right\rangle = \left\langle f, \hat{\phi} \right\rangle, \ \ \phi \in \mathcal{S}$$

Αν η $\phi \in \mathcal{S}$ είναι άρτια, τότε

$$(\hat{\phi})^\wedge = (2\pi)^n \phi$$

Αν ο q δεν είναι ακέραιος, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $|z|^q$, $z \in \mathbb{R}$, ισούται με ([G.V.] vol.1, σελ.173)

$$(|z|^q)^\wedge(t) = -2\Gamma(1+q) \sin \frac{q\pi}{2} |t|^{-q-1}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.1.1}$$

Μια κατανομή f ονομάζεται άρτια ομογενής τάξης $p \in \mathbb{R}$, αν

$$\left\langle f, \phi(\frac{\cdot}{t}) \right\rangle = |t|^{n+p} \langle f, \phi \rangle,$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$, $t \in \mathbb{R}$ με $t \neq 0$. Ο μετασχηματισμός Fourier μιας άρτιας ομογενούς κατανομής τάξης p είναι μια άρτια ομογενής κατανομή τάξης $-n-p$, ([D], σελ.154).

Μια κατανομή f λέγεται θετικά ορισμένη, αν για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$

$$\left\langle f, \phi * \widetilde{\phi} \right\rangle \geq 0,$$

όπου $\widetilde{\phi}(x) = \overline{\phi(-x)}$.
Μια κατανομή είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός tempered μέτρου στον $\mathbb{R}^n$, ([G.V.] vol.1, σελ.152).

Ένα μη αρνητικό μέτρο μ λέγεται tempered, αν για κάποιο $a > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|_2)^{-a} d\mu(x) < \infty.$$

Γενικά, κάθε θετική κατανομή f (δηλαδή τέτοια ώστε $\langle f, \phi \rangle \geq 0$ για κάθε μη αρνητική $\phi \in \mathcal{S}$) είναι ένα tempered μέτρο ([G.V.] vol.1, σελ.147).
Οπότε μια κατανομή θα είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν ο μετασχηματισμός Fourier της είναι μια θετική κατανομή.

Ο σφαιρικός μετασχηματισμός Radon είναι ένας φραγμένος τελεστής στο $C(S^{n-1})$, ο οποίος ορίζεται με τον τύπο

$$Rf(\xi) = \int_{S^{n-1} \cap \xi^\perp} f(x) dx, \ f \in C(S^{n-1}), \ \xi \in S^{n-1}.$$

Είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή για $f, g \in C(S^{n-1})$

$$\langle f, Rg \rangle = \langle Rf, g \rangle. \tag{3.1.2}$$

Την ιδιότητα αυτή του μετασχηματισμού μπορούμε να την δούμε ως εξής:
Αν $f, g \in C(S^{n-1})$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle f, Rg \rangle &= \int_{S^{n-1}} f(x) Rg(x) dx = \int_{S^{n-1}} f(x) \int_{S^{n-1} \cap x^\perp} g(\xi) d\xi dx \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1} \cap x^\perp} f(x) g(\xi) d\xi dx = \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1} \cap \xi^\perp} f(x) g(\xi) dx d\xi \\
&= \int_{S^{n-1}} g(\xi) \int_{S^{n-1} \cap \xi^\perp} f(x) dx d\xi = \int_{S^{n-1}} Rf(\xi) g(\xi) d\xi = \langle Rf, g \rangle.
\end{aligned}$$

Αν περιορίσουμε τον μετασχηματισμό στο $C_e^\infty(S^{n-1})$, τότε οι τιμές του R ανήκουν στον ίδιο χώρο και ο

$$R : C_e^\infty(S^{n-1}) \longrightarrow C_e^\infty(S^{n-1})$$

είναι συνεχής, 1-1 και επί, ([He], σελ.161).
Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_e(S^{n-1})$ τον χώρο των άρτιων κατανομών στην S^{n-1}.
Ο $\mathcal{D}_e(S^{n-1})$ είναι ο δυικός του $C_e^\infty(S^{n-1})$.
Ο R είναι συνεχής, 1-1 και επί απεικόνιση από το $C_e^\infty(S^{n-1})$ στο $C_e^\infty(S^{n-1})$, οπότε το ίδιο θα ισχύει και για τον ανάστροφό του R^*, ο οποίος αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό Radon για τις κατανομές

$$R^* : \mathcal{D}_e(S^{n-1}) \longmapsto \mathcal{D}_e(S^{n-1}).$$

Για τον R^* ισχύει το εξής:
Αν $F \in \mathcal{D}_e(S^{n-1})$, κατανομή που αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση $f \in C_e^\infty(S^{n-1})$, δηλαδή $F(g) = \int fg$, για κάθε $g \in C_\infty(S^{n-1})$, τότε ο σφαιρικός μετασχηματισμός Radon της κατανομής F θα είναι

$$R^*F(g) = F \circ R(g) = \int fRg = \int Rfg.$$

Μπορούμε συνεπώς να πούμε ότι ο R^* είναι επέκταση του R. Έτσι και για την περίπτωση του μετασχηματισμού Radon για κατανομές, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό R αντί του R^*.

Αν τώρα μ είναι ένα πεπερασμένο Borel μέτρο στην S^{n-1}, τότε ο σφαιρικός μετασχηματισμός Radon του μ ορίζεται ως το μέτρο $R\mu$ στην S^{n-1}, για το οποίο ισχύει

$$\langle R\mu, g\rangle = \langle \mu, Rg\rangle = \int_{S^{n-1}} Rg(\xi)d\mu(\xi),$$

για κάθε $g \in C(S^{n-1})$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο τύπος αυτός ορίζει μέτρο, αφού

$$\Big| \int_{S^{n-1}} Rf(\xi)d\mu(\xi)\Big| \leq \big\|Rf\big\|_\infty \mu(S^{n-1}) \leq c\|f\|_\infty.$$

Αφού ο R, είναι 1-1, επί και συνεχής απεικόνιση, το ίδιο ισχύει και για τον R^*, οπότε από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης προκύπτει ότι και ο $(R^*)^{-1}$ είναι μια 1-1, επί και συνεχής απεικόνιση από το $C_e^\infty(S^{n-1})$ στον εαυτό του. Οπότε ανάλογα μπορούμε να έχουμε τον αντίστροφο σφαιρικό μετασχηματισμό Radon και για την περίπτωση των κατανομών, τον οποίο συμβολίζουμε με R^{-1}.

Έτσι αν ν ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στην S^{n-1}, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Radon του ν, ορίζεται ως η κατανομή για την οποία ισχύει

$$R\big(R^{-1}\nu\big) = \nu.$$

Έχοντας ορίσει τους δύο μετασχηματισμούς, μπορούμε να δούμε και τις σχέσεις που τους συνδέουν.
Για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ και για κάθε άρτια $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, η συνάρτηση $t \longmapsto \hat{\phi}(t\xi), \quad t \in \mathbb{R}$, είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $z \longmapsto \int\limits_{\langle x,\xi\rangle = z} \phi(x)dx$, αφού

$$\hat{\phi}(t\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)e^{-it\xi\cdot x}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itz} \int\limits_{\langle \xi,x\rangle = z} \phi(x)dxdz \tag{3.1.3}$$

Όπως είδαμε και πιο πριν, αν $f \in \mathcal{S}'$, άρτια, τότε $(\hat{f})^{\wedge} = (2\pi)^n f$, οπότε ο μετασχηματισμός Fourier της κατανομής $t \longmapsto \hat{\phi}(t\xi)$ θα είναι ίσος με $2\pi \int\limits_{\langle \xi,x\rangle = z} \phi(x)dx$. Και αν $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ άρτια και $\hat{\phi}(t\xi) \in L^1(\mathbb{R})$, τότε

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(t\xi)e^{-itz}dt = 2\pi \int\limits_{\langle \xi,x\rangle = z} \phi(x)dx \tag{3.1.4}$$

Θεωρούμε τώρα $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη και σε υπερεπίπεδα και $\xi \in S^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}$. Τότε ο μετασχηματισμός Radon της ϕ στην κατεύθυνση του ξ στο σημείο t ορίζεται ως εξής:

$$R\phi(\xi;t) = \int_{\langle x.\xi\rangle = t} \phi(x)dx$$

Ενώ για τυχαίο διάνυσμα $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ο μετασχηματισμός Radon στην κατεύθυνση του ξ στο t είναι

$$R\phi(\xi;t) = \frac{1}{\|\xi\|_2} R\phi\Big(\frac{\xi}{\|\xi\|_2}; \frac{t}{\|\xi\|_2}\Big),$$

όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα. Όπως και στην περίπτωση του σφαιρικού μετασχηματισμού Radon, η σχέση που συνδέει τον μετασχηματισμό Fourier με το μεταχηματισμό Radon για $\xi \in \mathbb{R}^n$ και $t \in \mathbb{R}$ είναι η (3.1.3), ισοδύναμα η

$$\hat{\phi}(s\xi) = \big(R\phi(\xi;\cdot)\big)\hat{}(s), \qquad (3.1.3')$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και $s \in \mathbb{R}$, ([He], σελ.4).

3.1.2 Αστερόμορφα σώματα, σώματα τομών και η συνάρτηση παράλληλων τομών.

Αστεροειδές σύνολο (ως προς το 0) λέμε κάθε σύνολο για το οποίο κάθε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει ένα σημείο του με το 0 βρίσκεται μέσα στο σύνολο.

Αστερόμορφο σώμα ονομάζεται ένα μη κενό αστεροειδές σώμα, του οποίου η ακτινική συνάρτηση είναι συνεχής και θετική στην S^{n-1}.
Το σύνολο αυτών των σωμάτων θα το συμβολίζουμε με Sb, ενώ το σύνολο των σωμάτων που επιπλέον είναι 0-συμμετρικά, με Sb_e. Για $K, L \in Sb$ ισχύει

$$K \subseteq L \Leftrightarrow \rho_K \leq \rho_L \tag{3.1.5}$$

Σώμα τομών ενός αστερόμορφου σώματος $L \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ με ακτινική συνάρτηση ρ_L ονομάζεται το αστερόμορφο σώμα IL, για το οποίο ισχύει

$$\rho_{IL}(u) = |L \cap u^{\perp}|_{(n-1)} = \frac{1}{n-1} \int_{S^{n-1} \cap u^{\perp}} \rho_L(v)^{n-1} dv = R\Big(\frac{1}{n-1} \rho_L^{n-1}\Big)(u), \tag{3.1.6}$$

για κάθε $u \in S^{n-1}$. Η ρ_{IL} όπως ορίζεται (σαν συνάρτηση όγκου) είναι συνεχής και θετική. Το σύνολο των σωμάτων τομών αστερόμορφων σωμάτων θα συμβολίζεται με $\mathcal{I}$, ενώ για τα σώματα τομών που προέρχονται από 0-συμμετρικά θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathcal{I}_e$.

Ένα αστερόμορφο σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται σώμα τομών αν υπάρχει ένα πεπερασμένο, άρτιο, μη αρνητικό Borel μέτρο μ στην S^{n-1}, τέτοιο ώστε $\rho_K = R\mu$.

Αν K 0-συμμετρικό αστερόμορφο σώμα, τότε η συνάρτηση

$$\|x\|_K = min\{a > 0 : x \in aK\}, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

λέγεται συναρτησοειδές του Minkowski που παράγεται από το K. Ισχύει ότι $\rho_K(x) = \|x\|_K^{-1}$.
Ισοδύναμα λοιπόν μπορούμε να πούμε οτι σώμα τομών ονομάζεται ένα αστερόμορφο σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ αν υπάρχει πεπερασμένο, (μη αρνητικό) άρτιο Borel μέτρο μ στην S^{n-1} έτσι ώστε τα $\|\cdot\|_K^{-1}$ και $R\mu$ συμπίπτουν ως συναρτησοειδή στο $C(S^{n-1})$. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω $R\mu$ είναι το πεπερασμένο μέτρο Borel στην S^{n-1}, που ορίζεται ως εξής

$$\langle R\mu, f \rangle = \langle \mu, Rf \rangle = \int_{S^{n-1}} Rf(\theta) d\mu(\theta)$$

για κάθε $f \in C(S^{n-1})$.

Ένα σώμα τομών IK ενός αστερόμορφου σώματος K είναι επίσης ένα σώμα τομών αφού $\rho_{IK} = R\mu$, όπου μ το μέτρο που αντιστοιχεί στην συνάρτηση $\frac{1}{n-1}\rho_K^{n-1}$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.
Για παράδειγμα ([Ga3],Θ. 8.1.16, Rem. 8.1.17) ένας κύλινδρος στον $\mathbb{R}^4$ δεν είναι σώμα τομών ενός αστερόμορφου σώματος, είναι όμως σώμα τομών. Παρόλα αυτά ο Zhang, [Z3], έδειξε οτι ένα σώμα τομών $L \subseteq R^n$ με $\rho_L \in C^{n-1}(S^{n-1})$ είναι σώμα τομών ενός αστερόμορφου σώματος.

Έστω $K \in Sb_e$. Η κατανομή $R^{-1}\rho_K$ ονομάζεται δυική γεννήτρια κατανομή του K και συμβολίζεται με $\widetilde{\mu}_K$.
Ένας ισοδύναμος λοιπόν ορισμός είναι ο εξής:
Ένα αστερόμορφο 0-συμμετρικό σώμα K λέγεται σώμα τομών αν η δυική γεννήτρια κατανομή $\widetilde{\mu}_K$ είναι μέτρο. Και αν το $\widetilde{\mu}_K$ είναι προσημασμένο μέτρο θα λέγεται γενικευμένο σώμα τομών. Από τον ορισμό της δυικής γεννήτριας κατανομής και του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon παίρνουμε ότι

$$\widetilde{\mu}_K(f) = \langle \rho_K, R^{-1}f \rangle \quad f \in C_e^{\infty}(S^{n-1}). \tag{3.1.7}$$

Η κατανομή $\widetilde{\mu}_K$ είναι μέτρο αν και μόνο αν $\widetilde{\mu}_K(f) \geq 0$, για κάθε $f \geq 0$, με $f \in C_e^{\infty}(S^{n-1})$. [Sc]. Αν θέσουμε $g = R^{-1}f$, τότε από την σχέση (3.1.7), ένα σώμα $K \in Sb_e$ είναι σώμα τομών αν και μόνο αν

$$\int_{S^{n-1}} \rho_K(u)g(u)du \geq 0, \tag{3.1.8}$$

για κάθε $Rg \geq 0$, με $g \in C_e^{\infty}(S^{n-1})$.

Για κάθε $\xi \in S^{n-1}$, ορίζουμε την συνάρτηση παράλληλων τομών, $z \longmapsto A_\xi(z), \quad z \in \mathbb{R}$, ενός 0-συμμετρικού αστερόμορφου σώματος K ως εξής

$$A_\xi(z) = |K \cap (\xi^\perp + z\xi)|_{(n-1)} = \int_{\langle x,\xi \rangle = z} \chi(\|x\|_K)dx = R\chi(\|\cdot\|_K)(\xi; z),$$

όπου χ η χαρακτηριστική συνάρτηση του [-1,1]. Για τυχόν $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ θέτουμε

$$A_\xi(z) = \frac{1}{\|\xi\|_2} R\chi(\|\cdot\|_K)\Big(\frac{\xi}{\|\xi\|_2}; \frac{z}{\|\xi\|_2}\Big).$$

Η συνάρτηση παράλληλων τομών είναι $\log -$κοίλη και αν το σώμα K είναι 0-συμμετρικό, άρτια.

Από την σχέση (3.1.3′), για κάθε σταθερό $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης παράλληλων τομών θα είναι

$$\hat{A}_\xi(t) = \big(\chi(\|\cdot\|_K)\big)^\wedge(t\xi).$$

Για $t \in \mathbb{R}$, έστω $t_+ = \max\{0, t\}$. Αν πάρουμε $\phi \in \mathcal{S}$ η οποία μηδενίζεται σε μια περιοχή του 0, τότε το

$$\left\langle t_+^q, \phi(t) \right\rangle = \int_0^\infty t^q \phi(t) dt$$

υπάρχει για κάθε $q \in \mathbb{C}$ και επιπλέον η συνάρτηση

$$q \longmapsto \int_0^\infty t^q \phi(t) dt$$

είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{C}$ και συνεπώς αναλυτική. $(\diamondsuit)$

Απόδειξη του $(\diamondsuit)$:
Έστω $F : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση, για την οποία υπάρχει η $\frac{\partial F}{\partial q}(t, q)$ κι έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $q_0 \in \mathbb{C}$ υπάρχει περιοχή V του q_0 και ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\left|\frac{\partial F}{\partial q}(t, q)\right| \leq g(t),$$

για κάθε $q \in V, t \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση

$$I(q) = \int_{\mathbb{R}} F(t, q) dt, \quad q \in \mathbb{C},$$

είναι αναλυτική. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:
Αν πάρουμε το όριο του πηλίκου

$$\frac{I(q_0 + h) - I(q_0)}{h} = \int_{\mathbb{R}} \frac{F(t, q_0 + h) - F(t, q_0)}{h} dt$$

για $h \longrightarrow 0$, η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε συγκλίνει στην $\frac{\partial F}{\partial q}(t, q_0)$. Άρα αρκεί να μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για κάθε ακολουθία h_n με $h_n \longrightarrow 0$.
Επιλέγοντας περιοχή V και συνάρτηση g όπως στην υπόθεση, ισχύει τελικά για όλα τα n ότι

$$\left|\frac{F(t, q_0 + h_n) - F(t, q_0)}{h_n}\right| = \left|\frac{1}{h_n} \int_{q_0}^{q_0 + h_n} \frac{\partial F}{\partial q}(t, q) dq\right| \leq g(t), \ t \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$\frac{I(q_0 + h) - I(q_0)}{h} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta F}{\theta q}(t, q_0) dt,$$

καθώς $h \longrightarrow 0$.
Εφαρμόζοντας τον παραπάνω συλλογισμό για την

$$F(t,q) = t_+^q \phi(t),$$

οπότε

$$\frac{\partial F}{\partial q}(t,q) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^q \log t \phi(t), & t > 0 \end{cases}$$

παίρνουμε ότι η συνάρτηση

$$q \longmapsto \int_0^\infty t^q \phi(t) dt$$

είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.

Άρα για κάθε $q \in \mathbb{C}$ ορίζεται το συναρτησοειδές

$$\phi \longrightarrow \langle t_+^q, \phi \rangle$$

για εκείνα τα $\phi \in \mathcal{S}$, τα οποία μηδενίζονται σε μια περιοχή του 0. Κάθε ένα απο αυτά τα συναρτησοειδή για $q \neq -1, -2, \ldots$ επεκτείνεται σε μια κατανομή με την διαδικασία που περιγράφεται παρακάτω.
Έστω $\phi \in \mathcal{S}$ και $T_k\phi$ το πολυώνυμο Taylor βαθμού k της ϕ (ως προς το 0). Τότε ισχύει

$$|\phi(t) - T_k\phi(t)| \leq \frac{|t|^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{|x| \leq |t|} |\phi^{(k+1)}(x)|,$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Αν $q \in \mathbb{C}$, το ολοκλήρωμα $\int_0^1 t^q dt$ υπάρχει αν και μόνο αν $Req > -1$, αφού $|t^q| = t^{Req}$. Συνεπώς, αν $m \in \mathbb{N}$ με $Req + m > -1$, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 t^q \big(\phi(t) - T_{m-1}\phi(t)\big) dt$$

υπάρχει, αφού

$$t^q \big(\phi(t) - T_{m-1}\phi(t)\big) = O\big(t^{m+Req}\big).$$

Έστω $q \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$ και m ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $Req > -m - 1$. Ορίζουμε για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$

$$\langle t_+^q, \phi \rangle = \int_0^1 t^q \big(\phi(t) - T_{m-1}\phi(t)\big) dt + \int_1^{+\infty} t^q \phi(t) dt + \sum_{k=1}^m \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(q+k)}$$

Αν η ϕ μηδενίζεται σε μια περιοχή του 0, τότε η παραπάνω παράσταση γράφεται

$$\int_0^1 t^q\phi(t)dt + \int_1^{+\infty} t^q\phi(t)dt,$$

άρα ο ορισμός του $\langle t_+^q, \phi\rangle$ συμπίπτει με τον προηγούμενο.

Ο παραπάνω τύπος ορίζει ένα γραμμικό συναρτησοειδές στο $\mathcal{S}$, το οποίο είναι συνεχές.
Η συνέχεια προκύπτει απο τις εξής ανισότητες:

$$\Big|\int_0^1 t^q\big(\phi(t) - T_{m-1}\phi(t)\big)dt\Big| \leq \frac{1}{m!}\sup_x|\phi^{(m)}(x)|\int_0^1 t^{Req+m}dt,$$

$$\Big|\int_1^{+\infty} t^q\phi(t)dt\Big| \leq \Big(\int_1^{+\infty} t^{-(m+1)}dt\Big)\sup_x\big|x^{[Req]+m+1}\phi(x)\big|$$

και

$$\Big|\sum_{k=1}^m \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}\Big| \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{|\lambda+k|}\sup_x|\phi^{(k-1)}(x)|.$$

Συνεπώς, για κάθε $q \in \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$ ορίζεται η κατανομή t_+^q.
Αυτή η οικογένεια κατανομών είναι «αναλυτική», δηλαδή για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$ η συνάρτηση

$$q \longmapsto \langle t_+^q, \phi\rangle, \quad q \in \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$$

είναι αναλυτική.
Πράγματι, μπορούμε να παρατηρήσουμε κατ΄ αρχήν ότι ο ορισμός του $\langle t_+^q, \phi\rangle$ παραμένει ο ίδιος αν επιλέξουμε οποιοδήποτε φυσικό αριθμό m με $Req > -m-1$. Γιατί, αν m ο ελάχιστος φυσικός που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα και $n > m$, τότε οι αντίστοιχοι τύποι για τα n, m διαφέρουν κατά την ποσότητα

$$\int_0^1 t^q\big(T_{m-1}\phi(t) - T_{n-1}\phi(t)\big)dt + \sum_{k=m+1}^n \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(q+k)}$$

$$= -\int_0^1 t^q\Big(\frac{\phi^{(m)}(0)}{m!}t^m + \cdots + \frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}\Big)dt + \sum_{k=m+1}^n \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(q+k)} = 0.$$

Έστω λοιπόν q_0 με $Req_0 > -m-1$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Τότε η ίδια ανισότητα ισχύει για κάθε q σε μια κατάλληλη περιοχή του q_0. Ο τρίτος προσθετέος που εμφανίζεται στον ορισμό του $\langle t_+^q, \phi\rangle$, είναι φανερά αναλυτική συνάρτηση του q. Οι άλλοι δύο προσθετέοι είναι της μορφής

$$\int_I F(t,q)dt.$$

Άρα αρκεί η F να ικανοποιεί τις συνθήκες όπως αναφέρθηκαν στο $(\diamondsuit)$.

Στην περίπτωση του πρώτου προσθετέου, έχουμε

$$F(t,q) = t^q\big(\phi(t) - T_{m-1}\phi(t)\big),$$

άρα

$$\Big|\frac{\partial F}{\partial q}(t,q)\Big| = \big|t^q \log t\big(\phi(t) - T_{m-1}\phi(t)\big)\big| \leq ct^{Req+m}|\log t|,$$

όπου $c = \frac{1}{m!}\sup\limits_x |\phi^{(m)}(x)|$.

Επιλέγουμε ένα α με $-1 < \alpha < Req_0 + m$, και περιοχή V του q_0 έτσι ώστε να ισχύει $\alpha < Req + m$ για κάθε $q \in V$. Τότε, για $t \in (0,1)$ και $q \in V$ ισχύει

$$\Big|\frac{\partial F}{\partial q}(t,q)\Big| \leq ct^{\alpha}|\log t|$$

και

$$\int_0^1 ct^{\alpha}|\log t| < +\infty,$$

αφού αν $\alpha > \beta > -1$, τότε $t^{\alpha}|\log t| = o(t^{\beta})$.

Στην περίπτωση του δεύτερου προσθετέου έχουμε

$$F(t,q) = t^q\phi(t),$$

άρα $\frac{\partial F}{\partial q}(t,q) = t^q \log t\phi(t)$. Οπότε

$$\Big|\frac{\partial F}{\partial q}(t,q)\Big| \leq t^{[Req]+4}|\phi(t)|t^{-2} \leq ct^{-2},$$

όπου $c = \sup\limits_x \big|x^{[Req]+4}\phi(x)\big|$ και

$$\int_1^{+\infty} ct^{-2}dt < +\infty.$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτοι προσθετέοι ορίζονται και είναι αναλυτικές συναρτήσεις σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$. Συνεπώς σε κάθε θέση $-m$, $m \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $q \longmapsto \langle t_+^q, \phi\rangle$ έχει απλό πόλο με ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\frac{\phi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}$.

Η συνάρτηση $q \longmapsto \Gamma(q+1)$ έχει επίσης απλούς πόλους στα σημεία $-m$, $m \in \mathbb{N}$ με αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$, ([M.H], σελ.413, 417). Επιπλέον, η συνάρτηση Γ δεν έχει ρίζες. Άρα η συνάρτηση

$$q \longmapsto \frac{\langle t_+^q, \phi\rangle}{\Gamma(q+1)},$$

της οποίας η τιμή στα σημεία $-m,\ m \in \mathbb{N}$, ορίζεται να είναι ο αριθμός $(-1)^{m-1}\phi^{(m-1)}(0)$, είναι ακέραια.
Χρησιμοποιούμε και για την περίπτωση όπου $q = -m,\ m \in \mathbb{N}$, τον συμβολισμό $\frac{\langle t_+^q, \phi\rangle}{\Gamma(q+1)}$ για την αντίστοιχη τιμή της ακέραιας συνάρτησης.

Αν το σύνορο του K είναι C^∞, τότε η συνάρτηση A_ξ ειναι C^∞ στο διάστημα $(-t_0, t_0)$, όπου $t_0 = \frac{h_K(\xi)}{\|\xi\|^2}$. (Η αιτιολόγηση δίνεται στο τέλος της παραγράφου.) Στο $\mathbb{R} \setminus [-t_0, t_0]$ η A_ξ προφανώς μηδενίζεται. Επιλέγουμε $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < t_0$ και μια C^∞ συνάρτηση ψ με

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \varepsilon_1 \\ 0, & |t| > \varepsilon_2 \end{cases}$$

Ορίζουμε την εξής δράση των κατανομών $t_+^q,\ q \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$ επί της A_ξ :

$$\big\langle t_+^q, A_\xi \big\rangle = \big\langle t_+^q, A_\xi \psi \big\rangle + \int_0^{+\infty} t^q A_\xi(t)\big(1 - \psi(t)\big)dt.$$

Ο ορισμός έχει νόημα, αφού η συνάρτηση $A_\xi \psi$ ανήκει στο $\mathcal{S}$ (είναι C^∞ με συμπαγή φορέα) και η $A_\xi(1-\psi)$ είναι μετρήσιμη με συμπαγή φορέα στο $(0, +\infty)$.

Η συνάρτηση

$$q \longmapsto \big\langle t_+^q, A_\xi \big\rangle$$

είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$:
Η αναλυτικότητα του δεύτερου προσθετέου προκύπτει όπως στην περίπτωση του δεύτερου προσθετέου της $\big\langle t_+^q, \phi \big\rangle$ (και σε εκείνη την περίπτωση δεν είχε χρησιμοποιηθεί η ομαλότητα της ϕ, παρα μόνο το ότι οι συναρτήσεις της μορφής $t^\alpha \phi(t)^\beta$ είναι φραγμένες, πράγμα που ισχύει και στην περίπτωση της $A_\xi(1-\psi)$). Ο πρώτος προσθετέος είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$.
Άρα σε κάθε σημείο $-m,\ m \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $q \longmapsto \big\langle t_+^q, A_\xi \big\rangle$ έχει απλό πόλο με ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\frac{\left(A_\xi \psi\right)^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} = \frac{A_\xi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}$. Συνεπώς ορίζεται και εδώ η ακέραια συνάρτηση

$$q \longmapsto \frac{\big\langle t_+^q, A_\xi \big\rangle}{\Gamma(q+1)},$$

η οποία στα σημεία $-m,\ m \in \mathbb{N}$, παίρνει αντίστοιχα τις τιμές $(-1)^{m-1}A_\xi^{(m-1)}(0)$.

Για $q \in \mathbb{C}$ και $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ορίζουμε

$$A_\xi^{(q)}(0) = \Big\langle \frac{t_+^{-q-1}}{\Gamma(-q)}, A_\xi \Big\rangle. \tag{3.1.9}$$

Αν $m \in \mathbb{N}$ και $Req < m,\ q \neq 0, 1, 2, \ldots, m-1$, τότε

$$A_\xi^{(q)}(0) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^1 t^{-q-1} \Big(A_\xi(t)\psi(t) - T_{m-1}\big(A_\xi\psi\big)(t) \Big) dt +$$

$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \int_1^{+\infty} t^{-q-1} A_\xi(t)\psi(t) dt + \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\big(A_\xi\psi\big)^{(k)}(0)}{k!(k-q)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^1 t^{-q-1} A_\xi(t)\big(1-\psi(t)\big) dt + \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_1^{+\infty} t^{-q-1} A_\xi(t)\big(1-\psi(t)\big) dt.$$

Και αφού $\big(A_\xi\psi\big)^{(k)}(0) = A_\xi^{(k)}(0)$ έπεται ότι

$$A_\xi^{(q)}(0) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^1 t^{-q-1} \Big(A_\xi(t)\psi(t) - T_{m-1}\big(A_\xi\big)(t) \Big) dt$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_1^{+\infty} t^{-q-1} A_\xi(t)\psi(t) dt + \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\big(A_\xi\big)^{(k)}(0)}{k!(k-q)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^1 t^{-q-1} A_\xi(t)\big(1-\psi(t)\big) dt + \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_1^{+\infty} t^{-q-1} A_\xi(t)\big(1-\psi(t)\big) dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^1 t^{-q-1} \big(A_\xi(t) - A_\xi(0) - tA'_\xi(0) - \cdots - \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} A_\xi^{(m-1)}(0) \big) dt +$$

$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \int_1^{\infty} t^{-q-1} A_\xi(t) dt + \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_\xi^{(k)}(0)}{k!(k-q)} \tag{3.1.10}$$

και αν $m-1 < Req < m$, τότε

$$A_\xi^{(q)}(0) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^{\infty} t^{-q-1} \big(A_\xi(t) - A_\xi(0) - tA'_\xi(0) - \cdots - \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} A_\xi^{(m-1)}(0) \big) dt.$$

αφού

$$\int_1^{+\infty} t^{-q-1} \frac{t^k A_\xi^{(k)}(0)}{k!} dt = \frac{A_\xi^{(k)}(0)}{k!} \int_1^{+\infty} t^{-q+k-1} dt = -\frac{A_\xi^{(k)}(0)}{(k-q)k!},$$

όταν $Re(k-q) < 0$.

Με τον παραπάνω συμβολισμό για $k = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει

$$A_\xi^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} A_\xi(t) \big|_{t=0}.$$

Αφού το K είναι συμμετρικό, η συνάρτηση $t \longmapsto A_\xi(t)$ είναι άρτια και για κάθε άρτιο m ισχύει

$$A_\xi^{(q)}(0) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^\infty t^{-q-1}\Big(A_\xi(t) - \sum_{j=0}^{(m-2)/2} \frac{t^{2j}}{(2j)!} A_\xi^{(2j)}(0)\Big)dt, \qquad (3.1.11)$$

όταν $m-2 < Req < m$.

Θα δώσουμε μερικούς ακόμα ορισμούς οι οποίοι χαρακτηρίζουν την επιφάνεια ενός κυρτού σώματος.

Ένα κυρτό σώμα K λέγεται τάξης C^k, $1 \le k \le \infty$, αν το σύνορό του είναι μια C^k- υπερεπιφάνεια στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή συμπίπτει τοπικά με το γράφημα μιας C^k-συνάρτησης $n-1$ μεταβλητών (από τις $x_1, \dots x_n$). Αφού οι αντιστρέψιμοι γραμμικοί μετασχηματισμοί είναι $C^\infty-$διαφορίσιμοι, η ιδιότητα αυτή είναι ανεξάρτητη από το επιλεγόμενο σύστημα συντεταγμένων.

Αν το K είναι C^∞ σώμα, $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, και $A_\xi(t) = |K \cap (\xi^\perp + t\xi)|_{(n-1)}$, $t \in \mathbb{R}$, τότε η A_ξ είναι C^∞ στο διάστημα $(t_0, -t_0)$, όπου $t_0 = \frac{h_K(\xi)}{\|\xi\|^2}$.
Μια σκιαγράφηση της απόδειξης της ιδιότητας αυτής είναι η εξής:
Χωρίς βλαβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ξ βρίσκεται πάνω σε έναν από τους κύριους άξονες. Μπορούμε να χωρίσουμε το K σε τμήματα, το καθένα απο τα οποία περιορίζεται από ένα τμήμα ενός υπερεπιπέδου παράλληλου προς ένα από τα κύρια υπερεπίπεδα και το γράφημα μιας C^∞ συνάρτησης. Το $A_\xi(t)$ υπολογίζεται ως το άθροισμα των όγκων που αντιστοιχούν σε αυτά τα τμήματα. Ο χωρισμός του K μπορεί να γίνει έτσι ώστε οι επι μέρους όγκοι να είναι C^∞ συναρτήσεις, οπότε το ίδιο θα ισχύει για την $A_\xi(t)$.

Έστω M μια υπερεπιφάνεια τάξης C^2 στον $\mathbb{R}^n$. Σε κάθε σημείο της M ορίζονται οι $n-1$ κύριες καμπυλότητες $k_1, \dots, k_{n-1}$ της M. Το γινόμενο $k_1, \cdots, k_{n-1}$ λέγεται καμπυλότητα Gauss της M στο εν λόγω σημείο ,([Ko], σελ.214-215, [S], σελ. 105-106).
Αν δοθεί μια παραμετρική παράσταση S, η καμπυλότητα Gauss εκφράζεται συναρτήσει των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης των συντεταγμένων, ([Ko], 3.37). Ειδικότερα, αν K ένα C^2-σώμα, μια παραμετρική παράσταση του συνόρου του K είναι η

$$S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n : \ u \longmapsto \rho_K(u)u$$

Άρα η καμπυλότητα Gauss εκφράζεται συναρτήσει των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης της ακτινικής συνάρτησης.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_e^2$ το σύνολο των συμμετρικών κυρτών C^2 σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ των οποίων το σύνορο έχει παντού θετική καμπυλότητα Gauss .
Αποδεικνύονται τα εξής:

i. αν $K \in \mathcal{F}_e^2$ τότε $\rho_K \in C^2(S^{n-1})$, ([S], σελ.111),

ii. το σύνολο $\mathcal{F}_e^2$ είναι πυκνό στο $\mathcal{K}_e^n$, ([S], σελ 160).

3.1.3 Δυικοί Μικτοί Όγκοι

Ο Lutwak, [L1] όρισε τους δυικούς μικτούς όγκους, οι οποίοι έχουν ανάλογες ιδιότητες με τους μικτούς όγκους, κλασική έννοια της κυρτής γεωμετρίας που είχε εισαχθεί από τον Minkowski.

Ορίζεται με αυτόν τον τρόπο μια απεικόνιση

$$\widetilde{V} : \underbrace{\mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n \times \ldots \times \mathcal{K}^n}_{n} \longrightarrow R.$$

Ορισμός 3.1.1 *Δυικός μικτός όγκος των $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{K}^n$ είναι ο αριθμός*

$$\widetilde{V}(A_1, \ldots A_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_{A_1}(u) \cdots \rho_{A_n}(u) du$$

Ορισμός 3.1.2

$$\widetilde{V}_i(A, B) := \widetilde{V}(\underbrace{A, \ldots, A}_{n-i}, \underbrace{B, \ldots, B}_{i}).$$

Απο τον ορισμό των δυικών μικτών όγκων παίρνουμε ότι

$$\widetilde{V}_i(A, A) = \widetilde{V}_n(A, \ldots, A) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_A^n(u) du = |A|_{(n)} \tag{3.1.12}$$

και

$$\widetilde{V}_i(A, B) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_A^{n-i}(u) \rho_B^i(u) du, \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1.13}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

i. $\widetilde{V}$ συνεχής

ii. $\widetilde{V}(A_1, \ldots, A_n) > 0$

iii. $\widetilde{V}(\lambda_1 A_1, \ldots, \lambda_n A_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \widetilde{V}(A_1, \ldots, A_n), \ \lambda_i > 0, \ i = 1, \ldots, n$

iv. Αν για κάθε i $A_i \subset B_i$, τότε $\widetilde{V}(A_1, \ldots, A_n) \leq \widetilde{V}(B_1, \ldots B_n)$ με ισότητα ανν $A_i = B_i$, για κάθε i.

v. $\widetilde{V}(A,\ldots,A) = |A|_{(n)}$

([L1] σελ. 532). Οι παραπάνω ιδιότητες εκτός από την συνέχεια της $\widetilde{V}$ ισχύουν και στην περίπτωση που τα σώματα είναι αστερόμορφα και εμείς για τέτοια θα τις χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Οι αποδείξεις των i, ii, iii και v είναι άμεσες απο τον ορισμό των δυικών μικτών όγκων. Η ιδιότητα της συνέχειας του $\widetilde{V}$ για κυρτά αποδεικνύεται ως εξής:
Αν $K_n, K \in \mathcal{K}^n$, $\;K_n \longrightarrow K$ και $0 \in K^\circ$,
τότε $\rho_{K_n}(u) \longrightarrow \rho_K(u)$ για κάθε $u \in S^{n-1}$ και οι ρ_{K_n} είναι ομοιόμορφα φραγμένες.
Η σύγκλιση των ρ_{K_n} προκύπτει από τις παρακάτω παρατηρήσεις.

1.)Αν $K_n \longrightarrow K$ και $x \in K^\circ$ τότε $x \in K_n$ τελικά.
Διότι, αν για κάθε n έχουμε οτι $x \notin K_n$, τότε υπάρχει υπερεπίπεδο H με $x \in H$, $H \cap K_n = \emptyset$.
Έστω $\varepsilon > 0$ με $B(x,\varepsilon) \subseteq K$.
Τότε, αν y μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στον H, ισχύει $x+\varepsilon y \notin K_n$ ή $x-\varepsilon y \notin K_n$. Άρα $d(K_n,K) \geq \varepsilon$.

2.)Έστω $\rho_K(u) = \lambda$. Τότε, αν $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι $(\lambda-\varepsilon)u \in K^\circ$, άρα $(\lambda-\varepsilon)u \in K_n$ τελικά, οπότε $\rho_{K_n}(u) \geq \lambda-\varepsilon$ τελικά. Συνεπώς $\liminf \rho_{K_n}(u) \geq \lambda$.

3.)Έστω ότι $\limsup \rho_{K_n}(u) > \lambda+\delta$, $\delta > 0$.
Τότε, για άπειρα n, ισχύει ότι $(\lambda+\delta)u \in K_n$. Οπότε παίρνουμε ότι $(\lambda+\delta)u \in K$, το οποίο είναι άτοπο.

Θα χρησιμοποιούμε και τον παρακάτω συμβολισμό για τους δυικούς μικτούς όγκους αστερόμορφων σωμάτων.
Ορίζουμε λοιπόν

$$\widetilde{V}(A,i;B,j;C) := \widetilde{V}(\underbrace{A,\ldots,A}_{i},\underbrace{B,\ldots,B}_{j},\underbrace{C,\ldots,C}_{n-i-j})$$

και πιο ειδικά

$$\widetilde{V}(A,i;C,1;B_n) = \widetilde{V}(\underbrace{A,\cdots,A}_{i},C,\underbrace{B_n,\cdots,B_n}_{n-i-1})$$

Έχοντας ορίσει τους δυικούς μικτούς όγκους θα ορίσουμε και το σώμα τομών τάξης i.
Έστω $L \in Sb$ (οπότε $\rho_L \in C(S^{n-1})$), $i \in \mathbb{N}$. Τότε, σώμα τομών τάξης i του L ονομάζουμε το 0-συμμετρικό αστερόμορφο σώμα I_iL, για το οποίο ισχύει

$$\rho_{I_iL}(u) = \frac{1}{n-1}\int_{S^{n-1}\cap u^\perp} \rho_L^i(v)dv = \widetilde{W}_{n-1-i}(L\cap u^\perp),\; u \in S^{n-1}. \quad (3.1.14)$$

Απο την συνέχεια της ρ_L και την συμπάγεια της S^{n-1} προκύπτει η συνέχεια της ρ_{I_iL}, η οποία επίσης είναι θετική, αφού το ίδιο ισχύει και για την ρ_L.

Οι ποσότητες $\widetilde{W}_i(L),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$ είναι τα δυικά Quermassintegrals του αστερόμορφου σώματος L, τα οποία ορίστηκαν απο τον Lutwak, [L2] και είναι οι απεικονίσεις $\widetilde{W}_i : Sb \longrightarrow R^n$, για τις οποίες ισχύει

$$\widetilde{W}_{n-i}(L) := \widetilde{V}_{n-i}(L, B_n) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho_L^i(u)du. \tag{3.1.15}$$

Απο τον ορισμό προφανώς προκύπτει ότι $\widetilde{W}_0(L) = |L|_{(n)}$ και $\widetilde{W}_n(L) = |B_n|$.

Έχουμε λοιπόν ότι το σώμα τομών ενός σώματος L είναι το σώμα τομών τάξης $n-1$, δηλαδή

$$IL = I_{n-1}L. \tag{3.1.16}$$

Συμβολίζουμε με $G_{n,k},\ 1 \le k \le n$, την πολλαπλότητα Grassmann, η οποία ορίζεται ως η πολλαπλότητα που περιέχει όλους τους k-διάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^n$ με μετρική την απόσταση Hausdorff ανάμεσα στις μοναδιαίες μπάλες των δυο υποχώρων,

$$\rho(s,t) = \sup_{x \in S^{n-1} \cap t} d\big(x, S^{n-1} \cap s\big),$$

όπου d είναι η Ευκλείδεια απόσταση σημείου από σύνολο.

Έστω (M, ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και G ομάδα, τα στοιχεία της οποίας δρουν ως ισομετρίες πάνω από τον M.
Ο Μ ονομάζεται ομογενής χώρος M της ομάδας G αν η δράση της G πάνω στον M είναι μεταβατική, δηλαδή αν για κάθε $s, t \in M$ υπάρχει $g \in G$ τ.ω. $gt = s$.
Τότε από το Θεώρημα Υπαρξης μοναδικού κανονικοποιημένου Borel μέτρου ν, αναλλοίωτου ως προς την δράση της ομάδας πάνω στον χώρο (μέτρο Haar), παίρνουμε ότι για δοσμένο k με $1 \le k \le n$ ισχύει

$$\int_{S^{n-1}} f d\nu = \int_{G_{n,k}} \int_{S^{n-1} \cap \xi} f(t) d\nu_\xi(t) d\nu_k(\xi), \tag{3.1.17}$$

για κάθε $f \in C(S^{n-1})$, όπου ν_ξ είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Haar πάνω στη $(k-1)$-διάστατη σφαίρα $S^{n-1} \cap \xi$, ν στο αριστερό μέρος της ισότητας το κανονικοποιημένο μέτρο Haar στην S^{n-1} και ν_k το κανονικοποιημένο μέτρο Haar πάνω στην πολλαπλότητα $G_{n,k}$, ([M.S.], σελ.4). Ως ομάδα G εδώ θεωρούμε την ομάδα των ορθογώνιων μετασχηματισμών στον $\mathbb{R}^n$ για τα ν και ν_k και στον ξ για τον ξ.

Έχοντας ορίσει τα δυικά Quermassintegrals μπορούμε να δούμε πως συνδέονται οι όγκοι των i-διάστατων τομών ενός σώματος K με το $(n-i)$-οστο δυικό Quermassintegral του. Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι, ([L2], 2.12)

$$\widetilde{W}_{n-i}(K) = \frac{w_n}{w_i} \int_{G_{n,i}} |K \cap \xi|_{(i)} d\nu_i(\xi). \tag{3.1.18}$$

3.1.4 Μερικές χρήσιμες σχέσεις

Από την ιδιότητα (iv) παίρνουμε ότι αν $A \subseteq B$ τότε

$$\widetilde{V}_1(C, A) \leq \widetilde{V}_1(C, B), \tag{3.1.19}$$

για κάθε $A, B, C \in Sb$.
Ισχύει επίσης ότι για $K, L \in Sb$

$$\widetilde{V}_1(L, IK) = \widetilde{V}_1(K, IL), \tag{3.1.20}$$

αφού απο τον ορισμό του σφαιρικού μετασχηματισμού Radon και τις σχέσεις (3.1.6) και (3.1.13), παίρνουμε

$$\widetilde{V}_1(L, IK) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_L^{n-1}(u) \rho_{IK}(u) du$$

$$= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_L^{n-1}(u) R\big(\frac{1}{n-1} \rho_K^{n-1}\big)(u) du$$

$$= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} R\big(\rho_L^{n-1}\big)(u) \frac{1}{n-1} \rho_K^{n-1}(u) du$$

$$= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} (n-1) \rho_{IL}(u) \frac{1}{n-1} \rho_K^{n-1}(u) du = \widetilde{V}_1(K, IL).$$

Απο τον ορισμό των δυικών μικτών όγκων, έχουμε ακόμα ότι

$$\widetilde{V}_1(K, K) = |K|_{(n)}. \tag{3.1.21}$$

Άλλη μια σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω είναι η

$$I_i K \subseteq I_i L \Leftrightarrow \rho_{I_i K} \leq \rho_{I_i L} \tag{3.1.22}$$

η οποία είναι ειδική περίπτωση της σχέσης (3.1.5).

Μια επίσης χρήσιμη σχέση είναι και η δυική ανισότητα του Minkowski [L1], σελ.535)

$$\widetilde{V}_1(K,L)^n \leq |K|_{(n)}^{n-1}|L|_{(n)}, \quad K,L \in Sb \tag{3.1.23}$$

καθώς και η

$$\widetilde{V}(K,i;L,j;C)^{i+j} \leq \widetilde{V}(K,i+j;C)^i \widetilde{V}(L,i+j;C)^j \quad K,L,C \in Sb. \tag{3.1.24}$$

[L1] - [Z3]
Οι παραπάνω σχέσεις, όπως τις όρισε ο Lutwak, αναφέρονται σε κυρτά σώματα. Ουσιαστικά όμως για τις αποδείξεις τους χρησιμοποιούνται μόνο οι ιδιότητες ότι τα σώματα έχουν θετικές και συνεχείς ακτινικές συναρτήσεις. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε τις σχέσεις αυτές για αστερόμορφα σώματα, τα οποία έχουν τις παραπάνω ιδιότητες.

3.2 Το Πρώτο Κύριο Θεώρημα

Λήμμα 3.2.1 *Αν $K \in Sb$, τότε*

$$\rho_{I_iK}(u) = \frac{1}{n-1}\big(R\rho_K^i\big)(u).$$

Απόδειξη
Απο τον ορισμό του σφαιρικού μετασχηματισμού Radon και θεωρώντας στις σφαίρες μη κανονικοποιημένα εμβαδά, έχουμε

$$\big(R\rho_K^i\big)(u) = \int_{S^{n-1}\cap u^\perp} \rho_K^i(v)dv.$$

Εφαρμόζοντας την σχέση (3.1.17) στον χώρο $u^\perp$ το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\frac{(n-1)w_{n-1}}{iw_i}\int\limits_{G(n-1,i)}\ \int\limits_{S^{n-1}\cap u^\perp\cap\xi} \rho_K^i(t)d\mu_\xi(t)d\nu_i(\xi)$$

Από την (3.1.6) το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με

$$\frac{(n-1)w_{n-1}}{w_i}\int_{G(n-1,i)} |K\cap u^\perp\cap\xi|_{(i)}d\nu_i\xi$$

ενώ από τις σχέσεις (3.1.14) και (3.1.18) παίρνουμε ότι η παραπάνω ποσότητα είναι ίση με

$$(n-1)\widetilde{W}_{n-1-i}(K\cap u^\perp) = (n-1)\rho_{I_iK}(u).$$

Πρόταση 3.2.1 *Έστω K σώμα τομών ενός αστερόμορφου σώματος, L αστερόμορφο σώμα έτσι ώστε*

$$|K\cap u^\perp|_{(n-1)} \leq |L\cap u^\perp|_{(n-1)}$$

για κάθε $u\in S^{n-1}$. Τότε

$$|K|_{(n)} \leq |L|_{(n)}.$$

Απόδειξη
Το K είναι σώμα τομών ενός αστερόμορφου σώματος, οπότε το ίδιο είναι αστερόμορφο σώμα. Έστω $u\in S^{n-1}$. Από τον ορισμό των σωμάτων τομών ισχύει ότι

$$\rho_{IK}(u) = |K\cap u^\perp|_{(n-1)}, \rho_{IL}(u) = |L\cap u^\perp|_{(n-1)}.$$

Οπότε $\rho_{IK} \leq \rho_{IL}$, όπου IK το σώμα τομών του K και IL το σώμα τομών του L. Τα IK, IL είναι αστερόμορφα σώματα οπότε απο την σχέση (3.1.5) έχουμε

$$IK \subseteq IL \qquad (*)$$

Το K είναι σώμα τομών ενός αστερόμορφου σώματος, δηλαδή υπάρχει ένα $K_0 \in Sb$ τέτοιο ώστε $K = IK_0$. Απο τον ορισμό των δυικών μικτών όγκων έχουμε ότι αν $M, N \in Sb$ τότε

$$M \subseteq N \Rightarrow \widetilde{V}_1(K_0, M) \leq \widetilde{V}_1(K_0, N),$$

για κάθε $K_0 \in Sb$ (σχέση (3.1.19)). Οπότε από τις σχέσεις $(*)$, (3.1.20), (3.1.21) και την ιδιότητα που αναφέρθηκε παραπάνω, παίρνουμε ότι

$$\widetilde{V}_1(K_0, IK) \leq \widetilde{V}_1(K_0, IL)$$

άρα

$$\widetilde{V}_1(K, IK_0) \leq \widetilde{V}_1(L, IK_0)$$

και συνεπώς

$$|K|_{(n)} = \widetilde{V}_1(K, K) \leq \widetilde{V}_1(L, K).$$

Εφαρμόζοντας τώρα την δυική ανισότητα του Minkowski, (σχέση (3.1.23)), έχουμε,

$$|K|_{(n)} \leq |K|_{(n)}^{n-1/n} |L|_{(n)}^{1/n}$$

και άρα

$$|K|_{(n)}^{1/n} \leq |L|_{(n)}^{1/n}.$$

Λήμμα 3.2.2 *Έστω K, L αστερόμορφα σώματα.Αν*

$$I_i K \subseteq I_i L$$

τότε για κάθε $N \in \mathcal{I}$ ισχύει

$$\widetilde{V}(K, i; N, 1; B_n) \leq \widetilde{V}(L, i; N, 1; B_n).$$

Απόδειξη

Το N είναι σώμα τομών οπότε η δυική γεννήτρια κατανομή του $R^{-1}\rho_N$ είναι μέτρο, έστω $\widetilde{\mu}_N$. Απο τον ορισμό των δυικών μικτών όγκων, του σφαιρικού μετασχηματισμού Radon και της σχέσης (3.1.2), χρησιμοποιώντας ότι η ρ_K^i είναι συνεχής στην S^{n-1} και ότι η $R^{-1}\rho_N$ είναι κατανομή, έχουμε

$$n\widetilde{V}(K, i; N, 1; B_n) - n\widetilde{V}(L, i; N, 1; B_n)$$

$$= \int_{S^{n-1}} \rho_K^i(u)\rho_N(u)du - \int_{S^{n-1}} \rho_L^i(u)\rho_N(u)du = \langle \rho_K^i, \rho_N \rangle - \langle \rho_L^i, \rho_N \rangle$$
$$= \langle R\rho_K^i, R^{-1}\rho_N \rangle - \langle R\rho_L^i, R^{-1}\rho_N \rangle .$$

Απο το λήμμα 3.2.1, καταλήγουμε στην

$$n\widetilde{V}(K,i;N,1;B_n) - n\widetilde{V}(L,i;N,1;B_n)$$
$$= (n-1)\int_{S^{n-1}} \big(\rho_{I_iK}(u) - \rho_{I_iL}(u)\big) d\widetilde{\mu}_N(u).$$

Οπότε το ολοκλήρωμα θα είναι αρνητικό αν $\rho_{I_iK} \leq \rho_{I_iL}$, το οποίο εξ ορισμού του ισχύει αν και μόνο αν $I_iK \subseteq I_iL$ (σχέση (3.1.22)).

Λήμμα 3.2.3 *Έστω $\mathcal{N}$ ένα πυκνό υποσύνολο του $C_e(S^{n-1})$. Τότε ένα 0-συμμετρικό αστερόμορφο σώμα K είναι σώμα τομών αν και μόνο αν*

$$\int_{S^{n-1}} \rho_K(u)g(u)du \geq 0,$$

για κάθε $g \in \mathcal{N}$ με $Rg \geq 0$.

Απόδειξη
Έστω $\mathcal{N}$ πυκνό υποσύνολο του $C_e(S^{n-1})$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{g \in \mathcal{N} : Rg \geq 0\}$ είναι πυκνό στο $\{g \in C_e(S^{n-1}) : Rg \geq 0\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\{g \in \mathcal{N} : Rg \geq 0\}$ είναι πυκνό στο $\{g \in C_e(S^{n-1}) : Rg > 0\}$, αφού $R(g+a) = Rg + a(n-1)w_{n-1}$.
Παίρνουμε λοιπόν $g \in \{g \in C_e(S^{n-1}) : Rg > 0\}$.
Αφού το $\mathcal{N}$ είναι πυκνό στο $C_e(S^{n-1})$ θα υπάρχει ακολουθία $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{N}$ με $g_m \longrightarrow g \in C_e(S^{n-1})$. Θέλουμε για μεγάλα m, να ισχύει $Rg_m \geq 0$. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε θα υπάρχει μια ακολουθία στοιχείων στην σφαίρα $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ με $x_k \longrightarrow x \in S^{n-1}$ και υποακολουθία (g_{m_k}) της (g_m) με $Rg_{m_k}(x_k) < 0$. Αφού $Rg \in C_e(S^{n-1})$ και $Rg_{m_k} \longrightarrow Rg$ ομοιόμορφα, (αφού $g_{m_k} \longrightarrow g \in C_e(S^{n-1})$ ομοιόμορφα), θα έχουμε

$$0 < Rg(x) < Rg(x) - Rg_{m_k}(x_k) = Rg(x) - Rg(x_k) + Rg(x_k) - Rg_{m_k}(x_k) \longrightarrow 0$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα το $\{g \in \mathcal{N} : Rg \geq 0\}$ είναι πυκνό στο $\{g \in C_e(S^{n-1}) : Rg \geq 0\}$.

Από την σχέση (3.1.8) έχουμε ότι ένα 0-συμμετρικό αστερόμορφο σώμα K είναι σώμα τομών αν και μόνο αν $\int_{S^{n-1}} \rho_K(u)g(u)du \geq 0$ για $g \in C_e^\infty(S^{n-1})$ με $Rg \geq 0$. Όμως το $C_e^\infty(S^{n-1})$ είναι πυκνό στο $C_e(S^{n-1})$.

Συνεπώς, η συνθήκη που εμφανίζεται στην (3.1.8) είναι ισοδύναμη με την συνθήκη που εμφανίζεται στο Λήμμα 3.2.3, αφού και οι δύο είναι ισοδύναμες με το ότι $\int_{S^{n-1}} \rho_K(u)g(u)du \geq 0$, για κάθε $g \in C_e(S^{n-1})$ με $Rg \geq 0$.

Πρόταση 3.2.2 *Έστω K 0-συμμετρικό αστερόμορφο σώμα. Αν το K είναι σώμα τομών και L, M συμμετρικά αστερόμορφα σώματα L, M, ισχύει*

$$I_i L \subseteq I_i M \Rightarrow \widetilde{V}(L, i; K, 1; B_n) \leq \widetilde{V}(M, i; K, 1; B_n) \quad (*)$$

Αντίστροφα, έστω M ένα κυρτό σώμα στο $\mathcal{F}_e^2$ (σύνολο των κυρτών C^2 σωμάτων με θετική καμπυλότητα Gauss). Τότε, αν ισχύει η $(*)$ για κάθε L που ανήκει σε κάποιο πυκνό κώνο του συνόλου $\mathcal{K}_e^n$ των κυρτών συμμετρικών σωμάτων, το K είναι σώμα τομών.

Απόδειξη

Το ευθύ της πρότασης προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 3.2.2.

Για το αντίστροφο τώρα, θεωρούμε κυρτό σώμα $M \in \mathcal{F}_e^2$ και μια άρτια συνάρτηση $q \in C^2(S^{n-1})$. Τότε η ακτινική συνάρτηση ρ_M του M είναι επίσης άρτια και ανήκει στο $C^2(S^{n-1})$ (όπως είδαμε και στο τέλος της παραγράφου 3.1.2), οπότε το ίδιο ισχύει για κάθε συνάρτηση $\rho_M(u) - tq(u),\ t > 0$. Και για μικρά t, αφού $\rho_M > 0$ και το S^{n-1} είναι συμπαγές, ισχύει ότι

$$\rho_M(u) - tq(u) > 0, \quad u \in S^{n-1}.$$

Για κάθε $t > 0$ που ικανοποιεί αυτή τη σχέση, θεωρούμε το σύνολο

$$M_t = \left\{ru : \ u \in S^{n-1}, 0 \leq r \leq \rho_M(u) - tq(u)\right\}.$$

Θεωρούμε σώμα M_t, με κέντρο το 0 και ακτινική συνάρτηση $\rho_M - tq$. Επίσης θεωρούμε τις κλειστές επιφάνειες ϑM_t που δίνονται από τις απεικονίσεις της S^{n-1} στον $\mathbb{R}^n$,

$$u \longmapsto \rho_M(u)u - tq(u)u.$$

Ορίζεται έτσι μια οικογένεια μικρών παραμορφώσεων του ϑM.

Η καμπυλότητα Gauss της ϑM_t εκφράζεται συναρτήσει των παραγώγων δεύτερης τάξης της συνάρτησης $\rho_M(u)u - tq(u)u$ (βλ. τέλος της παραγραφου 3.1.2). Αφού η καμπυλότητα Gauss της ρ_M είναι παντού θετική, έπεται ότι για μικρά t η επιφάνεια ϑM_t έχει επίσης θετική καμπυλότητα, άρα το M_t ανήκει στο $\mathcal{F}_e^2$.

Οι συναρτήσεις q, ρ_M ανήκουν στο $C_e^2(S^{n-1})$, το οποίο είναι πυκνό στο $C_e(S^{n-1})$ και

$$\rho_M^i - (\rho_M - tq)^i = \rho_M^i - \rho_M^i(1 - tq\rho_M^{-1})^i = \rho_M^i - \rho_M^i\big(1 - itq\rho_M^{-1} + O(t^2q^2\rho_M^{-2})\big)$$

$$= itq\rho_M^{i-1} + O(t^2) \quad \in C_e^2(S^{n-1}).$$

Θεωρούμε τώρα το σύνολο

$$\mathcal{N} = \left\{c\rho_M^i - \rho_L^i : c > 0,\ L \in \mathcal{K}_e^n\right\}$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι το $\mathcal{N}$ είναι πυκνό στο $\left\{q\rho_M^{i-1} : q \in C_e^2(S^{n-1})\right\}$, αφού για τυχούσα $q \in C_e^2(S^{n-1})$ η $q\rho_M^{i-1}$ προσεγγίζεται από την $\frac{1}{it}\rho_M^i - \frac{1}{it}\rho_L^i$, όπου L το σώμα με ακτινική συνάρτηση την $\rho_M - tq$ και $\frac{1}{it}\rho_L^i = \left(\rho_{(it)^{-1/i}L}\right)^i$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $\mathcal{N}$ είναι πυκνό στο $C_e(S^{n-1})$.
Έστω $g \in C_e(S^{n-1})$. Η συνάρτηση ρ_M^{i-1} είναι γνήσια θετική, συνεχής και άρτια, οπότε $\frac{g}{\rho_M^{i-1}} \in C_e(S^{n-1})$. Και αφού το $C_e^2(S^{n-1})$ είναι πυκνό στο $C_e(S^{n-1})$ μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις $q \in C_e^2(S^{n-1})$ που να προσεγγίζουν την $\frac{g}{\rho_M^{i-1}}$, οπότε μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις $q\rho_M^{i-1}$ οι οποίες θα προσεγγίζουν την $g \in C_e(S^{n-1})$.
Άρα το $\{q\rho_M^{i-1} : q \in C_e^2(S^{n-1})\}$ είναι πυκνό στο $C_e(S^{n-1})$ και συνεπώς το $\mathcal{N}$ είναι πυκνό στο $C_e(S^{n-1})$.

Έστω $g \in \mathcal{N}$. Η g έχει τη μορφή $g = c\rho_M^i - \rho_L^i$ για κάποιο $L \in \mathcal{K}_e^n$. Τότε από το λήμμα 3.2.1 έχουμε ότι

$$c^{-1}Rg = (n-1)\big(\rho_{I_iM} - \rho_{I_i(c^{-1/i}L)}\big) \qquad (**)$$

και

$$c^{-1}\int_{S^{n-1}} \rho_K(u)g(u)du = \int_{S^{n-1}} \rho_K(u)\big(\rho_M^i - c^{-1}\rho_L^i\big)(u)du$$

$$= \int_{S^{n-1}} \rho_K(u)\rho_M^i(u)du - \int_{S^{n-1}} c^{-1}\rho_K(u)\rho_L^i(u)du.$$

Από τον ορισμό των δυικών μικτών όγκων παίρνουμε τελικά ότι

$$\frac{c^{-1}}{n}\int_{S^{n-1}} \rho_K(u)g(u)du = \widetilde{V}(M,i;K,1;B_n) - \widetilde{V}(c^{-1/i}L,i;K,1;B_n) \ (***)$$

Έστω ότι $Rg \geq 0$. Από την $(**)$ έπεται ότι $I_i(c^{-1/i}L) \subseteq I_iM$.

Έστω $\mathcal{C}$ ο πυκνός κώνος που αναφέρεται στην υπόθεση.
Θεωρούμε ακολουθία σωμάτων $(L_n) \in \mathcal{C}$ $L_n \longrightarrow L$ ως προς την μετρική Hausdorff. Τότε, υπάρχουν $a_n > 0$ έτσι ώστε

$$a_nL_n \longrightarrow L,\ n \longrightarrow \infty$$

και
$$a_n L_n \subseteq L,$$
για κάθε n. Οπότε παίρνουμε ότι $I_i(c^{-1/i}a_nL_n) \subseteq I_iM$.
Έτσι από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\widetilde{V}(c^{-1/i}a_nL_n, i; K, 1; B_n) \leq \widetilde{V}(M, i; K, 1; B_n),$$

και λόγω της συνέχειας των δυικών μικτών όγκων

$$\widetilde{V}(c^{-1/i}a_nL_n, i; K, 1; B_n) \longrightarrow \widetilde{V}(c^{-1/i}L, i; K, 1; B_n).$$

Οπότε
$$\widetilde{V}(c^{-1/i}L, i; K, 1; B_n) \leq \widetilde{V}(M, i; K, 1; B_n).$$
Από την $(***)$ παίρνουμε τότε ότι

$$\int_{S^{n-1}} \rho_K(u)g(u)du \geq 0,$$

για κάθε $g \in \mathcal{N}$ με $Rg \geq 0$. Κι έτσι το λήμμα 3.2.3 μας δίνει ότι το K είναι σώμα τομών.

Πρόταση 3.2.3 *Έστω K κυρτό σώμα, στο $\mathcal{F}_e^2$, το οποίο δεν είναι σώμα τομών. Τότε κάθε πυκνός κώνος στο $\mathcal{K}_e^n$ περιέχει ένα κυρτό σώμα L έτσι ώστε*

$$I_iL \subset I_iK,$$

αλλά
$$\widetilde{W}_{n-1-i}(K) < \widetilde{W}_{n-1-i}(L).$$

Απόδειξη
Από την πρόταση 3.2.2, αν πάρουμε $K = M$, αφού το K δεν είναι σώμα τομών, σε κάθε πυκνό κώνο του $\mathcal{K}_e^n$ θα υπάρχει ένα σώμα L τέτοιο ώστε $I_iL \subset I_iK$, αλλά
$$\widetilde{V}(L, i; K, 1; B_n) > \widetilde{V}(K, i+1; B_n) = \widetilde{W}_{n-1-i}(K) \quad (*)$$
Από την σχέση (3.1.24) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(L, i; K, 1; B_n)^{i+1} &\leq \widetilde{V}(L, i+1; B_n)^i \widetilde{V}(K, i+1; B_n)\\ &= \widetilde{W}_{n-1-i}(L)^i \widetilde{W}_{n-1-i}(K)\end{aligned}$$

και λόγω της $(*)$ έχουμε

$$\widetilde{W}_{n-1-i}(K)^{i+1} < \widetilde{W}_{n-1-i}(L)^{i}\widetilde{W}_{n-1-i}(K)$$

άρα

$$\widetilde{W}_{n-1-i}(K) < \widetilde{W}_{n-1-i}(L).$$

Πόρισμα 3.2.1 *Έστω K κυρτό σώμα, στο $\mathcal{F}_e^2$, το οποίο δεν είναι σώμα τομών. Τότε σε κάθε πυκνό κώνο του $\mathcal{K}_c^n$ υπάρχει σώμα L, έτσι ώστε*

$$IL \subset IK$$

αλλά

$$|K|_{(n)} < |L|_{(n)}.$$

Απόδειξη
Αν στην πρόταση 3.2.3 πάρουμε $i = n-1$ τότε από τον ορισμό των δυικών *Quermassintegrals* ισχύει οτι $\widetilde{W}_0(K) = |K|_{(n)}$ και $I_{n-1}K = IK$. Συνεπώς το αποτέλεσμα είναι άμεσο.

Θεώρημα 3.2.1 *Το πρόβλημα των Busemann-Petty έχει καταφατική απάντηση στον $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν κάθε κυρτό σώμα, με κέντρο το 0, είναι σώμα τομών.*

Απόδειξη
Από την πρόταση 3.2.1 έχουμε ότι ικανή συνθήκη για να έχουμε καταφατική απάντηση είναι, κάθε κυρτό 0-συμμετρικό σώμα να είναι σώμα τομών.

Θα δείξουμε τώρα ότι η ύπαρξη σωμάτων που δεν είναι σώματα τομών δίνει αρνητική απάντηση. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα 0-συμμετρικό κυρτό σώμα K το οποίο δεν είναι σώμα τομών. Τότε από την πρόταση 3.2.2 με $i = n-1$ και $M = B_n$, (προφανώς $B_n \in \mathcal{F}_e^2$) υπάρχει κυρτό σώμα L τέτοιο ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι

$$IL \subseteq IB_n \widetilde{V}_1(L,K) > \widetilde{V}_1(B_n,K) \qquad (*)$$

Τα κυρτά συμμετρικά σώματα που προέρχονται από μικρές μεταβολές (ως προς την μετρική Hausdorff) του K εξακολουθούν να ικανοποιούν την ανισότητα (λόγω της συνέχειας των δυικών μικτών όγκων για κυρτά σώματα). Συνεπώς πάλι από την πρόταση 3.2.2, αυτά δεν είναι σώματα τομών. Και αφού το $\mathcal{F}_e^2$

είναι πυκνό στο $\mathcal{K}_e^n$ μπορούμε να βρούμε κυρτά σώματα στο $\mathcal{F}_e^2$, τα οποία δεν είναι σώματα τομών. Μπορούμε δηλαδή να υποθέσουμε ότι το K ανήκει στο $\mathcal{F}_e^2$ οπότε, από το πόρισμα 3.2.1, θα υπάρχει κυρτό σώμα L τ.ω.

$$IL \subset IK$$

αλλά

$$|K|_{(n)} < |L|_{(n)}.$$

Αυτό δίνει αρνητική απάντηση στο πρόβλημα των Busemann-Petty.

3.3 Το Δεύτερο Κύριο Θεώρημα

Λήμμα 3.3.1 *Έστω μ tempered μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι επιπλέον άρτια ομογενής κατανομή τάξης $-n+1$. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο Borel μέτρο μ_0 στην S^{n-1}, τέτοιο ώστε*

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d\mu(x) = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \phi(t\theta) dt d\mu_0(\theta),$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$.

Απόδειξη
Κατ' αρχήν θα δείξουμε ότι το $\mu(\{0\}) = 0$.
Το μ μπορεί να γραφτεί ως $\mu = \mu_1 + a\delta$, όπου μ_1 μέτρο, με $\mu_1(\{0\}) = 0$ και δ το μέτρο Dirac με μάζα στο 0.
Το μ είναι ομογενές τάξης $-n+1$ οπότε για κάθε μη αρνητική test function ϕ με $\phi(0) > 0$ και για κάθε $t > 0$, ισχύει ότι

$$\langle \mu, \phi(x/t) \rangle = t \langle \mu, \phi \rangle$$

Άρα

$$t \langle \mu, \phi \rangle \longrightarrow 0, \tag{3.3.1}$$

καθώς $t \longrightarrow 0^+$.
Από την άλλη

$$\langle \mu, \phi(x/t) \rangle = \langle \mu_1 + a\delta, \phi(x/t) \rangle = \langle \mu_1, \phi(x/t) \rangle + a\phi(0). \tag{3.3.2}$$

Αφού $\phi \in \mathcal{S}$, ισχύει $\lim\limits_{t \to 0^+} \phi(x/t) = 0$.

Επιπλέον, αν $a > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + \|x\|_2\big)^{-a} d\mu < \infty$$

τότε $|\phi(x)| \leq c\big(1 + \|x\|_2\big)^{-a}$ για κάποιο $c > 0$, άρα

$$\|\phi(x/t)| \leq c\big(1 + \frac{\|x\|_2}{t}\big)^{-a} \leq c\big(1 + \|x\|_2\big)^{-a},$$

αν $t < 1$. Συνεπώς από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι

$$\langle \mu_1, \phi(x/t) \rangle \longrightarrow 0$$

οπότε από τις σχέσεις (3.3.1),(3.3.2) παίρνουμε ότι $a = 0$.

Για κάθε Borel σύνολο $A \subset S^{n-1}$ και διάστημα $(a, b] \subset [0, \infty)$ ορίζουμε το σύνολο

$$A \times (a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : x = t\theta,\ t\ \in (a, b],\ \theta \in A\}.$$

Έστω ϕ μη αρνητική C^∞ συνάρτηση με $\int \phi = 1$ και $\text{supp}\phi \subseteq B_n$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο προσέγγισης στη μονάδα, ορίζουμε

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \phi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Τότε η ϕ_ε είναι $\in C^\infty$ συνάρτηση με $\int \phi_\varepsilon = 1$, $\text{supp}\phi_\varepsilon \subseteq B_n(\varepsilon)$, όπου $B_n(\varepsilon)$ η ανοιχτή μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$.
Τότε, $\chi_{A\times[0,1]} * \phi_\varepsilon \in \mathcal{S}$ και

$$\chi_{A\times[0,1]} * \phi_\varepsilon \longrightarrow \chi_{A\times[0,1]}\ \sigma.\pi.,$$

καθώς $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, ([W.Z.], σελ.123).
Και, επειδή το μ είναι ομογενές τάξης $-n + 1$

$$\big\langle \mu, \big(\chi_{A\times[0,1]} * \phi_\varepsilon\big)(x/k) \big\rangle = \int \big(\chi_{A\times[0,1]} * \phi_\varepsilon\big)(x/k) d\mu(x)$$

$$= k \int \big(\chi_{A\times[0,1]} * \phi_\varepsilon(x) d\mu(x) = k \left\langle \mu, \big(\chi_{A\times[0,1]} * \phi_\varepsilon\big) \right\rangle \tag{3.3.3}$$

Έστω $F_\varepsilon(y) = \big(\chi_{A\times[0,1]} * \phi_\varepsilon\big)(y),\ 0 < \varepsilon < 1$. Οι F_ε είναι φραγμένες από μια $\mu-$ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Πράγματι για κάθε y ισχύει

$$F_\varepsilon(y) = \big(\chi_{A\times[0,1]} * \phi_\varepsilon\big)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A\times[0,1]}(z) \phi_\varepsilon(y - z) dz.$$

Η ολοκληρούμενη συνάρτηση δεν μηδενίζεται μόνο αν $z \in A \times [0,1], y - z \in B_n(\varepsilon)$ οπότε $y \in \big(A \times [0,1]\big) + B_n(\varepsilon) \subseteq A \times [0,1] + B_n = D$. Άρα

$$|F_\varepsilon| \leq \|F_\varepsilon\|_\infty \cdot \chi_D$$

Επιπλέον,

$$\big|F_\varepsilon(y)\big| = \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A\times[0,1]}(y-u)\phi_\varepsilon(u)du\Big|$$

$$\leq \int_{B_n(\varepsilon)} \phi_\varepsilon(u)du = \int_{B_n(\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{u}{\varepsilon})du = \int_{B_n(\varepsilon)} \phi(u)du = 1$$

Άρα $|F_\varepsilon| \leq \chi_D$, για κάθε $0 < \varepsilon < 1$. Οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Συγκλισης, παίρνουμε

$$\big\langle \mu, \big(\chi_{A\times[0,1]} * \phi_\varepsilon\big)(x/k)\big\rangle \longrightarrow \big\langle \mu, \big(\chi_{A\times[0,1]}\big)(x/k)\big\rangle$$

και

$$k\left\langle \mu, \big(\chi_{A\times[0,1]} * \phi_\varepsilon\big)\right\rangle \longrightarrow k\left\langle \mu, \big(\chi_{A\times[0,1]}\big)\right\rangle$$

καθώς $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.
Οπότε από την (3.3.3) και τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\big\langle \mu, \chi_{A\times[0,1]}(x/k)\big\rangle = k\left\langle \mu, \chi_{A\times[0,1]}\right\rangle = k\mu(A \times [0,1]).$$

Ισχύει λοιπόν ότι για κάθε Borel $A \subset S^{n-1}$ και $k > 0$,

$$\mu(A \times [0,k]) = \big\langle \mu, \chi_{A\times[0,1]}(x/k)\big\rangle = k\mu(A \times [0,1]), \tag{3.3.4}$$

αφού $\chi_{A\times[0,k]}(x) = \chi_{A\times[0,1]}(x/k)$.
Έτσι, για κάθε Borel $A \subset S^{n-1}$ και για κάθε a, b με $0 \leq a < b$, παίρνουμε ότι

$$\mu\big(A \times (a,b]\big) = \mu\big(A \times [0,b]\big) - \mu\big(A \times [0,a]\big)$$

$$= b\mu\big(A \times [0,1]\big) - a\mu\big(A \times [0,1]\big) = (b-a)\mu\big(A \times [0,1]\big)$$

Ορίζουμε τώρα μέτρο πάνω στην S^{n-1}, μ_0, με

$$\mu_0(A) = \mu(A \times [0,1]),$$

για κάθε $Borel$, $A \subset S^{n-1}$.
Και τότε

$$\int_{S^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} \chi_{A\times(a,b]}(t\theta)dtd\mu_0(\theta) = \int_{S^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} \chi_A(\theta)\chi_{(a,b]}(t)dtd\mu_0(\theta) =$$

$$\int_{S^{n-1}} \chi_A(\theta)(b-a)d\mu_0(\theta) = (b-a)\mu_0(A)$$
$$= \mu\big(A \times (a,b]\big) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\chi_{A\times(a,b]}\big)d\mu.$$

Συνεπώς η ζητούμενη ισότητα ισχύει για συναρτήσεις της μορφής

$$\chi_A \times (a,b].$$

Για να αποδειχθεί για $\phi \in \mathcal{S}$, αρκεί να αποδειχθεί για τις συναρτήσεις ϕ^+, ϕ^-. Κάθε μία όμως από αυτές είναι όριο μιας αύξουσας ακολουθίας συναρτήσεων $\psi_n \geq 0$, οι οποίες είναι γραμμικοί συνδιασμοί συναρτήσεων της παραπάνω μορφής. Άρα η ισότητα ισχύει για τις ψ_n, οπότε και για την ϕ.

Θεώρημα 3.3.1 *Ένα αστερόμορφο σώμα K είναι σώμα τομών αν και μόνο αν η $\|x\|_K^{-1}$ είναι θετικά ορισμένη κατανομή.*

Απόδειξη
Αν $\phi \in \mathcal{S}$ και $\theta \in S^{n-1}$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t\theta)dt = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}} (\hat{\phi})^{\wedge}(t\theta)dt.$$

Από την σχέση (3.1.4), με $z = 0$ και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $x = t\xi$, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t\theta)dt = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{\theta^\perp} \hat{\phi}(x)dx$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{S^{n-1}\cap\theta^\perp}\int_0^\infty t^{n-2}\hat{\phi}(t\xi)dtd\xi. \tag{3.3.5}$$

Υποθέτουμε ότι το K είναι σώμα τομών. Έστω μ ένα μέτρο πάνω στην S^{n-1} τέτοιο ώστε $R\mu = \|\theta\|_K^{-1}$. Για κάθε μη αρνητική *test function* ϕ, αφού η $\|x\|_K^{-1}$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, από την σχέση (3.3.5) έχουμε

$$\big\langle(\|x\|_K^{-1})^{\wedge}, \phi\big\rangle = \Big\langle \|x\|_K^{-1}, \hat{\phi}\Big\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^{-1}\hat{\phi}(x)dx.$$

Με αλλαγή μεταβλητής $x = t\theta$ και αφού η $\|x\|_K^{-1}$ είναι ομογενής τάξης -1 παίρνουμε ότι

$$\Big\langle\big(\|x\|_K^{-1}\big)^{\wedge}, \phi\Big\rangle = \int_{S^{n-1}}\int_0^\infty t^{n-1}\hat{\phi}(t\theta)\|t\theta\|_K^{-1}dtd\theta$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty t^{n-2}\hat{\phi}(t\theta)\|\theta\|_K^{-1} dt d\theta = \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K^{-1} \int_0^\infty t^{n-2}\hat{\phi}(t\theta) dt d\theta$$

$$= \left\langle \|\theta\|_K^{-1}, \int_0^\infty t^{n-2}\hat{\phi}(t\theta)dt \right\rangle = \left\langle R\mu, \int_0^\infty t^{n-2}\hat{\phi}(t\theta)dt \right\rangle$$

$$= \left\langle \mu, R\Big(\int_0^\infty t^{n-2}\hat{\phi}(t\theta)dt\Big) \right\rangle = \left\langle \mu, \int_{S^{n-1}\cap\theta^\perp} \Big(\int_0^\infty t^{n-2}\hat{\phi}(t\xi)dt\Big)d\xi \right\rangle$$

$$= (2\pi)^{n-1} \left\langle \mu, \int_{\mathbb{R}} \phi(t\theta)dt \right\rangle \geq 0.$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την σχέση (3.3.5). Και αφού η ϕ είναι οποιαδήποτε μη αρνητική test function, παίρνουμε ότι η $\|x\|_K^{-1}$ είναι θετικά ορισμένη κατανομή.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η $\|x\|_K^{-1}$ είναι μια θετικά ορισμένη κατανομή. Τότε -όπως είδαμε και στη παράγραφο 3.1.1- ο μετασχηματισμός Fourier της είναι ένα tempered μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$. Σαν μετασχηματισμός Fourier μιας ομογενούς κατανομής τάξης -1, το μέτρο αυτό είναι ομογενής κατανομή τάξης $-n+1$, η οποία είναι επιπλέον άρτια επειδή το K είναι συμμετρικό.
Από το λήμμα 3.3.1, υπάρχει ένα πεπερασμένο Borel μέτρο μ_0 στην S^{n-1} τέτοιο ώστε για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)d\mu(x) = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \phi(t\theta)dtd\mu_0(\theta)$$

Από το λήμμα 3.3.1 και την σχέση (3.1.4) θέτοντας $z=0$, έχουμε ότι για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$

$$\left\langle \|x\|_K^{-1}, \phi \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \left\langle \big(\|x\|_K^{-1}\big)^\wedge, \hat{\phi} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \left\langle \mu, \hat{\phi} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(t\theta)dtd\mu_0(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \int_{\langle\theta,x\rangle=0} \phi(x)dxd\mu_0(\theta)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \left\langle \mu_0, \int_{\langle\theta,x\rangle=0} \phi(x)dx \right\rangle$$

και κάνοντας αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες, $x = t\theta$, έχουμε

$$\left\langle \|x\|_K^{-1}, \phi \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \left\langle \mu_0, \int_{S^{n-1}\cap\theta^\perp} \int_0^\infty \phi(t\xi)t^{n-2}dtd\xi \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \left\langle \mu_0, R\Big(\int_0^\infty \phi(t\theta)t^{n-2}dt\Big) \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \left\langle R\mu_0, \int_0^\infty \phi(t\theta)t^{n-2}dt \right\rangle. \tag{3.3.6}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}\left\langle \|x\|_K^{-1}, \phi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^{-1} \phi(x) dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^{\infty} \|\theta\|_K^{-1} t^{n-2} \phi(t\theta) dt d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K^{-1} \int_0^{\infty} t^{n-2} \phi(t\theta) dt d\theta \qquad (3.3.7)\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^{-1} \phi(x) dx$ υπάρχει και αυτό μπορούμε να το δούμε ακολουθώντας τον παρακάτω συλλογισμό:
Το K είναι φραγμένο οπότε υπάρχει σταθερά $c > 0$ με $\|x\|_K^{-1} \leq c\|x\|_2^{-1}$. Άρα

$$\begin{aligned}\int_{B_n} \|x\|_K^{-1} |\phi(x)| dx \leq c \int_{B_n} \|x\|_2^{-1} |\phi(x)| dx &\leq \|\phi\|_\infty c \int_{S^{n-1}} \int_0^1 t^{n-1} t^{-1} dt d\theta \\ &= \|\phi\|_\infty \int_0^1 t^{n-2} dt < +\infty,\end{aligned}$$

αν $n \geq 2$. Επιπλέον,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_n} \|x\|_K^{-1} |\phi(x)| dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_n} \|x\|_2^{-1} |\phi(x)| dx.$$

Αφού $\phi \in \mathcal{S}$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\|x\|_2^{-1} |\phi(x)|}{\|x\|_2^{-n-1}} = 0$, άρα υπάρχει σταθερά $b > 0$ με

$$\|x\|_2^{-1} |\phi(x)| \leq b \|x\|_2^{-n-1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_n$. Άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_n} \|x\|_2^{-1} |\phi(x)| dx \leq b \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_n} \|x\|_2^{-n-1} dx = b \int_{S^{n-1}} \int_1^{\infty} t^{-2} dt d\theta < +\infty.$$

Έστω v μια άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση του θ πάνω στην S^{n-1}. Κάθε τέτοια συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με την μορφή $\int_0^\infty t^{n-2} \phi(t\theta) dt$ για κάποιο $\phi \in \mathcal{S}$. Διότι, είναι δυνατό να θεωρήσουμε μία μη αρνητική συνάρτηση $u \in \mathcal{S}$ η οποία μηδενίζεται σε μια περιοχή του 0 και έχει την ιδιότητα ότι $\int_{\mathbb{R}} t^{n-2} u(t) dt = 1$, οπότε η συνάρτηση v θα μπορεί να γραφτεί ως

$$v(\theta) = \int_0^{\infty} t^{n-2} u(t) v(\theta) dt \quad \in \mathcal{S}$$

και η συνάρτηση $\phi(x) = u(t)v(\theta)$, όπου $x = t\theta$, ανήκει στο $\mathcal{S}$.

Έτσι, από τις σχέσεις (3.3.6), (3.3.7) προκύπτει ότι οι ποσότητες $\|\theta\|_K^{-1}$ και $\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} R\mu_0$, αν τις δούμε σαν συναρτησοειδή στο $C(S^{n-1})$, συμπίπτουν για κάθε συνάρτηση $\phi \in C^\infty(S^{n-1})$. Επειδή το $C^\infty(S^{n-1})$ είναι πυκνό στο $C(S^{n-1})$, τα συναρτησοειδή αυτά είναι ίσα, οπότε απο τον ορισμό των σωμάτων τομών, το K είναι τέτοιο.

3.4 Το Τρίτο Κύριο Θεώρημα

Λήμμα 3.4.1 *Αν $\phi \in \mathcal{S}$ άρτια συνάρτηση $\xi \in S^{n-1}$ και $-1 < q < 0$, ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, x\rangle|^{-q-1}\phi(x)dx = \frac{-1}{2\Gamma(1+q)\sin\frac{q\pi}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^q\hat{\phi}(t\xi)dt.$$

Απόδειξη
Έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, x\rangle|^{-q-1}\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}}|t|^{-q-1}\int_{\langle\xi,x\rangle=t}\phi(x)dxdt = \left\langle |t|^{-q-1}, R\phi(\xi;t)\right\rangle$$

(από την σχέση (3.1.1))

$$= \left\langle \frac{-1}{2\Gamma(q+1)\sin\frac{q\pi}{2}}(|s|^q)\hat{}(t), R\phi(\xi;t)\right\rangle$$

$$= \frac{-1}{2\Gamma(q+1)\sin\frac{q\pi}{2}}\left\langle(|s|^q)\hat{}(t), R\phi(\xi;t)\right\rangle$$

$$= \frac{-1}{2\Gamma(q+1)\sin\frac{q\pi}{2}}\left\langle(|s|^q), \big(R\phi(\xi;t)\big)\hat{}(s)\right\rangle.$$

Την τελευταία ισότητα την πήραμε λόγω της αντιμεταθετικότητας του μετασχηματισμού Fourier στο εσωτερικό γινόμενο. Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.1.3$'$) καταλήγουμε στην ζητούμενη ισότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, x\rangle|^{-q-1}\phi(x)dx = \frac{-1}{2\Gamma(q+1)\sin\frac{q\pi}{2}}\left\langle(|s|^q), \hat{\phi}(s\xi)\right\rangle$$

$$= \frac{-1}{2\Gamma(q+1)\sin\frac{q\pi}{2}}\int_{\mathbb{R}}|t|^q\hat{\phi}(t\xi)dt.$$

Θεώρημα 3.4.1 *Έστω K 0-συμμετρικό αστερόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με C^∞ σύνορο. Υποθέτουμε ότι $\xi \in S^{n-1}$ κι έστω A_ξ η συνάρτηση παράλληλων τομών του K. Για $q \in \mathbb{C}$ με $Req > -1$, $q \neq n-1$, ισχύει οτι*

$$A_\xi^{(q)}(0) = \frac{\cos\frac{q\pi}{2}}{\pi(n-q-1)}\left(\|x\|^{-n+q+1}\right)^\wedge(\xi)$$

Απόδειξη
Υποθέτουμε αρχικά ότι $-1 < q < 0$. Η συνάρτηση $A_\xi(z) = \int_{\langle \xi, x\rangle = z} \chi(\|x\|_K)dx$ που ορίστηκε στη παράγραφο 3.1.2 είναι άρτια, αφού το K είναι 0-συμμετρικό. Από την σχέση (3.1.9) έχουμε

$$\begin{aligned}
A_\xi^{(q)}(0) &= \left\langle \frac{t_+^{-q-1}}{\Gamma(-q)}, A_\xi(t) \right\rangle = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^\infty z^{-q-1} A_\xi(z) dz \\
&= \frac{1}{2\Gamma(-q)} \int_{-\infty}^\infty |z|^{-q-1} \int_{\langle \xi, x\rangle = z} \chi(\|x\|_K) dx dz \\
&= \frac{1}{2\Gamma(-q)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, x\rangle|^{-q-1} \chi(\|x\|_K) dx
\end{aligned}$$

και κάνοντας αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
A_\xi^{(q)}(0) &= \frac{1}{2\Gamma(-q)} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-q-2} |\langle \xi, \theta\rangle|^{-q-1} \chi(r\|\theta\|_K) d\theta dr \\
&= \frac{1}{2\Gamma(-q)} \int_{S^{n-1}} |\langle \xi, \theta\rangle|^{-q-1} \int_0^\infty r^{n-q-2} \chi(r\|\theta\|_K) dr d\theta \\
&= \frac{1}{2\Gamma(-q)} \int_{S^{n-1}} |\langle \xi, \theta\rangle|^{-q-1} \int_0^{1/\|\theta\|_K} r^{n-q-2} dr d\theta \\
&= \frac{1}{2(n-q-1)\Gamma(-q)} \int_{S^{n-1}} |\langle \xi, \theta\rangle|^{-q-1} \|\theta\|_K^{-n+q+1} d\theta.
\end{aligned}$$

Θεωρούμε την $A_\xi^{(q)}(0)$ σαν συνάρτηση του $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, οπότε για κάθε άρτια $\phi \in \mathcal{S}$, έχουμε

$$\left\langle A_\xi^{(q)}(0), \phi(\xi) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} A_\xi^{(q)}(0) \phi(\xi) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2(n-q-1)\Gamma(-q)} \Big(\int_{S^{n-1}} |\langle \xi, \theta\rangle|^{-q-1} \|\theta\|_K^{-n+q+1} d\theta \Big) \phi(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{2(n-q-1)\Gamma(-q)} \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K^{-n+q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, \theta\rangle|^{-q-1} \phi(\xi) d\xi d\theta =$$

(από το λήμμα 3.4.1)

$$= \frac{-1}{4(n-q-1)\Gamma(-q)\Gamma(1+q)\sin\frac{q\pi}{2}} \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K^{-n+q+1} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^q \hat{\phi}(t\theta) dt d\theta$$

$$= \frac{\cos\frac{q\pi}{2}}{\pi(n-q-1)} \left\langle \left(\|x\|_K^{-n+q+1} \right)^\wedge(\xi), \phi(\xi) \right\rangle. \tag{3.4.1}$$

Την τελευταία ισότητα την παίρνουμε ως εξής:
Για την συνάρτηση Γάμμα ισχύει ότι

$$\Gamma(-q)\Gamma(1+q) = \frac{-\pi}{\sin q\pi} = \frac{-\pi}{2\sin\frac{q\pi}{2}\cos\frac{q\pi}{2}}$$

άρα

$$2\sin\frac{q\pi}{2}\Gamma(-q)\Gamma(1+q) = \frac{-\pi}{\cos\frac{q\pi}{2}},$$

([W] σελ.212) . Επιπλέον

$$\Big\langle \big(\|x\|_K^{-n+q+1}\big)^\wedge(\xi), \phi(\xi)\Big\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\|x\|_K^{-n+q+1}\big)^\wedge(\xi)\phi(\xi)d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^{-n+q+1}\hat{\phi}(x)dx.$$

Με σφαιρικές συντεταγμένες $x = t\theta$ το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \big(\|\theta\|_K t\big)^{-n+q+1} t^{n-1}\hat{\phi}(t\theta)d\theta dt$$

$$= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \big(\|\theta\|_K\big)^{-n+q+1} t^{q}\hat{\phi}(t\theta)d\theta dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K^{-n+q+1} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^q\hat{\phi}(t\theta)dtd\theta$$

Και εφ΄ όσον η σχέση (3.4.1) ισχύει για κάθε άρτια test function ϕ παίρνουμε το θεώρημα για $-1 < q < 0$, αφού οι δύο συναρτήσεις του ξ που εμφανίζονται στο συμπέρασμα του θεωρήματος είναι άρτιες.

Θα δείξουμε τώρα την ζητούμενη σχέση για κάθε q με $\mathrm{Re}q > -1$ και $q \neq n-1$.
Η $\big(\|x\|_K^{-n+q+1}\big)^\wedge$ είναι αναλυτική ως προς το q στο $\{q \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}q > -1\}$, (η απόδειξη ακολουθεί μετά το τέλος της απόδειξης του θεωρήματος).
Για κάθε άρτια $\phi \in \mathcal{S}$ οι συναρτήσεις

$$q \longmapsto \frac{\cos\frac{q\pi}{2}}{\pi(n-q-1)}\Big\langle \big(\|x\|_K^{-n+q+1}\big)^\wedge(\xi), \phi\Big\rangle$$

και

$$q \longmapsto \Big\langle A_\xi^{(q)}(0), \phi(\xi)\Big\rangle$$

(όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1.2 για την $A_\xi^{(q)}(0)$) είναι αναλυτικές στο συνεκτικό σύνολο $\{q \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}q > -1,\ q \neq n-1\}$.

Στο πρώτο μέρος της απόδειξης του θεωρήματος είδαμε ότι οι συναρτήσεις αυτές συμπίπτουν στο διάστημα $-1 < q < 0$, οπότε θα συμπίπτουν και στο $\{q \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}q > -1,\ q \neq n-1\}$ (αρχή της αναλυτικής συνέχισης). Και αφού η $\phi \in \mathcal{S}$ ήταν τυχούσα άρτια συνάρτηση, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Η συνάρτηση

$$q \longmapsto \left\langle \left(\|x\|_K^{-n+q+1}\right)^\wedge(\xi), \phi(\xi) \right\rangle$$

είναι αναλυτική στο $\{q \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}q > -1\}$.

Απόδειξη

Έστω $\phi \in \mathcal{S}$. Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier για κατανομές έχουμε

$$\left\langle \left(\|x\|_K^{-n+q+1}\right)^\wedge(\xi), \phi(\xi) \right\rangle = \left\langle \|x\|_K^{-n+q+1}, \hat{\phi} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^{-n+q+1} \hat{\phi}(x) dx$$

Θέλουμε το ολοκλήρωμα να είναι αναλυτική συνάρτηση του q. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\|x\|_K^{-n+q+h+1} - (\|x\|_K^{-n+q+1}\right) \hat{\phi} dx$$

στο $\mathbb{C}$.

Ορίζουμε $f(q,x) = \|x\|_K^{-n+q+1} \hat{\phi}(x)$. Τότε

$$\frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \left[f(q+h,x) - f(q,x) \right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_q^{q+h} \frac{\partial f}{\partial r}(r,x) dr dx$$

διότι η συνάρτηση $r \longmapsto \frac{\partial f}{\partial r}(r,x) = \|x\|_K^{-n+r+1} \ln \|x\|_K \hat{\phi}(x)$ είναι αναλυτική. (Όπως αποδεικνύεται παρακάτω, υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, έτσι ώστε $\left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,x)\right| \leq g(x)$, και λόγω του ότι $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$ έχουμε τον παραπάνω ισχυρισμό.)

Εκτελώντας μια αλλαγή μεταβλητής $r = q + th$ το παραπάνω ολοκλήρωμα παίρνει την μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial q}(q+th,x) h dt dx.$$

Η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial q}(q+th,x)$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη στο $[0,1] \times \mathbb{R}^n$, οπότε εφαρμόζοντας τον Θεώρημα του Fubini καταλήγουμε στο ότι για να είναι αναλυτική η συνάρτηση $f(q,x)$ αρκεί να υπάρχει το

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial q}(q+th,x) h dx dt.$$

Πρέπει λοιπόν

1.)η $\frac{\partial f}{\partial q}(q,x)$ να είναι συνεχής, οπότε θα έχουμε $\frac{\partial f}{\partial q}(q_n,x) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial q}(q,x)$, καθώς $q_n \longmapsto q$.

2.) να μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, γιατί τότε θα ισχύει και η σύγκλιση των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων.

Έχουμε
$$\frac{\partial f}{\partial q}(q,x) = \|x\|_K^{-n+q+1} \ln \|x\|_K \hat{\phi}(x).$$
1.): Η απεικόνιση $q \longmapsto \frac{\partial f}{\partial q}(q,x)$ είναι προφανώς συνεχής.
2.):Αρκεί για κάθε q με $\mathrm{Re}q > -1$, να υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $g(x)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε
$$\big|\frac{\partial f}{\partial r}(r,x)\big| \leq |g(x)|,$$
για όλα τα r με $|r-q| < \varepsilon$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.
Αφού $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$, η συνάρτηση
$$\|x\|^{-n+q+1}\hat{\phi}$$
είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η
$$\|x\|_K^{-n+q+1} \ln \|x\|_K \hat{\phi}(x)$$
είναι ολοκληρώσιμη, αφού μακριά απο το 0 η $\|x\|_K^{-n+q+1}\hat{\phi}$ είναι μικρότερης τάξης απο οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση, ενώ κοντά στο 0 αυτό εξασφαλίζεται απο την συνθήκη $\mathrm{Re}q > -1$.
Ορίζουμε λοιπόν $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με
$$g(x) = \begin{cases} \|x\|_K^{-n+a+1} |\ln \|x\|_K \hat{\phi}(x)|, & \|x\|_K \geq 1 \\ \|x\|_K^{-n+b+1} |\ln \|x\|_K \hat{\phi}(x)|, & \|x\|_K \leq 1 \end{cases}$$
με $a >\mathrm{Re}q$ και $-1 < b < \mathrm{Re}q$, (έχουμε πάρει $\mathrm{Re}q > -1$). Τότε
$$\left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,x)\right| = \|x\|_K^{-n+Rer+1} |\ln \|x\|_K||\hat{\phi}(x)| \leq |g(x)|,$$
αν $|r-q| < \min\{a-\mathrm{Re}q, \mathrm{Re}q - b\}$. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης και έχουμε ότι
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \big(\|x\|_K^{-n+q+h+1} - \|x\|_K^{-n+q+1}\big)\hat{\phi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial q}(q,x) dx.$$
Συνεπώς η κατανομή $\big(\|x\|_K^{-n+q+1}\big)^\wedge$ είναι αναλυτική συνάρτηση του q στο $\{q \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}q > -1\}$.

Θεώρημα 3.4.2 *Έστω K 0-συμμετρικό αστερόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με C^∞ σύνορο κι έστω $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \neq n-1$. Υποθέτουμε ότι $\xi \in S^{n-1}$ και έστω A_ξ η συνάρτηση παράλληλων τομών του K.*

α.)Αν k άρτιος, τότε

$$\left(\rho_K^{n-k-1}\right)^\wedge(\xi) = (-1)^{k/2}\pi(n-k-1)A_\xi^{(k)}(0)$$

β.)Αν k περιττός, τότε

$$\left(\rho_K^{n-k-1}\right)^\wedge(\xi) = c_k \int_0^\infty \frac{A_\xi(z) - A_\xi(0) - A_\xi''(0)\frac{z^2}{2} - \cdots - A_\xi^{(k-1)}(0)\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}}{z^{k+1}} dz,$$

όπου $c_k = (-1)^{k+1/2}2(n-1-k)k!$, $A_\xi^{(k)}(0)$ η παράγωγος k τάξης της συνάρτησης $A_\xi(z)$ στο 0 και $\left(\rho^{n-k-1}\right)^\wedge$ ο μετασχηματισμός Fourier της κατανομής.

Απόδειξη

Αν το k είναι άρτιο, τότε από το θεώρημα 3.4.1, θέτοντας $q = k$, παίρνουμε ότι

$$A_\xi^{(k)}(0) = \frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{\pi(n-k-1)}\left(\|x\|_K^{-n+k+1}\right)^\wedge(\xi)$$

και αφού $\cos\frac{k\pi}{2} = (-1)^{k/2}$, έχουμε

$$\left(\|x\|_K^{-n+k+1}\right)^\wedge(\xi) = \left(\rho_K^{n-k-1}\right)^\wedge(\xi) = \pi(n-k-1)(-1)^{k/2}A_\xi^{(k)}(0).$$

Έστω τώρα k περιττός.
Οι περιττές παράγωγοι μιας άρτιας συνάρτησης στο μηδέν, είναι μηδέν, άρα έχουμε 0 και στα δύο μέλη της σχέσης του θεωρήματος 3.4.1.
Έστω $q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ με $\mathrm{Re}q > -1$. Τότε

$$A_\xi^{(q)} = \frac{\cos\frac{q\pi}{2}}{\pi(n-q-1)}\left(\|x\|_K^{-n+q+1}\right)^\wedge(\xi),$$

οπότε

$$\Gamma(-q)A_\xi^{(q)} = \Gamma(-q)\frac{\cos\frac{q\pi}{2}}{\pi(n-q-1)}\left(\|x\|_K^{-n+q+1}\right)^\wedge(\xi)$$

Ισχύει όμως (σχέση (3.1.11))

$$\Gamma(-q)A_\xi^{(q)}(0) = \int_0^\infty t^{-q-1}\Big(A_\xi(t) - \sum_{j=0}^{m-2/2}\frac{t^{2j}}{(2j)!}A_\xi^{(2j)}(0)\Big)dt,$$

αν $m-2<Req<m,\ m$ άρτιος. Θέτουμε $m=k+1$ και έχουμε

$$\Gamma(-q)A_\xi^{(q)}(0)=\int_0^\infty t^{-q-1}\Big(A_\xi(t)-\sum_{j=0}^{k-1/2}\frac{t^{2j}}{(2j)!}A_\xi^{(2j)}(0)\Big)dt,$$

οπότε

$$\lim_{q\to k}\Gamma(-q)A_\xi^{(q)}(0)=\lim_{q\to k}\int_0^\infty t^{-q-1}\Big(A_\xi(t)-\sum_{j=0}^{k-1/2}\frac{t^{2j}}{(2j)!}A_\xi^{(2j)}(0)\Big)dt$$

$$=\int_0^\infty t^{-k-1}\Big(A_\xi(t)-\sum_{j=0}^{k-1/2}\frac{t^{2j}}{(2j)!}A_\xi^{(2j)}(0)\Big)dt \tag{3.4.2}$$

αφού η $\int_0^\infty t^{-q-1}\Big(A_\xi(t)-\sum\limits_{j=0}^{k-1/2}\frac{t^{2j}}{(2j)!}A_\xi^{(2j)}(0)\Big)dt$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\{q\in\mathbb{C}: q\neq 0,1,2,\ldots,k-1<\mathrm{Re}q<k+1\}$ (βλ. παραγρ. 3.1.2).
Επιπλέον

$$\cos\frac{q\pi}{2}=\sin\big(\frac{(q+1)\pi}{2}\big)$$

$$=\sin\big(\frac{(q+1)\pi}{2}-\frac{(k+1)\pi}{2}\big)(-1)^{k+1/2}$$

$$=\sin\big(\frac{(q-k)\pi}{2}\big)(-1)^{k+1/2} \tag{3.4.3}$$

και λόγω της ιδιότητας $\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda)$, (παραγρ. 1.3), με διαδοξικές εφαρμογές της, παίρνουμε

$$\Gamma(-q)=\frac{\Gamma(-q+1)}{(-q)}$$

$$=\frac{\Gamma(-q+2)}{(-q)(-q+1)}\cdots=\frac{\Gamma(-q+k+1)}{(-q)(-q+1)\cdots(-q+k)} \tag{3.4.4}$$

Οπότε από τις σχέσεις (3.4.3), (3.4.4), έχουμε

$$\lim_{q\to k}\Gamma(-q)\cos\frac{q\pi}{2}=\lim_{q\to k}\frac{\Gamma(-q+k+1)}{(-q)(-q+1)\cdots(-q+k)}\sin\big(\frac{(q-k)\pi}{2}\big)(-1)^{k+1/2}$$

$$=\lim_{q\to k}\frac{\Gamma(-q+k+1)}{q(q-1)\cdots(q-k+1)}\frac{\sin\frac{q-k}{2}\pi}{(q-k)}(-1)^{k+1/2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{k!}(-1)^{k+1/2} \tag{3.4.5}$$

Από το θεώρημα 3.4.1 και τις σχέσεις (3.4.2), (3.4.5), ο μετασχηματισμός Fourier της ρ^{n-k-1} γίνεται

$$\left(\rho^{n-k-1}\right)^{\wedge}(\xi) = \frac{\pi(n-k-1)}{\cos\frac{k\pi}{2}} A_\xi^{(k)}(0)$$
$$= \pi(n-k-1)\frac{1}{\lim\limits_{q\to k}\Gamma(-q)\cos\frac{q\pi}{2}}\lim_{q\to k}\Gamma(-q)A_\xi^{(q)}(0)$$
$$= 2k!(-1)^{k+1/2}(n-1-k)\int_0^\infty t^{-k-1}\Big(A_\xi(t) - \sum_{j=0}^{k-1/2}\frac{t^{2j}}{(2j)!}A_\xi^{(2j)}(0)\Big)dt,$$

οπότε έχουμε το ζητούμενο.

3.5 Μια ενιαία λύση στο πρόβλημα

Με την βοήθεια των τριών κύριων θεωρημάτων που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες μπορούμε πλέον να πάρουμε μια ενιαία λύση στο πρόβλημα των Busemann-Petty.

Η απάντηση στο πρόβλημα είναι καταφατική για $n \leq 4$

Από το θεώρημα 3.2.1 αρκεί να δείξουμε ότι κάθε κυρτό 0-συμμετρικό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $n \leq 4$ είναι ένα σώμα τομών. Επειδή η τομή ενός σώματος τομών K με ένα υπερεπίπεδο H, που περιέχει το 0, είναι επίσης σώμα τομών, ([Ga3], σελ.304) αρκεί να δείξουμε ότι κάθε 0-συμμετρικό, κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^4$ είναι σώμα τομών, διότι τότε κάθε κυρτό, 0-συμμετρικό σώμα στον $\mathbb{R}^3$ θα μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν τομή ενός σώματος τομών στον $\mathbb{R}^n$ με ένα υπερεπίπεδο, οπότε και το ίδιο θα είναι σώμα τομών.

Θεωρούμε λοιπόν ένα κυρτό, 0-συμμετρικό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^4$.
Από την πρόταση 3.2.2 προκύπτει οτι το σύνολο των σωμάτων τομών είναι κλειστό στο $\mathcal{K}_e^n$ ως προς την μετρική του Hausdorff. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K έχει C^∞ σύνορο, αφού ένα 0-συμμετρικό κυρτό σώμα που δεν είναι σώμα τομών μπορεί να προσεγγιστεί (με την Hausdorff μετρική) από 0-συμμετρικά κυρτά σώματα με C^∞ σύνορο, τα οποία επίσης δεν είναι σώματα τομών.
Αν λοιπόν στο θεώρημα 3.4.2 θέσουμε $n = 4,\ k = 2$ παίρνουμε ότι

$$(\rho_K)^{\wedge}(\xi) = -\pi A_\xi^{''}(0), \quad \forall\, \xi \in S^3 \setminus \{0\}.$$

Η συνάρτηση παράλληλων τομών $A_\xi(t) = |K \cap (\xi^\perp + t\xi)|$ είναι $\log -$κοίλη και άρτια, για κάθε διεύθυνση $\xi \in S^{n-1}$, αφού το K είναι 0-συμμετρικό.

Οπότε

$$A_\xi''(0) \leq 0,$$

αφού για κάθε $t \in \mathbb{R}^n$, $A_\xi''(t)A_\xi(t) - {A_\xi'}^2 \leq 0$ οπότε και για $t = 0$ $\big(A_\xi'(0) = 0\big)$ ισχύει η παραπάνω σχέση.

Συνεπώς η ρ_K είναι μια θετικά ορισμένη κατανομή (αφού έχει θετικό μετασχηματισμό Fourier). Έτσι από το θεώρημα 3.3.1 καταλήγουμε στο ότι το K είναι σώμα τομών.

Η απάντηση στο πρόβλημα είναι αρνητική για $n \geq 5$

Σύμφωνα με την παρατήρηση που δώσαμε παραπάνω, ότι δηλαδή η τομή ενός σώματος τομών με ένα υπερεπίπεδο που περιέχει το 0, είναι επίσης σώμα τομών, αρκεί να δείξουμε ότι για $n = 5$ δεν ισχύει ότι κάθε κυρτό, 0-συμμετρικό σώμα στον $\mathbb{R}^5$ είναι σώμα τομών.

Θέτουμε λοιπόν στο θεώρημα 3.4.2 $n = 5,\ k = 3$. Τότε

$$(\rho_K)^\wedge(\xi) = 12 \int_0^\infty \frac{1}{z^4}\big(A_\xi(z) - A_\xi(0) - A_\xi''(0)\frac{z^2}{2}\big)dz.$$

Από το θεώρημα 3.3.1 αρκεί να δείξουμε ότι η ακτινική συνάρτηση δεν είναι θετικά ορισμένη κατανομή, δηλαδή υπάρχει κάποια διεύθυνση $\xi \in S^{n-1}$ για την οποία το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν είναι ≥ 0.

Έστω $\epsilon \in (0,1)$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $f_\epsilon(x) = (1 - x^2 - \epsilon x^4)^{\frac{1}{4}}$ και παίρνουμε αριθμό $a_\epsilon > 0$ τέτοιον ώστε $f_\epsilon(a_\epsilon) = 0$ και $1 - x^2 - \epsilon x^4 > 0$ στο $(0, a_\epsilon)$.

Η f_ϵ έχει μέγιστο στο 0, αφού $f_\epsilon' = -\frac{1}{2}x(1 - x^2 - \epsilon x^4)^{-\frac{3}{4}}(1 + 2\epsilon x^2)$ και

$$f_\epsilon''(x) = -(\frac{1}{2} + 3\epsilon x^2)(1 - x^2 - \epsilon x^4)^{-\frac{3}{4}} - 3(-\frac{1}{2}x - \epsilon x^3)^2(1 - x^2 - \epsilon x^4)^{-\frac{7}{4}} < 0$$

στο $[0, a_\epsilon]$. Αυτό φαίνεται εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις διαφορικού λογισμού, απο τις οποίες παίρνουμε ότι η $f_\epsilon''(x)$ είναι φθίνουσα ($f_\epsilon''' < 0$) και ότι $f_\epsilon''(0) = -\frac{1}{2}$.

Συνεπώς η $f_\epsilon(x)$ είναι γνήσια κοίλη στο διάστημα $[0, a_\epsilon]$.

Ορίζουμε το σώμα

$$K = \Big\{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 :\ x_5 \in [-a_\epsilon, a_\epsilon],\ \big(\sum_{i=1}^4 x_i^2\big)^{1/2} \leq f_\epsilon(|x_5|)\Big\}.$$

Το K είναι γνήσια κυρτό σώμα αφού η f_ϵ είναι μια γνήσια κοίλη συνάρτηση.

Για $0 \le z \le a_\epsilon$, το σώμα

$$K \cap \big\{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \; x_5 = z\big\}$$

είναι μπάλα ακτίνας $f_\epsilon(z)$. Θεωρούμε την διεύθυνση $\xi = (0,0,0,0,1) \; \in \mathbb{R}^5$. Τότε η συνάρτηση παράλληλων τομών στην διεύθυνση αυτή είναι

$$A_\xi(z) = \frac{\pi^2}{2} f_\epsilon(z) = \frac{\pi^2}{2}(1 - z^2 - \epsilon z^4),$$

για $z \in [0, a_\epsilon]$. Οπότε

$$(\rho_K)^\wedge(\xi) = 12 \int_0^{a_\epsilon} \frac{1}{z^4}\Big(\frac{\pi^2}{2}(1 - z^2 - \epsilon z^4) - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} z^2\Big) dz,$$

από όπου με στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε ότι

$$(\rho_K)^\wedge(\xi) = -6\pi^2 \epsilon a_\epsilon < 0.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι για το κυρτό σώμα K ο μετασχηματισμός Fourier της ακτινικής του συνάρτησης, στην συγκεκριμένη διεύθυνση είναι μια αρνητική κατανομή. Συνεπώς το σώμα δεν είναι σώμα τομών στον $\mathbb{R}^5$, επιβεβαιώνοντας την αρνητική απάντηση (κεφάλαιο 2) στο πρόβλημα των Busemann-Petty.

Βιβλιογραφία

K. Ball, Cube slicing in R^n, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 465–473 K. Ball, Some remarks on the geometry of convex sets, in: *Geometric Aspects of Functional Analysis*, (L. Lindenstrauss and V. Milman, eds.), Lecture Notes in Math. **1317**, Springer Verlag, NewYork (1988), 224–231 F. Barthe, M. Fradelizi, and B. Maurey, A short solution to the Busemann-Petty problem, Positivity **3**, (1999), 95–100 H. Busemann and C.M. Petty, Problems on convex bodies, Math. Scand. **4** (1956), 88–94 J. Bourgain, On the Busemann-Petty problem for perturbations of the ball, Geom. Funct. Anal. **1** (1991), 1–13 H. Busemann, Volumes in terms of concurrent cross-sections, Pacific J. Math. **67**, (1960), 248–250, 671 W.F. Donoghue Jr., *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, 1969 R.J. Gardner, A. Koldobsky, and T. Schlumprecht, An analytic solution to the Busemann-Petty problem, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **328** (1999), 29–34 I.M. Gelfand and G.E. Shilov, *Generalized Functions, Vol. 1, Properties and Operations*, Academic Press, New York, 1964 I.M. Gelfand and N.Ya. Vilenkin, *Generalized Functions, Vol. 4, Some Applications of Harmonic Analysis*, Academic Press, New York, 1964 P.Goodey and W. Weil, Intersection bodies and ellipsoids, Mathematika **42** (1995), 295–304 R.J. Gardner, A positive answer to the Busemann-Petty problem in three dimensions, Ann. of Math. **140** (1994), 435–447 R.J. Gardner, Intersection bodies and the Busemann-Petty problem, Trans. A.M.S. **342** (1994), 435–445 R.J. Gardner, *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995 A. Giannopoulos, A note on a problem of H. Busemann and C.M. Petty concerning sections of convex bodies, Math. Z. **37** (1990), 239–244 S. Helga-

SON, *The Radon Transform*, Prog. in Math. **5**, Birkhäuser, Boston, 1990 A. KOLDOBSKY, Sections of star bodies and the Fourier transform, Preprint, 2001 A. KOLDOBSKY, An application of the Fourier transform to sections of star bodies. Israel J. Math. **106** (1998), 157–164 A. KOLDOBSKY, Second derivative test for intersection bodies, Adv. Math. **136** (1998), no. 1, 15–25 A. KOLDOBSKY, Intersection bodies in R^4, Adv. Math. **136** (1998), no. 1, 1–14 A. KOLDOBSKY, Intersection bodies, positive definite distributions, and the Busemann-Petty problem, Amer. J. Math. **120** (1998), no. 4, 827–840 Δ. ΚΟΥΤΡΟΥΦΙΩΤΗΣ, Διαφορική Γεωμετρία, Πανεπ. Ιωαννίνων, Ιωάννινα, 1994 D.G. LARMAN AND C.A. ROGERS, The existence of a centrally symmetric cvonvex body with central sections that are unexpectedly small, Mathematika **22** (1975), 164–175 E. LUTWAK, Dual mixed volumes, Pacific J. Math. **58**, (1975), no. 2, 531–538 E. LUTWAK, Intersection bodies and dual mixed volumes, Adv. in Math. **71** (1988), 232–261 I.E. MARSDEN AND M.J. HOFFMAN, *Basic Complex Analysis*, W.H. Freeman, 1999 V.D. MILMAN AND G. SCHECHTMAN, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces* M. PAPADIMITRAKIS, On the Busemann-Petty problem about convex, centrally symmetric bodies in R^n, Mathematika **39** (1992), 258–266 R. SCHNEIDER, *Convex bodies: The Brunn–Minkowski Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993 E.M. STEIN AND G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1990 L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, 1973 R. WEBSTER, *Convexity*, Oxford University Press, Oxford, 1994 R.L. WHEEDEN AND A. ZYGMUND, *Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker Inc., 1977 G. ZHANG, A positive solution to the Busemann-Petty problem in R^4, Ann. of Math. **149** (1999), 535–543 G. ZHANG, Intersection bodies and Busemann-Petty inequalities in R^4, Ann. of Math. **140** (1994), 331–346 G. ZHANG, Centered bodies and dual mixed volumes, Trans. A.M.S **345** (1994), 777–801