Το Πρόβλημα Kakeya

Μεταπτυχιακη Διπλωματικη Εργασια Ειδικευσης

Μιχάλης Β. Γιάνναρος
Τμήμα Μαθηματικών - Πανεπιστήμιο Κρήτης

Την τριμελή επιτρόπη αποτέλεσαν οι κύριοι Θέμης Μήτσης, Μιχάλης Παπαδημητράκης και Γιώργος Κωστάκης . Ευχαριστώ πόλύ τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Θέμη Μήτση για την πολύτιμη βοήθειά του.

Αυτή η εργασία είναι αφιερωμένη στην μνήμη του πατέρα μου Βασίλη, στην μητέρα μου Ευδοκία, οι οποίοι μου έδωσαν όλα τα απαραίτητα εφόδια για να ολοκληρώσω τις σπουδές μου και στην γυναίκα της ζωής μου, την Αντωνία. Επίσης την αφιερώνω στους συγγενεις μου και στους φίλους μου.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Το 1917 ο Besicovitch δουλεύοντας πάνω σε προβλήματα ολοκλήρωσης Riemann, προσπαθούσε να βρει απάντηση στο εξής ερώτημα: αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη ορισμένη πάνω στο επίπεδο, είναι πάντα δυνατό να βρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ώστε το $\int f(x,y)dx$ να υπάρχει ως Riemann ολοκλήρωμα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση του y που παίρνουμε ως αποτέλεσμα να είναι Riemann ολοκληρώσιμη· Ο Besicovitch παρατήρησε ότι αν έβρισκε ένα συμπαγές σύνολο F στο επίπεδο μηδενικού μέτρου Lebesgue το οποίο περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα σε κάθε διεύθυνση, θα τον οδηγούσε σε ένα αντιπαράδειγμα: Ας θεωρήσουμε, μεταφέροντας το F αν είναι απαραίτητο, ότι το F <u>δεν</u> περιέχει τμήμα παράλληλο <u>και</u> με ρητή απόσταση από κάθε ένα άξονα απ'το σταθεροποιημένο ζεύγος αξόνων. Έστω f η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου F_0 αποτελούμενο από τα σημεία του F που έχουν τουλάχιστον μία ρητή συντεταγμένη. Αφού το F περιέχει σε κάθε κατεύθυνση (τουλάχιστον) ένα ευθύγραμμο τμήμα στην οποία τα F_0 και το συμπλήρωμά του είναι πυκνά και τα δύο, τότε σε κάθε κατεύθυνση υπάρχει τμήμα στο οποίο η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Απ'την άλλη μεριά το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι μέτρου μηδέν, διότι αυτά βρίσκονται στο F το οποίο ειναι μέτρου μηδέν, και άρα απ'το κριτήριο του Lebesgue η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο επίπεδο. Το 1919 ο Besicovitch κατάφερε να κατασκευάσει ένα σύνολο με τις επιθυμητές ιδιότητες, γνωστό ως «σύνολο Besicovitch». Ο τυπικός ορισμός ενός τέτοιου συνόλου είναι ο ακόλουθος.

Ορισμος 1.1. *Ένα συμπαγές υποσύνολο E του $\mathbb{R}^n$ λέγεται σύνολο Besicovitch αν περιέχει ενα ευθύγραμμο τμήμα σε κάθε κατεύθυνση δηλαδή*

$$\forall e \in S^{n-1}\ \exists x \in \mathbb{R}^n :\ x + te \in E\ \forall t \in [-a,b], 0 < a,b < \infty.$$

Περίπου την ίδια περίοδο οι Kakeya (1917) και Fujiwara & Kakeya (1917) προσπαθούσαν να βρουν το μικρότερο κυρτό σύνολο του επιπέδου μέσα στο οποίο ένα ευθύγραμμο τμήμα μοναδιαίου μήκους μπορεί να κινείται συνεχώς ώστε να ξαναβρεθεί στην αρχική του θέση αφού έχει περιστραφεί κατά 180 μοίρες και χωρίς να έχει εγκαταλείψει το σύνολο. Υπέθεσαν λοιπόν ότι το ισόπλευρο τρίγωνο μοναδιαίου ύψους είναι το μικρότερο τέτοιο σύνολο. Χωρίς την υπόθεση της κυρτότητας, ο Kubota είχε αποδείξει ότι υπάρχει μικρότερο σύνολο, το οποίο ονομάζεται "three-cusped-hypercycloid". Την κυρτή περίπτωση την απόδειξε ο Pál(1921), ο οποίος έθεσε το ίδιο ερώτημα χωρίς την υπόθεση της κυρτότητας. Αυτό εγινε γνωστό ως το πρόβλημα Kakeya, δηλαδή πιο είναι το μικρότερο σύνολο του επιπέδου **μέσα** στο οποίο μπορεί να περιστραφεί ένα ευθύγραμμο τμήμα μοναδιαίου μήκους.

Λίγο αργότερα ο Besicovitch φεύγοντας απ'την Ρωσία το 1924, σκέφτηκε ότι μια απλή αναγωγή στο σύνολο Besicovitch θα έδινε λύση στο πρόβλημα Kakeya οσοδήποτε μικρού μέτρου (Besicovitch (1928) και Perron (1928)) και το πρόβλημα λύθηκε με αναπάντεχο τρόπο. Λόγω του ότι ο Kakeya έθεσε το αρχικό γεωμετρικό ερώτημα, τα σύνολα Besicovitch ονομάζονται και σύνολα Kakeya.

Πιθανώς η πιο αξιοσημείωτη συνέπεια που αναπτύχθηκε είχε να κάνει με τον Besicovitch (1964) που βρήκε μια θεμελιώδη σχέση ανάμεσα στα σύνολα Besicovitch και στην γεωμετρική θεωρία μέτρου. Χρησιμοποιώντας την τεχνική της πολικής αμοιβαιότητας, απόδειξε την ύπαρξη συνόλων Besicovitch ως δυϊκό αποτέλεσμα των θεωρημάτων προβολής για ανώμαλα γραμμικά μετρήσιμα σύνολα (1-σύνολα). Το απρόσμενο είναι ότι αυτή η δυϊκότητα δεν είχε παρατηρηθεί ούτε απ΄τον ίδιο τον Besicovitch, ο οποίος είχε ασχοληθεί για πολλά χρόνια και με τα δύο θέματα, ούτε απο κάποιον άλλο ερευνητή.

Σε αυτήν την εργασία θα παρουσιάστουν δυο αποδείξεις του προβλήματος Kakeya στο επίπεδο και θα δούμε τι γίνεται με την διάσταση Hausdorff των συνόλων Kakeya στον $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Στο κεφάλαιο 2 θα παρατεθούν ορισμοί και θα αποδειχθούν θεωρήματα και λήμματα που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια στα κεφάλαια 3 και 4 για να αποδείξουμε τα βασικά αποτελέσματα της εργασίας.

Λίστα Συμβολισμών

- $x \lesssim y$: $x \leq Cy$ για μια κατάλληλη σταθερά C
- $\mathcal{L}^n(E)$: το n-διάστατο μέτρο Lebesgue του συνόλου E
- $|E|$: το μέτρο απαρίθμησης του συνόλου E
- $T_e^\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |(x-a)\cdot e| \leq \frac{1}{2}, |\ (x-a)-((x-a)\cdot e)e| \leq \delta\}$, όπου $e \in S^{n-1}$ και $a \in \mathbb{R}^n$. Ουσιαστικά το $T_e^\delta(a)$ είναι μια δ-περιοχή του μοναδιαίου ευθύγραμμου τμήματος διεύθυνσης e και κέντρου a
- $\mathcal{H}^s(E)$: το s-διάστατο μέτρο Hausdorff του συνόλου E
- $\dim E$: η διάσταση Hausdorff του συνόλου E
- $B_r(x)$: κλειστή μπάλα ή δισκος κέντρου x και ακτίνας r
- $D^n(a,r)$:ανοιχτή μπάλα κέντρου a και ακτίνας r του $\mathbb{R}^n$
- L_θ: η ευθεία που περνάει από την αρχη των αξόνων με κλίση θ
- $proj_\theta E$, $proj_\Pi E$: η κάθετη προβολή του συνόλου E στην ευθεία L_θ και η κάθετη προβολή στον υπόχωρο Π του $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα.
- $\mathcal{L}(\Gamma)$: το μήκος της καμπύλης Γ
- S^{n-1}: η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$
- $\delta(E)$: η διάμετρος του E
- $[x,y]$: το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα x, y

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Προκαταρκτικά

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε κάποια θεωρήματα που θα μας οδηγήσουν στην λύση του προβλήματος Kakeya με τους δύο τρόπους που προείπαμε.

1. G-σύνολα

Ορισμός 2.1. *Ένα συμπαγές υποσύνολο του επιπέδου E λέγεται G-σύνολο αν είναι υποσύνολο της λωρίδας $\{(x,y) : y \in \mathbb{R}, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ και για κάθε $m \in [0,1]$, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις ευθείες $x = 0,\ x = 1$ με κλίση m και να περιέχεται στο E, δηλαδή*

$$\forall m \in [0,1]\ \exists a \in \mathbb{R} :\ mx + a \in E\ \forall x \in [0,1].$$

Αν $\ell = \{(x,y) : y = mx + b\}$ δεν είναι κάθετη ευθεία και $\delta > 0$ τότε ορίζουμε

$$S_\ell^\delta = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, |y - (mx+b)| \leqslant \delta\}.$$

Παρατηρηση 2.1. *Εύκολα βλέπουμε ότι αν η ευθεία ℓ έχει κλίση m,το S_ℓ^δ περιέχει ευθύγραμμα τμήματα με κλίσεις από $m - 2\delta$ ως $m + 2\delta$.*

Με την βοήθεια της κατασκευής που ακολουθεί θα δείξουμε ότι υπάρχει G-σύνολο μέτρου Lebesgue $< \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A = (0,0),\ B = (1,0),\ \Gamma = (0,-1)$. Προφανώς το τρίγωνο αυτό είναι G-σύνολο. Έστω N ένας φυσικός αριθμός. Στο πρώτο βήμα χωρίζουμε την πλευρά $A\Gamma$ σε N ίσα τμήματα και ενώνουμε τα άκρα των τμημάτων με την κορυφή B. Έτσι δημιουργούμε N ίσα τρίγωνα. Αφήνουμε το πρώτο από πάνω τρίγωνο εκ των N σταθερό και μετακινούμε τα υπόλοιπα προς τα πάνω ώσπου όλα τα N τρίγωνα να έχουν την ίδια τομή με την ευθεία $x = 0$. Στο δεύτερο βήμα χωρίζουμε κάθε ένα από τα N τρίγωνα του πρώτου βήματος σε N υποτρίγωνα όπως στο πρώτο βήμα. Παίρνουμε ένα από αυτά τα τρίγωνα του πρώτου βήματος. Αφήνουμε το πρώτο απο πάνω υποτρίγωνο σταθερό και μετακινούμε τα υπόλοιπα προς τα πάνω ώσπου όλα τα υποτρίγωνα να έχουν την ίδια τομη με την ευθεία $x = \frac{1}{N}$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο στα επόμενα $N-2$ βήματα για τις ευθείες $x = \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}$ αντίστοιχα. Σε κάθε βήμα το σύνολο που προκύπτει είναι G-σύνολο αφού όλες οι κλίσεις του αρχικού ορθογωνιου τριγώνου δεν χάνονται σε κανένα βήμα από τις μεταφορές τριγώνων που γίνονται.

Με άλλα λόγια η προηγούμενη κατασκευή, ορίζει το σύνολο $\mathcal{A}_N$ που ακολουθεί. Έστω N αρκετά μεγαλο, το οποίο σταθεροποιούμε. Θεωρούμε ότι το $\mathcal{A}_N$ είναι το σύνολο όλων των αριθμών στο $[0,1)$ των οποίων το ανάπτυγμα με βάση το N έχει ακριβώς N ψηφία, δηλαδή

$$a \in \mathcal{A}_N \Leftrightarrow a = \sum_{\jmath=1}^{N} \frac{a_\jmath}{N^\jmath},\ a_\jmath \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}.$$

Σε κάθε $a \in \mathcal{A}_N$ αντιστοιχούμε το ευθύγραμμο τμήμα

$$\ell_a = \{(t, \phi_t(a)) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

με

$$\phi_t(a) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(Nt - j + 1)a_j}{N^{j+1}}.$$

Δηλαδή το ℓ_a είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα κλίσης a που ενώνει τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ και τέμνει τον άξονα των y στο σημείο

$$-\sum_{j=1}^{N} \frac{(j-1)a_j}{N^{j+1}}.$$

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα με την απόδειξη τριών χρήσιμων λημμάτων.

Λημμα 2.1. *Για κάθε $t \in [0,1]$ υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός $\kappa \in \{1, 2, \ldots, N\}$ και ένα σύνολο $N^{\kappa-1}$ πλήθους διαστημάτων μήκους $2N^{-\kappa}$ το καθένα, του οποίου η ένωση περιέχει το σύνολο $\{\phi_t(a) : a \in \mathcal{A}_N\}$.*

Αποδειξη. Έστω $t_0 \in [0,1]$ τυχαίο και N αρκετά μεγάλο. Επιλέγουμε ένα κ τέτοιο ώστε να ισχύει $\frac{\kappa-1}{N} \leqslant t_0 \leqslant \frac{\kappa}{N}$. Λέμε ότι τα $a, b \in \mathcal{A}_N$ είναι ισοδύναμα όταν $a_j = b_j$ για κάθε $j \leqslant \kappa - 1$. Μ' αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε $N^{\kappa-1}$ κλάσεις ισοδυναμίας. Αν τα a, b είναι ισοδύναμα τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
|\phi_{t_0}(a) - \phi_{t_0}(b)| = |\sum_{j \geqslant \kappa} \frac{(Nt_0 - j + 1)(a_j - b_j)}{N^{j+1}}| &\leqslant \sum_{j \geqslant \kappa} \frac{|Nt_0 - j + 1||a_j - b_j|}{N^{j+1}} \\
&\leqslant \sum_{j \geqslant \kappa} \frac{|\kappa - j + 1||a_j - b_j|}{N^{j+1}} \leqslant \sum_{j \geqslant \kappa} \frac{\max\{j - \kappa, 1\}|a_j - b_j|}{N^{j+1}} \\
&\leqslant \frac{N-1}{N^{\kappa+1}} \sum_{j \geqslant \kappa} \frac{\max\{j - \kappa, 1\}}{N^{j-\kappa}} \\
&\leqslant 2\frac{N-1}{N^{\kappa+1}} = \frac{2}{N^{\kappa}} - \frac{2}{N^{\kappa+1}} < 2N^{-\kappa}.
\end{aligned}$$

Αφού το t_0 ήταν τυχαίο, το λήμμα αποδείχθηκε. □

Λημμα 2.2. *Για αρκετά μεγάλο N υπάρχει ένα G-σύνολο $E \subseteq [0,1] \times [-1,1]$ το οποίο τέμνει κάθε κάθετη ευθεία σε μέτρο $\mathcal{L}^1 \leqslant \frac{4}{N}$. Ιδιαίτερα έχουμε ότι $\mathcal{L}^2(E) \leqslant \frac{4}{N}$.*

Αποδειξη. Ας θεωρήσουμε το σύνολο

$$E = \bigcup_{a \in \mathcal{A}_N} S_{\ell_a}^{N^{-N}} \subseteq [0,1] \times [-1,1].$$

Το $\mathcal{A}_N$ είναι πεπερασμένο και επειδή κάθε $S_{\ell_a}^{N^{-N}}$ είναι κλειστό για κάθε $a \in \mathcal{A}_N$, το E είναι κλειστό. Άρα το E είναι κλειστό και φραγμένο, δηλαδή συμπαγές. Σύμφωνα με την παρατήρηση 2.1 το E περιέχει ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ με όλες τις κλίσεις απο 0 ως 1. Συνεπώς το E είναι G-σύνολο. Από το προηγούμενο λήμμα για τυχαίο $t \in [0,1]$ υπάρχει $\kappa \in \{1, 2, ..., N\}$ ώστε το σύνολο $\{\phi_t(a) : a \in \mathcal{A}_N\}$ να περιέχεται σε ένωση $N^{\kappa-1}$ διαστημάτων μήκους $2N^{-\kappa}$

το καθένα. Από τον ορισμό του E, έχουμε ότι η τομή του E με την ευθεία $x = t$ είναι μικρότερη ή ίση από

$$N^{\kappa-1}(2N^{-\kappa} + 2N^{-N}) \leqslant N^{\kappa-1}(2N^{-\kappa} + 2N^{-\kappa}) = 4N^{-\kappa}N^{\kappa-1} = \frac{4}{N}.$$

Ιδιαίτερα, επειδή $E \subseteq [0,1] \times [-1,1]$ έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^2(E) \leqslant 1 \cdot \frac{4}{N} = \frac{4}{N}.$$

□

ΛΗΜΜΑ 2.3. *Για κάθε G-σύνολο E και κάθε $\delta > 0$, $\eta > 0$, υπάρχει ένα G-σύνολο H ώστε να περιέχεται σε μια δ-περιοχή του E και να έχει μέτρο $< \eta$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω Ε ένα G-σύνολο, $\delta > 0$ αρκετά μικρό, και $\{m_\jmath\} = \{\jmath\delta\}_{\jmath=0}^{[\frac{1}{\delta}]}$. Για κάθε $\jmath$, σταθεροποιούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα

$$\ell_\jmath = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, y = m_\jmath x + b_\jmath\} \subseteq E.$$

Θεωρούμε την αφφινική απεικόνιση

$$A_\jmath : [0,1] \times [-1,1] \to S^{\delta}_{\ell_\jmath}$$

με τύπο $A_\jmath(x,y) = (x, m_\jmath x + b_\jmath + \delta y)$. Αν $y = \lambda x + b$, τότε έχουμε ότι

$$A_\jmath(x, \lambda x + b) = (x, m_\jmath x + b_\jmath + (\lambda x + b)\delta) = (x, (m_\jmath + \delta\lambda)x + b_\jmath + \lambda b).$$

Αυτό σημαίνει ότι η $A_\jmath$ στέλνει ευθείες κλίσης λ σε ευθείες κλίσης $(m_\jmath + \delta\lambda)$. Έστω

$$E_N = \bigcup_{a \in \mathcal{A}_N} S^{N^{-N}}_{\ell_a}$$

και ορίζουμε

$$F = \bigcup_{\jmath=0}^{[\frac{1}{\delta}]} A_\jmath(E_N)$$

όπου το N είναι αρκετά μεγάλο. Κάθε αφφινική απεικόνιση είναι συνεχής και κάθε E_N είναι G-σύνολο. Σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα της $A_\jmath$ και επειδή το F είναι πεπερασμένη ένωση G-συνόλων είναι και αυτό ένα G-σύνολο. Προφανώς το F περιέχεται σε μια δ- περιοχή του E. Από τον ορισμό της $A_\jmath$ και το λήμμα 2.2 έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^2(A_\jmath(E_N)) \leqslant 4\frac{\delta}{N}$$

για κάθε $\jmath$. Συνεπώς

$$\mathcal{L}^2(F) = \mathcal{L}^2(\bigcup_{\jmath=0}^{[\frac{1}{\delta}]}(A_\jmath(E_N)) \leqslant \sum_{\jmath=0}^{[\frac{1}{\delta}]} \mathcal{L}^2(A_\jmath(E_N)) \leqslant ([\frac{1}{\delta}] + 1)\frac{4\delta}{N} \lesssim \frac{1}{N}.$$

Ως εκ τούτου για κάθε $\eta > 0$ μπορούμε να μεταβάλουμε το N τόσο ώστε να έχουμε $\mathcal{L}^2(F) < \eta$. □

2. Θεωρήματα Προβολών

Τα θεωρήματα προβολών σχετίζονται με το μέτρο Lebesgue της προβολής κάποιων ειδικών συνόλων (που θα δούμε στην πρώτη υποενότητα) σε υποχώρους του $\mathbb{R}^n$. Πιο συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $n = 2$. Με την βοήθεια των θεωρημάτων προβολών θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο την δυϊκή προσέγγιση του προβλήματος Kakeya.

2.1. Γραμμικώς μετρήσιμα σύνολα και καμπύλες. Ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται γραμμικώς μετρήσιμο ή 1-σύνολο αν είναι $\mathcal{H}^1$-μετρήσιμο και ισχύει ότι $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Αυτά τα σύνολα χωρίζονται σε κανονικά και μη-κανονικά. Έστω E 1-σύνολο και $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε ορίζουμε την ανώτερη και κατώτερη πυκνότητα να είναι αντίστοιχα

$$\overline{D}(E,x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))}{2r}$$

και

$$\underline{D}(E,x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))}{2r}.$$

Λέμε ότι η πυκνότητα του E στο x υπάρχει όταν $\overline{D}(E,x) = \underline{D}(E,x)$. Το $x \in E$ λέγεται κανονικό όταν $\overline{D}(E,x) = \underline{D}(E,x) = 1$, αλλιώς λέγεται μη-κανονικό. Κατ' επέκταση το E είναι κανονικό όταν σχεδόν κάθε σημείο του είναι κανονικό και μη-κανονικό όταν σχεδόν κάθε σημείο του είναι μη-κανονικό.

Έστω Γ το ίχνος μιας συνεχούς καμπύλης. Η Γ λέγεται rectifiable αν έχει πεπερασμένο μήκος. Ένα 1-σύνολο λέγεται Y-σύνολο αν περιέχεται σε αριθμήσιμη ένωση rectifiable καμπυλών και λέγεται Z-σύνολο όταν η τομή του με κάθε rectifiable καμπύλη είναι μηδενικού $\mathcal{H}^1$ μέτρου.

Μετά τους ορισμούς αυτούς, θα συνεχίσουμε με τρία χρήσιμα λήμματα.

Λημμα 2.4. *Έστω μια απεικόνιση $\psi : E \longrightarrow F$ η οποία είναι επί τέτοια ώστε*

$$\mid \psi(x) - \psi(y) \mid \leqslant c \mid x - y \mid,$$

για κάθε $x, y \in E$, όπου $c > 0$ σταθερά. Τότε $\mathcal{H}^s(F) \leqslant c^s\mathcal{H}^s(E)$.

Αποδειξη. Έστω $U \subseteq E$. Από την υπόθεση έπεται ότι

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant c|x-y|,\ x,y \in U \Rightarrow \sup_{x,y\in U} |\psi(x) - \psi(y)| \leqslant \sup_{x,y\in U} c|x-y|$$
$$\Rightarrow \delta(\psi(U)) \leqslant c\delta(U).$$

Αν $\{U_\imath\}_{\imath\in\mathbb{N}}$ μια κάλυψη του E, με $0 < \delta(U_\imath) \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, για κάθε $\imath$, τότε και η $\{V_\imath = U_\imath \cap E\}_{\imath\in\mathbb{N}}$ είναι κάλυψη του E με $0 < \delta(V_\imath) \leqslant \varepsilon$. Επειδή η ψ είναι επί, η οικογένεια $\{\psi(V_\imath)\}_{\imath\in\mathbb{N}}$ είναι μια κάλυψη του F με $0 < \delta(\psi(V_\imath)) \leqslant c\delta(V_\imath) \leqslant c\varepsilon$. Επομένως

$$\sum_{\imath=1}^{\infty} \delta^s(\psi(V_\imath)) \leqslant \sum_{\imath=1}^{\infty} c^s\delta^s(V_\imath) \Rightarrow \mathcal{H}^s_{c\varepsilon}(F) \leqslant c^s\mathcal{H}^s_\varepsilon(E) \Rightarrow \mathcal{H}^s(F) \leqslant c^s\mathcal{H}^s(E).$$

□

Με την βοήθεια του προηγούμενου λήμματος θα δείξουμε το επόμενο λήμμα που συνδέει το μέτρο Hausdorff μιας καμπύλης με το μήκος της. Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση μεταξύ του μέτρου Hausdorff και μέτρου Lebesgue.

$$\mathcal{L}^d(E) = c_d\mathcal{H}^d(E),$$

όπου c_d ο όγκος της μπάλας διαμέτρου ένα στον $\mathbb{R}^d$ και $E \subseteq \mathbb{R}^d$.

Λημμα 2.5. *Αν Γ είναι μια συνεχής καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ τότε $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \mathcal{L}(\Gamma)$.*

Αποδειξη. Έστω α το αρχικό σημείο της Γ και β το τελικό της σημείο. Αν $proj$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στην ευθεία που ορίζει το $[\alpha, \beta]$, τότε προφανώς

$$|proj\ x - proj\ y| \leqslant |x - y|,\ x, y \in \mathbb{R}^n$$

Επειδή η $proj$ είναι επί, το λήμμα 2.4 μας δίνει

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq \mathcal{H}^1(proj\Gamma) \geq \mathcal{H}^1([\alpha, \beta]) = \mathcal{L}^1([\alpha, \beta]) = |\alpha - \beta|.$$

Υποθέτουμε ότι η Γ ορίζεται από την $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$. Από τις προηγούμενες ανισότητες προκύπτει ότι για κάθε $t < u$ στο $[c, d]$ έχουμε

$$\mathcal{H}^1(\psi([t, u])) \geq |\psi(t) - \psi(u)|.$$

Αν $\{\alpha = t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = \beta\}$ είναι μια διαμέριση του $[\alpha, \beta]$,τότε

$$\sum_{j=1}^{m} |\psi(t_j) - \psi(t_{j-1})| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mathcal{H}^1(\psi([t_{j-1}, t_j]) = \mathcal{H}^1(\bigcup_{j=1}^{m} \psi([t_{j-1}, t_j])) = \mathcal{H}^1(\Gamma).$$

Παίρνοντας supremum ως προς κάθε διαμέριση, καταλήγουμε στο ότι

$$\mathcal{L}(\Gamma) \leqslant \mathcal{H}^1(\Gamma).$$

Αν τώρα $\mathcal{L}(\Gamma) = \infty$ τότε $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{H}^1(\Gamma)$. Έστω λοιπόν ότι $\mathcal{L}(\Gamma) < \infty$. Παρμετρικοποιώντας την Γ ως προς το μήκος της, δηλαδή στο διάστημα $[0, \mathcal{L}(\Gamma)]$, έχουμε ότι $\psi : [0, \mathcal{L}(\Gamma)] \to \Gamma$ επί, και $|\psi(t_1) - \psi(t_2)| = |t_1 - t_2|$. Άρα από το λήμμα 2.4 συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \leqslant \mathcal{H}^1([0, \mathcal{L}(\Gamma)]) = 1 \cdot \mathcal{L}^1([0, \mathcal{L}(\Gamma)]) = \mathcal{L}(\Gamma).$$

Συνεπώς $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{H}^1(\Gamma)$. □

Το επόμενο λήμμα είναι μια πιο άμεση συνέπεια του λήμματος 2.4.

Λημμα 2.6. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ και Π ένας υπόχωρος. Τότε*

$$\mathcal{H}^s(proj_\Pi E) \leqslant \mathcal{H}^s(E).$$

Αποδειξη. Επειδή η απεικόνιση προβολής $proj_\Pi : E \to proj_\Pi E$ είναι επί και προφανώς ισχύει $|proj_\Pi x - proj_\Pi y| \leqslant |x - y|,\ x, y \in E$, το λήμμα 2.4 μας δίνει απευθείας ότι

$$\mathcal{H}^s(proj_\Pi E) \leqslant \mathcal{H}^s(E).$$

□

Κλείνοντας την υποενότητα θα δούμε την ύπαρξη ενός μη-κανονικού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$, ένα αποτέλεσμα το οποίο δεν είναι καθόλου προφανές.

Θεωρημα 2.1. *Υπάρχει ένα μη κανονικό 1-σύνολο στον $\mathbb{R}^2$.*

Αποδειξη. Έστω $f : [0, 1) \to [0, 1)$ με τύπο

$$f(0.x_1x_2\ldots) = 0.y_1y_2\ldots,$$

όπου $0.x_1x_2\ldots$, $0.y_1y_2\ldots$ είναι αναπτύγματα με βάση το 4, τα ψηφία του $0.x_1x_2\ldots$ δεν είναι τελικά ίσα με 3 και ισχύει $y_\imath = 5 - x_\imath \pmod 4$. Έστω

$$E = \{(x, f(x)) : 0 \leqslant x < 1\}.$$

Το E είναι Borel-μετρήσιμο και προφανώς $proj_0 E = [0,1)$. Αν πάρουμε το $[0,1)$ ως ίχνος καμπύλης, έχουμε ότι $\mathcal{L}([0,1)) = 1$ και από τα λήμματα 2.5 και 2.6 έπεται

$$1 = \mathcal{L}(proj_0 E) = \mathcal{H}^1(proj_0 E) \leqslant \mathcal{H}^1(E).$$

Απ' την άλλη, το E μπορούμε να το καλύψουμε με 4^κ τετράγωνα πλευράς $4^{-\kappa}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$. Για κάθε κ το κάθε τετράγωνο έχει διάμετρο $\sqrt{2\frac{1}{4^{2\kappa}}} = 4^{-\kappa}\sqrt{2}$. Συνεπώς

$$\mathcal{H}^1(E) \leqslant \sum_{j=1}^{4^\kappa} 4^{-\kappa}\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Δηλαδή το E έχει πεπερασμένο και θετικό μέτρο $\mathcal{H}^1$, άρα είναι 1-σύνολο. Το E είναι και Z-σύνολο αφού κάθε rectifiable καμπύλη τέμνει το E σε $\mathcal{H}^1$-μέτρο 0. □

2.2. Θεωρήματα Προβολών για 1-σύνολα στο $\mathbb{R}^2$. Το σημαντικότερο αποτέλεσμα αυτής της υποενότητας είναι το πόρισμα 1, το οποίο θα μας δώσει την απάντηση στο πρόβλημα Kakeya μέσω της δυϊκής προσέγγισης όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Σε αυτό το σημείο της εργασίας θα περιοριστούμε στον $\mathbb{R}^2$.

Το επόμενο αποτέλεσμα χρειάζεται στην απόδειξη του θεωρήματος 2.3. Η απόδειξή του παραλείπεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. *Κάθε κανονικό 1-σύνολο αποτελείται από ένα Y-σύνολο και ένα σύνολο $\mathcal{H}^1$-μέτρου μηδέν.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3. *Έστω E ένα κανονικό 1-σύνολο στον $\mathbb{R}^2$. Τότε $\mathcal{L}^1(projE) > 0$ για όλες εκτός από το πολύ μια διεύθυνση θ.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το θεώρημα 2.2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E \subseteq \Gamma$, όπου Γ είναι μια rectifiable. Έστω x ένα κανονικό σημείο του E και του Γ. Λόγω της κανονικότητας του x για κάθε δεδομένο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ένα $r > 0$ ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα

$$\mathcal{H}^1(E \cap B_r(x)) > (1-\varepsilon^2)2r$$

και

$$\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B_r(x)) < (1+\varepsilon)2r.$$

Τότε

$$\begin{gathered}\mathcal{H}^1(E \cap B_r(x)) > (1+\varepsilon)2r(1-\varepsilon) \Rightarrow \\ \mathcal{H}^1(E \cap B_r(x)) > \mathcal{H}^1(\Gamma \cap B_r(x))(1-\varepsilon) \Rightarrow \\ \mathcal{H}^1(E \cap B_r(x)) > \mathcal{H}^1(\Gamma \cap B_r(x)) - \varepsilon\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B_r(x)) \Rightarrow \\ \mathcal{H}^1((\Gamma \setminus E) \cap B_r(x)) < \varepsilon\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B_r(x)).\end{gathered}$$

Αφού η Γ έχει πεπερασμένο μήκος, το σύνολο $\Gamma \cap B_r(x)$ περιέχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος ξένων τόξων (τμήματα της Γ). •Ετσι μπορούμε να επιλέξουμε ένα τόξο $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \cap B_r(x)$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_0 \setminus E) < \varepsilon\mathcal{H}^1(\Gamma_0) < c\varepsilon|z-y|$$

όπου $c > 1$ σταθερά και z, y το αρχικό και τελικό σημείο του Γ_0 αντίστοιχα. Επιλέγουμε ένα $\theta \in [0,\pi)$ ώστε η ευθεία L_θ να σχηματίζει με την ευθεία που ορίζει το $[z,y]$ γωνία φ και $\cos\varphi > c\varepsilon$. Όπως ξέρουμε από το λήμμα 2.5 ισχύει $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \mathcal{L}(\Gamma)$, όπου Γ μια καμπύλη. Επειδή η $proj_\theta E$ είναι προβολή σε ευθεία, η $proj_\theta E$ θα είναι ένωση καμπυλών (ευθύγραμμα τμήματα), έτσι έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^1(proj_\theta E) = \mathcal{L}(proj_\theta E) = \mathcal{H}^1(proj_\theta E) \qquad (*).$$

Τώρα

$$\mathcal{H}^1(proj_\theta\Gamma_0) = \mathcal{H}^1(proj_\theta E) + \mathcal{H}^1(proj_\theta(\Gamma_0 \setminus E)) = |x-y|\cos\varphi.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(proj_\theta E) = \mathcal{H}^1(proj_\theta E) &= |x-y|\cos\varphi - \mathcal{H}^1(proj_\theta(\Gamma_0 \setminus E))\\ &\geq |x-y|\cos\varphi - \mathcal{H}^1(\Gamma_0 \setminus E)\\ &> |x-y|(\cos\varphi - c\varepsilon).\end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε ότι $\mathcal{L}^1(proj_\theta E) > 0$ για όλα τα θ, εκτός από αυτά για τα οποία ισχύει ότι

$$\cos\varphi - c\varepsilon \leqslant 0 \Leftrightarrow \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) - c\varepsilon \leqslant 0 \Leftrightarrow \sin\theta - c\varepsilon \leqslant 0 \Leftrightarrow \theta \leqslant \sin^{-1} c\varepsilon.$$

Οπότε στέλνοντας το ε στο μηδέν παίρνουμε ότι $\mathcal{L}^1(proj_\theta E) > 0$ για όλες εκτός από το πολύ μια διεύθυνση. $\square$

Το επόμενο θεώρημα που θα δούμε σχετίζεται με τα μη-κανονικά 1-σύνολα στον $\mathbb{R}^2$. Μας λέει ότι το μέτρο Lebesgue της προβολής ενός μη-κανονικού 1-συνόλου είναι μηδέν σχεδόν για όλες τις κατευθύνσεις. Για την απόδειξη χρειαζόμαστε ένα ενδιάμεσο αποτελέσμα το οποίο παραθέτουμε με την απόδειξή του μετά τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμος 2.2. *Μια κατεύθυνση θ λέγεται κατεύθυνση συμπύκνωσης πρώτου είδους στο $x \in E$ αν η ευθεία $L_\theta(x)$ που περνάει απο το x με κλίση θ, τέμνει το E άπειρες φορές σε κάθε περιοχή του x.*

Έστω $x \in E$ και $\varepsilon, \rho, m > 0$. Ορίζουμε το $T(x,\rho,\varepsilon,m) \subseteq [0,\pi)$ ως εξής: $\theta \in T(x,\rho,\varepsilon,m)$ αν και μόνον αν υπάρχει r με $0 < r < \rho$, κάποιο ανοιχτό διάστημα I με $\theta \in I \subseteq [0,\pi)$ και $\mathcal{L}^1(I) < \varepsilon$ για το οποίο ισχύει

$$\frac{\mathcal{H}^1(E \cap C_r(x,I))}{r} \geq m\mathcal{L}^1(I),$$

όπου το $C_r(x,I)$ είναι ο διπλός τομέας που αποτελείται από όλα τα σημεία του $B_r(x)$ που βρίσκονται πάνω στις $L_\theta(x)$ για κάθε $\theta \in I$.

Παρατηρηση 2.2. *Αν το E είναι μη-κανονικό 1-σύνολο, τότε το $T(x,\varepsilon,\rho,m)$ είναι Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,\pi]$*

Ορισμος 2.3. *Μια κατεύθυνση θ λέγεται κατεύθυνση συμπύκνωσης δεύτερου είδους στο $x \in E$ αν*

$$\theta \in T = \bigcap_{\rho>0}\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{0<m<\infty} T(x,\rho,\varepsilon,m).$$

Ορισμος 2.4. *Ένα σημείο x λέγεται radiation point του E αν σχεδόν όλες ($\mathcal{L}^1$) οι κατευθύνσεις $\theta \in [0,\pi)$ είναι κατευθύνσεις συμπύκνωσης του E στο x.*

Λημμα 2.7. *Έστω E ένα κλειστό μη-κανονικό 1-σύνολο στο επίπεδο. Τότε σχεδόν όλα (ως προς το $\mathcal{H}^1$) τα σημεία του E είναι radiation points.*

Αποδειξη. Η ιδέα της απόδειξης έγκειται στο να δείξουμε ότι αν S είναι το σύνολο των κατευθύνσεων συμπύκνωσης πρώτου είδους ενός τυχαίου $x \in E$, τότε $\mathcal{L}^1$-σχεδόν όλα τα $\theta \notin S$ είναι κατευθύνσεις συμπύκνωσης δεύτερου είδους για το ίδιο

x. Είναι γνωστό ότι για $\mathcal{H}^1$-σχεδόν όλα τα $x \in E$ και για κάθε διάστημα $I \subseteq [0, \pi)$ ισχύει ότι

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I))}{2r} > \frac{1}{20} \mathcal{L}^1(I). \tag{1}$$

Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο x. Θέτουμε $S(r)$ να είναι το σύνολο ολων των $\theta \in [0, \pi)$, για τα οποία το $L_\theta(x) \cap B_r(x)$ περιέχει και άλλα στοιχεία του E διαφορετικά από το x. Δηλαδή

$$\begin{aligned} S(r) &= \{\theta : y \in E \setminus \{x\}, y \in L_\theta(x) \cap B_r(x)\} \\ &= \bigcup_{\jmath \in \mathbb{N}} \left\{\theta : \exists y \in E \setminus \{x\} \cap L_\theta(x) \tau.\omega. \frac{1}{\jmath} \leqslant |x - y| \leqslant r\right\}. \end{aligned}$$

Επειδή τα σύνολα $\left\{\theta : \exists y \in E \setminus \{x\} \cap L_\theta(x) \tau.\omega. \frac{1}{\jmath} \leqslant |x - y| \leqslant r\right\}$ είναι κλειστά για κάθε $\jmath$, το $S(r)$ είναι Borel μετρήσιμο. Θα δείξουμε ότι $S = \bigcap_{\jmath \in \mathbb{N}} S(\frac{1}{\jmath})$ και άρα ότι το S είναι Lebesgue μετρήσιμο, το οποίο θα μας χρειαστεί για να εφαρμόσουμε το θεώρημα πυκνότητας του Lebesgue. Ο εγκλεισμός " $\subseteq$ " είναι προφανής. Για τον εγκλεισμό " $\supseteq$ " έχουμε

$$\theta \in \bigcap_{\jmath \in \mathbb{N}} S(\frac{1}{\jmath}) \Rightarrow \theta \in S(\frac{1}{\jmath}), \forall \jmath \Rightarrow \exists y_\jmath \in E \setminus \{x\}, y_\jmath \in L_\theta(x) \cap B_{\frac{1}{\jmath}}(x), \forall \jmath.$$

Συνεπώς $\theta \in S$. Μένει να δείξουμε ότι για $\mathcal{L}^1$-σχεδόν όλα τα $\theta \notin S$, το θ είναι κατεύθυνση συμπύκνωσης δεύτερου είδους. Δηλαδή για τυχαία m, ρ, ε θετικά $\theta \in T(x, \rho, \varepsilon, m)$ για σχεδόν όλα τα $\theta \notin S$. Επιλέγουμε m, ρ, ε θετικά, τυχαία. Έστω $\theta \in [0, \pi)$ ώστε η πυκνότητα Lebesgue του S να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^1(S \cap [\theta - r, \theta + r])}{2r} = 0. \tag{2}$$

Από το θεώρημα του Lebesgue έχουμε ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα ισχύει για $\mathcal{L}^1$-σχεδόν όλα τα $\theta \notin S$. Επομένως υπάρχει ένα διάστημα $I \subseteq [0, \pi)$ τέτοιο ώστε $\theta \in I$, $0 < \mathcal{L}^1(I) < \varepsilon$ και να ισχύει ότι

$$\mathcal{L}^1(S \cap I) < \frac{\mathcal{L}^1(I)}{20m}. \tag{3}$$

Προηγουμένως δείξαμε ότι $S = \bigcap_{\jmath \in \mathbb{N}} S(\frac{1}{\jmath})$, δηλαδή $S(r) \searrow S$ καθώς $r \to 0$. Οπότε υπάρχει $\rho_1 \leqslant \rho$ ώστε αν $r < \rho_1$ να ισχύει

$$\mathcal{L}^1(S(r) \cap I) < \frac{\mathcal{L}^1(I)}{20m}. \tag{4}$$

Από την σχέση (1) για $r < \rho_1$ έχουμε ότι

$$\mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I)) > \frac{2r\mathcal{L}^1(I)}{20}. \tag{5}$$

Βασιζόμενοι στον ορισμό, αν $\mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I)) > mr\mathcal{L}^1(I)$, τότε $\theta \in T(x, \rho, \varepsilon, m)$, αφού έχουμε υποθέσει ότι $\theta \in I$. Υποθέτουμε τώρα ότι δεν ισχύει η προηγούμενη σχέση. Μπορούμε να βρούμε μια ξένη οικογένεια διαστημάτων $\{I_\imath : \imath \in \mathbb{N}\}$ ώστε

$$S(r) \cap I \subseteq \bigcup_{\imath = 1}^{\infty} I_\imath \tag{6}$$

και

$$\sum_{\imath=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(I_\imath) = \mathcal{L}^1(\bigcup_{\imath=1}^{\infty} I_\imath) < \frac{\mathcal{L}^1(I)}{20m}. \tag{7}$$

Ονομάζουμε $\mathcal{Q}$ το σύνολο εκείνων των $\imath$ για τα οποία

$$\mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I_\imath)) > mr\mathcal{L}^1(I_\imath). \tag{8}$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (6) και (7) παίρνουμε ότι

$$\sum_{\imath \notin \mathcal{Q}} \mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I_\imath)) \leqslant \sum_{\imath \notin \mathcal{Q}} mr\mathcal{L}^1(I_\imath) = mr\mathcal{L}^1(\bigcup_{\imath \notin \mathcal{Q}} I_\imath) < \frac{r\mathcal{L}^1(I)}{20}. \tag{9}$$

Έστω $y \in E \cap C_r(x, I)$. Τότε $y \in E \cap L_\theta(x) \cap B_r(x)$ για κάποιο $\theta \in S(r) \cap I$. Συνεπώς

$$E \cap C_r(x, I) \subseteq E \cap C_r(x, S(r) \cap I) \subseteq E \cap C_r(x, \bigcup_{\imath=1}^{\infty} I_\imath) \subseteq \bigcup_{\imath=1}^{\infty}(E \cap C_r(x, I_\imath)). \tag{10}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\sum_{\imath \in \mathcal{Q}} \mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I_\imath)) &= \sum_{\imath=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I_\imath)) - \sum_{\imath \notin \mathcal{Q}} \mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I_\imath)) \\
(9),(10) \qquad &> \mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I)) - \frac{r\mathcal{L}^1(I)}{20} \\
(5) \qquad &> \frac{r\mathcal{L}^1(I)}{20}.
\end{aligned}$$

Μεγαλώνοντας και συνδυάζοντας τα διαστήματα $\{I_\imath : \imath \in \mathcal{Q}\}$ και λαμβάνοντας υπόψην μας την σχέση (8), είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε μια ξένη οικογένεια διαστημάτων $\{J_\jmath\}_{\jmath \in \mathbb{N}}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.

$$J = \bigcup_{\jmath \in \mathbb{N}} J_\jmath \supseteq \bigcup_{\imath \in \mathcal{Q}} I_\imath \tag{11}$$

και

$$\mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, J_\jmath)) = mr\mathcal{L}^1(J_\jmath), \jmath \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Από την στιγμή που ισχύει η σχέση $\mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I) \leqslant mr\mathcal{L}^1(I)$, μπορούμε να τροποποιήσουμε την $\{J_\jmath\}_{\jmath \in \mathbb{N}}$ ώστε $J_\jmath \subseteq I, \forall \jmath$ και άρα $J \subseteq I$. Είναι τώρα

$$\begin{aligned}
\sum_{\jmath=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(J_\jmath) = \mathcal{L}^1(J) &= \frac{1}{mr} \sum_{\jmath=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, J_\jmath)) \\
(11) \qquad &\geqslant \frac{1}{mr} \sum_{\imath \in \mathcal{Q}} \mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I_\imath)) \\
&> \frac{1}{mr} \frac{r\mathcal{L}^1(I)}{20}
\end{aligned}$$

από όπου τελικά έχουμε

$$\mathcal{L}^1(J) > \frac{\mathcal{L}^1(I)}{20m}. \tag{13}$$

Αν $\acute{\theta} \in J$, τότε $\acute{\theta} \in J_\jmath$ για κάποιο $\jmath$ και συνεπώς από την σχέση (12) έπεται ότι $\acute{\theta} \in T(x,\rho,\varepsilon,m)$. Επομένως $J \subseteq T(x,\rho,\varepsilon,m) \cap I$ και από την (13) παίρνουμε

$$\mathcal{L}^1(T(x,\rho,\varepsilon,m) \cap I) > \frac{\mathcal{L}^1(I)}{20m}. \tag{14}$$

Το διάστημα I το επιλέξαμε να είναι οσοδήποτε μικρό και να περιέχει το θ. Άρα η αμέσως προηγούμενη σχέση ισχύει για όλα τα διαστήματα οσοδήποτε μικρού μήκους που περιέχουν το θ. Αποδείξαμε τελικά ότι για $\mathcal{L}^1$-σχεδόν όλα τα $\theta \notin S$, είτε $\theta \in T(x,\rho,\varepsilon,m)$ όταν ισχύει η $\mathcal{H}^1(E \cap C_r(x,I)) > mr\mathcal{L}^1(I)$, είτε από την σχέση (14) ότι η πυκνότητα Lebesgue του $T(x,\rho,\varepsilon,m)$ είναι μεγαλύτερη απο $\frac{1}{20m}$. Από την παρατήρηση 2.2 έπεται ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα πυκνότητας του Lebesgue για το σύνολο $T(x,\rho,\varepsilon,m)$, το οποίο μας λέει ότι σε $\mathcal{L}^1$ σχεδόν όλα τα $\theta \in [0,\pi)$ η πυκνότητα του $T(x,\rho,\varepsilon,m)$ είναι 0 ή 1. Συνεπώς το $\mathcal{L}^1$ μέτρο των θ που δεν ανήκουν στο σύνολο $T(x,\rho,\varepsilon,m) \cup S$ είναι μηδέν. Με άλλα λογια $\mathcal{L}^1$-σχεδόν όλα τα $\theta \notin S$, ανήκουν στο $T(x,\rho,\varepsilon,m)$. Αφου τα m,ε,ρ ήταν τυχαία έπεται ότι για $\mathcal{L}^1$-σχεδόν όλα τα $\theta \notin S$

$$\theta \in T = \bigcap_{\rho>0} \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{0<m<\infty} T(x,\rho,\varepsilon,m).$$

□

Θεωρούμε τα υποσύνολα του $E \times [0,\pi)$

$$G_1 = \{(x,\theta) : \theta \text{ είναι κατεύθυνση συμπύκνωσης 1ου είδους στο } x\},$$

$$G_2 = \{(x,\theta) : \theta \text{ είναι κατεύθυνση συμπύκνωσης 2ου είδους στο } x\}.$$

Θεωρημα 2.4. *Αν το E είναι ένα μη-κανονικό 1-σύνολο του επιπέδου, τότε*

$$\mathcal{L}^1(proj_\theta E) = 0$$

για σχεδόν όλα τα $\theta \in [0,\pi)$.

Αποδειξη. Πρώτα θα δείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που το E είναι συμπαγές. Θέτουμε

$$G = G_1 \cup G_2.$$

Από το λήμμα 2.7 έχουμε ότι $\mathcal{H}^1$-σχεδόν όλα τα $x \in E$ είναι radiation points, δηλαδή για $\mathcal{H}^1$-σχεδόν όλα τα $x \in E$, $\mathcal{L}^1$-σχεδόν όλα τα $\theta \in [0,\pi)$ είναι κατευθύνσεις πρώτου ή δεύτερου ειδους για το εκάστοτε x. Συνεπώς

$$\mathcal{L}^1(\{\theta \in [0,\pi) : (x,\theta) \in G\}) = \pi,$$

για $\mathcal{H}^1$-σχεδόν όλα τα $x \in E$. Από το θέωρημα Fubini έχουμε ότι $\mathcal{L}^1$-σχεδόν όλα τα $\theta \in [0,\pi)$ είναι κατευθύνσεις συμπύκνωσης πρώτου ή δεύτερου για $\mathcal{H}^1$-σχεδόν όλα τα $x \in E$. Για όλη την υπόλοιπη απόδειξη όταν λέμε «σχεδον όλα» για στοιχεία του E θα εννοούμε ως προς το μέτρο Hausdorff και όταν λέμε «σχεδόν όλα» για στοιχεία του $[0,\pi)$ θα εννοούμε ως προς το μέτρο Lebesgue.

Έστω $\theta \in [0,\pi)$ μια διεύθυνση συμπύκνωσης για σχεδόν όλα τα $x \in E$ και L_ϕ μια κάθετη ευθεία στην L_θ, δηλαδή $\phi - \theta = \frac{\pi}{2} \,(\mathrm{mod}\,\pi)$. Αν δείξουμε ότι $\mathcal{L}^1(proj_\phi E) = 0$ για αυτό το ϕ που ικανοποιεί την προηγούμενη ισοτιμία, τότε έχουμε δείξει το θεώρημα για E συμπαγές.

Το E γράφεται στην μορφή $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, όπου E_0 περιέχει τα σημεία του E που δεν είναι radiation points και άρα $\mathcal{H}^1(E_0) = 0$, και $E_\imath$ είναι τα σημεία του E για τα οποία η διεύθυνση θ είναι διεύθυνση συμπύκνωσης $\imath$-στού είδους. Πάμε να δείξουμε τώρα ότι $\mathcal{L}^1(proj_\phi E) = 0$, δείχνοντας πως κάθε «κομμάτι» του E έχει μηδενικού μέτρου Lebesgue προβολή πάνω στην L_ϕ. Με την βοήθεια του λήμματος 2.6 παίρνουμε ότι

$$0 = \mathcal{H}^1(E_0) \geq \mathcal{H}^1(proj_\phi E_0) = \mathcal{L}^1(proj_\phi E_0) = 0.$$

Από τον ορισμό του E_1, αν $x \in E_1$ τότε $\mathcal{H}^0(L_\theta(x) \cap E) = \infty > c, \forall c > 0$. Θεωρώντας ότι $\mathbb{R}^2 \cong L_\theta \times L_\phi$ παίρνουμε ότι

$$\infty > \mathcal{H}^1(E) \geq bc\mathcal{H}^1(proj_\phi E) \geq bc\mathcal{H}^1(proj_\phi E_1).$$

Επειδή $b \neq 0$ και το c μπορούμε να το πάρουμε αυθαίρετα μεγάλο, από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι

$$\mathcal{L}^1(proj_\phi E_1) = \mathcal{H}^1(proj_\phi E_1) = 0.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι $\mathcal{L}^1(proj_\phi E_2) = 0$. Επιλέγουμε $m > 0$ και θεωρούμε την κλάση υποδιαστημάτων της L_ϕ

$$\mathcal{V} = \left\{ J : \mathcal{H}^1(\{x \in E : proj_\phi x \in J\}) > m\mathcal{L}^1(J) \right\}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε τα J κλειστά. Έστω τώρα $\theta \in I \subseteq [0, \pi)$. Ο διπλός τομέας $C_r(x, I)$ ορίζει δύο τόξα μήκους $\mathcal{L}^1(I)r$ το καθένα. Επομένως με κατάλληλη επιλογή του I (οσοδήποτε μικρού μήκους) μπορούμε να περικλείσουμε τον $C_r(x, I)$ σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλάτους μικρότερου από $\mathcal{L}^1(I)r$ το οποίο έχει δύο παράλληλες πλευρές στην διεύθυνση θ. Ας πάρουμε τώρα ένα $y \in proj_\phi E_2$. Τότε υπάρχει $x \in E_2$ ώστε $y = proj_\phi x$. Επειδή το E_2 αποτελείται απ'ολα τα x του E που έχουν την θ ως κατεύθυνση συμπύκνωσης δεύτερου είδους, για την κατάλληλη επιλογή του I έχουμε ότι

$$\frac{\mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I))}{r} \geq m\mathcal{L}^1(I) \Leftrightarrow \mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I)) \geq m\mathcal{L}^1(I)r.$$

Επειδή η L_ϕ είναι κάθετη στην διεύθυνση θ και ο $C_r(x, I)$ περιέχεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλάτους μικρότερου από $\mathcal{L}^1(I)r$ το οποίο έχει δύο παράλληλες πλευρές στην διεύθυνση θ, έχουμε ότι $proj_\phi(E \cap C_r(x, I)) \subseteq J \; \kappa\alpha\iota \; \mathcal{L}^1(J) < \mathcal{L}^1(I)r$, όπου J κλειστό υποδιάστημα της L_ϕ. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\{z \in E : proj_\phi z \in J\}) &\geq \mathcal{H}^1(\{z \in E \cap C_r(x, I) : proj_\phi z \in J\}) \\ &\geq m\mathcal{L}^1(I)r > m\mathcal{L}^1(J). \end{aligned}$$

Συνεπώς $J \in \mathcal{V}$. Από τα προηγούμενα έχουμε το εξής

$$y \in proj_\phi E_2 \subseteq proj_\phi(E \cap C_r(x, I)) \subseteq J \in \mathcal{V}.$$

Το $\mathcal{L}^1(I)$ μπορούμε να το πάρουμε όσο μικρό θέλουμε και άρα και το $\mathcal{L}^1(J)$. Αφού το $y \in proj_\phi E_2$ ήταν τυχαίο, η κλάση $\mathcal{V}$ είναι μια κάλυψη Vitali για το $proj_\phi E_2$. Παίρνοντας $\varepsilon > 0$,από το θεώρημα κάλυψης Vitali υπάρχει μια οικογένεια ξένων υποδιαστημάτων $\{J_\imath\}_{\imath \in \mathbb{N}}$ της $\mathcal{V}$ ώστε

$$\mathcal{L}^1(proj_\phi E_2) = \mathcal{H}^1(proj_\phi E_2) \leqslant \sum_{\imath=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(J_\imath) + \varepsilon.$$

Από τον ορισμό της $\mathcal{V}$ έχουμε ότι

$$\mathcal{H}^1(E) \geq \mathcal{H}^1(\{x \in E : proj_\phi x \in J\}) > m\mathcal{L}^1(J) \Rightarrow \mathcal{L}^1(J) < \frac{1}{m}\mathcal{H}^1(E).$$

Επειδή τα m, ε ήταν τυχαία, οσοδήποτε μικρά, έχουμε

$$\mathcal{L}^1(proj_\phi E_2) < \frac{1}{m}\mathcal{H}^1(E) + \varepsilon \Rightarrow \mathcal{L}^1(proj_\phi E_2) = 0.$$

Συνεπώς δείξαμε ότι

$$\mathcal{L}^1(proj_\phi E) \leqslant \mathcal{L}^1(proj_\phi E_0) + \mathcal{L}^1(proj_\phi E_1) + \mathcal{L}^1(proj_\phi E_2) = 0,$$

δηλαδή το θεώρημα για E συμπαγές.

Παίρνουμε τώρα το E να είναι ένα οποιοδήποτε 1-σύνολο. Λόγω της κανονικότητας του μέτρου Hausdorff το $E = F \cup K$ όπου F συμπαγές και $\mathcal{H}^1(K) < \delta,\ \delta > 0$. Για το F έχουμε ότι $\mathcal{L}^1(proj_\theta F) = 0$, για σχεδόν όλα τα $\theta \in [0, \pi)$. Είναι τώρα:

$$\mathcal{L}^1(proj_\phi E) = \mathcal{L}^1(proj_\theta F) + \mathcal{L}^1(proj_\theta K) \leqslant \mathcal{H}^1(K) < \delta.$$

Στέλνοντας το δ στο μηδέν παίρνουμε το θεώρημα στη γενική μορφή του, δηλαδή $\mathcal{L}^1(proj_\phi E) = 0$ για σχεδόν όλα τα $\theta \in [0, \pi)$. □

Τελειώνουμε αυτην την ενότητα με ένα πόρισμα των θεωρημάτων 2.3 και 2.4 το οποίο χρησιμοποιείται ως κριτήριο για το αν ένα 1-σύνολο E του επιπέδου είναι μη-κανονικό.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.1. *Ένα 1-σύνολο E στον $\mathbb{R}^n$ είναι μη-κανονικό αν και μονον αν η προβολή του σε δύο διαφορετικές διευθύνσεις έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω E μη-κανονικό 1-σύνολο. Άμεσα απο το θεώρημα 2.4 έχουμε ότι μπορούμε να βρούμε δύο διευθύνσεις που η προβολή του E να έχει μέτρο Lebesgue μηδέν. Αντίστροφα, έστω ότι το E έχει προβολή με μέτρο Lebesgue μηδέν σε δύο διαφορετικές διευθύνσεις αλλα δεν είναι μη-κανονικό. Αυτό σημαίνει ότι το E έχει και ένα κανονικό «κομμάτι». Από το θεώρημα 2.3 καταλήγουμε σε άτοπο αφού αυτό το «κομμάτι» έχει προβολή θετικού μέτρου Lebesgue σε όλες τις διευθύνσεις εκτός από το πολύ μία. Επομένως το E είναι μη-κανονικό 1-σύνολο και το πόρισμα αποδείχθηκε. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ύπαρξη συνόλων Kakeya μηδενικού μέτρου Lebesgue

Το πρόβλημα Kakeya έγκειται στην εύρεση ενός συνόλου Kakeya το οποίο να έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue. Όπως είπαμε και στην εισαγωγή σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε απάντηση με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι κατασκευαστικός, και το πρόβλημα θα λυθεί με την βοήθεια των G-συνόλων. Η προσέγγιση αυτή οφείλεται στον Wolff [**5**]. Ο δεύτερος τρόπος σχετίζεται με την θεωρία των γραμμικά μετρήσιμων συνόλων και πιο συγκεκριμένα με τα θεωρήματα προβολών που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η απόδειξη αυτή οφείλεται στον ίδιο τον Besicovitch και δόθηκε σχεδόν μισό αιώνα μετά την πρώτη του κατασκευή. Οι αποδείξεις θα γίνουν αρχικά στο επίπεδο. Πολύ εύκολα μετά, το αποτέλεσμα που ισχύει στο επίπεδο γενικεύεται στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό συμβαίνει διότι μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνολα Kakeya στον $\mathbb{R}^n$ ως το καρτεσιανό γινόμενο ενός συνόλου Kakeya στο επίπεδο με έναν κλειστό δίσκο ακτίνας $\frac{1}{2}$ στον $\mathbb{R}^{n-2}$. Ας δούμε την πρώτη απόδειξη.

Πόρισμα 3.1. *Υπάρχουν σύνολα Kakeya μηδενικού μέτρου Lebesgue στο επίπεδο.*

Απόδειξη. Αν δείξουμε ότι υπάρχουν G-σύνολα μηδενικού μέτρου,τότε παίρνοντας την ένωση τεσσάρων συνόλων εκ των οποίων το ένα είναι G-σύνολο και τα άλλα τρία προκύπτουν από την περιστροφή του G-σύνολου κατα $45°$ ως προς το προηγούμενο κάθε φορα,καταλήγουμε σε ένα σύνολο Kakeya μηδενικού μέτρου. Αν F είναι ένα G-σύνολο,τότε ορίζουμε $F(\varepsilon) = \{x : dist(x, F) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, δηλαδή το $F(\varepsilon)$ είναι μια ε-περιοχή του συνόλου F. Έστω $\varepsilon_\imath > 0, \imath \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Επιλέγουμε F_0 ένα G-σύνολο και $\varepsilon_0 = 1$. Από το λήμμα 2.3 υπάρχει ένα άλλο G-σύνολο F_1 το οποίο περιέχεται στην $F_0(\varepsilon_0)$ και να έχει μέτρο Lebesgue μικρότερο από οποιοδήποτε $\eta > 0$. Από την στιγμή που το σύνολο F_1 είναι συμπαγές μπορούμε να επιλέξουμε $\eta = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ και ε_1 αρκετα μικρό ώστε να ισχύει $F_1(\varepsilon_1) \subseteq F_0(\varepsilon_0)$ και $\mathcal{L}^1(F_1(\varepsilon_1)) < 2^{-1} = \frac{1}{2}$. Επαγωγικά αν έχουμε βρει τα $F_{\imath-1}$ και $\varepsilon_{\imath-1}$ με $\mathcal{L}^2(F_{\imath-1}(\varepsilon_{\imath-1})) < 2^{-(\imath-1)}$, υπάρχει G-σύνολο $F_\imath$ και $\varepsilon_\imath$ ώστε $F_\imath(\varepsilon_\imath) \subseteq F_{\imath-1}(\varepsilon_{\imath-1})$ και $\mathcal{L}^2(F_\imath(\varepsilon_\imath)) < 2^{-\imath}$. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει μια ακολουθία G-συνόλων με τις εξής ιδιότητες για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- $F_n(\varepsilon_n) \subseteq F_{n-1}(\varepsilon_{n-1})$.
- $\mathcal{L}^2(\overline{F_n(\varepsilon_n)}) < 2^{-n}$.

Προφανώς το σύνολο $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{F_n(\varepsilon_n)}$ είναι συμπαγές. Έστω $m \in [0, 1]$. Τότε το $\overline{F_n(\varepsilon_n)}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ περιέχει ενα ευθύγραμμο τμήμα M_n κλίσης m που ενώνει τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ (δηλαδή έχει μήκος μεγαλύτερο από 1). Αφού τα $\overline{F_n(\varepsilon_n)}$ είναι συμπαγή και ισχύει ότι $\overline{F_n(\varepsilon_n)} \subseteq \overline{F_{n-1}(\varepsilon_{n-1})}$ με γνωστό τοπολογικό επιχείρημα έπεται ότι το $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{F_n(\varepsilon_n)}$ περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα M κλίσης m που ενώνει τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$, το οποίο είναι το όριο της ακολουθίας $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ή μια υπακολουθία αυτής αν είναι αναγκαίο. Συνεπώς το $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{F_n(\varepsilon_n)}$ είναι G-σύνολο διότι το m ήταν τυχαίο. Από την δεύτερη ιδιότητα της ακολουθίας που κατασκευάσαμε παίρνουμε ότι $\mathcal{L}^2(\bigcap_{n=0}^{\imath} \overline{F_n(\varepsilon_n)}) < \frac{1}{2^\imath}$, $\forall \imath \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Οπότε στέλνοντας το $\imath$ στο άπειρο έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^2(\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{F_n(\varepsilon_n)}) = 0.$$

□

Σημειωση 3.1. *Η κατασκευή που περιγράφηκε στην προηγούμενη απόδειξη μας οδηγεί στην ακόλουθη παραλλαγή. Επιλέγοντας* $\delta = \frac{1}{10}N^{-N}$, *υπάρχει μια ξένη οικογένεια* $\left\{T_{e_\jmath}^{\delta}(x_\jmath)\right\}_{\jmath=1}^{M}$ *στο επίπεδο, όπου* $M \approx \delta^{-1}$ *και ισχύει για την ένωσή της το εξής*

$$\mathcal{L}^2(\bigcup_{\jmath=1}^{M} T_{e_\jmath}^{\delta}(x_\jmath) + 2e_\jmath) \leqslant \frac{1}{N}.$$

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα δούμε τη δεύτερη προσέγγιση για την οποία θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη δυϊκή μορφή. Έστω $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε το

$$L(a, b) = \{(x, bx + a) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Με άλλα λόγια το $L(a, b)$ είναι η ευθεία $y = bx + a$. Έτσι αν $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ορίζεται το σύνολο

$$L(E) = \bigcup_{(a,b)\in E} L(a, b).$$

Αν $c \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά, τότε L_c είναι η ευθεία $x = c$ και έχουμε ότι

$$L(E) \cap L_c = \{(c, bc + a) : (a, b) \in E\} = \{(c, (1, c) \cdot (a, b)) : (a, b) \in E\}.$$

Τα σύνολα $L(E) \cap L_c$ και $proj_\theta E$ είναι γεωμετρικά όμοια με λόγο ομοιότητας $\sqrt{1 + c^2}$, όπου $c = \tan\theta$. Ως εκ τούτου ισχύει η σημαντική σχέση

$$\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^1(proj_\theta E) = 0.$$

Μετά από όλα αυτά θα δείξουμε το θεώρημα το οποίο μαζί με τα θεωρήματα προβολών θα μας δώσει την λύση του προβλήματος Kakeya με τον δεύτερο τρόπο.

Θεωρημα 3.1. *Έστω E ένα 1-σύνολο στον $\mathbb{R}^2$. Τότε το $L(E)$ είναι $\mathcal{L}^2$-μετρήσιμο. Επίσης αν το E είναι μη-κανονικό, τότε $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ και αν το E είναι κανονικό, τότε $\mathcal{L}^2(L(E)) > 0$.*

Αποδειξη. Ξεκινάμε με ένα τυχαίο υποσύνολο E του επιπέδου. Αν το E είναι κλειστό τότε και το $L(E)$ είναι κλειστο. Πράγματι. Αν $(x, a_n + xb_n) \to (x, a + xb)$, τότε $(x, a + xb) \in L(E)$, αφού το E είναι κλειστό (ουσιαστικά όλες οι ακολουθιές του $L(E)$ είναι αυτης της μορφής οι ακολουθίες). Αν τώρα το E είναι ανοιχτό τότε και το $L(E)$ είναι ανοιχτό. Πράγματι. Έστω $(x_0, a + x_0 b) \in L(E)$. Αφού το E είναι ανοιχτο υπάρχει μια περιοχή $\mathcal{U}$ του (a, b) που περιέχεται στο E. Τότε το $L(\mathcal{U})$ είναι περιοχή του $(x_0, a + x_0 b)$ που περιέχεται στο $L(E)$. Ως εκ τούτου αν το E είναι G_δ (αριθμήσιμη τομή ανοιχτών) τότε και το $L(E)$ είναι G_δ και αν το E είναι F_σ (αριθμήσιμη ένωση κλειστών), τότε και το $L(E)$ είναι F_σ σύνολο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\mathcal{H}^1(E) = 0$. Από την κανονικότητα του 1-μέτρου Hausdorff, υπάρχει ένα G_δ σύνολο E_0 , ώστε $E \subseteq E_0$ και $\mathcal{H}^1(E_0) = 0$.Μάλιστα από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε ότι το $L(E_0)$ είναι $\mathcal{L}^2$-μετρήσιμο ως G_δ. Εφαρμόζοντας το λήμμα 2.6 για κάθε $\theta \in [0,\pi)$ παίρνουμε ότι

$$\mathcal{H}^1(proj_\theta E_0) = \mathcal{L}^1(proj_\theta E_0) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}^1(L(E_0) \cap L_c) = 0,\ \forall c.$$

Για την χαρακτηριστική συνάρτηση του $L(E_0)$, $\chi_{L(E_0)}$, προφανώς ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fubini, το οποίο με την βοήθεια της σχέσης $\mathcal{L}^1(L(E_0) \cap L_c) = 0,\ \forall c$ μας δίνει ότι $\mathcal{L}^2(L(E_0)) = 0$. Επειδή $\mathcal{L}^2(L(E_0)) = 0$,$L(E) \subseteq L(E_0)$ και το 2-διάστατο μέτρο Lebesgue είναι πλήρες, έπεται ότι το $L(E)$ είναι $\mathcal{L}^2$-μετρήσιμο.

Έστω ότι το E είναι 1-σύνολο. Από την κανονικότητα του $\mathcal{H}^1$ έπεται ότι υπάρχει ένα F_σ σύνολο F τ.ω. $\mathcal{H}^1(E \setminus F) = 0$, ισοδύναμα $E = F \cup B$, όπου $\mathcal{H}^1(B) = 0$. Συνεπώς $L(E) = L(F \cup B) = L(F) \cup L(B)$, δηλαδή το $L(E)$ είναι $\mathcal{L}^2$-μετρήσιμο ως ένωση $\mathcal{L}^2$-μετρήσιμων συνόλων. Υποθέτουμε ότι το E είναι μη-κανονικό 1-σύνολο. Από το θεώρημα 2.4 είναι γνωστό ότι $\mathcal{L}^1(proj_\theta E) = 0$ για σχεδόν όλα τα $\theta \in [0,\pi)$(ως προς το μέτρο Lebesgue). Η ισοδυναμία που δείξαμε ακριβώς πριν την απόδειξη μας λέει πως $\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0$ για σχεδόν όλα τα c. Όπως ειδαμε και πριν στην απόδειξή μας, το θεώρημα Fubini μαζί με την αμέσως προηγούμενή μας σχέση μας δίνει $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$. Στην περίπτωση που το E είναι κανονικό 1-σύνολο θα δουλέψουμε με παρόμοιο τρόπο. Για κανονικό E, λόγω του θεωρήματος 2.3, ισχύει $\mathcal{L}^1(proj_\theta E) > 0$ για όλα εκτός από το πολύ ένα $\theta \in [0,\pi)$. Συνεπώς από το θεώρημα Fubini και την σχέση $\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) > 0$ για σχεδόν όλα τα c παίρνουμε ότι $\mathcal{L}^2(L(E)) > 0$. □

Είμαστε έτοιμοι τώρα να δώσουμε απάντηση στο προβλημα Kakeya αποδεικνύοντας το ακόλουθο θεώρημα. Η απόδειξή του θα βασιστεί στο σύνολο που κατασκευάστηκε στο θεώρημα 2.1 και στην επόμενη παρατήρηση.

Παρατηρηση 3.1. *Αν $b \in proj_{\frac{\pi}{2}} E$ τότε προφανώς από τον ορισμό του το $L(E)$ περιέχει μια ευθεία με κλίση b.*

Θεωρημα 3.2. *Υπάρχει υποσύνολο του επιπέδου το οποίο περιέχει τουλάχιστον μια ευθεία προς κάθε διεύθυνση και έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.*

Αποδειξη. Ας πάρουμε την ένωση του συνόλου που κατασκευάσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 2.1 με το αντιγραφό του που προκύπτει από την ανάκλασή του ως προς τον άξονα των x και ας το ονομάσουμε E. Προφανώς το E είναι ένα μη-κανονικό 1-σύνολο και ισχύει $\{(0,y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\} \subseteq proj_\theta E$. Η παρατήρηση 3.1 μας λέει ότι το σύνολο $L(E)$ περιέχει ευθείες με όλες τις κλίσεις από -1 ως 1. Με άλλα λογια αν $\theta \in [0,2\pi)$ είναι η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία του $L(E)$ με τον x-άξονα, τότε $\theta \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$. Από την στιγμή που το E είναι μη-κανονικό, από το θεώρημα 3.1 έχουμε ότι $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$. Η απόδειξη του θεωρήματος τελειώνει αν παρουμε την ένωση του E με το αντίγραφό του, που προκύπτει από την περιστοφή του E κατα $\frac{\pi}{2}$. □

Το ουσιαστικό σημείο στον τελευταίο τρόπο απόδειξης του προβλήματος Kakeya είναι η αρχή δυϊκότητας που είδαμε και παραπάνω.

$$\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^1(proj_\theta E) = 0,$$

με την οποία περνάμε από ένα σύνολο σημείων σε ένα σύνολο που είναι ένωση ευθειών και αντίστροφα. Πιο συγκεκριμένα η προηγούμενη ισοδυναμία σχετίζει γεωμετρικά την προβολή ενός συνόλου E σε μια διεύθυνση με την τομή ενός συνόλου ευθειών, που σχετίζεται άμεσα με το E όπως είδαμε, με μια σταθεροποιημένη κάθετη ευθεία στον άξονα των x.

Μια άλλη απόδειξη του προβλήματος Kakeya (παραλλαγή της αρχικής κατασκευής του Besicovitch) υπάρχει στη μονογραφία [**4**]. Αυτή η απόδειξη είναι αρκετά γεωμετρική και είναι πολύ κοντά σαν ιδέα με τον πρώτο τρόπο που είδαμε. Συνοπτικά, η απόδειξη ξεκινα με ένα ισόπλευρο τρίγωνο μοναδιαίου ύψους, το οποίο χωρίζουμε σε ίσα υποτρίγωνα άρτιου πλήθους που έχουν βάση πάνω στην βάση του αρχικού μας τριγώνου. Μετακινούμε κατά ζεύγη τα υποτρίγωνα, ώστε το ένα να επικαλύψει το άλλο και με αυτόν τον τρόπο να υπάρξει μείωση του αρχικού εμβαδου. Με αυτόν τον τρόπο δεν χάνεται κανένα ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την απέναντι της βάσης κορυφή του τριγώνου ως προς καμία διεύθυνση απο αυτά που υπάρχουν στο αρχικό μας τρίγωνο. Τα σύνολα που προκύπτουν από τις επικαλύψεις έχουν ανά ζεύγη μια παράλληλη πλευρά. Ταυτίζουμε αυτες τις πλευρές και έχουμε κι άλλη μείωση του εμβαδου. Συνεχίζουμε την ταύτιση ώσπου να καταλήξουμε σε ένα συνεκτικό σύνολο. Η μείωση του εμβαδού είναι ανάλογη του πλήθους των υποτριγώνων. Με τελείως ανάλογο τρόπο όπως στο πόρισμα 3.1 παίρνουμε το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η διάσταση Hausdorff των συνόλων Kakeya

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο υπάρχουν σύνολα Kakeya μηδενικού μέτρου Lebesgue. Διαισθητικά όμως τα σύνολα Kakeya είναι μεγάλα. Μια πιο σύγχρονη μορφή του προβλήματος Kakeya η οποία αποτελεί ανοιχτό πρόβλημα είναι το ακόλουθο εύλογο ερώτημα.

Ανοιχτο Προβλημα 1. *Έχουν τα σύνολα Kakeya του $\mathbb{R}^n$ διάσταση Hausdorff ίση με n;*

Το 1971 ο Davies [**3**] απέδειξε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει καταφατική απάντηση στην περίπτωση $n = 2$. Θα παραθέσουμε ένα ακόμη ανοιχτό πρόβλημα το οποίο όπως θα δούμε αργότερα συνδέεται πολύ στενά με το ανοιχτό πρόβλημα 1. Πριν από αυτό όμως θα δώσουμε τον ορισμό της μεγιστικής συνάρτησης του Kakeya ο οποίος οφείλεται στον Bourgain [**1**].

Ορισμος 4.1. *Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, τοπικά ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε την μεγιστική συνάρτηση Kakeya(ή μεγιτστικό τελεστή Kakeya) να είναι η $f^*_\delta : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$f^*_\delta(e) = \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T^\delta_e(a))} \int_{T^\delta_e(a)} |f|.$$

.

Ανοιχτο Προβλημα 2. *Υπάρχει μια θετική σταθερά ώστε να ισχύει στον $\mathbb{R}^n$*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon : \| f^*_\delta \|_{L^n(S^{n-1})} \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \| f \|_n, \ \forall f;$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε μια πρόταση και ένα λήμμα που θα μας δώσουν μια εκτίμηση για το ανοιχτό πρόβλημα 1, την απόδειξή του στην περίπτωση $n = 2$ και θα μας δείξουν τον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται τα δύο ανοιχτά προβλήματα που είδαμε πιο πάνω. Για λόγους ευκολίας αντί για την συνήθη νόρμα στους $\mathbb{R}^n$ θα χρησιμοποιήσουμε την restricted weak type norm.

Ορισμος 4.2. *Λέμε ότι ένας τελεστής T έχει restricted weak type norm $\leqslant A$ και συμβολίζουμε*

$$\| Tf \|_{q,\infty} \leqslant A \| f \|_{p,1}$$

όταν για κάθε E πεπερασμένου μέτρου Lebesgue και για κάθε $\lambda \in (0, 1]$ ισχύει

$$\mathcal{L}^n(\{x \in E : T\chi_E \geq \lambda\}) \leqslant (\frac{A(\mathcal{L}^n(E))^{\frac{1}{p}}}{\lambda})^q.$$

Λημμα 4.1. *Υποθέτουμε πως στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε την εκτίμηση*

$$\| f^*_\delta \|_{q,\infty} \leqslant C\delta^{-\alpha} \| f \|_{p,1} .$$

Τότε, αν E είναι ένα σύνολο Kakeya του $\mathbb{R}^n$, έχουμε ότι $dimE \geq n - p\alpha$.

Αποδειξη. Έστω $s < n - p\alpha$. Για κάθε $e \in S^{n-1}$ σταθεροποιούμε ένα x_e τ.ω. $x_e + te \in E$, $\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Για να βρούμε ένα κάτω φράγμα του $\mathcal{H}^s(E)$, σταθεροποιούμε μια κάλυψη του E από δίσκους $D_\jmath = D(x_\jmath, r_\jmath)$, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $r_\jmath \leqslant 1$, $\forall \jmath$. Ορίζουμε τα ακόλουθα.

- $\Sigma_\kappa = \{\jmath : 2^{-\kappa} \leqslant r_\jmath \leqslant 2^{-(\kappa-1)}\}$
- $\nu_\kappa = |\Sigma_\kappa|$
- $E_\kappa = E \cap (\bigcup_{\jmath \in \Sigma_\kappa} D_\jmath)$
- $\tilde{D}_\jmath = D(x_\jmath, 2r_\jmath)$
- $\tilde{E}_\kappa = \bigcup \left\{ \tilde{D}_\jmath : \jmath \in \Sigma_\kappa \right\}$

Προφανώς $\bigcup_\kappa E_\kappa = E$. Από την αρχή του περιστερώνα έπεται ότι για κάθε e υπάρχει κάποιο $\kappa = \kappa_e$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{L}^1(\{t \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] : x_e + te \in E_\kappa\}) \geq \tfrac{c}{\kappa^2},\ c = \tfrac{6}{\pi^2}$$

Πράγματι. Έστω ότι δεν ισχύει το προηγούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή για κάποιο e και για κάθε κ έχουμε

$$\mathcal{L}^1(\left\{ t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : x_e + te \in E_\kappa \right\}) < \frac{c}{\kappa^2}$$

Τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : x_e + te \in E_\kappa \right\}) &\leqslant \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(\left\{ t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : x_e + te \in E_\kappa \right\}) \\ &< c \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2} = 1\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο αφού

$$\bigcup_\kappa E_\kappa = E,$$

$x_e + te \in E$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και

$$\mathcal{L}^1(\left\{ x_e + te : t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \right\}) = 1.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$S^{n-1} = \bigcup_\kappa \left\{ e : \mathcal{L}^1(\left\{ t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : x_e + te \in E_\kappa \right\}) \geq \frac{c}{\kappa^2} \right\}.$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την αρχή του περιστερώνα, μπορούμε να βρούμε ένα σταθεροποιημένο κ τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\Omega = \left\{ e : \mathcal{L}^1(\left\{ t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : x_e + te \in E_\kappa \right\}) \geq \frac{c}{\kappa^2} \right\}$$

να έχει επιφανειακό μέτρο μεγαλύτερο ή ίσο από $\frac{c}{\kappa^2}$. Με αυτό το κ, από τους ορισμούς των συνόλων $E_\kappa, \tilde{E}_\kappa$ προκύπτει άμεσα ότι το $\tilde{E}_\kappa$ περιέχει έναν δίσκο ακτίνας $2^{-\kappa}$ με κέντρο οποιδήποτε σημείο του E_κ. Αν τώρα $e \in \Omega$, παίρνουμε προσέχοντας πως ορίστηκε το Ω, ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(T_e^{2^{-\kappa}}(x_e) \cap \tilde{E}_\kappa) &\geq \mathcal{L}^n(T_e^{2^{-\kappa}}(x_e) \cap E_\kappa) \geq \frac{c}{\kappa^2} \mathcal{L}^n(T_e^{2^{-\kappa}}(x_e)) \\ &\gtrsim \kappa^{-2} \mathcal{L}^n(T_e^{2^{-\kappa}}(x_e)).\end{aligned}$$

Έστω $f = \chi_{\tilde{E_\kappa}}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f^*_{2^{-\kappa}}(e) &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^{2^{-\kappa}}(a))} \int_{T_e^{2^{-\kappa}}(a)} \chi_{\tilde{E_\kappa}} \\ &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^{2^{-\kappa}}(a))} \int \chi_{\tilde{E_\kappa}\cap T_e^{2^{-\kappa}}(a)} \\ &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^{2^{-\kappa}}(a))} \mathcal{L}^n(\tilde{E_\kappa} \cap T_e^{2^{-\kappa}}(a)). \end{aligned}$$

Ας συμβολίσουμε το επιφανειακό μέτρο πάνω στην μοναδιαία σφαίρα με σ. Αυτό που θέλουμε να δείξουμε τώρα είναι ότι $\sigma(A) \gtrsim \kappa^{-2}$, όπου $A = \left\{e : f^*_{2^{-\kappa}}(e) \geq C^{-1}\kappa^{-2}\right\}$. Αρκεί να δείξουμε πως $\Omega \subseteq A$. Αν $e \in \Omega$, τότε $f^*_{2^{-\kappa}}(e) \gtrsim \kappa^{-2}$, δηλαδή $e \in A$. Αφού $\Omega \subseteq A$, έχουμε

$$\sigma(A) \geq \sigma(\Omega) \geq \frac{c}{\kappa^2} \gtrsim \kappa^{-2}.$$

Σύμφωνα με την εκτίμηση της υπόθεσης έχουμε

$$\sigma(A) \leqslant (\frac{C2^{\kappa\alpha}\mathcal{L}^n(\tilde{E_\kappa})^{\frac{1}{p}}}{C^{-1}\kappa^{-2}})^q \lesssim (\kappa^2 2^{\kappa\alpha}\mathcal{L}^n(\tilde{E_\kappa})^{\frac{1}{p}})^q.$$

Επίσης $\mathcal{L}^n(\tilde{E_\kappa}) \leqslant \nu_\kappa\cdot$(όγκος της μεγαλύτερης σφαίρας του $\tilde{E_\kappa}$)$\lesssim \nu_\kappa 2^{-kn}$.[1] Από όλα τα προηγούμενα έπεται ότι

$$\kappa^{-2} \lesssim (\kappa^2 2^{\kappa\alpha}\mathcal{L}^n(\tilde{E_\kappa})^{\frac{1}{p}})^q \lesssim (\kappa^2 2^{\kappa\alpha}\nu_\kappa^{\frac{1}{p}} 2^{-\kappa n\frac{1}{p}})^q \Leftrightarrow$$

$$\kappa^{-2\frac{1}{q}} \lesssim \kappa^2 2^{\kappa\alpha}\nu_\kappa^{\frac{1}{p}} 2^{-\kappa n\frac{1}{p}} \Leftrightarrow \kappa^{-2}2^{-\kappa\alpha}2^{\kappa n\frac{1}{p}}\kappa^{-2\frac{1}{q}} \lesssim \nu_\kappa^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow$$

$$\nu_\kappa \gtrsim \kappa^{-2p}2^{-\kappa p\alpha}2^{\kappa n}\kappa^{-2\frac{p}{q}} \Leftrightarrow \nu_\kappa \gtrsim \kappa^{-2p(1+\frac{1}{q})}2^{\kappa(n-p\alpha)}.$$

Θέτουμε $\varepsilon = n - p\alpha - s > 0$. Τότε για το κ που έχουμε σταθεροποιήσει έχουμε ότι

$$\sum_{\jmath} r_\jmath^s \gtrsim \nu_\kappa 2^{-\kappa s} \gtrsim \kappa^{-2p(1+\frac{1}{q})}2^{\kappa\varepsilon} \geqslant \text{σταθερά},$$

και το λήμμα έχει αποδειχθεί. □

Το προηγούμενο λήμμα μας λέει ότι μια καταφατική απάντηση στο ερώτημα 2 συνεπάγεται καταφατική απάντηση στο ερώτημα 1. Η επόμενη πρόταση με χρήση του λήμματος 4.1 μας οδηγεί στο θεώρημα του Davies, που λέει ότι τα σύνολα Kakeya στο επίπεδο έχουν διάσταση Hausdorff 2. Έστω $e, f \in S^{n-1}$ δύο κατευθύνσεις στην σφαίρα. Θέτουμε $\vartheta(e,f) = \arccos(e\cdot f)$. Στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν δύο σχέσεις που αφορούν την τομή των $T_e^\delta(a), T_f^\delta(b)$ για $a, b \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι

(1) $\delta(T_e^\delta(a)\cap, T_f^\delta(b)) \lesssim \frac{\delta}{\vartheta(e,f)+\delta}$
(2) $\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a)\cap, T_f^\delta(b)) \lesssim \frac{\delta^n}{\vartheta(e,f)+\delta}$

Πρόταση 4.1. *Η (2,2)-restricted weak type norm του μεγιστικού τελεστή Kakeya $Tf = f^*_\delta$ είναι $\lesssim (\log\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}}$. Με άλλα λόγια, αν $E\subseteq \mathbb{R}^2$ πεπερασμένου μέτρου Lebesgue, $\lambda \in (0,1]$, $f = \chi_E$ και $\Omega = \left\{e \in S^1 : f^*_\delta = Tf = T\chi_E \geqslant \lambda\right\}$, τότε*

$$\sigma(\Omega) \lesssim ((\log\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}}\frac{\mathcal{L}^2(E)^{\frac{1}{2}}}{\lambda})^2 = \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\frac{\mathcal{L}^2(E)}{\lambda^2}.$$

[1]μέγιστη ακτίνα ίση με $2^{-\kappa+2}$

Αποδειξη. (Ουσιαστικά οφείλεται στον Córdoba [**2**].) Έστω $\mathcal{N}_\delta(\Omega)$ το ελάχιστο πλήθος μπαλών ακτίνας δ που καλύπτουν το Ω. Τότε, αφού το Ω είναι διάστασης $n-1$, ισχύει

$$\mathcal{N}_\delta(\Omega) \gtrsim \frac{\sigma(\Omega)}{\delta^{n-1}}.$$

Για $n=2$, σταθεροποιούμε ένα δ-διαχωρίσιμο σύνολο $\{e_j\}_{j=1}^M \subseteq \Omega$, δηλαδή ανά δύο τα στοιχεία αυτού του συνόλου απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\geqslant 2\delta$, όπου $M \gtrsim \frac{\sigma(\Omega)}{\delta}$. Για κάθε j, μπορούμε να βρούμε $T_j = T^\delta_{e_j}(a_j),\ a_j \in \mathbb{R}^2$ τ.ω.

$$\mathcal{L}^2(T_j \cap E) \geqslant \lambda \mathcal{L}^2(T_j) \gtrsim \lambda\delta$$

Έπεται λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}
M\lambda\delta &\lesssim \sum_{j=1}^M \mathcal{L}^2(T_j\cap E) = \sum_{j=1}^M \int_{T_j\cap E} = \sum_{j=1}^M \int \chi_{T_j}\chi_E = \int \chi_E \sum_{j=1}^M \chi_{T_j} \\
&\leqslant (\int \chi_E^2)^{\frac12} (\int (\sum_{j=1}^M \chi_{T_j})^2)^{\frac12} = \mathcal{L}^2(E)^{\frac12} (\sum_{j,\kappa=1}^M \int \chi_{T_j}\chi_{T_\kappa})^{\frac12} \\
&= \mathcal{L}^2(E)^{\frac12} (\sum_{j,\kappa=1}^M \mathcal{L}^2(T_j\cap T_\kappa))^{\frac12} \lesssim \mathcal{L}^2(E)^{\frac12} (\sum_{j,\kappa=1}^M \frac{\delta^2}{\vartheta(e_j,e_\kappa)+\delta})^{\frac12} \\
&\lesssim \mathcal{L}^2(E)^{\frac12} (\sum_{\kappa=1}^M \delta \sum_{j=1}^M \frac{\delta}{\vartheta(e_j,e_\kappa)+\delta})^{\frac12}.
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψην μας ότι το $\{e_j\}_{j=1}^M$ είναι δ-διαχωρίσιμο και την συμπεριφορά των μερικών αθροισμάτων της αρμονικής σειράς, έχουμε

$$\sum_j \frac{\delta}{\vartheta(e_j,e_\kappa)+\delta} \lesssim \sum_{j:|j-\kappa|\leqslant \frac{c}{\delta}} \frac{\delta}{|j-\kappa|\delta+\delta} = \sum_{j:|j-\kappa|\leqslant \frac{c}{\delta}} \frac{1}{|j-\kappa|+1} \lesssim \log\frac{1}{\delta}.$$

Έπεται λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}
M\lambda\delta \lesssim \mathcal{L}^2(E)^{\frac12}(M\delta\log\frac{1}{\delta})^{\frac12} &\Rightarrow M^{1/2}\lambda\delta^{1/2} \leq \mathcal{L}^2(E)^{1/2}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{1/2} \\
&\Rightarrow \sigma(\Omega)^{\frac12}\lambda \lesssim \mathcal{L}^2(E)^{1/2}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Από την παραπάνω πρόταση και το λήμμα 4.1 προκύπτει το θεώρημα του Davies, δηλαδή ότι κάθε σύνολο Kakeya του επιπέδου έχει dim ίση με 2. Διότι η συνάρτηση log έχει την εξής ιδιότητα:$\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon : \log x \leqslant C_\varepsilon x^{-\varepsilon}$. Η απόδειξη που έδωσε ο ίδιος ο Davies, βασίζεται στη δεύτερη προσέγγιση του προβλήματος Kakeya.

Θεωρημα 4.1. *Έστω E ένα υποσύνολο του επιπέδου που περιέχει τουλάχιστον μια ευθεία σε κάθε κατεύθυνση. Τότε* $\dim E = 2$.

Αποδειξη. Το E περιέχεται σε ένα G_δ-σύνολο το οποίο έχει την ίδια διάσταση Hausdorff με το E. Οπότε χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το E είναι G_δ-σύνολο. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{(a,b) : L(a,b) \subseteq E\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \{(a,b) : L(a,b) \cap B_r(0) \subseteq E \cap B_r(0)\}.$$

Προφανώς το $\{(a,b) : L(a,b) \cap B_r(0) \subseteq E \cap B_r(0)\}$ για όλα τα r είναι ανοιχτό και συνεπώς το A είναι G_δ. Απο την υπόθεση, το E περιέχει μια ευθεια σε κάθε κατεύθυνση. Άρα από την παρατήρηση 3.1 το $proj_{\frac{\pi}{2}}A$ είναι ολόκληρος ο y-άξονας. Οπότε

$$\mathcal{H}^1(proj_{\frac{\pi}{2}}A) = \mathcal{L}^1(y-\alpha\xi o\nu\alpha) = \infty$$

και το λήμμα 2.6 μας δίνει $\mathcal{H}^1(A) = \infty$ Επειδή το A είναι Borel μετρήσιμο ως G_δ-σύνολο του επιπέδου και $\dim A = 1$, έπεται ότι για σχεδόν όλα τα $\theta \in [0,\pi)$ $\dim(proj_\theta A) = 1$. Από την αρχή δυϊκότητας που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο παίρνουμε ότι $\dim(L(A) \cap L_c) = 1$ για σχεδόν όλα τα c ως εξής

$$1 = \dim(proj_\theta A) \Leftrightarrow \infty = \mathcal{H}^1(proj_\theta A) = \mathcal{L}^1(proj_\theta A) \Leftrightarrow$$
$$0 < \mathcal{L}^1(L(A) \cap L_c) = \mathcal{H}^1(A) \Leftrightarrow \dim(L(A) \cap L_c) = 1$$

Συνεπώς το $L(A)$ έχει διάσταση Hausdorff 2. Επειδή τώρα $L(A) \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^2$, συνεπάγεται ότι $\dim E = 2$ □

Παρατηρηση 4.1. *Ο λογαριθμικός παράγοντας στην πρόταση 4.1 δεν μπορεί να παραλειφθεί, διότι τότε δεν θα ίσχυε η προηγούμενη πρόταση. Μάλιστα με πρόσφατες έρευνες έχει αποδειχθεί ότι ο εκθέτης 1/2 δεν μπορεί να βελτιωθεί.*

Κλείνοντας το κεφάλαιο και την εργασία θα παραθέσουμε και θα αποδείξουμε μια πρόταση η οποία οφείλεται στον Bourgain και είναι γνωστή ως "bush argument". Αυτό μας δίνει μια εκτίμηση στον $\mathbb{R}^n$ για την $(n+1, \frac{n+1}{2})$ restricted weak type norm για κάθε f.

Προταση 4.2. $\| f_\delta^* \|_{n+1,\infty} \leqslant C_n \delta^{-(\frac{n}{\frac{n+1}{2}}-1)} \| f \|_{\frac{n+1}{2},1}$

Αποδειξη. Αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι ότι για ένα τυχόν E πεπερασμένου μέτρου Lebesgue και για τυχόν $\lambda \in (0,1]$ ισχύει

$$\sigma(\Omega) = \sigma(\{e \in S^{n-1} : (\chi_E)_\delta^* \geqslant \lambda\}) \leqslant (C_n \frac{\mathcal{L}^n(E)^{\frac{2}{n+1}} \delta^{-(\frac{n}{\frac{n+1}{2}}-1)}}{\lambda})^{n+1}.$$

Έστω μια οικογένεια $\left\{T_{e_j}^\delta\right\}_{j=1}^M$ με δ-διαχωρίσιμες κατευθύνσεις $\{e_j\}_{j=1}^M$, όπου $M = \mathcal{N}_\delta(\Omega)$ και $\mathcal{L}^2(T_{e_j}^\delta \cap E) \geqslant \lambda \mathcal{L}^2(T_{e_j}^\delta)$.
Είναι:

$$\begin{aligned}
M\delta^{n-1} &\lesssim (\frac{\mathcal{L}^n(E)^{\frac{2}{n+1}} \delta^{-(\frac{n}{\frac{n+1}{2}}-1)}}{\lambda})^{n+1} \\
&\Leftrightarrow M^{\frac{1}{n+1}} \delta^{\frac{n-1}{n+1}} \lesssim \frac{\mathcal{L}^n(E)^{\frac{2}{n+1}} \delta^{-(\frac{n}{\frac{n+1}{2}}-1)}}{\lambda} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{L}^n(E)^{\frac{2}{n+1}} \gtrsim \lambda M^{\frac{1}{n+1}} \delta^{\frac{n-1}{n+1}+\frac{2n}{n+1}-1} \gtrsim \lambda M^{\frac{1}{n+1}} \delta^{2\frac{n-1}{n+1}} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{L}^n(E) \gtrsim \lambda^{\frac{n+1}{2}} \delta^{n-1} \sqrt{M}
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την σχέση $N_\delta(\Omega) \gtrsim \frac{\sigma(\Omega)}{\delta^{n-1}}$ και από τις προηγούμενες ισοδυναμίες προκύπτει ότι για να αποδείξουμε την πρότασή μας αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{L}^n(E) \gtrsim \lambda^{\frac{n+1}{2}} \delta^{n-1} \sqrt{M}$.

Για την απόδειξη, σταθεροποιούμε ένα μ και διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

(1) Χαμηλή πολλαπλότητα: Κανένα σημείο του E δεν ανήκει σε περισσότερα από μ το πλήθος $T^{\delta}_{e_\jmath}$.

(2) Υψηλή πολλαπλότητα: Υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $a \in E$ που ανήκει σε περισσότερα από μ το πλήθος $T^{\delta}_{e_\jmath}$.

Πρώτη περίπτωση. Αφού κάθε στοιχείο του E ανήκει στο πολύ μ το πλήθος $T^{\delta}_{e_\jmath}$ προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^n(E) \geqslant \mu^{-1} \sum_{\jmath=1}^{M} \mathcal{L}^n(E \cap T^{\delta}_{e_\jmath}) \gtrsim \lambda \mathcal{L}^n(T^{\delta}_{e_\jmath}) \approx \mu^{-1}\lambda M \delta^{n-1}$$

Άρα στην περίπτωση (1) ισχύει $\mathcal{L}^n(E) \gtrsim \mu^{-1}\lambda M\delta^{n-1}$.

Δεύτερη περίπτωση. Σταθεροποιούμε ένα $a \in E$ τ.ω. να ανήκει στα $T^{\delta}_{e_\jmath}$ για $\jmath \leqslant \mu + 1$ (αν χρειαστεί, αλλάζουμε την αρίθμηση των $T^{\delta}_{e_\jmath}$). Επίσης μπορούμε να επιλέξουμε μια σταθερά C_0 αρκετά μεγάλη ώστε να ισχύει

$$\mathcal{L}^n(T^{\delta}_{e_\jmath} \cap D^n(a, C_0^{-1}\lambda)) \leqslant \frac{\lambda}{2}\mathcal{L}^n(T^{\delta}_{e_\jmath}) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^n(E \cap T^{\delta}_{e_\jmath} \cap D^n(a, C_0^{-1}\lambda)) \leqslant \mathcal{L}^n(T^{\delta}_{e_\jmath} \cap D^n(a, C_0^{-1}\lambda)) \leqslant \frac{\lambda}{2}\mathcal{L}^n(T^{\delta}_{e_\jmath})$$

Οπότε για $\jmath \leqslant \mu + 1$ έχουμε

$$\mathcal{L}^n(E \cap T^{\delta}_{e_\jmath} \cap D^n(a, C_0^{-1}\lambda)^c) \geqslant \frac{\lambda}{2}\mathcal{L}^n(T^{\delta}_{e_\jmath}) \gtrsim \lambda\delta^{n-1}.$$

Αν τώρα πάρουμε $\jmath, \kappa \leqslant \mu + 1$, τότε προφανώς $a \in T^{\delta}_{e_\jmath} \cap T^{\delta}_{e_\kappa}$ και όπως ειναι ήδη γνωστο το σύνολο $T^{\delta}_{e_\jmath} \cap T^{\delta}_{e_\kappa}$ έχει διάμετρο $\lesssim \frac{\delta}{\vartheta(e_\jmath, e_\kappa)+\delta} < \frac{\delta}{\vartheta(e_\jmath, e_\kappa)}$. Αν πάρουμε $\vartheta(e_\jmath, e_\kappa) \geqslant C_1\frac{\delta}{\lambda}$, όπου C_1 μια σταθερά, τότε $diam(T^{\delta}_{e_\jmath} \cap T^{\delta}_{e_\kappa}) < \frac{\lambda}{C_1}$. Επιλέγοντας το C_1 αρκετά μεγάλο, μπορούμε να «βάλουμε» το $T^{\delta}_{e_\jmath} \cap T^{\delta}_{e_\kappa}$ μέσα στο $D^n(a, C_0^{-1}\lambda)$ και κατά συνέπεια τα σύνολα $E \cap T^{\delta}_{e_\jmath} \cap D^n(a, C_0^{-1}\lambda)^c$ και $E \cap T^{\delta}_{e_\kappa} \cap D^n(a, C_0^{-1}\lambda)^c$ είναι ξένα. Αν τώρα $\mathcal{N}$ είναι το μέγιστο δυνατό πλήθος ενός $C_1\frac{\delta}{\lambda}$-διαχωρίσιμου υποσυνόλου του $\{e_\jmath\}_{\jmath=1}^{\mu+1}$, έχουμε

$$\mathcal{L}^n(E) \geqslant \mathcal{L}^n(E \cap (\bigcup_{\jmath=1}^{\mathcal{N}} T^{\delta}_{e_\jmath}) \cap D^n(a, C_0^{-1}\lambda)^c) = \mathcal{L}^n(\bigcup_{\jmath=1}^{\mathcal{N}}(E \cap T^{\delta}_{e_\jmath} \cap D^n(a, C_0^{-1}\lambda)^c)$$

$$= \sum_{\jmath=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{L}^n(E \cap T^{\delta}_{e_\jmath} \cap D^n(a, C_0^{-1}\lambda)^c) \gtrsim \sum_{\jmath=1}^{\mathcal{N}} \lambda\delta^{n-1} = \mathcal{N}\lambda\delta^{n-1}.$$

Αφού το υποσύνολο της μοναδιαιας σφαίρας $\{e_\jmath\}_{\jmath=1}^{M}$ είναι δ-διαχωρίσιμο, έχουμε

$$\mathcal{N}(C_1\frac{\delta}{\lambda})^{n-1} \gtrsim \delta^{n-1}\mu \Leftrightarrow \mathcal{N} \gtrsim \lambda^{n-1}\mu.$$

Άρα στην δεύτερη περίπτωση παίρνουμε $\mathcal{L}^n(E) \gtrsim \lambda^n\delta^{n-1}\mu$.

Όπως είδαμε παραπάνω και στις δύο περιπτώσεις οι σχέσεις που προκύπτουν είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του μ. Οπότε παίρνοντας $\mu \approx \lambda^{-(\frac{n-1}{2})}\sqrt{M}$ και κάνοντας αντικατάσταση και στις δύο σχέσεις, έχουμε

$$\mathcal{L}^n(E) \gtrsim \delta^{n-1}\lambda^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{M}.$$

$\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.2. *Από την προηγούμενη πρόταση και το λήμμα 4.1 συνεπάγεται ότι* $\dim($*συνόλου Kakeya στον* $\mathbb{R}^n$ $) \geqslant n - \frac{n+1}{2}(\frac{2n}{n+1} - 1) = \frac{n+1}{2}$.

Η προηγούμενη εκτίμηση βελτιώθηκε από τον Wolff , ο οποίος έδειξε ότι η διάσταση ενός συνόλου Kakeya είναι τουλάχιστον $(n+2)/2$. Στην περίπτωση $n = 3$ αυτό είναι το καλύτερο αποτέλεσμα μέχρι σήμερα. Για $n > 3$ έχουν γίνει παραπέρα βελτιώσεις από τους Bourgain, Tao, Katz και Laba. Επίσης, οι τρεις τελευταίοι συγγραφείς έχουν δείξει ότι η διάσταση Minkowski ενός συνόλου Kakeya στο $\mathbb{R}^3$ είναι τουλάχιστον $5/2 + 10^{-10}$.

Βιβλιογραφία

[1] J. Bourgain. Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis. *Geom. Funct. Anal.* (2) **1** (1991), 147-187.

[2] A. Córdoba. The Kakeya maximal function and spherical summation multipliers. *Amer. J. Math.* **99** (1977), 1-22.

[3] R. O. Davies. Some remarks on the Kakeya problem. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **69** (1971), 417-421.

[4] K. J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press.

[5] T. H. Wolff. *Lectures on Harmonic Analysis.* University Lecture Series, 29. AMS.