# Συγκέντρωση του μέτρου σε χώρους γινόμενα

Νικος Δ. Μαρκουλακης

Μεταπτυχιακη Εργασια

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων
Σεπτεμβριος 2001

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Σεπτέμβριο του 2001. Επιβλέπων ήταν ο Α. Γιαννόπουλος.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Α. Γιαννόπουλος, Μ. Κολουντζάκης και Μ. Παπαδημητράκης.

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Προσεγγιστικές ισοπεριμετρικές ανισότητες

## 1.1 Προσεγγιστικές ισοπεριμετρικές ανισότητες

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, όπου $\mathcal{A}$ είναι η Borel $\sigma$-άλγεβρα ως προς δεδομένη μετρική $d$ στον $X$. Λέμε ότι η τετράδα $(X, \mathcal{A}, \mu, d)$ είναι ένας **μετρικός χώρος πιθανότητας**.

Σε κάθε μετρικό χώρο πιθανότητας μπορούμε να διατυπώσουμε το **ισοπεριμετρικό πρόβλημα**:

Για δοσμένα $0 < \alpha < 1$ και $t > 0$, να βρεθεί το

$$\inf\{\mu(A_t) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \alpha\}$$

και να βρεθούν τα σύνολα $A$ για τα οποία πιάνεται αυτό το infimum.

Στο παραπάνω ερώτημα, με $A_t$ συμβολίζουμε την $t$-περιοχή του $A$:

$$A_t = \{x \in X : d(x, A) \leq t\}.$$

Στις επόμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου θα συζητήσουμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις ισοπεριμετρικών προβλημάτων για τα οποία η ακριβής απάντηση είναι γνωστή. Για πολλά άλλα ισοπεριμετρικά προβλήματα που έχουν σημαντικές εφαρμογές, κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό. Μία ασθενέστερη απάντηση όμως είναι εξίσου χρήσιμη: αντί να βρούμε την ακριβή τιμή του infimum είναι αρκετό να γνωρίζουμε ένα καλό κάτω φράγμα για το $\mu(A_t)$ με την υπόθεση ότι $\mu(A) = \alpha$.

Θα λέμε ότι ένα τέτοιο φράγμα λύνει το συγκεκριμένο ισοπεριμετρικό πρόβλημα «κατά προσέγγιση» αν η εκτίμηση που δίνει είναι βέλτιστη με την εξαίρεση κάποιων απόλυτων σταθερών στις «κατάλληλες θέσεις». Οι ανισότητες που επιτυγχάνουν τέτοιες κατά προσέγγιση λύσεις λέγονται **προσεγγιστικές ισοπεριμετρικές ανισότητες**.

Στην επόμενη παράγραφο θα συζητήσουμε την ανισότητα των Prékopa και Leindler. Η ανισότητα αυτή είναι μία συναρτησιακή έκδοση της ανισότητας Brunn - Minkowski και σχετίζεται άμεσα με την κλασική ισοπεριμετρική ανισότητα στον Ευκλείδειο χώρο. Χρησιμοποιώντας την θα δώσουμε απλή και πλήρη απόδειξη προσεγγιστικών ισοπεριμετρικών ανισοτήτων για τη σφαίρα και για το μέτρο του Gauss. Τέλος, σαν εισαγωγή στο κύριο θέμα αυτής της εργασίας, συζητάμε την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα για το συμμετρικό μέτρο πιθανότητας στις κορυφές του κύβου.

## 1.2 Η ανισότητα των Prékopa και Leindler

Η ανισότητα των Prékopa και Leindler είναι η γενίκευση της ανισότητας Brunn-Minkowski (την οποία θα συζητήσουμε παρακάτω) στο πλαίσιο των μετρήσιμων θετικών συναρτήσεων.

**Θεώρημα 1.2.1** *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρείς μετρήσιμες συναρτήσεις και $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι $f$ και $g$ είναι ολοκληρώσιμες και ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}. \tag{1}$$

*Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

**Απόδειξη:** Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς την διάσταση $n$.

(α) $n = 1$: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $f$ και $g$ είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ιδέα της μεταφοράς του μέτρου.

Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t \int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t \int g.$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας οι $x, y$ είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t) f(x(t)) = \int f \quad , \quad y'(t) g(y(t)) = \int g.$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t).$$

Οι $x$ και $y$ είναι γνήσια αύξουσες. Επομένως, η $z$ είναι κι αυτή γνήσια αύξουσα. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda)y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της $h$ κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\begin{aligned}
\int h &= \int_0^1 h(z(t))z'(t)dt \\
&\geq \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t))(x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}dt \\
&\geq \int_0^1 f^{\lambda}(x(t))g^{1-\lambda}(y(t)) \left(\frac{\int f}{f(x(t))}\right)^{\lambda} \left(\frac{\int g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda} dt \\
&= \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

(β) **Επαγωγικό βήμα:** Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$ και ότι το Θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Έστω $f, g, h$ όπως στο Θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w, s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Από την (1) έπεται ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f_{s_1}(x)^{\lambda} g_{s_0}(y)^{1-\lambda},$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned}
H(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1}\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0}\right)^{1-\lambda} =: F^{\lambda}(s_1)G^{1-\lambda}(s_0).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n = 1$ στις συναρτήσεις $F, G$ και $H$, παίρνουμε

$$\int h = \int_{\mathbb{R}} H \geq \left(\int_{\mathbb{R}} F\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G\right)^{1-\lambda} = \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda}. \qquad \square$$

## 1.3 Η ανισότητα Brunn-Minkowski

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον $\mathbb{R}^n$:

**Θεώρημα 1.3.1** *Έστω $K$ και $T$ δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K+T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{1}$$

**Παρατηρήσεις.** Στην περίπτωση που τα $K$ και $T$ είναι κυρτά σώματα, ισότητα στην (1) μπορεί να ισχύει μόνο αν τα $K$ και $T$ είναι ομοιοθετικά.

Η (1) εκφράζει με μία έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι **κοίλη** συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν $K, T$ είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geq \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}. \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας την (2) και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda} |T|^{1-\lambda}. \tag{3}$$

Η ασθενέστερη αυτή μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ανεξάρτητη της διάστασης.

**Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1:** Έστω $K, T$ συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, και $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K + (1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.1. Πράγματι, αν $x \notin K$ ή $y \notin T$ τότε

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0 = [f(x)]^{\lambda}[g(y)]^{1-\lambda},$$

ενώ αν $x \in K$ και $y \in T$ τότε $\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda K + (1-\lambda)T$, άρα

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1 = [f(x)]^{\lambda}[g(y)]^{1-\lambda}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler παίρνουμε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| = \int h \geq \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda} = |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}.$$

Αυτό αποδεικνύει την (3) για κάθε τριάδα $K, T, \lambda$. Για να πάρουμε την (1) θεωρούμε $K$ και $T$ όπως στο Θεώρημα 1.3.1 (με $|K| > 0$ και $|T| > 0$, αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε), και ορίζουμε

$$K_1 = |K|^{-1/n}K \quad , \quad T_1 = |T|^{-1/n}T \quad , \quad \lambda = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}.$$

Τα $K_1$ και $T_1$ έχουν όγκο 1, οπότε από την (3) παίρνουμε

$$|\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1| \geq 1. \tag{4}$$

Ομως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1 = \frac{K+T}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}},$$

επομένως η (4) παίρνει την μορφή

$$|K+T| \geq \left(|K|^{1/n} + |T|^{1/n}\right)^n. \quad \square$$

**Ορισμός.** Αν $A$ μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η **επιφάνεια** $\partial(A)$ του $A$ ορίζεται από την

$$\partial(A) = \lim\inf_{t\to 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t}.$$

Η ισοπεριμετρική ανισότητα για τον Ευκλείδειο χώρο είναι η εξής πρόταση.

**Πρόταση 1.3.1** *Αν $A$ είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\partial(A) \geq n|A|^{(n-1)/n}|B|^{1/n},$$

*όπου $B$ η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα.*

**Απόδειξη:** Παρατηρούμε ότι $A_t = A + tB$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{|A_t| - |A|}{t} &= \frac{|A+tB| - |A|}{t} \geq \frac{\left(|A|^{1/n} + |tB|^{1/n}\right)^n - |A|}{t} \\ &= \frac{|A| + nt|A|^{(n-1)/n}|B|^{1/n} + O(t^2) - |A|}{t} \\ &= n|A|^{(n-1)/n}|B|^{1/n} + O(t),\end{aligned}$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $t \to 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\lim\inf_{t\to 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t} \geq n|A|^{(n-1)/n}|B|^{1/n}.$$

Από τον ορισμό της επιφάνειας έπεται η Πρόταση. $\square$

**Πόρισμα 1.3.1** *Έστω $A$ μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $r > 0$ τέτοιος ώστε $|A| = |rB|$. Τότε,*

$$\partial(A) \geq \partial(rB).$$

**Απόδειξη:** Από τον ορισμό της επιφάνειας βλέπουμε εύκολα ότι $\partial(rB) = nr^{n-1}|B|$. Από την Πρόταση 1.3.1,

$$\partial(A) \geq n|A|^{(n-1)/n}|B|^{1/n} = nr^{n-1}|B| = \partial(rB). \quad \square$$

Από όλα τα μη κενά συμπαγή υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου που έχουν δεδομένο όγκο, η μπάλα έχει την μικρότερη επιφάνεια. Στην πραγματικότητα, αν και εδώ δεν έχουμε μετρικό χώρο πιθανότητας, η μπάλα είναι η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος με την έννοια της §1.1:

**Πρόταση 1.3.2** *Αν* $|A| = |B|$ *τότε* $|A_t| \geq |B_t|$ *για κάθε* $t > 0$.

**Απόδειξη:** Η απόδειξη είναι απλή συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski: έχουμε

$$\begin{aligned} |A + tB|^{1/n} &\geq |A|^{1/n} + |tB|^{1/n} = |A|^{1/n} + t|B|^{1/n} \\ &= (1+t)|B|^{1/n} = |B + tB|^{1/n}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

Δηλαδή, η μπάλα είναι λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος με την πιό ισχυρή έννοια.

## 1.4 Η ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $S^{n-1}$ στον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένη με την γεωδαισιακή μετρική $\rho$: η απόσταση $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία $xoy$ στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων $o$ και τα $x, y$. Η $S^{n-1}$ γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο $\sigma$ το οποίο μετράει το ποσοστό της επιφάνειας της σφαίρας που καταλαμβάνει κάθε Borel $A \subseteq S^{n-1}$.

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αν $\rho(x,y) = \theta$ τότε

$$|x - y| = 2\sin\frac{\theta}{2}, \tag{1}$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η Ευκλείδεια απόσταση των $x, y \in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leq |x - y| \leq \rho(x,y). \tag{2}$$

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στη σφαίρα διατυπώνεται ως εξής:

> Δίνονται $\alpha \in (0,1)$ και $t > 0$. Ανάμεσα σε όλα τα υποσύνολα $A$ της σφαίρας γιά τα οποία $\sigma(A) = \alpha$, να βρεθούν εκείνα γιά τα οποία ελαχιστοποιείται η επιφάνεια $\sigma(A_t)$ της $t$-περιοχής του $A$.

Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

**Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα.** *Έστω* $\alpha \in (0,1)$ *και* $B(x,r)$ *μιά μπάλα στην* $S^{n-1}$ *με ακτίνα* $r > 0$ *τέτοια ώστε* $\sigma(B(x,r)) = \alpha$. *Τότε, γιά κάθε* $A \subseteq S^{n-1}$ *με* $\sigma(A) = \alpha$ *και κάθε* $t > 0$ *έχουμε*

$$\sigma(A_t) \geq \sigma(B(x,r)_t) = \sigma(B(x, r+t)). \tag{3}$$

Δηλαδή, γιά οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο $\alpha$ και οποιοδήποτε $t > 0$ οι μπάλες μέτρου $\alpha$ δίνουν τη λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γίνεται με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς την διάσταση. Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $\alpha = 1/2$. Αν $\sigma(A) = 1/2$ και $t > 0$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του $A_t$ χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$\sigma(A_t) \geq \sigma\left(B(x, \frac{\pi}{2} + t)\right) \tag{4}$$

γιά κάθε $t > 0$ και $x \in S^{n-1}$. Η (4) οδηγεί στην ακόλουθη ανισότητα:

**Θεώρημα 1.4.1** *Έστω $A \subseteq S^{n+1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Τότε,*

$$\sigma(A_t) \geq 1 - \sqrt{\pi/8}\exp(-t^2 n/2). \tag{5}$$

**Απόδειξη:** Λόγω της (4), αρκεί να φράξουμε από κάτω το $\sigma\left(B(x, \frac{\pi}{2} + t)\right)$. Έπεται ότι

$$\sigma\left(B(x, \frac{\pi}{2} + t)\right) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}+t} \sin^n \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta}, \tag{6}$$

οπότε θέτοντας $h(t,n) = 1 - \sigma\left(B(x, \frac{\pi}{2} + t)\right)$, ζητάμε άνω φράγμα γιά την

$$h(t,n) = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}+t}^{\pi} \sin^n \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta} = \frac{\int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \phi d\phi}{2I_n}, \tag{7}$$

όπου $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \phi d\phi$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = \phi\sqrt{n}$ παίρνουμε

$$h(t,n) = \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{t\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \cos^n(s/\sqrt{n}) ds. \tag{8}$$

Συγκρίνοντας τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $\cos s$ και $\exp(-s^2/2)$ βλέπουμε ότι

$$\cos s \leq \exp(-s^2/2) \tag{9}$$

στο $[0, \pi/2]$, επομένως η (8) μας δίνει

$$\begin{aligned}
h(t,n) &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{t\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_0^{(\frac{\pi}{2}-t)\sqrt{n}} \exp(-(s + t\sqrt{n})^2/2) ds \\
&\leq \frac{\exp(-t^2 n/2)}{2\sqrt{n}I_n} \int_0^{\infty} \exp(-s^2/2) ds \\
&= \frac{\sqrt{\pi/8}}{\sqrt{n}I_n} \exp(-t^2 n/2).
\end{aligned}$$

Γιά την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί λοιπόν να δούμε ότι $\sqrt{n}I_n \geq 1$ γιά κάθε $n \geq 1$. Γιά το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι από την αναδρομική σχέση $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ έπεται ότι

$$\sqrt{n+2}I_{n+2} = \sqrt{n+2}\frac{n+1}{n+2}I_n = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}}I_n \geq \sqrt{n}I_n,$$

το οποίο σημαίνει ότι αρκεί να ελέγξουμε τις

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos\phi d\phi = 1 \geq 1$$

και

$$\sqrt{2}I_2 = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2\phi d\phi = \sqrt{2}\frac{\pi}{4} \geq 1.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (5). □

**Παρατήρηση.** Αυτό που έχει σημασία σε σχέση με την εκτίμηση στην (5) είναι ότι, όσο μικρό $t > 0$ κι αν διαλέξουμε, η ακολουθία $\exp(-t^2n/2)$ τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$ και μάλιστα με πολύ ταχύ ρυθμό (εκθετικά ως προς $n$). Επομένως, το ποσοστό της σφαίρας που μένει έξω από την $t$-περιοχή οποιουδήποτε υποσυνόλου $A$ της $S^{n+1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ είναι σχεδόν μηδενικό αν η διάσταση $n$ είναι αρκετά μεγάλη, οσοδήποτε μικρό κι αν είναι το $t$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1 βασίστηκε πολύ ισχυρά στην ισοπεριμετρική ανισότητα για τη σφαίρα. Γιά τις περισσότερες όμως εφαρμογές που έχουμε στο νού μας είναι αρκετή μιά ανισότητα σαν την (5) και όχι η ακριβής λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn - Minkowski μπορούμε να δώσουμε απλή απόδειξη της (5) χωρίς να περάσουμε μέσα από την ισοπεριμετρική ανισότητα. Η απόδειξη βασίζεται σε ένα απλό Λήμμα.

**Λήμμα 1.4.1** *Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας $\mu_B$ με $\mu_B(A) = |A \cap B|/|B|$ γιά κάθε Borel $A \subseteq R^N$. Αν $A, C \subseteq B$ συμπαγή, και*

$$\delta(A,C) := \min\{|a-c| : a \in A, c \in C\} = \rho > 0,$$

*τότε*

$$\min\{\mu_B(A), \mu_B(C)\} \leq \exp(-\rho^2 n/8). \tag{10}$$

**Απόδειξη:** Θεωρούμε το σύνολο $\frac{A+C}{2}$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Brunn - Minkowski παίρνουμε $|\frac{A+C}{2}| \geq \min\{|A|, |C|\}$. Συνεπώς,

$$\mu_B\left(\frac{A+C}{2}\right) \geq \min\{\mu_B(A), \mu_B(C)\}. \tag{11}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a \in A$ και $c \in C$, ο κανόνας του παραλληλογράμμου δίνει

$$|a+c|^2 = 2|a|^2 + 2|c|^2 - |a-c|^2 \leq 4 - \rho^2, \tag{12}$$

επομένως

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{1/2} B. \tag{13}$$

Συνδυάζοντας τις (11) και (13) βλέπουμε ότι

(14)

$$\min\{\mu_B(A),\mu_B(C)\} \leq \left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leq \big(\exp(-\rho^2/4)\big)^{n/2} = \exp(-\rho^2 n/8). \qquad \square$$

**Απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1:** Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Θεωρούμε $\lambda \in (0,1)$ - το οποίο θα επιλέξουμε στο τέλος - και τα υποσύνολα

$$A_1 = \{\rho a : a \in A, \lambda \leq \rho \leq 1\} \quad , \quad C_1 = \{\rho a : a \in S^{n-1}\setminus A_\varepsilon, \lambda \leq \rho \leq 1\} \tag{15}$$

της $B$. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\delta(A_1, C_1) \geq 2\lambda \sin\frac{\varepsilon}{2} \geq 2\frac{\lambda\varepsilon}{\pi}. \tag{16}$$

Από το Λήμμα 1.4.1 συμπεραίνουμε ότι

$$|C_1| \leq \exp(-\delta^2 n/8)|B| \leq \exp\left(-\frac{4\lambda^2\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{n}{8}\right)|B|. \tag{17}$$

Ομως, $|C_1| = (1-\lambda^n)\sigma(A_\varepsilon^c)|B|$ και συνδυάζοντας με την (17) βλέπουμε ότι

$$\sigma(A_\varepsilon^c) \leq \frac{1}{1-\lambda^n}\exp\left(-\frac{\lambda^2\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{n}{2}\right). \tag{18}$$

Επιλέγοντας π.χ. $\lambda = 1/2$, καταλήγουμε σε μία εκτίμηση της μορφής

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq 1 - c_1\exp(-c_2\varepsilon^2 n) \tag{19}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές, δηλαδή την (5) με την εξαίρεση απόλυτων σταθερών σε «κατάλληλες θέσεις». $\square$

## 1.5 Ισοπεριμετρική ανισότητα στον χώρο του Gauss

Σε αυτήν την παράγραφο, ο χώρος πιθανότητας που θα μελετήσουμε είναι ο $\Omega = \mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική $|\cdot|$ και το μέτρο πιθανότητας $\gamma_n$ που έχει πυκνότητα την συνάρτηση

$$\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2/2}. \tag{1}$$

Δηλαδή, αν $A$ είναι ένα μη–κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\gamma_n(A) = \mathrm{Prob}(x \in A) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-|x|^2/2} dx. \tag{2}$$

Το $\gamma_n$ ονομάζεται **μέτρο του Gauss** και ο μ. χώρος πιθανότητας $\Gamma_n = (\mathbb{R}^n, |\cdot|, \gamma_n)$ **χώρος του Gauss**.

Το μέτρο του Gauss έχει δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες: από τη μία πλευρά είναι μέτρο γινόμενο, πιό συγκεκριμένα $\gamma_n = \gamma_1 \otimes \ldots \otimes \gamma_1$. Από την άλλη πλευρά είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς: αν $U \in O(n)$ και $A$ είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} \gamma_n(U(A)) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{U(A)} e^{-|x|^2/2} dx \\ &= \frac{|\det U|}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-|Uy|^2/2} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-|y|^2/2} dy \\ &= \gamma_n(A). \end{aligned}$$

Η ισοπεριμετρική ανισότητα στον χώρο του Gauss είναι η εξής.

**Θεώρημα 1.5.1** *Έστω $\alpha \in (0,1)$, $\theta \in S^{n-1}$, και $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle \leq \lambda\}$ ένας ημίχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(H) = \alpha$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ και κάθε Borel $A \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A) = \alpha$, έχουμε*

$$\gamma_n(A_t) \geq \gamma_n(H_t). \tag{3}$$

**Πόρισμα 1.5.1** *Αν $\gamma_n(A) \geq 1/2$, τότε για κάθε $t > 0$*

$$1 - \gamma_n(A_t) \leq \frac{1}{2} \exp(-t^2/2). \tag{4}$$

**Απόδειξη:** Από το Θεώρημα 1.5.1 ξέρουμε ότι

$$1 - \gamma_n(A_t) \leq 1 - \gamma_n(H_t)$$

όπου $H$ ημίχωρος μέτρου $1/2$. Αφού το $\gamma_n$ είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$, οπότε ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς $x_2, \ldots, x_n$ βλέπουμε ότι

$$1 - \gamma_n(H_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds. \tag{5}$$

Παραγωγίζοντας δείχνουμε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-s^2/2} ds$$

είναι φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Η $F(t)\leq F(0)$ σε συνδυασμό με την (5) αποδεικνύει την (4). $\square$

Όπως και στην περίπτωση της σφαίρας, η απόδειξη της προσεγγιστικής ισοπεριμετρικής ανισότητας (4) χρησιμοποιεί ισχυρά την ισοπεριμετρική ανισότητα (3). Μπορούμε όμως να αποδείξουμε απευθείας την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον χώρο του Gauss.

**Θεώρημα 1.5.2** *Έστω $A$ μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/4}d\gamma_n(x)\leq \frac{1}{\gamma_n(A)}, \tag{6}$$

*όπου $d(x,A)=\inf\{|x-y|: y\in A\}$. Επομένως, αν $\gamma_n(A)=1/2$ τότε*

$$1-\gamma_n(A_t)\leq 2\exp(-t^2/4) \tag{7}$$

*γιά κάθε $t>0$.*

**Απόδειξη:** Συμβολίζουμε με $\gamma_n(x)$ την συνάρτηση $(2\pi)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2)$, και θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(x)\ \ ,\ \ g(x)=\chi_A(x)\gamma_n(x)\ \ ,\ \ m(x)=\gamma_n(x). \tag{8}$$

Γιά κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $y\in A$ έχουμε

$$\begin{aligned}(2\pi)^n f(x)g(y) &= e^{d(x,A)^2/4}e^{-|x|^2/2}e^{-|y|^2/2}\\ &\leq \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4}-\frac{|x|^2}{2}-\frac{|y|^2}{2}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{|x+y|^2}{4}\right)\\ &= \left(\exp\left(-\frac{1}{2}|\frac{x+y}{2}|^2\right)\right)^2\\ &= (2\pi)^n\left(m\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου και την $d(x,A)\leq |x-y|$. Παρατηρώντας ότι $g(y)=0$ αν $y\notin A$, βλέπουμε ότι οι $f,g,m$ ικανοποιούν τις υποθέσεις της ανισότητας Prékopa-Leindler με $\lambda=1/2$. Εφαρμόζουμε λοιπόν το Θεώρημα 1.2.1 και έχουμε

$$\left(\int e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(dx)\right)\gamma_n(A)=\left(\int f\right)\left(\int g\right)\leq\left(\int m\right)^2=1. \tag{9}$$

Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό του θεωρήματος. Γιά τον δεύτερο, παρατηρούμε ότι αν $\gamma_n(A)=1/2$ τότε

$$e^{t^2/4}\gamma_n(x: d(x,A)>t)\leq \int e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(dx)\leq\frac{1}{\gamma_n(A)}=2. \tag{10}$$

Δηλαδή, $\gamma_n(A_t^c)\leq 2\exp(-t^2/4)$. $\square$

## 1.6 Η ισοπεριμετρική ανισότητα στον $E_n$

Θεωρούμε το σύνολο $E_n = \{-1,1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1,1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στο $E_n$ ορίζουμε το κανονικό μέτρο πιθανότητας $P_n$ που δίνει μάζα $2^{-n}$ σε κάθε σημείο. Ο $E_n$ γίνεται μετρικός χώρος με απόσταση την

$$d_n(x,y) = \frac{1}{n}\mathrm{card}\{i \le n : x_i \neq y_i\} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|. \tag{1}$$

Η $t$-περιοχή ενός $A \subseteq E_n$ είναι ως συνήθως το σύνολο $A_t = \{x \in E_n : d_n(x,A) \le t\}$. Οι τιμές που μπορεί να πάρει η $d_n$ είναι πεπερασμένες το πλήθος: $0, 1/n, 2/n, \ldots, 1$. Επομένως, αυτές είναι οι τιμές του $t$ γιά τις οποίες η $t$-περιοχή του $A$ παρουσιάζει ενδιαφέρον, με την έννοια ότι το $A_t$ παραμένει αμετάβλητο όταν το $t$ παίρνει τιμές σε ένα διάστημα της μορφής $[k/n, (k+1)/n)$.

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα είναι λοιπόν το εξής. Μάς δίνουν έναν φυσικό $m = 1, 2, \ldots, 2^n$ και κάποιο $t = k/n$, $k = 1, \ldots, n$. Γιά ποιό σύνολο $A$ με πλήθος στοιχείων $m$ είναι η $k/n$-περιοχή του $A$ η μικρότερη δυνατή; Η απάντηση είναι ότι το $A$ θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν «λιγότερα κενά». Αν περιέχει μιά $n$-άδα $x = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε θα πρέπει να περιέχει κατά σειρά προτεραιότητας και τις «γειτονικές» της $n$-άδες, αυτές δηλαδή που διαφέρουν από την $x$ σε μία συντεταγμένη, δύο συντεταγμένες, κ.ο.κ. (εφόσον το πλήθος των στοιχείων του $A$ επαρκεί). Αυτό, γιατί η παραμικρή επέκταση του $A$ θα τις συμπεριλάβει ούτως ή άλλως. Τα πιό οικονομικά σύνολα είναι οι $d_n$-μπάλες (οι λεγόμενες Hamming μπάλες του $E_n$). Αποδεικνύεται η ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον $E_n$.

**Θεώρημα 1.6.1** *Έστω $A \subseteq E_n$ με $m = \sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}$ στοιχεία. Τότε, γιά κάθε $s = 1, \ldots, n-l$, έχουμε*

$$\mu_n(A_{s/n}) \ge \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{l+s}\binom{n}{k} = \mu_n(B(x, l/n)_{s/n}) = \mu_n(B(x, (l+s)/n)) \tag{2}$$

*όπου $x$ τυχόν στοιχείο του $E_n$.* □

Η ισοπεριμετρική αυτή ανισότητα οδηγεί σε μία προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα για τον $E_n$.

**Πόρισμα 1.6.1** *Αν $\mu_n(A) \ge 1/2$ και $t > 0$, τότε*

$$\mu_n(A_t^c) \le \frac{1}{2}\exp(-2t^2 n). \tag{3}$$

Η (3) ερμηνεύεται ως εξής: για να εκτιμήσουμε το $\mu_n(A_t)$ αρκεί να θέσουμε $l = n/2$ και $s = tn$ στην (2). Τότε βλέπουμε ότι

$$\mu_n(A_t^c) \le \frac{1}{2^n}\sum_{j=(\frac{1}{2}+t)n}^{n}\binom{n}{j},$$

το οποίο φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς $n \to \infty$, γιατί οι «ακραίοι» διωνυμικοί συντελεστές είναι πολύ μικροί σε σύγκριση με τους «μεσαίους» όταν το $n$ είναι μεγάλο.

Δεν θα αποδείξουμε το Θεώρημα 1.6.1 (η απόδειξη είναι συνδυαστική και γίνεται με επαγωγή ως προς $n$). Θα δώσουμε όμως απευθείας απόδειξη της «προσεγγιστικής ισοπεριμετρικής ανισότητας» (3). Η απόδειξη θα βασιστεί σε ένα θεώρημα του Talagrand το οποίο θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

**Θεώρημα 1.6.2** *Έστω $A$ μη κενό υποσύνολο του $E_n$. Θεωρούμε την κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(A)$ και γιά κάθε $x \in E_n$ ορίζουμε*

$$\phi_A(x) = \min\{|x-y| : y \in \mathrm{conv}(A)\}. \tag{4}$$

*Τότε, ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{E_n} \exp(\phi_A^2(x)/8) d\mu_n(x) \leq \frac{1}{\mu_n(A)}. \tag{5}$$

Έστω $A$ μη κενό υποσύνολο του $E_n$. Η συνάρτηση $\phi_A$ του Θεωρήματος 1.6.2 και η συνάρτηση απόστασης από το $A$

$$d_n(x, A) = \min\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| : y \in A\}$$

συγκρίνονται σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

**Λήμμα 1.6.1** *Γιά κάθε μη κενό $A \subseteq E_n$ έχουμε*

$$2\sqrt{n} d_n(x, A) \leq \phi_A(x) \quad , \quad x \in E_n. \tag{6}$$

**Απόδειξη:** Έστω $x \in E_n$. Γιά κάθε $y \in A$ ισχύει

$$\langle x - y, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - y_i) = 2n d_n(x, y) \geq 2n d_n(x, A). \tag{7}$$

Από την (7) έπεται ότι γιά κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$

$$\sqrt{n}|x - y| \geq \langle x - y, x\rangle \geq 2n d_n(x, A). \tag{8}$$

Αυτό αποδεικνύει την (6). □

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω λήμματα δείχνουμε την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον $E_n$:

**Θεώρημα 1.6.3** *Έστω $A \subseteq E_n$ με $\mu_n(A) = 1/2$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(A_t) \geq 1 - 2\exp(-t^2 n/2). \tag{9}$$

**Απόδειξη:** Αν $x \notin A_t$, τότε $d_n(x, A) \geq t$ και το Λήμμα 1.6.1 δείχνει ότι $\phi_A(x) \geq 2t\sqrt{n}$.

Ομως, από το Θεώρημα 1.6.2 έχουμε

$$e^{t^2 n/2}\mu_n(x : \phi_A(x) \geq 2t\sqrt{n}) \leq \int_{E_n} \exp(\phi_A^2(x)/8) d\mu_n(x) \leq \frac{1}{\mu_n(A)} = 2, \tag{10}$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\mu_n(A_t^c) \leq \mu_n(x : \phi_A(x) \geq 2t\sqrt{n}) \leq 2\exp(-t^2 n/2). \quad \square \tag{11}$$

## 1.7 Το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου

Έστω $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Η **συνάρτηση συγκέντρωσης** του χώρου είναι η συνάρτηση

$$\alpha(X, t) := 1 - \inf\{\mu(A_t) : \mu(A) \geq 1/2\}. \tag{1}$$

Λέμε ότι υπάρχει «συγκέντρωση μέτρου» στον χώρο αν για μικρά $t$ οι τιμές της $\alpha(X, t)$ είναι μικρές. Στα παραδείγματα που μελετήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους έχουμε συγκέντρωση του μέτρου η οποία γίνεται ολοένα εντονότερη καθώς η διάσταση $n$ αυξάνει. Για παράδειγμα, από το Θεώρημα 1.4.1 βλέπουμε ότι

$$\alpha(S^{n-1}, t) \leq c_1 \exp(-c_2 t^2 n), \tag{2}$$

ενώ το Θεώρημα 1.6.3 δείχνει ότι

$$\alpha(E_n, t) \leq 2\exp(-t^2 n/2). \tag{3}$$

Το παράδειγμα του χώρου του Gauss είναι κάπως διαφορετικό. Η διάσταση δεν εμφανίζεται στην ανισότητα συγκέντρωσης

$$\alpha(\Gamma_n, t) \leq \frac{1}{2}\exp(-t^2/2), \tag{4}$$

όμως η διάμετρος του $\Gamma_n$ είναι άπειρη. Η σημασία του φαινομένου της συγκέντρωσης του μέτρου για χώρους μεγάλης διάστασης πηγάζει από το εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 1.7.1** *Έστω $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1, δηλαδή αν $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$, τότε*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - M_f| > t\}\right) \leq 2\alpha(X, t) \tag{5}$$

*όπου $M_f$ είναι ο μέσος Lévy της $f$.*

[Ο μέσος Lévy της $f$ είναι ο αριθμός $M_f$ για τον οποίο $\mu(x : f(x) \geq M_f) \geq 1/2$ και $\mu(x : f(x) \leq M_f) \geq 1/2$. Αν η $f$ είναι συνεχής, ο αριθμός αυτός ορίζεται μονοσήμαντα.]

**Απόδειξη:** Θέτουμε $A = \{x : f(x) \geq M_f\}$ και $B = \{x : f(x) \leq M_f\}$. Αν $y \in A_t$ τότε υπάρχει $x \in A$ με $d(x, y) \leq t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \geq -d(y, x) + M_f \geq M_f - t \tag{6}$$

αφού η $f$ είναι 1-Lipschitz. Όμοια, αν $y \in B_t$ τότε υπάρχει $x \in B$ με $d(x, y) \leq t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \leq d(y, x) + M_f \leq M_f + t. \tag{7}$$

Δηλαδή,

$$y \in A_t \cap B_t \implies |f(x) - M_f| \leq t. \tag{8}$$

Όμως $\mu(A_t) \geq 1 - \alpha(X, t)$ και $\mu(B_t) \geq 1 - \alpha(X, t)$, άρα

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - M_f| > t\}\right) \leq \mu(A_t^c) + \mu(B_t^c) \leq 2\alpha(X, t). \qquad \square$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση συγκέντρωσης είναι πολύ μικρή, αυτό σημαίνει ότι οι 1-Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις είναι «σχεδόν σταθερές» σε «σχεδόν ολόκληρο το χώρο». Αυτό έχει πολύ σημαντικές εφαρμογές στα παραδείγματα των χώρων μεγάλης διάστασης που εξετάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη άλλων παραδειγμάτων μετρικών χώρων πιθανότητας με έντονη συγκέντρωση του μέτρου. Ειδικότερα θα ασχοληθούμε με αφηρημένους χώρους γινόμενα μετρικών χώρων πιθανότητας.

Αξίζει να προσθέσουμε την παρατήρηση ότι ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος 1.7.1. Η συγκέντρωση των Lipschitz συναρτήσεων κοντά στο μέσο Lévy τους είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ισχυρής προσεγγιστικής ισοπεριμετρικής ανισότητας.

**Πρόταση 1.7.1** *Έστω $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν για κάποιο $t > 0$ έχουμε*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - M_f| > t\}\right) \leq \eta \tag{9}$$

*για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, τότε $\alpha(X, t) \leq \eta$.*

**Απόδειξη:** Έστω $A$ Borel υποσύνολο του $X$ με $\mu(A) \geq 1/2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = d(x, A)$. Η $f$ είναι 1-Lipschitz και $M_f = 0$ γιατί $\mu(\{x : f(x) = 0\}) \geq 1/2$. Από την (9) παίρνουμε

$$\mu(\{x \in X : d(x, A) > t\}) \leq \eta,$$

δηλαδή $1 - \mu(A_t) \leq \eta$. Έπεται ότι $\alpha(X, t) \leq \eta$. $\square$

**Αναφορές**. Για το γενικό πλαίσιο των προσεγγιστικών ισοπεριμετρικών ανισοτήτων, βλέπε το πρόσφατο βιβλίο του Ledoux [Led], το βιβλίο των Ledoux και Talagrand [LT], καθώς και το άρθρο επισκόπησης του Schechtman [Sc]. Η απόδειξη της ανισότητας των Prékopa και Leindler (βλέπε [Lei], [Pr]) που παρουσιάζουμε εδώ είναι από το βιβλίο του Pisier [Pi2]. Για την ανισότητα Brunn-Minkowski και γενικότερα για την κλασική θεωρία των κυρτών σωμάτων, βλέπε το βιβλίο του Schneider [Schn]. Η σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα αποδείχθηκε απο τον Schmidt [Schm] και σε πλήρη γενικότητα απο τους Figiel, Lindenstrauss και Milman [FLM]. Πρώτος ο Lévy [Lev] παρατήρησε το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα μεγάλης διάστασης. Η απλή απόδειξη της προσεγγιστικής σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας που παρουσιάζουμε είναι από το [ABV]. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.2 οφείλεται ουσιαστικά στον Maurey [Ma2]. Το Θεώρημα 1.6.1 είναι του Harper [Ha]. Για την σχέση της συγκέντρωσης του μέτρου με την συμπεριφορά των Lipschitz συναρτήσεων, βλέπε το βιβλίο των Milman και Schechtman [MS].

# Κεφάλαιο 2

# Συγκέντρωση του μέτρου σε χώρους γινόμενα

## 2.1 Ένα ισοπεριμετρικό θεώρημα για τον κύβο και η ανισότητα Khintchine-Kahane

Θεωρούμε το σύνολο $E_n = \{-1, 1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1, 1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στο $E_n$ ορίζουμε το κανονικό μέτρο πιθανότητας $\mu_n$ που δίνει μάζα $2^{-n}$ σε κάθε σημείο. Για κάθε μη κενό $A \subseteq E_n$ θέτουμε

$$\phi_A(x) = \inf\{|x - y| : y \in \mathrm{conv}(A)\}.$$

Το βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου είναι το εξής.

**Θεώρημα 2.1.1** *Για κάθε $A \subseteq E_n$,*

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) \leq \frac{1}{\mu_n(A)}.$$

**Απόδειξη:** Με επαγωγή ως προς το πλήθος των σημείων του $A$. Αν $\mathrm{card}(A) = 1$ δηλαδή $A = \{y\}$, τότε

$$\phi_A(x) = \inf\{|x - z| : z \in \mathrm{conv}(A) = \{y\}\} = |x - y|.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) &= \mathbb{E}\left(e^{|x-y|^2/8}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{x \in E_n} e^{|x-y|^2/8}. \end{aligned}$$

Κάθε $x \in E_n$ διαφέρει από το $y$ σε $i$ θέσεις, $i = 0, 1, \ldots, n$. Το πλήθος των $x \in E_n$ που διαφέρουν σε $i$ θέσεις από το $y$ είναι $\binom{n}{i}$. Παρατηρούμε ότι $|x-y|^2 = 4i$ όταν το $x$ διαφέρει απο το $y$ σε $i$ θέσεις. Άρα,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{|x-y|^2/8} &= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}e^{i/2} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(1+e^{1/2}\right)^n = \left(\frac{1+e^{1/2}}{2}\right)^n \\ &\leq 2^n = \frac{1}{\mu_n(A)},\end{aligned}$$

αφού $e^{1/2} \leq e \leq 3$.

Έστω τώρα ότι $\mathrm{card}(A) \geq 2$. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $n = 1$. Αναγκαστικά έχουμε $A = E_1$, επομένως $\phi_A(x) = 0$ για κάθε $x \in E_1$. Άρα,

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) = \mathbb{E}e^0 = 1 = 1/\mu_1(A).$$

Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε $A \subseteq E_{n+1}$ με $\mathrm{card}(A) \geq 2$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$A = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_{-1} \times \{-1\})$$

όπου $A_1, A_{-1} \neq \emptyset$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\mathrm{card}A_{-1} \leq \mathrm{card}A_1$.

**Λήμμα 2.1.1** *Για κάθε $x \in E_n$,*

$$\phi_A((x,1)) \leq \phi_{A_1}(x).$$

**Απόδειξη:** Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{|x-y| : y \in \mathrm{conv}A_1\} \subseteq \{|(x,1)-z| : z \in \mathrm{conv}A\}.$$

Έστω $y \in \mathrm{conv}A_1$. Τότε, $y = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ όπου $t_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ και $x_i \in A_1$. Τότε όμως $(x_i, 1) \in A$ και

$$\sum_{i=1}^m t_i(x_i,1) = (\sum_{i=1}^m t_i x_i, \sum_{i=1}^m t_i) = (y,1),$$

δηλαδή $(y,1) \in \mathrm{conv}A$. Αφού $|x-y| = |(x,1)-(y,1)|$ και

$$|(x,1)-(y,1)| \in \{|(x,1)-z| : z \in \mathrm{conv}(A)\},$$

έχουμε το ζητούμενο. □

**Λήμμα 2.1.2** *Για κάθε $x \in E_n$ και κάθε $0 \leq a \leq 1$,*

$$\phi_A^2((x,-1)) \leq 4a^2 + a\phi_{A_1}^2(x) + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x).$$

**Απόδειξη:** Έστω $z_i \in \mathrm{conv}A_i$ $(i = 1, -1)$. Τότε, όπως προηγουμένως, $(z_i, i) \in \mathrm{conv}A$. Το $\mathrm{conv}A$ είναι κυρτό, άρα

$$z := a(z_1, 1) + (1-a)(z_{-1}, -1) = (az_1 + (1-a)z_{-1}, 2a-1) \in \mathrm{conv}A.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} |(x,-1) - z|^2 &= |(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, -2a)|^2 \\ &= |(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, 0)|^2 + |(0, -2a)|^2 \\ &\leq (a|x - z_1| + (1-a)|x - z_{-1}|)^2 + 4a^2 \\ &\leq a|x - z_1|^2 + (1-a)|x - z_{-1}|^2 + 4a^2. \end{aligned}$$

Αφού τα $z_i \in \mathrm{conv}A_i$ ήταν τυχόντα, έπεται ότι

$$\phi_A^2(x,-1) \leq a\phi_{A_1}^2(x) + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x) + 4a^2. \qquad \square$$

Χρησιμοποιώντας τα δύο Λήμματα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\phi_A^2/8} &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_{n+1}} e^{\phi_A^2(x)/8} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_A^2((x,1))/8} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_A^2((x,-1))/8} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} + \frac{1}{2^{n+1}} e^{a^2/2} \sum_{x \in E_n} e^{a\phi_{A_1}^2(x)/8 + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x)/8} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} \\ &\quad + \frac{1}{2^{n+1}} e^{a^2/2} \left( \sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} \right)^a \left( \sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_{-1}}^2(x)/8} \right)^{1-a} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(e^{\phi_{A_1}^2/8}) + \frac{1}{2} e^{a^2/2} \left( \mathbb{E}(e^{\phi_{A_1}^2/8}) \right)^a \left( \mathbb{E}(e^{\phi_{A_{-1}}^2/8}) \right)^{1-a}. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$u_1 = \mathbb{E}\left( e^{\phi_{A_1}^2/8} \right) \quad , \quad v_1 = \frac{1}{\mu_n(A_1)}$$

και

$$u_{-1} = \mathbb{E}\left( e^{\phi_{A_{-1}}^2/8} \right) \quad , \quad v_{-1} = \frac{1}{\mu_n(A_{-1})}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $u_1 \leq v_1$ και $u_{-1} \leq v_{-1}$. (επίσης, η $\mathrm{card}A_{-1} \leq \mathrm{card}A_1$ γράφεται $v_1 \leq v_{-1}$). Άρα η προηγούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\phi_A^2/8} &\leq \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}e^{a^2/2}(u_1)^a(u_{-1})^{1-a} \\ &\leq \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}e^{a^2/2}(v_1)^a(v_{-1})^{1-a} \\ &\leq \frac{v_1}{2}[1 + e^{a^2/2}(v_1/v_{-1})^{a-1}]. \end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα γίνεται ελάχιστη για $a = -\ln(v_1/v_{-1})$. Η τιμή $-\ln(v_1/v_{-1})$ είναι περίπου ίση με $1 - v_1/v_{-1}$. Επιλέγουμε $a_0 = 1 - v_1/v_{-1}$. Αφού $v_1 \leq v_{-1}$ έχουμε $0 \leq a_0 \leq 1$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) \leq \frac{v_1}{2}[1 + e^{a_0^2/2}(1-a_0)^{a_0-1}].$$

**Λήμμα 2.1.3** *Για κάθε $0 \leq a \leq 1$ έχουμε*

$$1 + e^{a^2/2}(1-a)^{a-1} \leq \frac{4}{2-a}.$$

**Απόδειξη:** Απλές πράξεις δείχνουν ότι η ανισότητα που ζητάμε είναι ισοδύναμη με την

$$g(a) = \ln(2+a) - \ln(2-a) - a^2/2 - (a-1)\ln(1-a) \geq 0.$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $g'' \geq 0$ και $g'(0) = 0$. Άρα η $g$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$. Αφού $g(0) = 0$, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1.3 έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) &\leq \frac{v_1}{2}\frac{4}{2-a_0} = \frac{2v_1}{1+v_1/v_{-1}} \\
&= \frac{2}{1/v_1 + 1/v_{-1}} = \frac{2}{\mu_n(A_1) + \mu_n(A_{-1})} \\
&= \frac{1}{\mu_{n+1}(A)}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα είναι φανερή αφού $\mu_{n+1}(A_i \times \{i\}) = \mu_n(A_i)/2$, $i = \pm 1$. Έτσι ολοκληρώνονται το επαγωγικό βήμα και η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1. $\square$

**Πόρισμα 2.1.1** *Για όλα τα $t > 0$, έχουμε*

$$\mu_n(\phi_A \geq t) \leq \frac{1}{\mu_n(A)} e^{-t^2/8}.$$

**Απόδειξη:** Από το Θεώρημα 2.1.1 έχουμε $\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) \leq \frac{1}{\mu_n(A)}$. Άρα,

$$\begin{aligned}
e^{t^2/8}\mu_n(\phi_A \geq t) &\leq \int_{\{\phi_A \geq t\}} e^{t^2/8} \leq \int_{\{\phi_A \geq t\}} e^{\phi_A^2/8} \\
&\leq \mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) \\
&\leq \frac{1}{\mu_n(A)}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Παρατήρηση.** Όπως είδαμε στην §1.6, για κάθε μη κενό $A \subseteq E_n$ και για κάθε $x \in E_n$ έχουμε $2\sqrt{n}d_n(x,A) \leq \phi_A(x)$. Άρα,

$$\{d_n(x,A) \geq t\} \subseteq \{\phi_A \geq 2t\sqrt{n}\}.$$

Η ισοπεριμετρική ανισότητα για τον $E_n$ δίνει την εκτίμηση

$$\mu_n(\{d_n(x, A) \geq t\} \leq \frac{1}{2} e^{-2t^2 n}$$

αν $\mu_n(A) = 1/2$. Από το Πόρισμα 2.1.1 έχουμε περίπου την ίδια εκτίμηση για το μέτρο του $\{\phi_A \geq 2t\sqrt{n}\}$, το οποίο είναι μεγαλύτερο σύνολο.

Το Θεώρημα 2.1.1 έχει σαν συνέπεια την συγκέντρωση των κυρτών Lipschitz συναρτήσεων γύρω από τον μέσο Lévy τους.

**Θεώρημα 2.1.2** *Θεωρούμε μία κυρτή Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με σταθερά Lipschitz $\sigma$. Έστω $M$ ένας μέσος Lévy της $f$ στο $E_n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(\{|f - M| \geq t\}) \leq 4e^{-t^2/8\sigma^2}.$$

**Απόδειξη:** Για τον $M$ ισχύουν οι $\mu_n(\{f \geq M\}) \geq 1/2$ και $\mu_n(\{f \leq M\}) \geq 1/2$.

Θέτουμε $A = \{f \leq M\}$. Αφού η $f$ είναι κυρτή, για κάθε $y \in \mathrm{conv}A$ έχουμε $f(y) \leq M$. Αν λοιπόν $f(x) \geq M + t$ για κάποιο $x \in E_n$, τότε

$$f(x) \geq M + t \geq f(y) + t$$

για κάθε $y \in \mathrm{conv}A$. Άρα, $\sigma\|x - y\|_2 \geq |f(x) - f(y)| \geq t$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\phi_A(x) \geq t/\sigma.$$

Από το προηγούμενο πόρισμα και από την $\mu_n(A) \geq 1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f \geq M + t\}) &\leq \mu_n(\{\phi_A \geq t/\sigma\}) \\ &\leq \frac{1}{\mu_n(A)} e^{-t^2/8\sigma^2} \\ &\leq 2e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned}$$

Έστω $t > 0$ και $B = \{f \leq M - t\}$. Αν $u < t$, όπως πριν ελέγχουμε ότι

$$f(x) \geq M - t + u \implies \phi_B(x) \geq u/\sigma$$

και με χρήση του πορίσματος έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f(x) \geq M\}) &\leq \mu_n(\{f(x) \geq M - t + u\}) \\ &\leq \mu_n(\{\phi_B \geq u/\sigma\}) \\ &\leq \frac{1}{\mu_n(B)} e^{-u^2/8\sigma^2} \end{aligned}$$

Όμως $1/2 \leq \mu_n(\{f(x) \geq M\})$, άρα

$$\mu_n(B) \leq 2e^{-u^2/8\sigma^2}.$$

Αφήνοντας το $u$ να τείνει στο $t$ παίρνουμε

$$\mu_n(B) \leq 2e^{-t^2/8\sigma^2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mu_n(\{|f-M|>t\}) &= \mu_n(\{f \geq M+t\}) + \mu_n(\{f \leq M-t\}) \\
&\leq 2e^{-t^2/8\sigma^2} + 2e^{-t^2/8\sigma^2} \\
&= 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Πόρισμα 2.1.2** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα και $(x_i)_{i\leq n}$ ακολουθία διανυσμάτων στον $X$. Θέτουμε*

$$\sigma^2 = \sup\Big\{ \sum_{i\leq n} |x^*(x_i)|^2 : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \Big\}.$$

*Θεωρούμε μία ακολουθία $(\epsilon_i)_{i\leq n}$ ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli. Έστω $M$ μέσος Lévy της $\|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\|$ στο $E_n$. Τότε, για όλα τα $t\geq 0$,*

$$P\left( \{ |\ \| \sum_{i\leq n} \epsilon_i x_i \| - M\ | \geq t \} \right) \leq 4e^{-t^2/8\sigma^2}.$$

**Απόδειξη:** Θεωρούμε την $f(u) = \|\sum_{i\leq n} u_i x_i\|$. Η $f$ είναι κυρτή συνάρτηση: έστω $w^1, w^2 \in \mathbb{R}^n$ και $m_1, m_2 \geq 0$ με $m_1+m_2=1$. Τότε,

$$\begin{aligned}
f(m_1w^1+m_2w^2) &= \|\sum_{i\leq n} m_1 w_i^1 x_i + m_2 w_i^2 x_i\| \\
&\leq m_1\|\sum_{i\leq n} w_i^1 x_i\| + m_2\|\sum_{i\leq n} w_i^2 x_i\| \\
&= m_1 f(w^1) + m_2 f(w^2).
\end{aligned}$$

Έστω $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| \leq 1$ και $u, v \in \mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| x^*\left( \sum_{i\leq n} u_i x_i - \sum_{i\leq n} v_i x_i \right) \right| &= \left| \sum_{i\leq n} u_i x^*(x_i) - \sum_{i\leq n} v_i x^*(x_i) \right| \\
&= \left| \sum_{i\leq n} (u_i - v_i) x^*(x_i) \right| \\
&\leq \left( \sum_{i\leq n} |x^*(x_i)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i\leq n} (u_i-v_i)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sigma |u-v|.
\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach συμπεραίνουμε ότι

$$|f(u)-f(v)| \leq \Big\| \sum_{i\leq n} u_i x_i - \sum_{i\leq n} v_i x_i \Big\| \leq \sigma |u-v|,$$

επομένως η $f$ είναι Lipschitz με σταθερά $\sigma$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1.2 για την $f$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μία απόδειξη της ανισότητας Khintchine-Kahane με βέλτιστη εξάρτηση από το $p$.

**Θεώρημα 2.1.3** *Υπάρχει σταθερά $K$ τέτοια ώστε για κάθε χώρο με νόρμα $X$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $x_1, \dots, x_n \in X$ και για κάθε $p \geq 1$,*

$$\left( \mathbb{E} \Big\| \sum_{i\leq n} \epsilon_i x_i \Big\|^p \right)^{1/p} \leq 2\mathbb{E} \Big\| \sum_{i\leq n} \epsilon_i x_i \Big\| + K\sigma\sqrt{p},$$

*όπου*

$$\sigma^2 = \sup \Big\{ \sum_{i\leq n} |x^*(x_i)|^2 : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \Big\}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα.

**Λήμμα 2.1.4** *Έστω $(\Omega, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμη. Τότε,*

$$\int_\Omega f^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\omega : f(\omega) \geq t) dt.$$

**Απόδειξη:** Γράφουμε

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\omega : f(\omega) \geq t) dt &= \int_0^\infty p t^{p-1} \left( \int_\Omega \chi_{\{f(\omega)\geq t\}}(\omega) d\mu(\omega) \right) dt \\ &= \int_\Omega \int_0^\infty p t^{p-1} \chi_{\{f(\omega)\geq t\}}(t) dt d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \left( \int_0^{f(\omega)} p t^{p-1} dt \right) d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega f(\omega)^p d\mu(\omega). \qquad \square \end{aligned}$$

**Απόδειξη του θεωρήματος:** Εφαρμόζουμε το λήμμα για την $f : E_n \to \mathbb{R}^+$ με

$$f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \Big| \, \| \sum_{i\leq n} \epsilon_i x_i \| - M \, \Big|.$$

Από το Πόρισμα 2.1.2 και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = t^2/8\sigma^2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{E_n} \Big|\, \|\sum_{i\leq n} \epsilon_i x_i\| - M\,\Big|^p d\mu_n(\epsilon) &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mu_n(\epsilon : |\|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\| - M| \geq t)dt \\
&\leq 4\int_0^\infty pt^{p-1}e^{-t^2/8\sigma^2}dt \\
&= 2^{p+1}p(\sqrt{2}\sigma)^p \int_0^\infty e^{-x}x^{p/2-1}dx.
\end{aligned}$$

Με κάτα παράγοντες ολοκλήρωση και για $p$ άρτιο παίρνουμε

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty e^{-x}x^{p/2-1}dx &= p\int_0^\infty (p/2-1)e^{-x}x^{(p-4)/2}dx \\
&= p\frac{p-2}{2}\frac{p-4}{2}\int_0^\infty e^{-x}x^{(p-6)/2}dx \\
&= \dots \\
&= p\frac{p-2}{2}\frac{p-4}{2}\dots\frac{p-(p-2)}{2}\int_0^\infty e^{-x}dx \\
&\leq p^{p/2}.
\end{aligned}$$

Άρα, αν ο $p$ είναι άρτιος φυσικός,

$$\left(\int |\,\|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\| - M|^p d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/p} \leq K\sigma\sqrt{p}.$$

Για τυχόντα $p \geq 2$ υπάρχει $q$ άρτιος τέτοιος ώστε $q \leq p \leq q+2$. Από την ανισότητα του Hölder έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|\|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\| - M\right\|_p &\leq \left\|\|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\| - M\right\|_{q+2} \\
&\leq K\sigma\sqrt{q+2} \leq K\sigma\sqrt{2p} \\
&= K_1\sigma\sqrt{p}.
\end{aligned}$$

Για $1 \leq p \leq 2$ πάλι από την ανισότητα του Hölder έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|\|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\| - M\right\|_p &\leq \left\|\|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\| - M\right\|_2 \\
&\leq K\sigma\sqrt{2} \leq K_1\sigma\sqrt{p}.
\end{aligned}$$

Άρα, από την τριγωνική ανισότητα

$$\left(\int_{E_n} \|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\|^p d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/p} \leq M + K_1\sigma p^{1/2}$$

για κάθε $p \geq 1$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{E_n} \|\sum_{i\leq n} \epsilon_i x_i\| d\mu_n(\epsilon) &\geq \mu_n\left(\|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\| \geq M\right)\cdot M \\ &\geq M/2.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\left(\mathbb{E}\|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\|^p\right)^{1/p} \leq 2\mathbb{E}\|\sum_{i\leq n}\epsilon_i x_i\| + K\sigma\sqrt{p}. \qquad \square$$

## 2.2 Επέκταση σε γινόμενα πεπερασμένων υποσυνόλων χώρων με νόρμα

Έστω $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i \leq n$ ακολουθία χώρων με νόρμα. Για κάθε $i \leq n$ θεωρούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\Omega_i$ του $X_i$ με διάμετρο μικρότερη ή ίση του 1. Έστω $P_i$ μέτρο πιθανότητας στο $\Omega_i$. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $X^{(n)} = \left(\sum_{i\leq n}\oplus X_i\right)_2$ και θέτουμε

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \ldots \times \Omega_n$$

και

$$P = P^n = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n.$$

(το μέτρο γινόμενο στο $\Omega$). Για κάθε $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε

$$\phi_A(t) = d(t, \mathrm{conv}(A)),$$

την απόσταση του $t$ από την κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(A)$ του $A$ στον $X^{(n)}$.

**Θεώρημα 2.2.1** *Για κάθε $A \subseteq \Omega$,*

$$\mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2}/4\right) \leq \frac{1}{P(A)}.$$

**Απόδειξη:** Με επαγωγή ως προς $n$.
$n = 1$: Γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2/4}\right) &= \int_\Omega e^{\phi_A^2(t)/4} dP(t) \\ &= \int_A e^{\phi_A^2(t)/4} dP(t) + \int_{\Omega\setminus A} e^{\phi_A^2(t)/4} dP(t) \\ &= P(A) + \int_{\Omega\setminus A} e^{\phi_A^2(t)/4} dP(t).\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει αφού $\phi_A(t) = 0$ για κάθε $t \in A$. Επίσης, για κάθε $t \in \Omega \setminus A$ ισχύει $\phi_A(t) \leq 1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \phi_A(x) &= \inf\{\|x-y\| : y \in \mathrm{conv}(A)\} \leq \inf\{\|x-y\| : y \in A\} \\ &\leq \mathrm{diam}(\Omega_1) \leq 1. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2/4}\right) &= P(A) + \int_{\Omega\setminus A} e^{\phi_A^2(t)/4} dP(t) \\ &\leq P(A) + \int_{\Omega\setminus A} e^{1/4} dP(t) \\ &= P(A) + (1-P(A))e^{1/4} \\ &\leq \frac{1}{P(A)}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί

$$\max_{r\in[0,1]} \left\{r(r + (1-r)e^{1/4})\right\} = 1.$$

**Επαγωγικό βήμα:** Έστω $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_{n+1}$. Για κάθε $\omega \in \Omega_{n+1}$ θέτουμε

$$A_\omega = \{t \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n : (t,\omega) \in A\}.$$

Έστω $v \in \Omega_{n+1}$ τέτοιο ώστε

$$P^n(A_v) = \max_{\omega\in\Omega_{n+1}} P^n(A_\omega).$$

**Λήμμα 2.2.1** *Για κάθε $t \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$,*

$$\phi_A^2(t,v) \leq \phi_{A_v}^2(t).$$

**Απόδειξη:** Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\|t-y\|_{X^{(n)}} : y \in \mathrm{conv}(A_v)\} \subseteq \{\|(t,v)-\omega\|_{X^{(n+1)}} : \omega \in \mathrm{conv}(A)\}.$$

Όμως αν $y \in \mathrm{conv}(A_v)$ τότε $(y,v) \in \mathrm{conv}(A)$ και $\|t-y\|_{X^{(n)}} = \|(t,v)-(y,v)\|_{X^{(n+1)}}$.
$\square$

**Λήμμα 2.2.2** *Για κάθε $t \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$ και κάθε $v \neq \omega$, ισχύει*

$$\phi_A^2(t,\omega) \leq \inf_{a\in[0,1]} [a\phi_{A_\omega}^2(t) + (1-a)\phi_{A_v}^2(t) + (1-a)^2].$$

**Απόδειξη:** Αν $z_\omega \in \mathrm{conv}(A_\omega)$ και $z_v \in \mathrm{conv}(A_v)$ τότε $(z_\omega, \omega) \in \mathrm{conv}(A)$ και $(z_v, v) \in \mathrm{conv}(A)$. Αφού το $\mathrm{conv}(A)$ είναι κυρτό σύνολο, έχουμε

$$z_a := (1-a)(z_v, v) + a(z_\omega, \omega) = (az_\omega + (1-a)z_v, a\omega + (1-a)v) \in \mathrm{conv}(A).$$

Χρησιμοποιώντας και την $\mathrm{diam}(\Omega_i) \leq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|(t,w) - z_a\|^2_{X^{(n+1)}} &= \|(t - az_\omega - (1-a)z_v, (1-a)(\omega - v)\|^2_{X^{(n+1)}} \\
&= \|t - az_\omega - (1-a)z_v\|^2_{X^{(n)}} + \|(1-a)(\omega - v)\|^2_{n+1} \\
&= \|t - az_\omega - (1-a)z_v\|^2_{X^{(n)}} + (1-a)^2\|\omega - v\|^2_{n+1} \\
&= \|at + (1-a)t - az_\omega - (1-a)z_v\|^2_{X^{(n)}} + (1-a)^2\|\omega - v\|^2_{n+1} \\
&\leq \|a(t - z_\omega) + (1-a)(t - z_v)\|^2_{X^{(n)}} + (1-a)^2.
\end{aligned}$$

Από την τριγωνική ανισότητα και την κυρτότητα της συνάρτησης $x \mapsto x^2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|a(t - z_\omega) + (1-a)(t - z_v)\|^2_{X^{(n)}} &\leq (a\|t - z_\omega\|_{X^{(n)}} + (1-a)\|t - z_v\|_{X^{(n)}})^2 \\
&\leq a\|t - z_\omega\|^2_{X^{(n)}} + (1-a)\|t - z_v\|^2_{X^{(n)}}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\phi_A^2(t,\omega) \leq a\|t - z_\omega\|^2_{X^{(n)}} + (1-a)\|t - z_v\|^2_{X^{(n)}} + (1-a)^2.$$

Επειδή τα $z_\omega$, $z_v$ είναι τυχόντα στοιχεία των $A_\omega$ και $A_v$, έπεται ότι

$$\phi_A^2(t,\omega) \leq a\phi^2_{A_\omega}(t) + (1-a)\phi^2_{A_v}(t) + (1-a)^2$$

για κάθε $a \in [0,1]$. □

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω λήμματα και την ανισότητα του Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2/4}\right) &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n \times \{v\}} e^{\phi_A^2(s)/4} dP(s) \\
&\quad + \sum_{\omega \neq v} \int_{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n \times \{\omega\}} e^{\phi_A^2(s)/4} dP(s) \\
&= P_{n+1}(\{v\}) \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 \ldots \times \Omega_n} e^{\phi_A^2(t,v)/4} dP^n(t) \\
&\quad + \sum_{\omega \neq v} P_{n+1}(\{\omega\}) \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 \ldots \times \Omega_n} e^{\phi_A^2(t,\omega)/4} dP^n(t) \\
&\leq P_{n+1}(\{v\}) \mathbb{E}(e^{\phi^2_{A_v}/4}) \\
&\quad + \sum_{\omega \neq v} P_{n+1}(\{\omega\}) \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n} e^{(1/4)[a\phi^2_{A_\omega}(t) + (1-a)\phi^2_{A_v}(t) + (1-a)^2]} dP^n(t) \\
&\leq P_{n+1}(\{v\}) \mathbb{E}(e^{\phi^2_{A_v}/4}) + \sum_{\omega \neq v} P_{n+1}(\{\omega\}) e^{\frac{(1-a)^2}{4}} \\
&\quad \times \left( \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n} e^{\phi^2_{A_\omega}(t)/4} dP^n(t) \right)^a \left( \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 \ldots \times \Omega_n} e^{\phi^2_{A_v}(t)/4} dP^n(t) \right)^{1-a}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P_{n+1}(\{v\})\mathbb{E}(e^{\phi^2_{A_v}/4}) + \sum_{\omega\neq v} P_{n+1}(\{\omega\}) e^{\frac{(1-a)^2}{4}} \\
&\quad \times \left(\mathbb{E}(e^{\phi^2_{A_\omega}/4})\right)^a \left(\mathbb{E}\left(e^{\phi^2_{A_v}/4}\right)\right)^{1-a}
\end{aligned}
$$

για κάθε $a \in [0,1]$. Άρα,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\phi^2_A/4}) &\leq P_{n+1}(\{v\})\mathbb{E}(e^{\phi^2_{A_v}/4}) \\
&\quad + \sum_{\omega\neq v} P_{n+1}(\{\omega\}) \inf_{0\leq a\leq 1}\left(\left(\mathbb{E}(e^{\phi^2_{A_\omega}/4}\right)^a \left(\mathbb{E}(e^{\phi^2_{A_v}/4})\right)^{1-a} e^{\frac{(1-a)^2}{4}}\right).
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας και την επαγωγική υπόθεση, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\phi^2_A/4}) &\leq P_{n+1}(\{v\})\frac{1}{P^n(A_v)} \\
&\quad + \sum_{\omega\neq v} P_{n+1}(\{\omega\}) \inf_{0\leq a\leq 1}\left(\left(\frac{1}{P^n(A_\omega)}\right)^a \left(\frac{1}{P^n(A_v)}\right)^{1-a} e^{\frac{(1-a)^2}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{P^n(A_v)}\left[P_{n+1}(\{v\}) + \sum_{\omega\neq v} P_{n+1}(\{\omega\}) \inf_{0\leq a\leq 1}\left(\left(\frac{P^n(A_v)}{P^n(A_\omega)}\right)^a e^{\frac{(1-a)^2}{4}}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Το ελάχιστο της $\frac{e^{(1-a)^2/4}}{\lambda^a}$ όπου $0 \leq \lambda \leq 1$ λαμβάνεται στο σημείο

$$
a(\lambda) = \begin{cases} 1 + 2\log\lambda, & \text{αν } 2\log\lambda > -1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}
$$

και η αντίστοιχη τιμή είναι

$$
g(\lambda) = \frac{e^{(1-a(\lambda))^2/4}}{\lambda^{a(\lambda)}} = \begin{cases} e^{-\log\lambda-(\log\lambda)^2}, & \text{αν } 2\log\lambda > -1 \\ e^{1/4}, & \text{αλλιώς} \end{cases}
$$

Είχαμε καταλήξει στην :

$$
\mathbb{E}\left(e^{\phi^2_A/4}\right) \leq \frac{1}{P^n(A_v)}\left[P_{n+1}(\{v\}) + \sum_{\omega\neq v} P_{n+1}(\{\omega\}) \inf_{0\leq a\leq 1}\left(\left(\frac{P^n(A_v)}{P^n(A_\omega)}\right)^a e^{\frac{(1-a)^2}{4}}\right)\right].
$$

Αφού $\lambda_\omega = \frac{P^n(A_\omega)}{P^n(A_v)} \leq 1$, η ανισότητα γράφεται στην μορφή :

$$
\mathbb{E}\left(e^{\phi^2_A/4}\right) \leq \frac{1}{P^n(A_v)}\left[P_{n+1}(\{v\}) + \sum_{\omega\neq v} P_{n+1}(\{\omega\}) g(\lambda_\omega)\right].
$$

**Ισχυρισμός** Για κάθε $0 \le \lambda \le 1$ ισχύει $g(\lambda) \le 2-\lambda$ (η απόδειξη του ισχυρισμού είναι τετριμμένη).

Από τον ισχυρισμό έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2/4}\right) &\le \frac{1}{P^n(A_v)}\left[P_{n+1}(\{v\}) + \sum_{\omega\neq v} P_{n+1}(\{\omega\})(2-\lambda_\omega)\right] \\
&= \frac{1}{P^n(A_v)}\Bigg[P_{n+1}(\{v\}) + 2(1-P_{n+1}(\{v\})) \\
&\quad -\sum_{\omega\neq v}\frac{P_{n+1}(\{\omega\})P^n(A_\omega)}{P^n(A_v)}\Bigg] \\
&= \frac{1}{P^n(A_v)}\Bigg[P_{n+1}(\{v\}) + 2(1-P_{n+1}(\{v\})) \\
&\quad -\sum_{\omega\neq v}\frac{P^{n+1}(A_\omega\times\{\omega\})}{P^n(A_v)}\Bigg] \\
&= \frac{1}{P^n(A_v)}\Bigg[P_{n+1}(\{v\}) + 2(1-P_{n+1}(\{v\})) \\
&\quad -\frac{P(A)-P^{n+1}(A_v\times\{v\})}{P^n(A_v)}\Bigg] \\
&= \frac{1}{P^n(A_v)}\Bigg[P_{n+1}(\{v\}) + (1-P_{n+1}(\{v\})) \\
&\quad \times\left(2-\left(\frac{P(A)-P^{n+1}(A_v\times\{v\})}{P^n(A_v)(1-P_{n+1}(v))}\right)\right)\Bigg] \\
&= \frac{1}{P^n(A_v)}\Bigg[P_{n+1}(\{v\}) + (1-P_{n+1}(\{v\})) \\
&\quad \times\left(2-\left(\frac{P(A)-P^{n}(A_v)P_{n+1}(\{v\})}{(1-P_{n+1}(\{v\}))P^n(A_v)}\right)\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$q = P_{n+1}(\{v\}) \text{ και } t = \frac{P(A)-P^n(A_v)P_{n+1}(\{v\})}{(1-P_{n+1}(\{v\}))P^n(A_v)}.$$

Τότε,

$$\mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2/4}\right) \le \frac{q+(1-q)(2-t)}{P^n(A_v)}.$$

Παρατηρούμε ότι $0 \le q, t \le 1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
t &= \frac{P(A)-P^n(A_v)P_{n+1}(\{v\})}{(1-P_{n+1}(\{v\}))P^n(A_v)} = \frac{\sum_{\omega\neq v} P(A_\omega\times\{\omega\})}{(1-P_{n+1}(\{v\}))P^n(A_v)} \\
&= \frac{\sum_{\omega\neq v} P^n(A_\omega)P_{n+1}(\{\omega\})}{(1-P_{n+1}(\{v\}))P^n(A_v)} \le \frac{\sum_{\omega\neq v} P_{n+1}(\{\omega\})}{1-P_{n+1}(\{v\})} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του $t$ έπεται ότι

$$\frac{1}{P(A)} = \frac{1}{P^n(A_v)((1-q)t+q)}.$$

Αν λοιπόν δείξουμε ότι για κάθε $q, t \in [0,1]$ ισχύει $q + (1-q)(2-t) \leq \frac{1}{q+(1-q)t}$ θα πάρουμε την

$$\mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2/4}\right) \leq \frac{1}{P(A)}.$$

Όμως

$$\begin{aligned}
[q + (1-q)(2-t)][q + (1-q)t] &= q^2 + 2(1-q)q + (1-q)^2 t(2-t) \\
&\leq q^2 + 2(1-q)q + (1-q)^2 \\
&= (q + (1-q))^2 = 1,
\end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

## 2.3 Γινόμενα χώρων πιθανότητας - έλεγχος με ένα σημείο

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας χωρίς άτομα. Θεωρούμε το μέτρο γινόμενο $P := P^N = \mu \otimes \cdots \otimes \mu$ ($N$ φορές) στον $X = \Omega \times \cdots \times \Omega$. Ένα σημείο $x \in X$ γράφεται στη μορφή $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Η απόσταση στον $X$ ορίζεται από την

$$d(x,y) = \mathrm{card}\{1 \leq i \leq N : \ x_i \neq y_i\}.$$

Αν $A \subseteq X$, ορίζουμε

$$f(A,x) = \min\{d(y,x) : \ y \in A\}.$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε το εξής θεώρημα «ελέγχου με ένα σημείο».

**Θεώρημα 2.3.1** *Για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\begin{aligned}
\int e^{tf(A,x)} dP^N(x) &\leq \frac{1}{P^N(A)} \left(\frac{1}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{4}\right)^N \\
&\leq \frac{1}{P^N(A)} e^{t^2 N/4}.
\end{aligned}$$

**Πόρισμα 2.3.1** *Ειδικότερα, για κάθε $k \leq N$,*

$$P^N(\{x : f(A,x) \geq k\}) \leq \frac{1}{P^N(A)} e^{-k^2/N}.$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς $N$ και θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

**Λήμμα 2.3.1** *Έστω $g:\Omega\to[0,1]$ μετρήσιμη. Τότε,*

$$\int_\Omega \min\left(e^t,\frac{1}{g(\omega)}\right)d\mu(\omega)\int_\Omega g(\omega)d\mu(\omega)\le a(t),$$

*όπου* $a(t)=\frac{1}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{4}$.

**Απόδειξη:** Έστω ότι έχει γίνει η απόδειξη για μετρήσιμες συναρτήσεις $h:\Omega\to[e^{-t},1]$. Έστω ότι $0\le g\le 1$. Ορίζουμε $h=\max\{e^{-t},g\}$. Τότε η $h$ ικανοποιεί την

$$\int_\Omega \min\left(e^t,\frac{1}{\max\{g,e^{-t}\}}\right)d\mu\int_\Omega \max\{g,e^{-t}\}d\mu\le a(t).$$

Διακρίνοντας τις περιπτώσεις $g(\omega)>e^{-t}$ και $g(\omega)\le e^{-t}$, εύκολα βλέπουμε ότι $\min\left(e^t,\frac{1}{\max\{g,e^{-t}\}}\right)=\min\left(e^t,\frac{1}{g}\right)$. Άρα,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \min(e^t,1/g)\cdot\int_\Omega g &= \int_\Omega \min\left(e^t,\frac{1}{\max\{g,e^{-t}\}}\right)\cdot\int_\Omega g\\ &\le \int_\Omega \min\left(e^t,\frac{1}{\max\{g,e^{-t}\}}\right)\cdot\int_\Omega \max\{g,e^{-t}\}\\ &\le a(t).\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε το ζητούμενο για $g:e^{-t}\le g\le 1$.

Γράφουμε $C=\{g:\Omega\to[e^{-t},1]\}$ και για κάθε $b\in[e^{-t},1]$ θεωρούμε το $C_b=\{g\in C:\int_\Omega g=b\}$. Η συνάρτηση $F:C_b\to\mathbb{R}$ με

$$F(g)=\int_\Omega \frac{1}{g}d\mu$$

είναι κυρτή στο $C_b$ αφού η $x\to\frac{1}{x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^+$. Θεωρούμε το $C_b$ σαν υποσύνολο κάποιου $(L_p)^*=L_q$, $p>1$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το $C_b$ είναι $w^*$-κλειστό υποσύνολο της $B_{L_q}$, οπότε από το θεώρημα του Alaoglu είναι $w^*$-συμπαγές. Από το θεώρημα των Krein-Milman, ισχύει

$$C_b=\mathrm{conv}\overline{\{x_i:x_i\in ext(C_b)\}}^{w^*}.$$

**Λήμμα 2.3.2** *Τα ακραία σημεία του $C_b$ είναι της μορφής*

$$\chi_A e^{-t}+\chi_{\Omega\setminus A},\quad A\in\mathcal{A}.$$

**Απόδειξη:** Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $w\in C_b$ ακραίο σημείο του $C_b$ η οποία δεν είναι της μορφής $\chi_A e^{-t}+\chi_{\Omega\setminus A}$. Εαν $\Gamma=\{\omega:e^{-t}<w(\omega)<1\}$, τότε $\mu(\Gamma)>0$. Θέτουμε

$$\Gamma_\delta=\{\omega:e^{-t}+\delta<w(\omega)<1-\delta\}.$$

Τότε, $\lim_{\delta\to 0^+}\mu(\Gamma_\delta)\to\mu(\Gamma)$. Άρα, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε $\mu(\Gamma_\delta)>0$. Αφού ο χώρος δεν έχει άτομα, υπάρχουν $\Delta_1,\Delta_2$ τέτοια ώστε $\Delta_1\cup\Delta_2=\Gamma_\delta$, $\Delta_1\cap\Delta_2=\emptyset$ και $\mu(\Delta_1)>0,\mu(\Delta_2)>0$. Ορίζουμε

$$w_1(\omega)=\begin{cases} w(\omega)+\delta\frac{\mu(\Delta_2)}{\mu(\Delta_1)+\mu(\Delta_2)}, & \text{αν } \omega\in\Delta_1\\ w(\omega)-\delta\frac{\mu(\Delta_1)}{\mu(\Delta_1)+\mu(\Delta_2)}, & \text{αν } \omega\in\Delta_2\\ w(\omega), & \omega\notin\Gamma_\delta\end{cases}$$

και

$$w_2(\omega)=\begin{cases} w(\omega)-\delta\frac{\mu(\Delta_2)}{\mu(\Delta_1)+\mu(\Delta_2)}, & \text{αν } \omega\in\Delta_1\\ w(\omega)+\delta\frac{\mu(\Delta_1)}{\mu(\Delta_1)+\mu(\Delta_2)}, & \text{αν } \omega\in\Delta_2\\ w(\omega), & \omega\notin\Gamma_\delta.\end{cases}$$

Τότε, $w=\frac{w_1+w_2}{2}$ και

$$\begin{aligned}\int_\Omega w_1 d\mu &= \int_{\Delta_1} w(\omega)+\delta\frac{\mu(\Delta_2)}{\mu(\Delta_1)+\mu(\Delta_2)}\\ &\quad+\int_{\Delta_2} w(\omega)-\delta\frac{\mu(\Delta_1)}{\mu(\Delta_1)+\mu(\Delta_2)}+\int_{\Omega\setminus\Gamma_\delta} wd\mu\\ &= \int_\Omega wd\mu=b.\end{aligned}$$

Όμοια, $\int_\Omega wd\mu=b$. Επίσης για τις $w_1$, $w_2$ ισχύει $e^{-t}\le w_1\le 1$ και $e^{-t}\le w_2\le 1$. Άρα $w_1,w_2\in C_b$. Επομένως η $w$ δεν είναι ακραίο σημείο του $C_b$. □

Η $F$ είναι $w^*$-συνεχής, άρα η $F|_{C_b}$ παίρνει μέγιστο σε ακραίο σημείο του $C_b$. Το ίδιο ισχύει για την

$$H(g)=\int_\Omega \min(e^t,\frac{1}{g(\omega)})d\mu(\omega)\int_\Omega g(\omega)d\mu(\omega),\quad g\in C_b.$$

Άρα, για κάθε $b\in[e^{-t},1]$ αρκεί να ελέγξουμε όλες τις $u=\chi_A e^{-t}+\chi_{\Omega\setminus A}$ που ανήκουν στο $C_b$. Ισοδύναμα, αρκεί να ελέγξουμε όλες τις $u=\chi_A e^{-t}+\chi_{\Omega\setminus A}$. Έστω $u$ μία τέτοια συνάρτηση και έστω $\mu(A)=p$. Τότε, έχουμε :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \min\left(e^t,\frac{1}{u(\omega)}\right)d\mu(\omega)\int_\Omega u(\omega)d\mu(\omega) &= \left(\int_\Omega \frac{1}{u}d\mu(\omega)\right)\left(\int_\Omega ud\mu(\omega)\right)\\ &= (pe^t+(1-p))(pe^{-t}+(1-p)).\end{aligned}$$

Εαν θεωρήσουμε την συνάρτηση $z(p)=(pe^t+(1-p))(pe^{-t}+(1-p))$, $p\in[0,1]$, τότε παρατηρούμε ότι $z(1-p)=z(p)$. Επίσης $z''(p)=2(e^t-1)(e^{-t}-1)\le 0$, δηλαδή η $z$ είναι κοίλη. Άρα,

$$\begin{aligned}z(1/2) &\ge \frac{z(p)+z(1-p)}{2}\\ &= \frac{z(p)+z(p)}{2}=z(p).\end{aligned}$$

Άρα, το μέγιστο της $z$ είναι

$$z(1/2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\right) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-t} + e^t}{4} = a(t).$$

Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα 2.3.1. $\square$

**Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1:** Με επαγωγή ως προς $N$. Έστω ότι $N = 1$ και έστω $A \in \mathcal{A}$. Από το Λήμμα 2.3.1 για την $g = \chi_A$, έχουμε

$$\int_\Omega \min\left(e^t, 1/\chi_A\right) d\mu(\omega) \int_\Omega \chi_A d\mu(\omega) \leq a(t)$$

άρα

$$\int_A \min\left(e^t, \frac{1}{\chi_A}\right) d\mu(\omega) + \int_{\Omega\setminus A} \min\left(e^t, \frac{1}{\chi_A}\right) d\mu(\omega) \leq \frac{a(t)}{\mu(A)}.$$

Όμως εαν $\omega \in A$ τότε $\min(e^t, \frac{1}{\chi_A}) = 1 = e^{tf(A,\omega)}$ αφού $f(A,\omega) = 0$, και εαν $\omega \notin A$ τότε $\min(e^t, \frac{1}{\chi_A}) = e^t = e^{tf(A,\omega)}$ αφού $f(A,\omega) = 1$. Άρα,

$$\int_\Omega e^{tf(A,\omega)} d\mu(\omega) \leq \frac{a(t)}{\mu(A)}.$$

**Επαγωγικό βήμα:** Υποθέτουμε οτι το Θεώρημα ισχύει για το $N$ και θα το δείξουμε για το $N+1$. Θεωρούμε $A \subseteq \Omega^{N+1}$ και θέτουμε

$$A(\omega) = \{x \in \Omega^N : (x,\omega) \in A\}, \quad \omega \in \Omega$$

και

$$\Gamma = \{x \in \Omega^N : \exists \omega \in \Omega \, \mu\varepsilon \, (x,\omega) \in A\}.$$

Παρατηρήστε ότι $A(\omega) \subseteq \Gamma$ για κάθε $\omega \in \Omega$.

**Ισχυρισμός 1.** $f(A,(x,\omega)) \leq f(A(\omega), x)$.

**Απόδειξη:** Έχουμε

$$f(A,(x,\omega)) = \min\{d((x,\omega), z) : z \in A\}$$

και

$$f(A(\omega), x) = \min\{d(x,y) : y \in A\}$$

όπου $d(x,y) = \text{card}\{i \leq N : x_i \neq y_i\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{d(x,y) : y \in A(\omega)\} \subseteq \{d((x,\omega), z) : z \in A\}.$$

Όμως, εαν $y \in A(\omega)$ τότε $(y,\omega) \in A$ και $d((y,\omega),(x,\omega)) = d(x,y)$. $\square$

**Ισχυρισμός 2.** $f(A,(x,\omega)) \leq f(\Gamma, x) + 1$.

**Απόδειξη:** Έστω $y \in \Gamma$ με $d(x,y) = f(\Gamma, x)$. Τότε, υπάρχει $\omega'$ τέτοιο ώστε $(y,\omega') \in A$. Άρα,

$$\begin{aligned} d((y,\omega'),(x,\omega)) &\leq d((y,\omega'),(x,\omega')) + d((x,\omega),(x,\omega')) \\ &= d(y,x) + d(\omega',\omega) \\ &\leq d(x,y) + 1. \end{aligned}$$

Άρα $d((y,\omega'),(x,\omega)) \leq f(\Gamma,x) + 1$. Επομένως, $f(A,(x,\omega)) \leq f(\Gamma,x) + 1$. □

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση και τους δύο ισχυρισμούς, παίρνουμε:

$$\int_{\Omega^N} e^{tf(A,(x,\omega))} dP^N(x) \leq \int_{\Omega^N} e^{tf(A(\omega),x)} dP^N(x) \leq \frac{a^N(t)}{P^N(A(\omega))}$$

και

$$\int_{\Omega^N} e^{tf(A,(x,\omega))} dP^N(x) \leq e^t \int_{\Omega^N} e^{tf(\Gamma,x)} dP^N(x) \leq e^t \frac{a^N(t)}{P^N(\Gamma)}.$$

Άρα,

$$\int_{\Omega^N} e^{tf(A,(x,\omega))} dP^N(x) \leq \min\{e^t \frac{a^N(t)}{P^N(\Gamma)}, \frac{a^N(t)}{P^N(A(\omega))}\}.$$

Εαν ολοκληρώσουμε ως προς $\omega$ την προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$\int_{\Omega^{N+1}} e^{tf(A,x)} dP^N(\omega) d\mu(\omega) \leq a^N(t) \int_\Omega \min\left\{\frac{e^t}{P(\Gamma)}, \frac{1}{P(A(\omega))}\right\} d\mu(\omega).$$

Από το Λήμμα 2.3.1 για την $g(\omega) = P(A(\omega))/P(\Gamma)$ έπεται ότι

$$\int_\Omega \min\left\{\frac{e^t}{P(\Gamma)}, \frac{1}{P(A(\omega))}\right\} d\mu(\omega) \leq \frac{a(t)}{\int_\Omega P(A(\omega)) d\mu(\omega)}.$$

Από το Θεώρημα Fubini,

$$P(A) = \int_\Omega P(A(\omega)) d\mu(\omega).$$

Άρα, τελικά

$$\int_{\Omega^{N+1}} e^{tf(A,(x,\omega))} \leq \frac{a^{N+1}(t)}{P(A)}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος. Για να πάρουμε την δεύτερη ανισότητα, γράφουμε

$$\frac{1}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{4} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2(2n)!}$$

και παρατηρώντας ότι $2(2n)! \geq 4^n n!$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} a(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2(2n)!} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{4^n\, n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t^2/4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2/4)^n}{n!} = e^{t^2/4}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int e^{tf(A,x)} dP(x) &\leq \frac{1}{P(A)} \left( \frac{1}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{4} \right)^N \\ &\leq \frac{1}{P(A)} e^{t^2 N/4}. \quad \square \end{aligned}$$

**Απόδειξη του Πορίσματος:** Από την ανισότητα του Markov,

$$\begin{aligned} e^{tk} P(\{x : f(A,x) \geq k\}) &= \int_{\{x : f(A,x) \geq K\}} e^{tk} \leq \int_{\Omega} e^{tf(A,x)} dP(x) \\ &\leq \frac{1}{P(A)} e^{t^2 N/4}. \end{aligned}$$

Για $t = \frac{2k}{N}$ έχουμε

$$P(\{x : f(A,x) \geq k\}) \leq \frac{1}{P(A)} e^{-k^2/N}. \quad \square$$

**Παρατήρηση.** Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου γενικεύονται στην περίπτωση $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$ και $P = \mu_1 \times \cdots \times \mu_N$, όπου $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i \leq N$ χώροι πιθανότητας χωρίς άτομα. Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια.

## 2.4 Γινόμενα χώρων πιθανότητας - έλεγχος με $q$ σημεία

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Θεωρούμε το μέτρο γινόμενο $P := P^N = \mu \otimes \cdots \otimes \mu$ ($N$ φορές) στον $\Omega^N = \Omega \times \cdots \times \Omega$. Ένα σημείο $x \in X$ γράφεται στη μορφή $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Αν $q \geq 2$ και $A_1, A_2, \ldots, A_q$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\Omega^N$, για κάθε $x \in \Omega^N$ θέτουμε

$$\begin{aligned} f(A_1, A_2, \ldots, A_q, x) &= \min\{\mathrm{card}\{i \leq N : x_i \notin \{y_i^1, \ldots, y_i^q\}\} : \\ &\quad\; y^1 \in A_1, \ldots, y^q \in A_q\}. \end{aligned}$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε το εξής θεώρημα «ελέγχου με $q$ σημεία».

**Θεώρημα 2.4.1** *Έστω $q \geq 2$ και $A_1, \ldots, A_q \subseteq \Omega^N$ μετρήσιμα. Τότε,*

$$\int_{\Omega^N} q^{f(A_1, \ldots, A_q, x)} dP(x) \leq \frac{1}{\prod_{i \leq q} P(A_i)}.$$

*Ειδικότερα, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \Omega^N$,*

$$P(\{f(A, \ldots, A, x) \geq k\}) \leq \frac{1}{q^k P(A)^q}.$$

**Λήμμα 2.4.1** *Έστω $q \geq 2$ και $g : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, τέτοια ώστε $1/q \leq g \leq 1$. Τότε,*

$$\left(\int_\Omega \frac{1}{g} d\mu\right)\left(\int_\Omega g d\mu\right)^q \leq 1.$$

**Απόδειξη:** Δείχνουμε πρώτα ότι

$$(*) \qquad \int_\Omega \frac{1}{g} d\mu + q\int_\Omega g d\mu \leq q+1.$$

Πράγματι, εύκολα ελέγχουμε ότι αν $q^{-1} \leq x \leq 1$ τότε

$$\frac{1}{x} + qx \leq q+1$$

άρα, αφού $1/q \leq g \leq 1$ έχουμε $1/g(\omega) + qg(\omega) \leq q+1$ για κάθε $\omega \in \Omega$, και ολοκληρώνοντας παίρνουμε την $(*)$.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} a + qb \leq q+1 \quad &\Rightarrow \quad a - 1 + q(b-1) \leq 0 \Rightarrow \ln a + q \ln b \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad e^{\ln a + q\ln b} \leq e^0 \Rightarrow ab^q \leq 1. \end{aligned}$$

Άρα, εαν θέσουμε $a = \int_\Omega 1/g d\mu$ και $b = \int_\Omega g d\mu$ έχουμε το ζητούμενο. □

**Πόρισμα 2.4.1** *Έστω $g_i : \Omega \to [0,1]$ μετρήσιμες, $1 \leq i \leq q$. Τότε,*

$$\left(\int_\Omega \min\left(q, \min_{i\leq q} 1/g_i\right) d\mu\right) \cdot \prod_{i \leq q} \int_\Omega g_i d\mu \leq 1.$$

**Απόδειξη:** Θέτουμε $g = \left(\min(q, \min_{i\leq q} \frac{1}{g_i})\right)^{-1}$. Χρησιμοποιώντας την $0 \leq g_i \leq 1$ ελέγχουμε ότι

$$\frac{1}{q} \leq g \leq 1.$$

Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι

$$\int_\Omega \min\left(q, \min_{i\leq q}(q, \min_{i\leq q}\frac{1}{g_i})\right) d\mu \cdot \left(\int_\Omega g d\mu\right)^q \leq 1.$$

Όμως,

$$\prod_{i\leq q}\int_\Omega g_i d\mu \leq \left(\int_\Omega g d\mu\right)^q.$$

Επομένως,

$$\left(\int_\Omega \min\left(q, \min_{i\leq q}\frac{1}{g_i}\right) d\mu\right) \cdot \prod_{i\leq q}\int_\Omega g_i d\mu \leq 1. \quad \square$$

**Απόδειξη του θεωρήματος:** Με επαγωγή ως προς $N$. Για $N = 1$, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \omega \in A_i \\ \frac{1}{n}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $n > q$, $n \in N$. Από το προηγούμενο πόρισμα έπεται ότι

$$\int_\Omega \min\left(q, \min_{i \le q} \frac{1}{g_i}\right) d\mu \le \frac{1}{\prod_{i \le q}\left(\mu(A_i) + \frac{(1-\mu(A_i))}{n}\right)}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_q} \min\left(q, \min_{i \le q} \frac{1}{g_i}\right) d\mu \quad &+ \quad \int_{\Omega \setminus A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n} \min\left(q, \min_{i \le q} \frac{1}{g_i}\right) d\mu \\ &\le \quad \frac{1}{\prod_{i \le q}\left(\mu(A_i) + \frac{(1-\mu(A_i))}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Εαν $x \in A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_q$, τότε υπάρχει $i_0 \le q$ με $x \in A_{i_0}$. Αφού $x \in A_{i_0}$, έχουμε

$$\min(q, \min_{i \le q} \frac{1}{g_i}) = \min(q, 1) = 1 = q^0 = q^{f(A_1, A_2, \ldots, A_q)}.$$

Εαν $x \notin A_1, A_2, \ldots, A_q$, τότε

$$\min\{q, \min_{i \le q} \frac{1}{g_i}\} = \min\{q, n\} = q$$

και

$$f(A_1, \ldots, A_q, x) = \operatorname{card}\{i \le 1, x_i \notin \{y_i^1, \ldots y_i^q\}\} = 1$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \cup \ldots \cup A_q} q^{f(A_1, A_2, \ldots, A_q, x)} d\mu \quad &+ \quad \int_{\Omega \setminus A_1 \cup \ldots \cup A_q} q^{f(A_1, \ldots A_q, x)} d\mu \\ &\le \quad \frac{1}{\prod_{i \le q}\left(\mu(A_i) + \frac{(1-\mu(A_i))}{n}\right)} \le 1. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\int_\Omega q^{f(A_1, \ldots, A_n)} d\mu \le \frac{1}{\prod_{i \le q} \mu(A_i)}.$$

**Επαγωγικό βήμα:** Υποθέτουμε οτι το θεώρημα ισχύει για το $N$ και θα το δείξουμε για το $N + 1$. Έστω

$$A_1, \ldots A_q \subseteq \Omega^{N+1}.$$

Ορίζουμε

$$B_i = \{x \in \Omega^N : \exists \omega \in \Omega, (x,\omega) \in A_i\}$$

και

$$A_i(\omega) = \{x \in \Omega^N : (x,\omega) \in A_i\}$$

**Ισχυρισμός 1.** $f(A_1,\dots,A_q,(x,\omega)) \le 1 + f(B_1,B_2,\dots,B_q,x)$.

**Απόδειξη:** Έστω $y^1 \in B_1,\dots,y^q \in B_q$. Τότε, υπάρχουν $\omega^1,\dots,\omega^q \in \Omega$ τ.ω. $(y^1,\omega^1) \in A_1,\dots(y^q,\omega^q) \in A_q$. Θέτουμε $z^i = (y^i,\omega^i)$ και $p = (x,\omega)$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
f(A_1,A_2,\dots,A_q,(x,\omega)) &\le \operatorname{card}\{k \le N+1 : p_k \notin \{z_k^1,\dots,z_k^q\} : \\
&\qquad z^1 \in A_1,\dots z^q \in A_q\} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1}(1 - \chi_{\{z_k^1,\dots,z_k^q\}}(p_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{N}(1 - \chi_{\{z_k^1,\dots,z_k^q\}}(x_k)) + (1 - \chi_{\{\omega^1,\dots,\omega^q\}}(\omega)) \\
&\le \operatorname{card}\{i \le N : x_i \notin \{y_i^1,\dots,y_i^q\}\} + 1.
\end{aligned}$$

Αφού τα $y^1,\dots,y^q$ ήταν τυχόντα σημεία των $B_1,B_2,\dots,B_q$, έχουμε το ζητούμενο.
$\square$

**Ισχυρισμός 2.** Έστω $j \le q$. Τότε,

$$f(A_1,\dots,A_q,(x,\omega)) \le f(C_1,\dots,C_q,x),$$

όπου $C_i = B_i$ για $i \ne j$ και $C_j = A_j(\omega)$.

**Απόδειξη:** Θέτουμε $z = (x,\omega)$. Αρκεί να δείξουμε οτι

$$\begin{aligned}
&\{\operatorname{card}\{k \le N : x_k \notin \{y_k^1,\dots,y_k^q\} : y^i \in A_i \quad i \ne j, \quad y^j \in A_j(\omega)\} \\
\subseteq\ &\{\operatorname{card}\{k \le N+1 : z_k \notin \{y_k^1,\dots,y_k^q\}\} : y^i \in A_i\}
\end{aligned}$$

Έστω οτι $y^i \in A_i$ για $i \ne j$ και $y^j \in A_j(\omega)$ (δηλαδή $(y^j,\omega) \in A_j$). Θέτουμε $b^i = y^i$ και $b^j = y^j$.Τότε,

$$\operatorname{card}\{k \le N+1 : z_k \notin \{b_k^1,\dots,b_k^q\}\} = \operatorname{card}\{k \le N : x_k \notin \{y_k^1,\dots,y_k^q\}\}$$

και αυτό δείχνει το ζητούμενο. $\square$

Συνεχίζουμε την απόδειξη ως εξής: ορίζουμε

$$g_i(\omega) = \frac{P(A_i(\omega))}{P(B_i)}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Έστω $i_0$ τέτοιος ώστε $\min \frac{1}{g_i(\omega)} = \frac{1}{g_{i_0}(\omega)}$. Τότε από τους δύο ισχυρισμούς έχουμε

$$f(A_1,\dots,A_q,(x,\omega)) \le 1 + f(B_1,\dots,B_q,x)$$

και

$$f(A_1,\dots,A_q,(x,\omega)) \leq f(C_1,\dots,C_q,x)$$

όπου $C_i = B_i$ για $i \neq i_o$ και $C_{i_0} = A_{i_0}(\omega)$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^N} q^{f(A_1,\dots,A_q,(x,\omega))} dP(x) &\leq \int_{\Omega^N} q^{1+f(B_1,\dots,B_q,x)} dP(x) \\
&\leq q\int_{\Omega^N} q^{f(B_1,\dots,B_q,x)} dP(x) \leq \frac{q}{\prod_{i\leq q} P(B_i)}.
\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^N} q^{f(A_1,\dots,A_q,(x,\omega))} dP(x) &\leq \int_{\Omega^N} q^{f(C_1,\dots,C_q,x)} dP(x) \\
&\leq \frac{1}{\prod_{i\leq q} P(C_i)} = \frac{1}{P(A_{i_0}(\omega))\prod_{i\neq i_0,\, i\leq q} P(B_i)}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^N} q^{f(A_1,\dots,A_q,x)} dP(x) &\leq \min\left\{\frac{q}{\prod_{i\leq q} P(B_i)}, \frac{1}{P(A_{i_0}(\omega))\prod_{\{i\neq i_0,\, i\leq q\}} P(B_i)}\right\} \\
&= \frac{1}{\prod_{i\leq q} P(B_i)} \min\left\{q, \frac{1}{\frac{P(A_{i_0}(\omega))}{P(B_{i_0})}}\right\} \\
&= \frac{1}{\prod_{i\leq q} P(B_i)} \min\left\{q, \min_{i\leq q} \frac{1}{g_i(\omega)}\right\}
\end{aligned}$$

για κάθε $\omega \in \Omega$. Από το Πόρισμα 2.4.1 και το θεώρημα του Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\int_{\Omega^N} q^{f(A_1,\dots,A_q,x)} dP(x) d\mu(\omega) &\leq \frac{1}{\prod_{i\leq q} P(B_i)} \int_{\Omega} \min\left\{q, \min_{i\leq q} \frac{1}{g_i(\omega)}\right\} d\mu(\omega) \\
&\leq \frac{1}{\prod_{i\leq q} P(B_i)} \quad \frac{1}{\prod_{i\leq q} \int_{\Omega} \frac{P(A_i(\omega))}{P(B_i)} d\mu(\omega)} \\
&= \frac{1}{\prod_{i\leq q} \int_{\Omega} P(A_i(\omega)) d\mu(\omega)} \\
&= \frac{1}{\prod_{i\leq q} P(A_i)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

## 2.5 Γινόμενα χώρων πιθανότητας - κυρτή θήκη

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Θεωρούμε το μέτρο γινόμενο $P := P^N = \mu \otimes \cdots \otimes \mu$ ($N$ φορές) στον $\Omega^N = \Omega \times \cdots \times \Omega$. Ένα σημείο $x \in \Omega^N$ γράφεται στη μορφή $x = (x_1, \dots, x_N)$. Αν $A \subseteq \Omega^N$ και $x \in \Omega^N$, ορίζουμε

$$U_A(x) = \{(s_i)_{i\leq N} \in \{0,1\}^N : \exists y \in A, s_i = 0 \Rightarrow x_i = y_i\}.$$

Έστω $V_A(x)$ η κυρτή θήκη του $U_A(x)$. Συμβολίζουμε με $f_C(A,x)$ την Ευκλείδεια απόσταση του 0 άπο το $V_A(x)$.

**Παρατήρηση.** Ισχύει η ισοδυναμία: $0 \in V_A(x) \Leftrightarrow x \in A$.

**Απόδειξη:** Εαν $0 \in V_A(x)$, τότε αφού $0 \in \mathrm{ext}([0,1]^N)$ πρέπει να ισχύει $0 \in U_A(x)$. Όμως τότε, $x \in A$. Αντίστροφα, εαν $x \in A$ τότε $0 \in U_A(x)$, άρα $0 \in V_A(x)$. □

Θεωρούμε σαν «$t$-επέκταση» του $A$ το σύνολο

$$A_t = \{x \in \Omega^N : f_C(A,x) \leq t\}.$$

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το εξής θεώρημα:

**Θεώρημα 2.5.1** *Για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \Omega^N$ έχουμε*

$$\int e^{f_C^2(A,x)/4} dP(x) \leq \frac{1}{P(A)}.$$

*Ειδικότερα,*

$$P(A_t) \geq 1 - \frac{1}{P(A)} e^{-t^2/4}.$$

Για να εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται το Θεώρημα 2.5.1, χρειαζόμαστε το εξής λήμμα.

**Λήμμα 2.5.1** *Αν $x \in A_t$, τότε για κάθε $(a_i)_{i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ υπάρχει $y \in A$ με την ιδιότητα*

$$\sum_{\{i \leq N : x_i \neq y_i\}} a_i \leq t \sqrt{\sum_{i \leq N} a_i^2}.$$

**Απόδειξη:** Έστω $(a_i)_{i \leq N} \in \mathbb{R}^N$. Ορίζουμε $\bar{a} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ με $\bar{a}(x) = \sum_{i \leq N} a_i x_i$. Τότε,

$$\|\bar{a}\| = |a| = \sqrt{\sum_{i \leq N} a_i^2}.$$

Το $V_A(x)$ είναι συμπαγές, επομένως υπάρχει $x_0 \in V_A(x)$ τέτοιο ώστε $|x_0| = f_C(A,x)$. Άρα,

$$\min\{\bar{a}(x) : x \in V_A(x)\} \leq \bar{a}(x_0) \leq |\bar{a}| \cdot |x_0| = |\bar{a}| f_C(A,x) \leq t\|\bar{a}\|.$$

Το $\bar{a}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, άρα

$$\min\{\bar{a}(x) : x \in V_A(x)\} = \min\{\bar{a}(x) : x \in U_A(x)\}.$$

Επομένως, υπάρχει $s \in U_A(x)$ τέτοιο ώστε $\bar{a}(s) \leq t\|\bar{a}\|$. Η ανισότητα αυτή γράφεται

$$\bar{a}(s) = \sum_{i \leq N} a_i s_i = \sum_{\{i \leq N : s_i = 1\}} a_i \leq t \sqrt{\sum a_i^2}.$$

Έπεται οτι

$$\sum_{\{i\leq N: x_i\neq y_i\}} a_i \leq \sum_{\{i\leq N: s_i=1\}} a_i \leq t\sqrt{\sum a_i^2}. \qquad \Box$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.5.1 μπορούμε να συγκρίνουμε τα Θεωρήματα 2.3.1 και 2.5.1. Το Θεώρημα 2.3.1 μας δίνει την ανισότητα

$$P^N(\{x : f(A,x)\geq k\}) \leq \frac{1}{P^N(A)}e^{-k^2/N}$$

όπου

$$f(A,x)=\min\{d(y,x) :\ y\in A\}$$

και

$$d(x,y)=\mathrm{card}\{1\leq i\leq N :\ x_i\neq y_i\}$$

($X=\Omega^N$ και $A$ μετρήσιμο υποσύνολο του $X$ με θετικό μέτρο). Αν στο Λήμμα 2.5.1 πάρουμε $a_i=1$ και $t=k/\sqrt{N}$, βλέπουμε οτι

$$f_C(A,x)\leq \frac{k}{\sqrt{N}} \Longrightarrow \exists y\in A : d(x,y)\leq k.$$

Δηλαδή,

$$\{x\in X : f(A,x)\geq k\}\subseteq \{x\in X : f_C(A,x)\geq k/\sqrt{N}\}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.5.1 βλέπουμε οτι

$$P^N(\{x : f(A,x)\geq k\})\leq P^N(x : f_C(A,x)\geq k/\sqrt{N}\})\leq \frac{1}{P^N(A)}\exp(-k^2/4N),$$

δηλαδή το Θεώρημα 2.3.1 με ελαφρώς χειρότερη αριθμητική σταθερά. Το μεγάλο όμως πλεονέκτημα του Θεωρήματος 2.5.1 είναι οτι μας αφήνει το περιθώριο να επιλέγουμε τα $(a_i)$, κάτι που έχει σημασία για κάποιες εφαρμογές.

**Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1:** Η απόδειξη της πρώτης ανισότητας γίνεται με επαγωγή ως προς $N$. Για $N=1$ έχουμε: αν $x\in A$ τότε $0\in V_A(x)$, άρα $f(A,x)=d(0,V_A(x))=\min_{y\in V_A(x)}|y|=0$. Επίσης, αν $x\notin A$ τότε $U_A(x)=\{1\}$ άρα $V_A(x)=\{1\}$, επομένως $f(A,x)=\min_{y\in V_A(x)}|y|=1$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}\int e^{f_C^2(A,x)/4}dP(x) &= \int_A e^{f_C^2(A,x)/4}dP(x)+\int_{\Omega\setminus A} e^{f_C^2(A,x)/4}dP(x)\\ &= P(A)e^0+e^{1/4}(1-P(A))\leq \frac{1}{P(A)}.\end{aligned}$$

(έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει την τελευταία ανισότητα).

**Επαγωγικό βήμα:** Υποθέτουμε ότι το Θεώρημα ισχύει για το $N$ και θα το δείξουμε για το $N+1$. Έστω $A\subseteq\Omega^{N+1}$ μετρήσιμο. Για κάθε $\omega\in\Omega$ θέτουμε

$$A(\omega)=\{x\in\Omega^N : (x,\omega)\in A\}$$

και
$$B = \{x \in \Omega^N : \exists \omega \in \Omega, (x,\omega) \in A\}.$$

**Ισχυρισμός 1.** Εαν $s \in U_{A(\omega)}(x)$, τότε $(s,0) \in U_A((x,\omega)))$.

**Απόδειξη:** Έστω $z = (x,\omega)$. Αφού $s \in U_{A(\omega)}(x)$, υπάρχει $y \in A(\omega)$ τέτοιο ώστε $s_i = 0 \Rightarrow x_i = y_i$. Επειδή $y \in A(\omega)$, έχουμε $v = (y,\omega) \in A$. Το $\mu = (s,0) \in U_A(x,\omega)$ αφού για κάθε $i \leq N$
$$\mu_i = s_i = 0 \Rightarrow z_i = v_i,$$
ενώ για $i = N+1$ έχουμε $z_{N+1} = v_{N+1} = \omega$. □

**Ισχυρισμός 2.** Εαν $t \in U_B(x)$, τότε $(t,1) \in U_A((x,\omega))$.

**Απόδειξη:** Αφού $t \in U_B(x)$ τότε υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε $(t_i = 0 \Rightarrow y_i = x_i)$ Αφού $y \in B$, υπάρχει $\omega \in \Omega$ ώστε $(y,\omega) \in A$. Τότε, $(t,1) \in U_A(x,\omega)$: από τον ορισμό αρκεί να ελέγξουμε οτι για κάθε $i \leq N$
$$\mu_i = t_i = 0 \Rightarrow x_i = y_i,$$
το οποίο ισχύει. □

**Ισχυρισμός 3.** $f_C^2(A,(x,\omega)) \leq (1-\lambda)^2 + \lambda f_C^2(A(\omega),x) + (1-\lambda) f_C^2(B,x)$.

**Απόδειξη :** Έστω $z = (x,\omega)$. Αν $s \in V_{A(\omega)}(x)$ και $t \in V_B(x)$, παρατηρούμε οτι
$$s \in V_{A(\omega)}(q) \Rightarrow (s,0) \in V_A(x,\omega)$$
και
$$t \in V_B(x) \Rightarrow (t,1) \in V_A(x,\omega).$$
Αφού το $V_A(x,\omega)$ είναι κυρτό,
$$\lambda(s,0) + (1-\lambda)(t,1) = (\lambda s + (1-\lambda)t, 1-\lambda) \in V_A((x,\omega)).$$
Από τριγωνική ανισότητα και απο το γεγονος οτι η $x^2$ είναι κυρτή, έχουμε
$$\begin{aligned}
|(\lambda s + (1-\lambda)t, 1-\lambda)|^2 &= |(\lambda s + (1-\lambda)t, 0)|^2 + |(0, 1-\lambda)|^2 \\
&= |\lambda s + (1-\lambda)t|^2 + (1-\lambda)^2 \\
&\leq (\lambda|s| + (1-\lambda)|t|)^2 + (1-\lambda)^2 \\
&\leq \lambda|s|^2 + (1-\lambda)|t|^2 + (1-\lambda)^2.
\end{aligned}$$
Άρα
$$f_C^2(A,z) \leq (1-\lambda)^2 + \lambda|s|^2 + (1-\lambda)|t|^2.$$
Αφού τα $t, s$ είναι τυχόντα στοιχεία των $V_B(x)$ και $V_{A(\omega)}(x)$, έχουμε
$$f_C^2(A,z) \leq \lambda f_C^2(A(\omega),x) + (1-\lambda) f_C^2(B,x) + (1-\lambda)^2. \quad \square$$

Από την προηγούμενη ανισότητα, από την ανισότητα του Hölder και από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^N} e^{f_C^2(A,(x,\omega))/4}dP(x) &\leq e^{(1-\lambda)^2/4}\int_{\Omega^N} e^{\lambda f_C^2(A(\omega),x)/4}e^{(1-\lambda)f_C^2(B,x)/4}dP(x)\\
&\leq e^{(1-\lambda)^2/4}\left(\int_{\Omega^N} e^{f_C^2(A(\omega),x)/4}\right)^{\lambda}\left(\int e^{f_C^2(B,x)/4}\right)^{1-\lambda}\\
&\leq e^{(1-\lambda)^2/4}\left(\frac{1}{P(A(\omega))}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{P(B)}\right)^{1-\lambda}\\
&= \frac{1}{P(B)}e^{(1-\lambda)^2/4}\left(\frac{P(A(\omega))}{P(B)}\right)^{-\lambda}
\end{aligned}$$

για κάθε $\lambda \in [0,1]$. Άρα,

$$\int_{\Omega^{N+1}} e^{f_C^2(A,(x,\omega))/4}dP(x) \leq \inf_{\lambda\in[0,1]}\frac{1}{P(B)}e^{(1-\lambda)^2/4}\left(\frac{P(A(\omega))}{P(B)}\right)^{-\lambda}.$$

Έχουμε δείξει οτι για κάθε $0 \leq r \leq 1$ ισχύει η

$$\inf_{0\leq\lambda\leq 1} r^{-\lambda}e^{(1-\lambda)^2/4} \leq 2-r.$$

Αν πάρουμε

$$r = \frac{P(A(\omega))}{P(B)} \leq 1,$$

βλέπουμε οτι

$$\int_{\Omega^{N+1}} e^{f_C^2(A,(x,\omega))/4}dP(x) \leq \frac{1}{P(B)}\left(2-\frac{P(A(\omega))}{P(B)}\right).$$

Από το θεώρημα του Fubini έπεται οτι

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\int_{\Omega^N} e^{f_C^2(A,(x,\omega))/4}dP(x)d\mu(\omega) &\leq \frac{1}{P(B)}\int_{\Omega}\left(2-\frac{P(A(\omega))}{P(B)}\right)d\mu(\omega)\\
&= \frac{1}{P(B)}\left(2-\frac{1}{P(B)}\int_{\Omega}P(A(\omega))d\mu(\omega)\right)\\
&\leq \frac{1}{P(B)}\cdot\frac{P(B)}{(P\times\mu)(A)}\\
&= \frac{1}{(P\times\mu)(A)}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω της $x(2-x) \leq 1$, $x \in [0,2]$. Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού του Θεωρήματος 2.5.1. Τώρα, για κάθε $t > 0$,

$$e^{t^2/4}P(\Omega^N \setminus A_t) \leq \int_{\Omega^N\setminus A_t} e^{f_C^2(A,x)/4}dP(x)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\Omega^N} e^{f_C^2(A,x)/4} dP(x) \\
&\leq \frac{1}{P(A)}.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$P(A_t) \geq 1 - \frac{1}{P(A)} e^{-t^2/4}. \qquad \square$$

**Αναφορες**. Το Θεώρημα 2.1.1 αποδείχθηκε από τον Talagrand στο [T3]. Οι Johnson και Schechtman έδωσαν μια απλή γενίκευσή του (Θεώρημα 2.2.1) στο [JS], την οποία χρησιμοποίησαν στην ασυμπτωτική θεωρία χώρων πεπερασμένης διάστασης. Στη συνέχεια, ο Talagrand απέδειξε πληθώρα ανισοτήτων συγκέντρωσης με την «μέθοδο της επαγωγής», την οποία ανέπτυξε σε ολόκληρη θεωρία. Τα αποτελέσματα που ενδεικτικά παρουσιάζουμε στις Παραγράφους 2.3, 2.4, 2.5 αλλά και στην 3.2 περιέχονται στο εκτενές άρθρο [T1], στο οποίο γίνεται «επισκόπηση της θεωρίας».

# Κεφάλαιο 3

# Η μέθοδος των martingales

## 3.1 Η συμμετρική ομάδα - η μέθοδος των martingales

Θα αποδείξουμε μια ανισότητα συγκέντρωσης για την συμμετρική ομάδα, χρησιμοποιώντας μια γνωστή ανισότητα για martingales, την ανισότητα του Azuma. Η μέθοδος οφείλεται στον Maurey.

Δίνουμε πρώτα τους βασικούς ορισμούς της δεσμευμένης μέσης τιμής και του martingale σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Αν $\mathcal{G}$ είναι μια υπο-$\sigma$-άλγεβρα της $\mathcal{F}$ και αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, τότε η συνολοσυνάρτηση

$$\mu(A) = \int_A f dP, \quad A \in \mathcal{G}$$

ορίζει ένα μέτρο στην $\mathcal{G}$, το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το $P|_{\mathcal{G}}$. Από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει μοναδική $h \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ με την ιδιότητα

$$\int_A h dP = \int_A f dP$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Η $h$ ονομάζεται *δεσμευμένη μέση τιμή* της $f$ ως προς την $\mathcal{G}$ και συμβολίζεται με $h = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.

Βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι οι εξής:

1. Ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός, γραμμικός και έχει νόρμα 1 σε κάθε $L_p$ χώρο, $1 \leq p \leq \infty$.

2. Αν $\mathcal{G}_1$ είναι μια υπο-$\sigma$-άλγεβρα της $\mathcal{G}$, τότε $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}_1)$.

3. Αν $g \in L_\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$ τότε $\mathbb{E}(f \cdot g|\mathcal{G}) = g \cdot \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.

4. Αν $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ είναι η τετριμμένη $\sigma$-άλγεβρα, τότε η $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι σταθερή: είναι η μέση τιμή της $f$

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = \mathbb{E}f = \int f dP.$$

**Ορισμός** Έστω $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}$ μια ακολουθία $\sigma$-αλγεβρών. Μια ακολουθία $f_1, f_2, \ldots$ συναρτήσεων $f_i \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$ λέγεται martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_i\}$ αν $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{F}_{i-1}) = f_{i-1}$ για κάθε $i \geq 2$.

Η ανισότητα του Azuma δίνει εκτίμηση μιας συνάρτησης από την μέση τιμή της.

**Λήμμα 3.1.1** *Έστω $f \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ μια ακολουθία $\sigma$-αλγεβρών. Θέτουμε $d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε, για κάθε $c > 0$ έχουμε*

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geq c) \leq 2e^{-c^2/4\sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}.$$

**Απόδειξη:** Παρατηρούμε οτι η $\{\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)\}_{i=0}^n$ είναι martingale ως προς $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^n$. Πράγματι έχουμε

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$$

και $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$ απο τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής, επομένως η ακολουθία $\{\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)\}_{i=0}^n$ είναι martingale. Επιπλέον έχουμε $\mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}|\mathcal{F}_{i-1})) \\
&= \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Με σύγκριση των δυναμοσειρών των $e^x$ και $e^{x^2/2}$ παίρνουμε την ανισότητα $e^x \leq x + e^{x^2}$. Αφού ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ είναι θετικός, συμπεραίνουμε οτι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_i}|\mathcal{F}_{i-1}) \leq \mathbb{E}(\lambda d_i|\mathcal{F}_{i-1}) + \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_i^2}).$$

Από την γραμμικότητα της $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$ έχουμε οτι

$$\mathbb{E}(\lambda d_i|\mathcal{F}_{i-1}) = \lambda\mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) = \lambda 0 = 0.$$

Επομένως,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_i}|\mathcal{F}_{i-1}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_i^2}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda^2\|d_i\|^2}|\mathcal{F}_{i-1}) = e^{\lambda\|d_i\|^2}.$$

Παρατηρούμε οτι κάθε $d_j \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_j, P)$ αφού $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_j) \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_j, P)$ και $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{j-1}) \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_{j-1}, P)$. Πράγματι, αφού $f \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $-M \leq f \leq M$ σχεδόν παντού στο $\Omega$. Τότε, $-M \leq \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_j) \leq M$. Όμοια, $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{j-1}) \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_{j-1}, P)$.

**Ισχυρισμός:** Ισχύει η ανισότητα

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^n \lambda d_i} \leq e^{\lambda^2\sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}.$$

**Απόδειξη:** Με επαγωγή ως προς $n$: Για $n = 1$ έχουμε $\mathbb{E}e^{\lambda d_1} = \mathbb{E}(e^{\lambda d_1}|F_0) \leq e^{\lambda^2 \|d_1\|_\infty^2}$. Υποθέτουμε οτι ισχύει για $n = k$, δηλαδή

$$\mathbb{E}e^{\lambda \sum_{j=1}^{k} d_j} \leq e^{\sum_{j=1}^{k} \lambda^2 \|d_j\|^2}.$$

Θα δείξουμε οτι ισχύει για $n = k + 1$.

Έχουμε $e^{\sum_{j=1}^{k} \lambda d_j} \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$ αφού $d_j \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_j, P)$ όπως είδαμε προηγουμένως. Άρα, από την ιδιότητα 3 της δεσμευμένης μέσης τιμής

$$\mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^{k} \lambda d_j} e^{d_k}|d_{k-1}) = e^{\sum_{j=1}^{k} \lambda d_j} \mathbb{E}(e^{d_k}|\mathcal{F}_{k-1}).$$

Χρησιμοποιώντας και την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\lambda \sum_{j=1}^{k+1} d_j}|\mathcal{F}_0) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^{k+1} \lambda d_j}|\mathcal{F}_k)|\mathcal{F}_0) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^{j=k+1} \lambda d_j}|\mathcal{F}_k)) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^{k} \lambda d_j + \lambda d_{k+1}}|\mathcal{F}_k)) \\
&= \mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^{k} \lambda d_j} \mathbb{E}(e^{\lambda d_{k+1}}|\mathcal{F}_k)) \\
&\leq \mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^{j=k} \lambda d_j}) e^{\lambda^2 \|d_{k+1}\|_\infty^2} \\
&\leq e^{\lambda^2 \sum_{j=1}^{k} \|d_i\|_\infty^2} e^{\lambda^2 \|d_{k+1}\|_\infty^2} \\
&= e^{\lambda^2 \sum_{j=1}^{k+1} \|d_j\|_\infty^2}.
\end{aligned}$$

Για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P(f - \mathbb{E}f \geq c) &= P(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_1) \geq C) \\
&= P(\sum_{j=1}^{n} d_j \geq C) \\
&= P(\sum_{j=1}^{n} \lambda d_j \leq \lambda C) \\
&= P(e^{\lambda \sum_{j=1}^{n} - \lambda C} \geq 1) \\
&\leq \mathbb{E}e^{\lambda \sum_{j=1}^{n} \lambda d_j - \lambda C} \\
&\leq e^{\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} \|d_j\|_\infty^2 - \lambda C}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$P(f - \mathbb{E}f \geq C) \leq \min_{\lambda > 0} e^{\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} \|d_j\|^2 - \lambda C} = e^{-c^2/4 \sum_{j=1}^{n} \|d_j\|_\infty^2}.$$

Εαν εφαρμόσουμε την ανισότητα για την $-f$, παίρνουμε

$$P(-f + \mathbb{E}f \geq C) \leq e^{-c^2/4 \sum_{j=1}^{n} \|d_j\|_\infty^2}.$$

Άρα,

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geq C|) \leq P(f - \mathbb{E}f \geq C) + P(\mathbb{E} - f \geq C) \leq 2^{-c^2/4 \sum_{j=1}^{n} \|d_j\|_\infty^2}. \qquad \square$$

**Θεώρημα 3.1.1** *Η οικογένεια $S_n$ των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,n\}$ με μετρική την $d(\sigma,\tau)=\frac{1}{n}|\{i:\sigma(i)\neq\tau(i)\}|$ και με το ομοιόμορφο μέτρο $P$ που δίνει μάζα $\frac{1}{n!}$ σε κάθε μετάθεση είναι μια κανονική Lévy οικογένεια με σταθερές $c_1=2$ και $c_2=1/64$. Δηλαδή, $\alpha(S_n,\varepsilon)\leq 2\exp(-\varepsilon^2 n/64)$ για κάθε $\varepsilon>0$.*

**Απόδειξη:** Έστω $\mathcal{F}_j$ η άλγεβρα που παράγεται απο τα

$$A_{i_1,\dots,i_j}=\{\sigma:\sigma(1)=i_1,\dots,\sigma(j)=i_j\}$$

όπου $i_1,\dots,i_j$ διακεκριμένα στοιχεία του $\{1,\dots,n\}$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\{\emptyset,S_n\}=\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\dots\subseteq\mathcal{F}_n=2^{S_n}.$$

Τότε, $\mathcal{F}_j\subseteq\mathcal{F}_{j+1}$ για κάθε $j=0,1,\dots,n-1$. Πράγματι, κάθε άτομο της $\mathcal{F}_j$ είναι της μορφής

$$A_{i_1,i_2,\dots,i_j}=\bigcup_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1\dots,i_j\}}\{\sigma:\sigma(1)=i_1,\dots,\sigma(j)=i_j,\sigma(j+1)=k\},$$

δηλαδή ανήκει στην $\mathcal{F}_{j+1}$.

Έστω $f$ μια συνάρτηση ορισμένη στο $S_n$, με σταθερά Lipschitz 1 και έστω $(f_j)_{j=0}^{j=n}$ το martingale $f_j=\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_j)$ που παράγεται απο την $f$.

**Λήμμα 3.1.2** *Για κάθε άτομο $A=A_{i_1,i_2,\dots,i_j}$ της $\mathcal{F}_j$ και κάθε ζευγάρι ατόμων $B=A_{i_1,i_2,\dots,i_j,r}$ και $C=A_{i_1,\dots,i_j,s}$ της $\mathcal{F}_{j+1}$ που περιέχονται στο $A$, μπορούμε να βρούμε μια 1-1 απείκονιση $\phi:B\to C$ τέτοια ώστε $d(b,\phi(b))\leq\frac{2}{n}$ για κάθε $b\in B$.*

**Απόδειξη:** Έστω $\pi$ η μετάθεση που αντιμεταθέτει τα $r$ και $s$ και αφήνει αμετάβλητα τα υπόλοιπα στοιχεία του $\{1,\dots,n\}$. Ορίζουμε $\phi:B\to C$ με $\phi(\sigma)=\pi\circ\sigma$.

Τότε, $\phi(\sigma)(i)=\sigma(i)$ για $i\neq j+1$ και $i\neq\sigma^{-1}(s)$. Πράγματι, εαν $i=\sigma^{-1}(s)$ τότε $\sigma(i)=s$ και$\phi(\sigma)(i)=\pi\circ\sigma(i)=\pi(s)=r$. Εαν $i=j+1$, τότε $\phi(\sigma)(j+1)=\pi\circ\sigma(j+1)=\pi(r)=s$ και αν $i=\sigma^{-1}(s)$ τότε $\phi(\sigma)(i)=\pi(s)=r$. Επομένως,

$$d(b,\phi(b))\leq\frac{2}{n}.$$

Η $\phi$ είναι εξ ορισμού 1-1 και αφού $\mathrm{card}B=\mathrm{card}C$ έπεται οτι η $\phi$ είναι επί. □

Έστω $A,B,C$ όπως στον ισχυρισμό. Αφού τα $B,C$ είναι άτομα της $\mathcal{F}_{j+1}$, η $f_{j+1}$ είναι σταθερή στα $B,C$. Έχουμε

$$\int_B\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{j+1})dP=\int_B fdP=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in B}f(\sigma).$$

Όμως η $f_{j+1}=\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{j+1})$ είναι σταθερή στο $B$, άρα

$$f_{j+1}|B\equiv\frac{1}{P(B)}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in B}f(\sigma)=\frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B}f(\sigma).$$

Όμοια δείχνουμε οτι $f_{j+1}|C = \frac{1}{|C|}\sum_{\sigma\in C} f(\sigma)$. Γράφουμε

$$f_{j+1}|C = \frac{1}{|C|}\sum_{\sigma\in C} f(\sigma) = \frac{1}{|\phi(B)|}\sum_{\sigma\in B} f(\phi(\sigma)) = \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} f(\phi(\sigma)).$$

Αφού η $f$ είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1,

$$\begin{aligned}
|f_{j+1}|B - f_{j+1}|C| &\leq \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} |f(\sigma) - f(\phi(\sigma))| \\
&\leq \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} d(\sigma, \phi(\sigma)) \\
&\leq \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} \frac{2}{n} = \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $|f_{j+1}|B - f_j|A| \leq \frac{2}{n}$. Πράγματι, έχουμε

$$|A| = |\bigcup_{s\notin\{i_1,\ldots,i_j\}} A_{i_1,\ldots,i_j,s}| = \sum_{s\notin\{i_1,\ldots,i_j\}} |A_{i_1,i_2,\ldots,i_j,s}| = (n-j)|C|.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
f_j|A &= \frac{1}{|A|}\sum_{\sigma\in A} f(\sigma) \\
&= \frac{1}{(n-j)|C|}\sum_{s\notin\{i_1,\ldots,i_j\}, s=1}^{n}\ \sum_{\sigma\in A_{i_1,\ldots,i_j,s}} f(\sigma) \\
&= \frac{1}{(n-j)|C|}\sum_{C\subseteq A}\sum_{\sigma\in C} f(\sigma) \\
&= \frac{1}{n-j}\sum_{C\subseteq A} f_{j+1}|C.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
|f_{j+1}|B - f_j|A| &= \left|\frac{1}{n-j}\sum_{C\subseteq A} f_{j+1}|B - \frac{1}{n-j}\sum_{C\subseteq A} f_{j+1}|C\right| \\
&= \left|\sum_{C\subseteq A}\frac{1}{n-j}(f_{j+1}|B - f_{j+1}|C)\right| \\
&\leq \sum_{C\subseteq A}\frac{1}{n-j}|f_{j+1}|B - f_{j+1}|C| \\
&\leq \sum_{C\subseteq A}\frac{1}{n-j}\frac{2}{n} \\
&= \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Έχουμε $\Omega = \bigcup B_i$ όπου $B_i \in \mathcal{F}_{j+1}$. Θα δείξουμε οτι $|d_{j+1}|B_i| \leq \frac{2}{n}$, όπου οι $d_j$ ορίζονται όπως στην ανισότητα του Azuma. Πράγματι,

$$|d_{j+1}|B_i| = |f_{j+1}|B_i - f_j|B_i| = |f_{j+1}|B_i - f_j|A_i| \leq \frac{2}{n}$$

όπου $A_i$ το άτομο της $F_j$ που περιέχει το $B_i$. Άρα,

$$\|d_{j+1}\|_\infty \leq \frac{2}{n}.$$

Η $f$ προφανώς ανήκει στον $L_\infty(S_n, \mathcal{F}_n, P)$, άρα η προηγούμενη ανισότητα και το Λήμμα 3.1.1 δίνουν

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geq c) \leq 2e^{-c^2 n/16}.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει την εξής πρόταση.

**Πρόταση 3.1.1** *Έστω $f : S_n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1. Τότε,*

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geq c) \leq 2e^{-c^2 n/16}. \quad \square$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη του θεωρήματος ως εξής. Για κάθε $A \subseteq S_n$, η $d(\cdot, A)$ είναι Lipschitz με σταθερά 1. Επιλέγουμε $c > 0$ τέτοιον ώστε $2\exp(-c^2 n/16) = 1/2$. Δηλαδή, $c = 4\sqrt{\log 4/n}$. Τότε,

$$P(|d(\cdot, A) - \mathbb{E}(d(\cdot, A))| < 4\sqrt{\log 4/n}) \leq 1/2.$$

Εαν υποθέσουμε οτι $P(A) \geq 1/2$, τότε $P(d(\cdot, A) = 0) = P(A) \geq 1/2$. Τα ενδεχόμενα $\{\sigma : d(\sigma, A) = 0\}$ και $\{|d(\cdot, A) - \mathbb{E}d(\cdot, A)| < 4\sqrt{\log 4/n}\}$ έχουν μη κένη τομή αφού

$$\begin{aligned} P(\{\sigma : d(\sigma, A) = 0\}) &+ P(\{|d(\cdot, A) - \mathbb{E}d(\cdot, A)| < 4\sqrt{\log 4/n}\}) \\ &> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει $\sigma \in S_n$ τέτοιο ώστε $|d(\sigma, A) - \mathbb{E}d(, A)| < 4\sqrt{\log 4/n}$ και $d(\sigma, A) = 0$ (δηλαδή, $\sigma \in A$). Έπεται οτι

$$\mathbb{E}d(\cdot, A) < 4\sqrt{\log 4/n}.$$

Έχουμε

$$P\left(d(\cdot, A) \leq c + \mathbb{E}d(\cdot, A)\right) \leq P(|d(, A) - \mathbb{E}d(\cdot, A)| \geq c) \leq 2e^{\frac{-c^2 n}{16}}.$$

Όμως,

$$P(d(\cdot, A) \leq c + 4\sqrt{\log 4/n}) \leq P(d(\cdot, A) \geq c + \mathbb{E}d(\cdot, A)).$$

Άρα,

$$P(d(\cdot, A) \leq c + 4\sqrt{\log 4/n}) \leq 2\exp(-c^2 n/16).$$

Για $\varepsilon > 8\sqrt{\log 4/n}$ παίρνουμε

$$P(d(\cdot,A) > \varepsilon) = P(d(\cdot,A) > \varepsilon/2 + 4\sqrt{\log 4/n}) \leq 2e^{\frac{-\varepsilon^2 n}{64}}.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\varepsilon \leq 8\sqrt{\log 4/n}$

$$P(d(\cdot,A) > \varepsilon) \leq P(S_n \setminus A) \leq \frac{1}{2} = 2e^{\log(1/4)} \leq 2e^{\frac{-\varepsilon^2 n}{64}}.$$

Άρα, η συνάρτηση συγκέντρωσης $\alpha(S_n,\varepsilon)$ ικανοποιεί την

$$\alpha(S_n,\varepsilon) \leq 2e^{-\varepsilon^2 n/64}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Δηλαδή, η $(S_n)$ είναι κανονική οικογένεια Lévy με σταθερές $c_1 = 2$ και $c_2 = 1/64$. □

Η ίδια μέθοδος δίνει μια άλλη απόδειξη της ανισότητας του Khintchine.

**Θεώρημα 3.1.2** *Για κάθε $1 \leq p < \infty$ υπάρχουν σταθερές $0 < A_p, B_p < \infty$ τέτοιες ώστε: αν $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$, τότε*

$$A_p^{-1}(\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^{1/2} \leq |\sum_{i=1}^n a_i r_i|_p \leq B_p(\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^{1/2}.$$

*Επιπλέον, $B_p = O(\sqrt{p})$ καθώς $p \to +\infty$ και η $A_p$ είναι φραγμένη μακριά απο το μηδέν: δηλαδή, υπάρχει μια σταθερά $m > 0$ τέτοια ώστε $|A_p| \geq m$ για κάθε $p \geq 1$.*

**Απόδειξη:** Έστω $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. Για κάθε $k \geq 1$ θεωρούμε την άλγεβρα $F_k$ που αποτελείται από τις πεπερασμένες ενώσεις των υποδιαστημάτων $[s/2^k,(s+1)/2^k)$, $s = 0,1,\ldots,2^k-1$. Οι συναρτήσεις Radermacher $r_1,\ldots,r_k$ είναι μετρήσιμες ως προς την $F_k$. Προφανώς $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots F_n$ και η $\{\sum_{i=1}^k a_i r_i\}_{k=1}^n$ είναι martingale ως προς την $\{F_k\}_{k=1}^n$. Πράγματι,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k a_i r_i \big| F_{k-1}\right) = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{E}(r_i|F_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \mathbb{E}(r_i|F_{k-1}) + a_k \mathbb{E}(r_k|F_{k-1}).$$

Επειδή οι $r_i$, $i = 1,\ldots,k-1$ είναι μετρήσιμες ως προς την $F_{k-1}$, έχουμε

$$\mathbb{E}(r_i|F_{k-1}) = r_i, \quad i = 1,\ldots,k-1.$$

Επίσης, $\mathbb{E}(r_k|F_{k-1}) = 0$. Ισχύει μάλιστα κάτι περισσότερο:

$$(*) \qquad \int_A \mathbb{E}(r_k|F_{k-1})dP = 0$$

για κάθε $A \in F_{k-1}$.

**Απόδειξη της** $(*)$**:** Αρκεί να δείξουμε οτι $\int_A \mathbb{E}(r_k|F_{k-1})dP = 0$ για κάθε άτομο της $F_{k-1}$. Έστω $A$ άτομο της $F_{k-1}$. Τότε, $A = B_1 \cup B_2$, όπου τα $B_1$, $B_2$ είναι διαστήματα μήκους $\frac{1}{2^k}$, άρα άτομα της $F_k$. Επομένως,

$$\int_A \mathbb{E}(r_k|F_{k-1})dP = \int_A r_k dP = \int_{B_1} r_k dP + \int_{B_2} r_k dP = 0.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει αφού σε ένα απο τα $B_1$, $B_2$ η $r_k$ παίρνει την τιμή 1 και στο άλλο την τιμή $-1$. □

Έστω $f = \sum_{i=1}^n a_i r_i$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f|F_k) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|F_{n-1})|F_k) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i r_i \big| F_k\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i r_i \big| F_{n-2}\right) \big| F_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i r_i \big| F_k\right) = \ldots = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k+2} a_i r_i \big| F_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k+2} a_i r_i \big| F_{k+1}\right) \big| F_k\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i r_i \big| F_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i r_i .
\end{aligned}$$

Έπεται οτι

$$\begin{aligned}
\|d_k\|_\infty = \|\mathbb{E}(f|d_k) - \mathbb{E}(f|d_{k-1})\|_\infty &= \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i r_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i r_i \right\|_\infty \\
&= \|a_k r_k\|_\infty = |a_k|.
\end{aligned}$$

Προφανώς $f \in L_\infty([0,1], F, P)$. Έχουμε

$$\mathbb{E}f = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i r_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}r_i = \sum_{i=1}^n a_i 0 = 0.$$

Άρα, από το Λήμμα 3.1.1 παίρνουμε έχουμε

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right| > c\right) \leq 2e^{\frac{-c^2}{4\sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}} = 2e^{\frac{-c^2}{4}}$$

αφού $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n \|d_i\|^2 = 1$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1.4 για την $f = \sum_{i=1}^n a_i r_i$: αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλήτης $x = t^2/4$, παίρνουμε

$$\int_0^1 |\sum a_i r_i|^p dP = \int_0^\infty p e^{p-1} P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right| > t\right) dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^\infty pt^{p-1} e^{\frac{-t^2}{4}} dt \\ &= 2^p p \int_0^\infty e^{-x} x^{p/2-1} dx \end{aligned}$$

Όπως στην §2.1, συμπεραίνουμε οτι αν $p$ είναι άρτιος φυσικός τότε

$$2^p p \int_0^\infty e^{-x} x^{p/2-1} dx \leq 2^p p^{p/2}.$$

Ορίζουμε

$$B_p^p = \int_0^\infty pt^{p-1} e^{\frac{-t^2}{4}} dt.$$

Για κάθε $p \geq 2$ υπάρχει $q$ άρτιος με $p \leq q \leq p+2$, άρα

$$B_p \leq B_q \leq 2\sqrt{q} \leq 2\sqrt{p+2} \leq 2\sqrt{2p} = 2\sqrt{2}\sqrt{p}.$$

Άρα,

$$\sup_{p \geq 2} B_p / \sqrt{p} \leq \infty.$$

Από τον κανονα του παραλληλογράμμου έχουμε

$$1 = \left( \int_0^1 \left| \sum a_i r_i \right|^2 dP \right)^{1/2}.$$

Οι προηγούμενες σχέσεις και η ανισότητα του Hölder δείχνουν οτι για κάθε $2 \leq p < \infty$,

$$1 = \left( \int_0^1 \left| \sum a_i r_i \right|^2 dP \right)^{1/2} \leq \left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^p dP \right)^{1/p} \leq B_p.$$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $1 \leq p \leq 2$. Από την ανισότητα του Hölder,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \left| \sum_{i=0}^n a_i r_i \right|^2 dP \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^{2/3} \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^{4/3} dP \\ &\leq \left( \int_0^1 \left( \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^{2/3} )^{3/2} \right) dP \right)^{3/2} \left( \int_0^1 \left( \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^{4/3} \right)^3 dP \right)^{1/3} \\ &= \left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right| dP \right)^{2/3} \left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^4 dP \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Έπεται οτι

$$B_4^{-2} \le \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right| dP.$$

Επίσης, για $1 \le p < 2$ από την ανισότητα του Hölder έχουμε

$$\left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^p dP \right)^{1/p} \le \left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^2 dP \right)^{1/2} = 1.$$

Άρα, για κάθε $1 \le p < 2$ έχουμε

$$B_4^{-2} \le \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right| dP \le \left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^p dP \right)^{1/p} \le \left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^2 dP \right)^{1/2} = 1.$$

Δηλαδή, για κάθε $1 \le p < \infty$ υπάρχουν σταθερές $B_p$, $A_p$ τέτοιες ώστε

$$A_p^{-1} \le \left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_p \le B_p$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_n$ με $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$.

Από τις εκτιμήσεις που δώσαμε για τις $A_p$ και $B_p$ προκύπτουν άμεσα οι υπόλοιποι ισχυρισμοί του Θεωρήματος 3.1.2. □

## 3.2 Η συμμετρική ομάδα - η μέθοδος της κυρτής θήκης

Συμβολίζουμε με $S_N$ την ομάδα των μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, N\}$, εφοδιασμένη με το συμμετρικό μέτρο πιθανότητας $P_N$. Για κάθε $A \subseteq S_N$ και $\sigma \in S_N$, θεωρούμε το σύνολο

$$U_A(\sigma) = \{s \in \{0,1\}^N : \exists \tau \in A : \forall\, l \le N, s_l = 0 \Rightarrow \tau(l) = \sigma(l)\}$$

και συμβολίζουμε με $V_A(\sigma)$ την κυρτή θήκη του $U_A(\sigma)$ στο $[0,1]^N$. Θέτουμε

$$f(A, \sigma) = \inf \left\{ \sum_{l \le N} s_l^2 : s = (s_l) \in V_A(\sigma) \right\}.$$

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την εξής ανισότητα:

**Θεώρημα 3.2.1** *Για κάθε μη κενό $A \subseteq S_N$,*

$$\int_{S_N} e^{f(A,\sigma)/16} dP_N(\sigma) \le \frac{1}{P_N(A)}.$$

Το Θεωρημα αυτο δινει αναλογη εκτιμηση με το Θεωρημα 3.1.1 για την συνηθη συναρτηση συγκεντρωσης του χωρου μεταθεσεων $S_N$. Με μια ομως εννοια ειναι ισχυροτερο (η συγκριση ειναι παρομοια με αυτην των Θεωρηματων 2.3.1 και 2.5.1: βλεπε Κεφαλαιο 2, σελιδα 47).

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς $N$, είναι όμως τεχνικά πολύπλοκη. Αν $p, m \leq N$ και $p \neq m$, ορίζουμε

$$f(A,\sigma,p,m) = \inf\left\{ s_p^2 + \sum_{l \leq N} s_l^2 : s \in V_A(\sigma), s_m = 0 \right\},$$

και για $i, j \leq N$ θέτουμε

$$g(A,\sigma,i,j) = \inf\left\{ \sum_{l \neq i,j} s_l^2 : s \in V_A(\sigma) \right\}.$$

Το Θεώρημα 3.2.1 είναι άμεση συνέπεια του εξής:

**Θεώρημα 3.2.2** *Για κάθε μη κενό $A \subseteq S_N$ και $p \leq N$ έχουμε:*

$$\int_{S_N} e^{f(A,\sigma,p)/16} dP_N(\sigma) \leq \frac{1}{P_N(A)} \tag{1}$$

*και*

$$\int_{S_N} e^{f(A,\sigma,\sigma^{-1}(p))/16} dP_N(\sigma) \leq \frac{1}{P_N(A)}. \tag{2}$$

**Απόδειξη:** Με επαγωγή ως προς $N$.
Για $N = 1$ έχουμε $S_1 = \{\ \mathrm{id}\}$ και $p = 1$, επομένως

$$\int_{S_1} e^{f(A,\sigma,\sigma^{-1}(1))/16} dP_N(\sigma) = e^{f(A,\mathrm{id},1)}.$$

Αφού $A \neq \emptyset$, έχουμε $A = S_1$. Άρα, $U_A(\mathrm{id}) = \{1, 0\}$. Έπεται οτι $V_A(\mathrm{id}) = [0,1]$, οπότε $f(A, \mathrm{id}, 1) = 0$. Επομένως,

$$\int_{S_1} e^{f(A,\sigma,\sigma^{-1}(1))/16} = 1 = \frac{1}{P_1(A)}.$$

Όμοια αποδεικνύουμε την

$$\int_{S_1} e^{f(A,\sigma,p)/16} dP_1(\sigma) \leq \frac{1}{P_1(A)}.$$

Υποθέτουμε οτι το Θεώρημα ισχύει για κάποιο $N$ και θα δείξουμε οτι ισχύει για τον $N + 1$. Για το επαγωγικό βήμα θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα:

**Λήμμα 3.2.1** *Έστω $i,j \leq N+1$ με $i \neq j$, έστω $\sigma \in S_{N+1}$ και $0 \leq \lambda \leq 1$. Τότε,*

$$f(A,\sigma,i) \leq 4(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)g(A,\sigma,i,j) + \lambda f(A,\sigma,j,i).$$

**Απόδειξη:** Έστω $s \in V_A(\sigma)$ και $t \in V_A(\sigma)$ με $t_i = 0$. Αφού το $V_A(\sigma)$ είναι κυρτό, έχουμε

$$u = (1-\lambda)s + \lambda t \in V_A(\sigma).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
f(A,\sigma,i) &\leq \sum_{l\leq N} u_l^2 + u_i^2 \\
&= 2u_i^2 + \sum_{l\leq N, l\neq i} u_l^2 \\
&= 2u_i^2 + u_j^2 + \sum_{l\leq N, l\neq i,j} u_l^2 \\
&\leq 2[(1-\lambda)s_i + \lambda t_i]^2 + ((1-\lambda)s_j + \lambda t_j)^2 + \sum_{l\leq N, l\neq i,j} u_l^2 \\
&= 2(1-\lambda)^2 + ((1-\lambda)s_j + \lambda t_j)^2 + \sum_{l\leq N, l\neq i,j} u_l^2.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ και τις $0 \leq s_j \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
((1-\lambda)s_j + \lambda t_j)^2 &\leq 2(1-\lambda)^2 s_j^2 + 2\lambda^2 t_j^2 \\
&\leq 2(1-\lambda)^2 + 2\lambda^2 t_j^2 \\
&\leq 2(1-\lambda)^2 + 2\lambda t_j^2.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$f(A,\sigma,i) \leq \sum_{l\neq i,j} ((1-\lambda)s_l + \lambda t_l)^2 + 4(1-\lambda)^2 + 2\lambda t_j^2.$$

Η $x \mapsto x^2$ είναι κυρτή, άρα

$$((1-\lambda)s_l + \lambda t_l)^2 \leq (1-\lambda)s_l^2 + \lambda t_l^2.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}
f(A,\sigma,i) &\leq (1-\lambda)\sum_{l\neq i,j} s_l^2 + \lambda(2t_j^2 + \sum_{l\neq j,i} t_l^2) + 4(1-\lambda)^2 \\
&= (1-\lambda)\sum_{l\neq i,j} s_l^2 + \lambda(t_j^2 + \sum_{l\leq N} t_l^2) + 4(1-\lambda)^2
\end{aligned}$$

για κάθε $s,t \in V_A(\sigma)$. Παίρνοντας infimum ως προς $t,s$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

**Ορισμός** Για κάθε $i \leq N$ ορίζουμε

$$G_i = \{\sigma \in S_{N+1} : \sigma(i) = N+1\}$$

Συμβολίζουμε με $t_i = t_{N+1,i}$ την αντιμετάθεση των $N+1$ και $i$, και θεωρούμε την απεικόνιση $R : \rho \mapsto \rho \circ t_i$. Παρατηρούμε οτι, εαν $\rho \in G_i$ τότε

$$R(\rho)(N+1) = (\rho \circ t_i)(N+1) = \rho(i) = N+1.$$

Επομένως μπορούμε να βλέπουμε την $R$ σαν μια απεικόνιση από το $G_i$ στην $S_N$. Τέλος, αν $A \subseteq S_{N+1}$ ορίζουμε $A_i = A \cap G_i$.

**Λήμμα 3.2.2** *Εαν $\sigma \in G_i$, έχουμε*

$$f(A, \sigma, j, i) \leq f(R(A_i), R(\sigma), t_i(j)).$$

**Απόδειξη:** Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $i = N+1$. Τότε, $t_{N+1} = \mathrm{id}$ και $R$ είναι η προβολή του $G_{N+1}$ στην $S_N$. Αν $s \in U_{R(A_{n+1})}(R(\sigma))$, ελέγχουμε εύκολα οτι $\bar{s} = (s, 0) \in U_A(\sigma)$. Έπεται οτι

$$s \in V_{R(A_{N+1})}(R(\sigma)) \Longrightarrow \bar{s} = (s, 0) \in V_A(\sigma).$$

Επίσης,

$$\bar{s}_j^2 + \sum_{l \leq N+1} \bar{s}_l^2 = s_j^2 + \sum_{l \leq N} s_l^2.$$

Αφού $\bar{s} \in V_A(\sigma)$ και $\bar{s}_{N+1} = 0$,

$$f(A, \sigma, j, N+1) \leq s_j^2 + \sum_{l \leq N} s_l^2.$$

Παίρνοντας infimum ως προς $s$ έχουμε το ζητούμενο.

Έστω τώρα $i \neq N+1$. Θεωρούμε $\bar{s} = (\bar{s}_l) \in \{0,1\}^{N+1}$ θέτοντας $\bar{s}_i = 0$, $\bar{s}_{N+1} = s_i$ και $\bar{s}_l = s_l$ αν $l \neq i, N+1$. Παρατηρήστε οτι $\bar{s}_l = s_{t_i(l)}$ για κάθε $l \neq i$. Θα δείξουμε οτι

$$s \in V_{R(A_i)}(R(\sigma)) \Rightarrow \bar{s} \in V_{A_i}(\sigma).$$

Αρκεί να δείξουμε οτι

$$(*) \qquad s \in U_{R(A_i)}(R(\sigma)) \Rightarrow \bar{s} \in U_{A_i}(\sigma).$$

Αφού $s \in U_{R(A_i)}(R(\sigma))$, υπάρχει $\tau \in R(A_i)$ τέτοια ώστε

$$l \leq N,\ s_l = 0 \Rightarrow \tau(l) = R(\sigma)(l).$$

Αφού $\tau \in R(A_i)$, έχουμε $\tau = R(\rho)$ για κάποια $\rho \in A_i = A \cap G_i$. Επομένως,

$$l \leq N,\ s_l = 0 \Rightarrow \rho(t_i(l)) = \sigma(t_i(l)).$$

Θα δείξουμε οτι

$$\bar{s}_l = 0 \Rightarrow \rho(l) = \sigma(l).$$

Για $l = i$, έχουμε ($\bar{s}_i = 0 \Rightarrow \rho(i) = \sigma(i)$) αφού $\rho(i) = N+1 = \sigma(i)$ λόγω της $\rho, \sigma \in G_i$. Εαν $l \neq i$ έχουμε $\bar{s}_l = 0 \Rightarrow \bar{s}_{t_i(l)} = 0$ άρα $\rho(t_i(t_i(l))) = \sigma(t_i(t_i(l)))$, δηλαδή $\rho(l) = \sigma(l)$. Αυτό αποδεικνύει την $(*)$.

Αν $s = (s_l)_{l \leq N} \in V_{R(A_i)}(R(\sigma))$ και $\bar{s} \in V_A(\sigma)$ όπως παραπάνω, έχουμε

$$\begin{aligned} s_j^2 + \sum_{l \leq N} s_l^2 &= \bar{s}_{t_i(j)}^2 + \sum_{l \leq N} s_l^2 \\ &= \bar{s}_{t_i(j)}^2 + \sum_{l \leq N, l \neq i} \bar{s}_l^2 + s_i^2 \\ &= \bar{s}_{t_i(j)}^2 + \sum_{l \leq N, l \neq i} \bar{s}_l^2 + \bar{s}_{N+1}^2 \\ &= \bar{s}_{t_i(j)}^2 + \sum_{l \leq N+1} \bar{s}_l^2. \end{aligned}$$

Παίρνοντας κατάλληλα infimum ως προς $s \in V_{R(A_i)}(R(\sigma))$, συμπεραίνουμε οτι

$$f(A, \sigma, j, i) \leq f(R(A_i), R(\sigma), t_i(j)). \qquad \square$$

Συμβολίζουμε με $Q_i$ το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο $G_i$.

**Πόρισμα 3.2.1** *Ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{G_i} e^{f(A,\sigma,j,i)/16} dQ_i(\sigma) \leq \frac{1}{Q_i(A_i)} = \frac{1}{Q_i(A)}.$$

**Απόδειξη:** Από τη σχέση $f(A, \sigma, j, i) \leq f(R(A_i), R(\sigma), t_i(j))$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{G_i} e^{f(A,\sigma,j,i)/16} dQ_i(\sigma) &\leq \int_{G_i} e^{f(R(A_i),R(\sigma),t_i(j))/16} dQ_i(\sigma) \\ &= \int_{S_N} e^{f(R(A_i),\rho,t_i(j))/16} dP_N(\rho) \\ &\leq \frac{1}{P_N(R(A_i))} = \frac{1}{Q_i(A)}. \end{aligned}$$

Η τελευταια ανισότητα ισχύει λόγω της επαγωγικής υπόθεσης

$$\int_{S_N} e^{f(A,\sigma,p)/16} dP_N(\sigma) \leq \frac{1}{P_N(A)},$$

ενώ η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί

$$Q_i(A) = \frac{|A_i \cap G_i|}{n!} = \frac{|A_i|}{n!} = \frac{R(A_i)}{n!} = P_N(R(A_i)). \qquad \square$$

**Λήμμα 3.2.3** *Έστω $j \neq i$. Τότε,*

$$\int_{G_i} e^{f(A,\sigma,i,j)/16} dQ_i(\sigma) \leq \frac{1}{Q_j(A)}.$$

**Απόδειξη:** Θεωρούμε την $S : G_j \to G_i$ με $S(\rho) = \rho \circ t_{i,j}$. Η $S$ είναι καλά ορισμένη:

$$S(\rho)(i) = (\rho \circ t_{i,j})(i) = \rho(j) = N+1.$$

Είναι φανερό οτι η $S$ είναι 1-1.

**Ισχυρισμός:** Έστω $B \in R(S(A_j))$. Τότε,

$$g(A,\sigma,i,j) \leq f(B, R(\sigma)).$$

**Απόδειξη:** Αρκεί να δείξουμε οτι

$$s \in U_B(R(\sigma)) \Rightarrow \bar{s} \in U_A(\sigma),$$

όπου το $\bar{s} \in \{0,1\}^{N+1}$ ορίζεται ως εξής: $\bar{s}_i = \bar{s}_j = 1$, αν $i, j \neq N+1$ τότε $\bar{s}_{N+1} = s_i$, και αν $l \notin \{i, j, N+1\}$ τότε $\bar{s}_l = s_l$.

Αφού $s \in U_B(R(\sigma))$, υπάρχει $\tau \in B$ τέτοια ώστε: για κάθε $l \leq N$,

$$s_l = 0 \Rightarrow \tau(l) = \sigma \circ t_i(l).$$

Αφού $\tau \in B$, μπορούμε να γράψουμε $\tau = \rho \circ t_{i,j} \circ t_i$ για κάποια $\rho \in A_j$. Άρα, αν $l \leq N$,

$$s_l = 0 \Rightarrow \rho \circ t_{i,j} \circ t_i(l) = \sigma \circ t_i(l).$$

Θα δείξουμε οτι

$$\bar{s}_l = 0 \Rightarrow \rho(l) = \sigma(l).$$

Εαν $l \notin \{i, j, N+1\}$, τότε $\bar{s}_l = 0 \Rightarrow s_l = 0$ επομένως έχουμε $\rho \circ t_{i,j} \circ t_i(l) = \sigma \circ t_i(l)$ και λόγω της $l \notin \{i, j, N+1\}$ έχουμε $\rho(l) = \sigma(l)$.

Εαν $l = i = j$, τότε $\bar{s}_l = 1$ και η ζητούμενη πρόταση ισχύει.

Εαν $l = N+1 = i$ ή $l = N+1 = j$, τότε $\bar{s}_{N+1} = 1$ άρα πάλι η ζητούμενη πρόταση ισχύει.

Τέλος για $l = N+1$ και $l \neq i, j$, έχουμε $\bar{s}_{N+1} = s_i$, άρα εαν $\bar{s}_{N+1} = 0$ παίρνουμε

$$\rho \circ t_{i,j} \circ t_i(i) = \sigma \circ t_i(i)$$

άρα

$$\rho \circ t_{i,j}(N+1) = \sigma(N+1)$$

άρα

$$\rho(N+1) = \sigma(N+1).$$

Άρα $\bar{s} \in U_A(\sigma)$. □

Από τον ισχυρισμό παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\int e^{g(A,\sigma,i,j)/16} dQ_i(\sigma) &\leq \int e^{f(B,R(\sigma))/16} dQ_i(\sigma) \\
&= \int e^{f(B,p)/16} dP_N(p) \\
&\leq \frac{1}{P_N(B)} = \frac{1}{Q_j(A)}.
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση. □

Επιστρέφουμε στην απόδειξη της

$$\int_{S_{N+1}} e^{f(A,\sigma,\sigma^{-1}(p))/16} dP_{N+1}(\sigma) \leq \frac{1}{P_{N+1}(A)}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι $p = N+1$. Διαλέγουμε $j$ τέτοιο ώστε $\max_i Q_i(A) = Q_j(A)$. Θεωρούμε $i, j \leq N+1$ με $i \neq j$ και $0 \leq \lambda \leq 1$. Από τα προηγούμενα Λήμματα, από το Πόρισμα 3.2.1 και απο την ανισότητα Hölder έπεται οτι

$$
\begin{aligned}
\int e^{f(A,\sigma,i)/16} dQ_i(\sigma) &\leq e^{(1-\lambda)^2/4} \int e^{(1-\lambda)g(A,\sigma,i,j)/16} e^{\lambda f(A,\sigma,j,i)/16} dQ_i(\sigma) \\
&\leq e^{\frac{(1-\lambda)^2}{4}} \left( \int e^{g(A,\sigma,i,j)/16} dQ_i(\sigma) \right)^{1-\lambda} \left( \int e^{f(A,\sigma,j,i)/16} dQ_i(\sigma) \right)^{\lambda} \\
&\leq e^{\frac{(1-\lambda)^2}{4}} \left( \frac{1}{Q_i(A)} \right)^{\lambda} \left( \frac{1}{Q_j(A)} \right)^{1-\lambda} \\
&= \frac{1}{Q_j(A)} \left( \frac{Q_i(A)}{Q_j(A)} \right)^{-\lambda} e^{\frac{(1-\lambda)^2}{4}}
\end{aligned}
$$

για κάθε $\lambda \in [0,1]$. Όμως, για κάθε $r \in [0,1]$

$$\inf_{0 \leq \lambda \leq 1} r^{-\lambda} e^{\frac{(1-\lambda)^2}{4}} \leq 2 - r.$$

Επομένως,

$$\int e^{f(A,\sigma,i)/16} \leq \frac{1}{Q_j(A)} \left( 2 - \frac{Q_i(A)}{Q_j(A)} \right)$$

για $i \neq j$. Η ίδια σχέση ισχύει και για $i = j$. Παρατηρούμε οτι

$$P_{N+1} = \frac{1}{N+1} \sum_{i \leq N+1} Q_i$$

και αφού $\sigma \in G_i \Rightarrow i = \sigma^{-1}(N+1)$, έχουμε

$$\int_{S_{N+1}} e^{f(A,\sigma,\sigma^{-1}(N+1))/16} dP_{N+1}(\sigma) = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{G_i} e^{f(A,\sigma,i)} dP_{N+1}(\sigma)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{N+1} \int_{G_i} e^{f(A,\sigma,\sigma^{-1}(N+1))/16} dQ_i(\sigma) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{N+1} \frac{1}{Q_j(A)} \left(2 - \frac{Q_i(A)}{Q_j(A)}\right) \\
&= \frac{1}{Q_j(A)} \left(2 - \frac{\frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1} Q_i(A)}{Q_j(A)}\right) \\
&= \frac{1}{Q_j(A)} \left(2 - \frac{P_{N+1}(A)}{Q_j(A)}\right) \\
&\leq \frac{1}{P_{N+1}(A)}.
\end{aligned}
$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (2). Το επαγωγικό βήμα για την (1) είναι ανάλογο με αυτό της (1), αλλά όχι εντελώς όμοιο.

**Λήμμα 3.2.4** *Για* $\sigma \in S_{N+1}, j \leq N+1$ $j \neq \sigma(N+1)$ $, 0 \leq \lambda \leq 1$ *έχουμε*

$$f(A,\sigma,N+1) \leq 4(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)g(A,\sigma,N+1,\sigma^{-1}(j)) + \lambda f(A,\sigma,\sigma^{-1}(j),N+1).$$

**Απόδειξη:** Το ζητούμενο προκύπτει από την ανισότητα του Λήμματος 3.2.1 αν αντικαταστήσουμε το $i$ με $N+1$ και το $j$ με $\sigma^{-1}(j)$. □

Θέτουμε

$$G'_i = \{\sigma \in S_{N+1} : \sigma(N+1) = i\}.$$

Σταθεροποιούμε $i$ και θεωρούμε την απεικόνιση $R' : \rho \mapsto t_i \circ \rho$. Αν $\rho \in G'_i$, τότε

$$R'(\rho)(N+1) = t_i(i) = N+1,$$

άρα μπορούμε να βλέπουμε την $R'$ σαν απεικόνιση από το $G'_i$ στην $S_N$. Θέτουμε $A'_i = A \cap G'_i$.

**Λήμμα 3.2.5** *Αν* $\sigma \in G'_i$, $i \neq j$, *έχουμε*

$$f(A,\sigma,\sigma^{-1}(j),N+1) \leq f(R'(A'_i), R'(\sigma), R'(\sigma)^{-1}(t_i(j))).$$

**Απόδειξη:** Για κάθε ακολουθία $s \in \{0,1\}^N$ θεωρούμε την ακολουθία $\bar{s} = (\bar{s}_l) \in \{0,1\}^{N+1}$ που ορίζεται από τις $\bar{s}_l = s_l$ αν $l \neq N+1$ και $\bar{s}_{N+1} = 0$. Αφού

$$\sigma^{-1}(j) = R'(\sigma)^{-1}(t_i(j)) \neq N+1,$$

αρκεί να δείξουμε οτι

$$s \in U_{R'(A'_i)}(R'(\sigma)) \Longrightarrow \bar{s} \in U_A(\sigma).$$

Έστω ένα τέτοιο $s$. Από τον ορισμό, υπάρχει $\tau \in R'(A'_i)$ τέτοια ώστε

$$l \leq N \ , \ s_l = 0 \Longrightarrow \tau(l) = R'(\sigma)(l).$$

Αφού $\tau \in R'(A_i')$, έχουμε $\tau = R'(\rho)$ για κάποια $\rho \in A_i'$. Άρα,

$$l \leq N \ , \ s_l = 0 \Longrightarrow (t_i \circ \rho)(l) = (t_i \circ \sigma)(l) \Longrightarrow \rho(l) = \sigma(l).$$

Αφού $\rho(N+1) = \sigma(N+1) = i$, έπεται οτι

$$l \leq N \ , \ \bar{s}_l = 0 \Longrightarrow \rho(l) = \sigma(l).$$

Δηλαδή, $\bar{s} \in U_A(\sigma)$. $\square$

Συμβολίζουμε με $Q_i'$ το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο $G_i'$.

**Πόρισμα 3.2.2** *Αν $j \neq i$,*

$$\int e^{f(A,\sigma,\sigma^{-1}(j),N+1)/16} dQ_i'(\sigma) \leq \frac{1}{Q_i'(A)}.$$

**Απόδειξη:** Από το Λήμμα 3.2.5 και το γεγονός οτι η $R'$ μεταφέρει το $Q_i'$ στο $P_N$, το αριστερό μέλος φράσσεται από

$$\int e^{f(R'(A_i),\rho,\rho^{-1}(t_i(j)))dP_N(\rho) \leq \frac{1}{P_N(R'(A_i))} = \frac{1}{Q_i'(A)}}$$

λόγω της (2), η οποία έχει ήδη αποδειχθεί. $\square$

**Λήμμα 3.2.6** *Αν $i \neq j$, έχουμε*

$$\int e^{g(A,\sigma,N+1,\sigma^{-1}(j))/16} dQ_i'(\sigma) \leq \frac{1}{Q_j'(A)}.$$

**Απόδειξη:** Η απεικόνιση $S' : \rho \mapsto t_{ij} \circ \rho$ είναι ένα προς ένα από το $G_j'$ στο $G_i'$. Θέτουμε $B = R' \circ S'(A_j)$. Θα δείξουμε οτι αν $\sigma \in G_i'$ τότε

$$(*) \qquad g(A, \sigma, N+1, \sigma^{-1}(j)) \leq f(B, R'(\sigma))$$

(βλέποντας την $R'$ σαν απεικόνιση από το $G_i'$ στο $S_N$). Αφού $P_N(B) = Q_j'(A)$, το Λήμμα έπεται από την επαγωγική υπόθεση για την (1) ή την (2).

Για κάθε $s \in \{0,1\}^N$ ορίζουμε μια ακολουθία $\bar{s} \in \{0,1\}^{N+1}$ ως εξής. Αν $l \notin \{N+1, \sigma^{-1}(j)\}$ θέτουμε $\bar{s}_l = s_l$. Επίσης, $\bar{s}_{N+1} = \bar{s}_{\sigma^{-1}(j)} = 1$. Για να δείξουμε την $(*)$ αρκεί να δείξουμε οτι

$$s \in U_B(R'(\sigma)) \Longrightarrow \bar{s} \in U_A(\sigma).$$

Έστω $s \in U_B(R'(\sigma))$. Υπάρχει $\tau \in B$ τέτοια ώστε

$$s_l = 0 \Longrightarrow \tau(l) = R'(\sigma)(l) = (t_i \circ \sigma)(l).$$

Αφού $\tau \in B$, μπορούμε να γράψουμε $\tau = t_i \circ t_{ij} \circ \rho$ για κάποια $\rho \in A_j'$. Επομένως,

$$s_l = 0 \Longrightarrow t_{ij} \circ \rho(l) = \sigma(l) \Longrightarrow \rho(l) = (t_{ij} \circ \sigma)(l).$$

Όμως, αν $l \neq N+1, \sigma^{-1}(j)$, έχουμε $\sigma(l) \neq i, j$. Αρα, $(t_{ij} \circ \sigma)(l) = \sigma(l)$. Δηλαδή, γι' αυτές τις τιμές του $l$ έχουμε

$$\bar{s}_l = 0 \Longrightarrow s_l = 0 \Longrightarrow \rho(l) = \sigma(l). \qquad \square$$

Η απόδειξη του επαγωγικού βήματος για την (1) χρησιμοποιεί αυτά τα Λήμματα και είναι όμοια με αυτήν του επαγωγικού βήματος για την (2). $\square$

**Αναφορές.** Το Θεώρημα 3.1.1 αποδείχθηκε από τον Maurey [Ma1]. Για ανισότητες «τύπου Azuma» βλέπε το βιβλίο του Stout [St]. Η εφαρμογή των martingales στην απόδειξη της ανισότητας Khintchine-Kahane (Θεωρημα 3.1.2) είναι από το βιβλίο [MS]. Το Θεώρημα 3.2.1 είναι του Talagrand [T1].

# Κεφάλαιο 4

# Η ιδιότητα $(\tau)$

## 4.1 Η ιδιότητα $(\tau)$

**Ορισμοί.** Έστω $f$ και $g$ μετρήσιμες συναρτήσεις ορισμένες στον $\mathbb{R}^n$. Με $f\Box g$ συμβολίζουμε την *ελαχιστική συνέλιξη* των $f$ και $g$,

$$(f\Box g)(x) = \inf\{f(x-y)+g(y) :\ y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Αν $\mu$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $w$ μία θετική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι το ζευγάρι $(\mu, w)$ ικανοποιεί την ιδιότητα $(\tau)$ αν για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $\phi$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\left(\int e^{\phi\Box w} d\mu\right)\left(\int e^{-\phi} d\mu\right) \leq 1.$$

**Λήμμα 4.1.1** *Αν το $(\mu_i, w_i)$ ικανοποιεί την $(\tau)$ στον $\mathbb{R}^{n_i}$ για $i = 1, 2$, τότε το $(\mu_1 \otimes \mu_2, w)$ ικανοποιεί την $(\tau)$ στον $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, όπου $w(x_1, x_2) = w_1(x_1) + w_2(x_2)$.*

**Απόδειξη:** Έστω $\phi : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
(\phi\Box w)(x,y) &= \inf_{(u,v)}\{\phi(x-u, y-v) + w(u,v)\} \\
&= \inf_{(u,v)}\{\phi(x-u, y-v) + w_1(u) + w_2(v)\} \\
&= \inf_{u}\left\{\inf_{v}\{\phi(x-u,y-v) + w_2(v)\} + w_1(u)\right\}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int e^{\phi\Box w} d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \inf_u \left\{ e^{w_1(u)} e^{\inf_v\{\phi(x-u,y-v)+w_2(v)\}}\right\} d\mu_2(y) d\mu_1(x)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \inf_u \left\{ e^{w_1(u)} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{\inf_v\{\phi(x-u,y-v)+w_2(v)\}} d\mu_2(y) \right\} d\mu_1(x)$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \inf_u \left\{ e^{w_1(u)} \left( \int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-\phi(x-u,y)} d\mu_2(y) \right)^{-1} \right\} d\mu_1(x),$$

όπου εφαρμόσαμε την ιδιότητα $(\tau)$ για το ζευγάρι $(\mu_2, w_2)$ και την συνάρτηση $f_{x,u}(y) = \phi(x-u,y)$.

Θέτουμε
$$\psi(x) = \log \left( \int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-\phi(x,y)} d\mu_2(y) \right)^{-1}.$$

Τότε, η $\psi$ είναι φραγμένη και εφαρμόζοντας την ιδιότητα $(\tau)$ για το ζευγάρι $(\mu_1, w_1)$ στον $\mathbb{R}^{n_1}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int e^{\phi \Box w} d(\mu_1 \otimes \mu_2) &\leq \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{\inf_u\{\psi(x-u)+w_1(u)\}} d\mu_1(x) \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-\psi(x)} d\mu_1(x) \right)^{-1} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-\phi(x,y)} d\mu_2(y) d\mu_1(x) \right)^{-1} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} e^{-\phi(x,y)} d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Άρα, το ζευγάρι $(\mu_1 \otimes \mu_2, w)$ ικανοποιεί την $(\tau)$. $\Box$

Έστω $\mu_1$ και $\mu_2$ μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Η συνέλιξη $\mu_1 * \mu_2$ των δύο μέτρων ορίζεται μέσω της

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \, d(\mu_1 * \mu_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(x+y) d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

Στην περίπτωση που τα δύο μέτρα είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue με πυκνότητες $f_1$ και $f_2$, το $\mu_1 * \mu_2$ είναι το μέτρο που έχει πυκνότητα την $f_1 * f_2$.

**Λήμμα 4.1.2** *Αν το $(\mu_i, w_i)$ ικανοποιεί την $(\tau)$ στον $\mathbb{R}^n$ για $i = 1, 2$, τότε το ζευγάρι $(\mu_1 * \mu_2, w_1 \Box w_2)$ ικανοποιεί την $(\tau)$ στον $\mathbb{R}^n$.*

**Απόδειξη:** Έστω $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
[\phi \Box (w_1 \Box w_2)](x+y) &= \inf_z \{\phi(x+y-z) + (w_1 \Box w_2)(z)\} \\
&= \inf_z \left\{ \phi(x+y-z) + \inf_u \{w_1(z-u) + w_2(u)\} \right\} \\
&= \inf_z \inf_u \{\phi(x+y-z) + w_1(z-u) + w_2(u)\} \\
&= \inf_u \inf_z \{\phi(x+y-z) + w_1(z-u) + w_2(u)\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf_u \left\{ \inf_z \{\phi(x+y-z) + w_1(z-u)\} + w_2(u) \right\} \\
&= \inf_u \left\{ w_2(u) + \inf_z \{\phi(x+y-u-z) + w_1(z)\} \right\}.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\int e^{\phi \Box (w_1 \Box w_2)} d(\mu_1 * \mu_2) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{[\phi \Box (w_1 \Box w_2)](x+y)} d\mu_1(x) d\mu_2(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \inf_u \left\{ e^{w_2(u)} e^{\inf_z \{\phi(x+y-u-z)+w_1(z)\}} \right\} d\mu_1(x) d\mu_2(y) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \inf_u \left\{ e^{w_2(u)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\inf_z \{\phi(x+y-u-z)+w_1(z)\}} d\mu_1(x) \right\} d\mu_2(y) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \inf_u \left\{ e^{w_2(u)} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi(x+y-u)} d\mu_1(x) \right)^{-1} \right\} d\mu_2(y),
\end{aligned}
$$

όπου εφαρμόσαμε την ιδιότητα $(\tau)$ για το ζευγάρι $(\mu_1, w_1)$ και την συνάρτηση $f_{y,u}(x) = \phi(x+y-u)$.

Θέτουμε

$$
\psi(s) = \log \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi(x+s)} d\mu_1(x) \right)^{-1}.
$$

Τότε, η $\psi$ είναι φραγμένη και εφαρμόζοντας την ιδιότητα $(\tau)$ για το ζευγάρι $(\mu_2, w_2)$ στον $\mathbb{R}^{n_2}$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\int e^{\phi \Box (w_1 \Box w_2)} d(\mu_1 * \mu_2) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \inf_u \left\{ e^{w_2(u)} e^{\psi(y-u)} \right\} d\mu_2(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\psi \Box w_2)(y)} d\mu_2(y) \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\psi(y)} d\mu_2(y) \right)^{-1} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi(x+y)} d\mu_1(x) d\mu_2(y) \right)^{-1} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi} d(\mu_1 * \mu_2) \right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Άρα, το ζευγάρι $(\mu_1 * \mu_2, w_1 \Box w_2)$ ικανοποιεί την $(\tau)$. □

**Λήμμα 4.1.3** *Έστω ότι το $(\mu_1, w_1)$ ικανοποιεί την $(\tau)$ στον $\mathbb{R}^{n_1}$. Έστω $w : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ θετική μετρήσιμη συνάρτηση και $f : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ συνάρτηση που ικανοποιεί την $w_2(f(x) - f(y)) \leq w_1(x-y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^{n_1}$. Έστω $\mu_2$ το μέτρο πιθανότητας $f(\mu_1)$ στον $\mathbb{R}^{n_2}$, δηλαδή $\mu_2(A) = \mu_1(f^{-1}(A))$. Τότε, το $(\mu_2, w_2)$ ικανοποιεί την $(\tau)$ στον $\mathbb{R}^{n_2}$.*

**Απόδειξη:** Θα δείξουμε πρώτα ότι

$$[(\phi \circ f)\Box w_1] \geq [(\phi \Box w_2) \circ f]$$

για κάθε φραγμένη μετρήσιμη $\phi : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
[(\phi \circ f)\Box w_1](x) &= \inf_{y \in \mathbb{R}^{n_1}} \{(\phi \circ f)(x-y) + w_1(y)\} \\
&= \inf_{y \in \mathbb{R}^{n_1}} \{(\phi \circ f)(y) + w_1(x-y)\} \\
&\geq \inf_{y \in \mathbb{R}^{n_1}} \{(\phi \circ f)(y) + w_2(f(x) - f(y))\} \\
&\geq \inf_{w \in \mathbb{R}^{n_2}} \{(\phi \circ f)(y) + w_2(f(x) - w)\} \\
&= (\phi \Box w_2)(f(x)) \\
&= [(\phi \Box w_2) \circ f](x)
\end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n_1}$. Από την $\mu_2 = f(\mu_1)$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{(\phi \Box w_2)(y)} d\mu_2(y) &= \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{((\phi \Box w_2) \circ f)(x)} d\mu_1(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{((\phi \circ f)\Box w_1)(x)} d\mu_1(x) \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-(\phi \circ f)(x)} d\mu_1(x) \right)^{-1} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-\phi(y)} d\mu_2(y) \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Άρα, το $(\mu_2, w_2)$ ικανοποιεί την $(\tau)$. $\Box$

Η ιδιότητα $(\tau)$ ενός ζευγαριού $(\mu, w)$ συνδέεται με την συγκέντρωση του μέτρου $\mu$. Η σχέση δίνεται από την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 4.1.1** *Έστω ότι το $(\mu, w)$ ικανοποιεί την ιδιότητα $(\tau)$ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και κάθε θετικό αριθμό $t$ έχουμε*

$$\mu\left(x \notin A + \{w < t\}\right) \leq (\mu(A))^{-1} e^{-t}.$$

**Απόδειξη:** Για κάθε $n \geq t$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$\phi_{A,n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ n, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αν $x \notin A + \{w < t\}$, τότε $(\phi_{A,n}\Box w)(x) \geq t$. Πράγματι,

$$(*) \qquad (\phi_{A,n}\Box w)(x) = \inf_z \{\phi_{A,n}(z) + w(x-z)\}.$$

Αν $z \in A$, τότε $\phi_{A,n}(z) = 0$ και αφού $x \notin A + \{w < t\}$ έχουμε $w(x-z) \geq t$. Άρα,

$$\phi_{A,n}(z) + w(x-z) \geq 0 + t = t.$$

Αν πάλι $z \notin A$, τότε $\phi_{A,n}(z) = n$ και $w(x-z) \geq 0$, άρα

$$\phi_{A,n}(z) + w(x-z) \geq n + 0 \geq t.$$

Επομένως, ισχύει η $(*)$. Από την ιδιότητα $(\tau)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{\phi_{A,n}\Box w} d\mu &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi_{A,n}} d\mu\right)^{-1} \\
&= \left(\int_A e^{-\phi_{A,n}} d\mu + \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} e^{-\phi_{A,n}} d\mu\right)^{-1} \\
&= \big(\mu(A) + e^{-n}(1-\mu(A))\big)^{-1} \\
&\leq 1/\mu(A).
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$e^t \mu(x \notin A + \{w < t\}) \leq e^t \mu(x : (\phi_A \Box w)(x) \geq t) \leq \int e^{\phi_{A,n}\Box w} d\mu \leq (\mu(A))^{-1}.$$

Άρα,

$$\mu\left(x \notin A + \{w < t\}\right) \leq (\mu(A))^{-1} e^{-t}. \qquad \Box$$

## 4.2 Μία ανισότητα του Talagrand: απόδειξη μέσω της ιδιότητας $(\tau)$

Ορίζουμε μία συνάρτηση $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$W(t) = \begin{cases} t^2/18, & |t| \leq 2 \\ 2(|t|-1)/9, & |t| > 2. \end{cases}$$

Η $W$ είναι άρτια, κυρτή, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε επίσης το μέτρο πιθανότητας $\mu_e$ στο $\mathbb{R}$, με πυκνότητα την $\chi_{(0,+\infty)}(x)e^{-x}$.

**Πρόταση 4.2.1** *Το ζεύγος $(\mu_e, w)$ ικανοποιεί την ιδιότητα $(\tau)$.*

**Απόδειξη:** Έστω $\phi$ φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο $(0,+\infty)$. Γράφουμε $\psi$ για την $\phi\Box w$ και θέτουμε

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\phi(x)-x} dx \text{ και } I_1 = \int_0^{+\infty} e^{\psi(y)-y} dy.$$

Για κάθε $t \in (0,1)$ ορίζουμε $x(t)$ και $y(t)$ από τις σχέσεις

$$\int_0^{x(t)} e^{-\phi(x)-x}dx = tI_0 \text{ και } \int_0^{y(t)} e^{\psi(y)-y}dy = tI_1.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι οι $x(t)$, $y(t)$ είναι παραγωγίσιμες, με

$$x'(t) = I_0 e^{\phi(x(t))+x(t)} \text{ και } y'(t) = I_1 e^{-\psi(y(t))+y(t)}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\psi(y(t)) &= \inf_{y\in\mathbb{R}}\{\phi(y) + w(y(t)-y)\}\\ &\leq \phi(x(t)) + w(y(t)-x(t)).\end{aligned}$$

Άρα,

$$y'(t) \geq I_1 e^{-\phi(x(t))-w(y(t)-x(t))+y(t)}.$$

Θέτουμε

$$z(t) = \frac{x(t)+y(t)}{2} - W(y(t)-x(t)),$$

οπότε

$$\begin{aligned}z'(t) &= \frac{x'(t)+y'(t)}{2} - W'(y(t)-x(t))(y'(t)-x'(t))\\ &= \left(\frac{1}{2} + W'(y(t)-x(t))\right)x'(t) + \left(\frac{1}{2} - W'(y(t)-x(t))\right)y'(t).\end{aligned}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $|W'| \leq 1/2$ στο $\mathbb{R}$, άρα η $z(t)$ είναι αύξουσα.

Γράφουμε $x, y$ αντί των $x(t), y(t)$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{2}\left(ua + \frac{v}{a}\right) \geq \sqrt{uv}, \quad u, v, a > 0$$

με $a = \exp(\phi(x))$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}z'(t) &\geq (1-2W'(y-x))I_0 e^x \frac{e^{\phi(x)}}{2} + (1+2W'(y-x))I_1 e^{-W(y-x)+y}\frac{e^{-\phi(x)}}{2}\\ &\geq \sqrt{1-4(W'(y-x))^2}\sqrt{I_0I_1}e^{(x+y)/2-W(y-x)/2}\\ &= \sqrt{1-4(W'(y-x))^2}\sqrt{I_0I_1}e^{(x+y)/2-W(y-x)}e^{W(y-x)/2}\\ &= \sqrt{1-4(W'(y-x))^2}\sqrt{I_0I_1}e^{z(t)}e^{W(y-x)/2}.\end{aligned}$$

**Ισχυρισμός:** Για κάθε $s$,

$$\left(1-4(W'(s))^2\right)e^{W(s)} \geq 1.$$

*Απόδειξη του ισχυρισμού:* Αφού η $W$ είναι άρτια, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα για $s \geq 0$. Στο $[2,+\infty)$ έχουμε $W'(s) = 2/9$ και η $W$ είναι αύξουσα. Αν λοιπόν η ανισότητα ισχύει για $s = 2$, τότε θα ισχύει για κάθε $s \geq 2$. Ζητάμε

$$\left(1 - 4(2/9)^2\right) e^{2/9} \geq 1$$

ή, ισοδύναμα, $e^{2/9} \geq 81/65$. Η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί

$$e^{2/9} \geq 1 + \frac{2}{9} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{101}{81} > \frac{81}{65}.$$

Για $s \in [0,2]$ έχουμε $W'(s) = s/9$, οπότε ζητάμε την $e^{-s^2/18} \leq 1 - 4s^2/81$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(u) = 1 - \frac{4u}{81} - e^{-u/18}$$

παίρνει μη αρνητικές τιμές στο $[0,4]$. Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι η $f$ είναι κοίλη, άρα αρκεί να εξετάσουμε τις τιμές $f(0)$ και $f(4)$. Όμως, $f(0) = 0$ και η $f(4) \geq 0$ είναι ισοδύναμη με την $e^{2/9} \geq 81/65$ η οποία, όπως είδαμε, ισχύει. □

Από τον ισχυρισμό και την προηγούμενη ανισότητα συμπεραίνουμε ότι

$$z'(t) \geq \sqrt{I_0 I_1} e^{z(t)},$$

άρα

$$\left(-e^{-z(t)}\right)' \geq \sqrt{I_0 I_1}.$$

Ολοκληρώνοντας στο $[0,1]$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $z(0) = 0$, παίρνουμε

$$1 \geq e^{-z(0)} - e^{-z(1)} = \int_0^1 \left(-e^{-z(t)}\right)' dt \geq \sqrt{I_0 I_1}.$$

Δηλαδή,

$$\left(\int_0^\infty e^{\phi \square W} d\mu_e\right)\left(\int_0^\infty e^{-\phi} d\mu_e\right) = I_0 I_1 \leq 1.$$

Αφού η $\phi$ ήταν τυχούσα, το $(\mu_e, W)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$. □

Θεωρούμε τώρα την συμμετρική εικόνα $\mu_e'$ του $\mu_e$ στο $(-\infty, 0)$, με πυκνότητα την $\chi_{(-\infty,0)}(x)e^x$. Λόγω συμμετρίας, το $(\mu_e', W)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$. Αν $\xi$ είναι το εκθετικό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα την $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, εύκολα ελέγχουμε οτι

$$\xi = \mu_e * \mu_e'.$$

Από το Λήμμα 4.1.2, το ζευγάρι $(\xi, W \square W)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$. Παίρνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της $W$, βλέπουμε οτι η $U := W \square W$ δίνεται από την

$$U(t) = \begin{cases} t^2/36, & |t| \leq 4 \\ 2(|t| - 2)/9, & |t| > 4. \end{cases}$$

Θεωρούμε τώρα το μέτρο γινόμενο $\xi_n = \xi \otimes \cdots \otimes \xi$ ($n$ φορές) στον $\mathbb{R}^n$. Αν ορίσουμε την συνάρτηση $U_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$U_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i),$$

το Λήμμα 4.1.1 μας δίνει το εξής αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 4.2.1** *Το ζευγάρι $(\xi_n, U_n)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$ στον $\mathbb{R}^n$.* □

Από το Θεώρημα 4.2.1 και από την Πρόταση 4.1.1 έπεται οτι για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και κάθε $t > 0$,

$$(*) \qquad \xi_n(x \notin A + \{U_n < t\}) \leq \frac{1}{\xi_n(A)} e^{-t}.$$

Από τον ορισμό της $U_n$ και την $(*)$ προκύπτει η ακόλουθη προσεγγιστική ανισότητα του Talagrand για το $\xi_n$:

**Θεώρημα 4.2.2** *Για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και κάθε $t > 0$,*

$$\xi_n(x \notin A + 6\sqrt{t} B_2^n + 9t B_1^n) \leq \frac{1}{\xi_n(A)} e^{-t}.$$

**Απόδειξη:** Αρκεί να δείξουμε οτι

$$\{U_n < t\} \subseteq 6\sqrt{t} B_2^n + 9t B_1^n.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ με $U_n(x) < t$. Ορίζουμε $y$ και $z$ στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής: $y_i = x_i$ αν $|x_i| \leq 4$ και $y_i = 0$ αλλιώς, $z_i = x_i$ αν $|x_i| > 4$ και $z_i = 0$ αλλιώς. Προφανώς,

$$x = y + z.$$

Παρατηρούμε οτι

$$|y|^2 = \sum_{\{i : |x_i| \leq 4\}} x_i^2 = 36 \sum_{\{i : |x_i| \leq 4\}} U(x_i) \leq U_n(x) < 36t,$$

άρα $y \in 6\sqrt{t} B_2^n$. Επίσης, αν $|x_i| > 4$, τότε

$$U(x_i) = \frac{2}{9}(|x_i| - 2) \geq \frac{2}{9}\left(|x_i| - \frac{|x_i|}{2}\right) = \frac{|x_i|}{9},$$

άρα

$$\|z\|_1 = \sum_{\{i : |x_i| > 4\}} |x_i| \leq 9 \sum_{\{i : |x_i| > 4\}} U(x_i) \leq 9 U_n(x) < 9t,$$

δηλαδή $z \in 9t B_1^n$. □

## 4.3 Η ιδιότητα $(\tau)$ στο χώρο του Gauss

Έστω $\gamma$ το τυπικό μέτρο πιθανότητας του Gauss στο $\mathbb{R}$, με πυκνότητα την $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ και $\gamma_n = \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma$ το μέτρο γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.

**Θεώρημα 4.3.1** *Το ζευγάρι $(\gamma_n, |x|^2/4)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$.*

**Απόδειξη:** Από το Λήμμα 4.1.1, αρκεί να δείξουμε οτι το $(\gamma, x^2/4)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$ στο $\mathbb{R}$. Μπορεί κανείς να δώσει απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παρόμοια με αυτήν της Πρότασης 4.2.1. Θα δώσουμε όμως απευθείας απόδειξη χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa-Leindler.

Έστω $\phi$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $w(y) = |y|^2/4$ και $\psi = \phi \Box w$. Αν

$$f(x) = \phi(x) + \frac{|x|^2}{2} \quad , \quad g(y) = -\psi(y) + \frac{|y|^2}{2} \quad \text{και} \quad h(z) = \frac{|z|^2}{2},$$

τότε εύκολα ελέγχουμε οτι

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+g(y)}{2}.$$

Άρα,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-g(x)}dx\right) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-h(x)}dx\right)^2.$$

Δηλαδή,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\phi}d\gamma_n\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\phi\Box w}d\gamma_n\right) \leq 1$$

που είναι το ζητούμενο. $\square$

Σαν εφαρμογή του Θεωρήματος 4.3.1 παίρνουμε μια ανισότητα του Pisier για την συγκέντρωση των Lipschitz συναρτήσεων ως προς το μέτρο $\gamma_n$.

**Θεώρημα 4.3.2** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνάρτηση με σταθερά 1, και έστω $X, Y$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με κατανομή το $\gamma_n$. Για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t(f(X)-f(Y))}{\sqrt{2}}\right)\right) \leq e^{t^2/2}.$$

**Απόδειξη:** Θεωρούμε την $w(y) = |y|^2/4$ και ορίζουμε

$$\psi = \frac{tf}{\sqrt{2}}\Box w.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\psi(x) = \frac{tf(y)}{\sqrt{2}} + \frac{|x-y|^2}{4}.$$

Τότε, αφού $\|f\|_{Lip} \leq 1$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\geq \frac{tf(x)}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sqrt{2}}|x-y| + \frac{|x-y|^2}{4} \\ &\geq \frac{tf(x)}{\sqrt{2}} + \min_{s\in\mathbb{R}}\{\frac{s^2}{4} - \frac{ts}{\sqrt{2}}\} \\ &= \frac{tf(x)}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.3.1,

$$\left(\int e^{\psi} d\gamma_n\right)\left(\int e^{-tf/\sqrt{2}} d\gamma_n\right) \leq 1.$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\int e^{tf/\sqrt{2}} d\gamma_n \cdot \int e^{-tf/\sqrt{2}} d\gamma_n \leq e^{t^2/2},$$

δηλαδή

$$\mathbb{E}\left(\exp(\frac{t(f(X)-f(Y))}{\sqrt{2}})\right) \leq e^{t^2/2}. \qquad \square$$

**Πόρισμα 4.3.1** *Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Lipschitz με $\|f\|_{Lip} \leq 1$, τότε*

$$\gamma\left(x : \left|f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma\right| > s\right) \leq 2e^{-s^2/4}$$

*για κάθε $s > 0$.*

**Απόδειξη:** Έστω $t > 0$. Από το Θεώρημα 4.3.2 και την ανισότητα του Jensen,

$$\mathbb{E}\left(\exp(\frac{t}{\sqrt{2}}(f - \mathbb{E}(f)))\right) \leq e^{t^2/2}.$$

Άρα, για κάθε $s > 0$

$$\gamma\left(x : f(x) - \mathbb{E}f > s\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} - \frac{ts}{\sqrt{2}}\right).$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς $t$ και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την $-f$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 1, η ανισότητα του Πορίσματος 4.3.1 εκφράζει, ισοδύναμα, την συγκέντρωση του μέτρου στον $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, \gamma_n)$.

**Αναφορές**. Το υλικό αυτού του Κεφαλαίου βασίζεται στην εργασία του Maurey [Ma2]. Το Θεώρημα 4.2.2 αποδείχθηκε αρχικά από τον Talagrand [T3] με πολύπλοκο τρόπο. Το Θεώρημα 4.3.2 αποδείχθηκε αρχικά από τον Pisier [Pi1].

# Κεφάλαιο 5

# Λογαριθμική ανισότητα Sobolev

## 5.1 Η λογαριθμική ανισότητα Sobolev

Έστω $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα και έστω $E^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$ ο δυϊκός του χώρος. Θεωρούμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mu$ στον $E$ με συνάρτηση πυκνότητας την $e^{-V(x)}$, όπου $V(x)$ κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό κυρτό υποσύνολο $\Omega$ του $E$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $s, t > 0$ με $s + t = 1$ και κάθε $x, y \in \Omega$ ισχύει

$$tV(x) + sV(y) - V(tx + sy) \geq \frac{cts}{2}\|x - y\|^2.$$

Έστω $f \in C^\infty(\Omega)$. Η εντροπία της $f^2$ ως προς το $\mu$ ορίζεται ως εξής:

$$Ent_\mu(f^2) = \int f^2 \log f^2 d\mu - \int f^2 d\mu \cdot \log \int f^2 d\mu.$$

Θα αποδείξουμε την εξής ανισότητα.

**Θεώρημα 5.1.1** *Για κάθε $f \in C^\infty(\Omega)$,*

$$Ent_\mu(f^2) \leq \frac{2}{c} \int \|\nabla f\|_*^2 d\mu.$$

**Απόδειξη:** Μπορούμε να θέσουμε $f^2 = e^g$ όπου $g \in C_b^\infty(\Omega)$, δηλαδή η $g$ έχει συμπαγή φορέα στο $\Omega$ και φραγμένες μερικές παραγώγους. Έστω $t, s > 0$ με $t + s = 1$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $u(x) = e^{g(x)/t - V(x)}$, $v(y) = e^{-V(y)}$ και $w(z) = e^{g_t(z) - V(z)}$, όπου

$$g_t(z) = \sup\{g(x) - [tV(x) + sV(y) - V(tx + sy)] : z = tx + sy, x, y \in \Omega\}.$$

Οι συναρτησεις $u, v, w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες. Επίσης, αν $z = tx + sy$ ισχύει: $w(z) \geq u(t)^t u(y)^s$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} u^t(x)v^s(y) &= e^{g(x)-tV(x)}e^{-sV(y)} \\ &= e^{g(x)-tV(x)-sV(y)} \\ &= e^{g(x)-[tV(x)+sV(y)-V(tx+sy)]-V(tx+sy)} \\ &\leq e^{\sup_{z=tx+sy:x,y\in\Omega}\{g(x)-[tV(x)+sV(y)-V(tx+sy)]\}-V(tx+sy)} \\ &= w(z). \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa -Leindler έχουμε:

$$\begin{aligned} \int e^{g_t} d\mu &= \int e^{g_t(z)-V(z)} dx \\ &\geq \left( \int e^{g(x)/t-V(x)} dx \right)^t \left( \int e^{-V(x)} \right)^s \\ &= \left( \int e^{g/t} d\mu \right)^t. \end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος γύρω από το $t = 1$ παίρνουμε

$$\left( \int e^{g/t} d\mu \right)^t = \int e^g d\mu + sEnt_\mu(e^g) + O(s^2).$$

Πράγματι, έστω $h(t) = (\int e^{g/t} d\mu)^t = e^{t \log \int e^{g/t} d\mu}$. Τότε,

$$h(t) = h(1) + h'(1)(t-1) + O((t-1)^2) = h(1) - h'(1)s + O(s^2).$$

Όμως,

$$h'(t) = \left( \int e^{g/t} d\mu \right)^t \left( \log \int e^{g/t} d\mu - \frac{\int e^g g d\mu}{t \int e^g d\mu} \right),$$

άρα $h'(1) = -Ent_\mu(e^g)$ οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Περνάμε τώρα στο αριστερό μέλος. Από την υπόθεση,

$$g(x) - [tV(x) + sV(y) - V(tx+sy)] \leq g(x) - \frac{cts}{2}\|x-y\|^2$$

για κάθε $x, y \in \Omega$. Από τον ορισμό της $g_t$ έπεται ότι

$$g_t(z) \leq \sup\{g(x) - \frac{cts\|x-y\|^2}{2} : z = tx + sy,\, x, y \in \Omega\}.$$

Απο την $z = tx + sy$ έχουμε $z - y = tx + sy - y = tx - (1-s)y = tx - ty = t(x-y)$, άρα $x - y = \frac{1}{t}(z-y)$. Επίσης $tx = z - sy = tz + sz - sy = tz + s(z-y)$, άρα $x = z + \frac{s(z-y)}{t}$. Αν λοιπόν θέσουμε $h = z - y$ και $\eta = \frac{s}{t}$, τότε

$$g_t(z) \leq \sup_{h\in E}\{g(z+\eta h) - \frac{c\eta\|h\|^2}{2}\}.$$

**Ισχυρισμός.** Από το θεώρημα του Taylor,

$$g(z+\eta h) = g(z) + \eta\langle \nabla g(z), h\rangle + \eta^2 O(\|h\|^2),$$

όπου $O(\|h\|^2) \leq C\|h\|^2$ και η $C$ είναι ανεξάρτητη του $z$.

**Απόδειξη:** Θέτουμε $w = \eta h$ και θεωρούμε το υπόλοιπο

$$\begin{aligned} R_1(w,z_0) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(z_0+tw)w_i w_j dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} (1-t)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(z_0+tw)w_i w_j dt \\ &= \int_0^1 (1-t)\langle A_{z_0+tw} w, w\rangle dt. \end{aligned}$$

Ο $A_{z_0+tw} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι τελεστής με πίνακα την Εσσιανή της $g$. Από το γεγονός ότι η $g$ έχει φραγμένες μερικές παραγώγους, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\|A_{z_0+tw} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \leq \sqrt{n}\max_j \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(z_0+tw)| \leq M$$

όπου $M$ σταθερά ανεξάρτητη από το $z_0 + tw$. Άρα,

$$\begin{aligned} |R_1(w,z_0)| &= |\int_0^1 (1-t)\langle A_{z_0+tw} w, w\rangle dt| \\ &\leq \int_0^1 (1-t)|\langle A_{z_0+tw} w, w\rangle| dt \\ &\leq \int_0^1 \|A_{z_0+tw} w\|_2 \|w\|_2 dt \\ &\leq Mr^2\|w\|^2. \end{aligned}$$

όπου $r = \|I : E \to \ell_2^n\|$. Θέτοντας $C = Mr^2$ έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό. $\square$

Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό γράφουμε

$$\begin{aligned} g_t(z) &\leq \sup\{g(z) + \eta\langle \nabla g(z), h\rangle + \eta^2 O(\|h\|^2) - \frac{c\eta}{2}\|h\|^2\} \\ &= g(z) + \eta \sup\{\langle \nabla g(z), h > -(\frac{c}{2} - \eta C)\|h\|^2\}. \end{aligned}$$

Κάθε $h \in \mathbb{R}^n$ γράφεται στη μορφή $h = \lambda e$ όπου $\lambda \geq 0$ και $\|e\| = 1$. Άρα, αν θέσουμε $\theta = c - 2\eta C$,

$$\begin{aligned} g_t(z) &\leq g(z) + \eta \sup_{\lambda\geq 0}\sup_{\|e\|=1} \{\lambda\langle \nabla g(z), e\rangle - (\frac{c}{2} - \eta C)\lambda^2\} \\ &= g_t(z) \leq g(z) + \eta\sup\{\lambda\|\nabla g(z)\|_* - \theta\frac{\lambda^2}{2} : \lambda \geq 0\} \\ &= g(z) + \eta\frac{\|\nabla g(z)\|_*^2}{2\theta}. \end{aligned}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\frac{\eta}{2\theta} = \frac{\eta}{2c} + O(\eta^2), \qquad |\eta| < \frac{c}{2C}$$

και αφού η νόρμα $\|\nabla g(z)\|_*$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη παίρνουμε

$$\frac{\eta}{2\theta}\|\nabla g(z)\|_*^2 = \frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_*^2 + O(\eta^2).$$

Άρα,

$$g_t(z) \leq g(z) + \frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_*^2 + O(\eta^2).$$

Απο τύπο του Taylor για την $x \mapsto e^x$ στο $x$ έχουμε

$$e^y = e^x + e^x(y-x) + O((y-x)^2).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} e^{g_t(z)} &\leq e^{g(z)+\frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_*^2+O(\eta^2)} \\ &\leq e^{g(z)} + e^{g(z)}\frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_*^2 + O(\eta^2). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int e^{g_t(z)}d\mu &\leq \int e^{g(z)}d\mu + \frac{\eta}{2c}\int \|\nabla g(z)\|_*^2 e^{g(z)}d\mu + \int O(\eta^2)d\mu \\ &= \int e^{g(z)}d\mu + \frac{\eta}{2c}\int \|\nabla g(z)\|_*^2 e^{g(z)}d\mu + O(\eta^2). \end{aligned}$$

Από την ανισότητα $\left(\int e^{g/t}d\mu\right)^t \leq \int e^{g_t}d\mu$ και τα αναπτύγματα που περιγράψαμε, προκύπτει η

$$sEnt_\mu(e^g) \leq \frac{\eta}{2c}\int \|\nabla g\|_*^2 e^g d\mu + O(s^2),$$

άρα

$$Ent_\mu(e^g) \leq \frac{1}{2c(1-s)}\int \|\nabla g\|_*^2 e^g d\mu + O(s).$$

Παίρνοντας $s \to 0$ καταλήγουμε στην

$$(*) \qquad Ent_\mu(e^g) \leq \frac{1}{2c}\int \|\nabla g\|_*^2 e^g d\mu.$$

Από την $f = e^{g/2}$ βλέπουμε ότι $2\nabla f = e^{g/2}\nabla g$, άρα $4\|\nabla f\|^2 = e^g\|g\|^2$. Επιστρέφοντας στην $(*)$ παίρνουμε

$$Ent_\mu(f^2) = Ent_\mu(e^g) \leq \frac{1}{2c}\int 4\|f\|^2 d\mu = \frac{2}{c}\int \|\nabla f\|^2 d\mu. \qquad \square$$

## 5.2 Εφαρμογές στον χώρο του Gauss

Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε δύο εφαρμογές της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev. Η πρώτη είναι η ανισότητα του Poincaré:

**Θεώρημα 5.2.1** *Έστω $\gamma_n$ το τυπικό μέτρο Gauss στον $\mathbb{R}^n$. Αν οι $f$ και $|\nabla f|$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma_n - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n.$$

**Απόδειξη:** Έστω οτι έχουμε δείξει την ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$$

για συναρτήσεις $f$ με την επιπλέον ιδιότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n = 0.$$

(δηλαδή ότι έχουμε το Θεώρημα γι' αυτήν την υποκλάση). Τότε, για τυχούσα $f$ θέτοντας $h = f - \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n$ έχουμε $\int_{\mathbb{R}^n} h d\gamma_n = 0$. Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(f - \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n\right)^2 d\gamma_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla \left(f - \int f d\gamma_n\right)\right|^2 d\gamma_n$$

δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma_n - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n.$$

Επειδή η ανισότητα είναι ομογενής, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε οτι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma_n = 1.$$

Εφαρμόζουμε την λογαριθμική ανισότητα Sobolev για την $1 + \varepsilon f$ με $\varepsilon > 0$ μικρό: Έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+\varepsilon f)^2 \log(1+\varepsilon f) d\gamma_n - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (1+\varepsilon f)^2 \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+\varepsilon f)^2\right) d\gamma_n$$

$$\leq \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$$

δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2\varepsilon f + \varepsilon^2 f^2)\left(\varepsilon f - \frac{\varepsilon^2 f^2}{2} + O(\varepsilon^3)\right) d\gamma_n$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+2\varepsilon f+\varepsilon^2 f^2)\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+2\varepsilon f+\varepsilon^2 f^2)\right)d\gamma_n \leq \varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2 d\gamma_n.$$

Ισοδύναμα,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\{\varepsilon f-\frac{\varepsilon^2 f^2}{2}+2\varepsilon^2 f^2+O(\varepsilon^3)\}d\gamma_n-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+2\varepsilon f+\varepsilon^2 f^2)$$
$$\times\log\left(1+2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}f+\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^n}f^2\right)d\gamma_n\leq\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2 d\gamma_n,$$

δηλαδή

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}+2\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+2\varepsilon f+\varepsilon^2 f^2)d\gamma_n\log(1+\varepsilon^2)\leq\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_2^2 d\gamma_n$$

δηλαδή

$$-\frac{3\varepsilon^2}{2}+O(\varepsilon^3)-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+2\varepsilon f+\varepsilon^2 f^2)(\varepsilon^2+O(\varepsilon^3))d\gamma_n\leq\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2 d\gamma_n.$$

Ισοδύναμα,

$$-\frac{3\varepsilon^2}{2}+O(\varepsilon^3)-\frac{1}{2}(\int_{\mathbb{R}^n}\varepsilon^2+2\varepsilon^3 f+\varepsilon^4 f^2+O(\varepsilon^3))d\gamma\leq\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2 d\gamma_n,$$

δηλαδή

$$\frac{3\varepsilon^2}{2}+O(\varepsilon^3)-\frac{(1+\varepsilon^2)}{2}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)\leq\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2 d\gamma_n,$$

δηλαδή

$$\frac{3\varepsilon^2}{2}-\frac{(1+\varepsilon^2)}{2}\varepsilon^2\leq\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2 d\gamma_n+O(\varepsilon^3)$$

δηλαδή

$$1-\frac{\varepsilon^2}{2}\leq\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2 d\gamma_n+O(\varepsilon).$$

Παίρνοντας $\varepsilon\to 0$ βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}f^2 d\gamma_n=1\leq\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2 d\gamma_n.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η δεύτερη εφαρμογή είναι η ανισότητα συγκέντρωσης για το μέτρο του Gauss.

**Θεώρημα 5.2.2** *Αν η $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Lipschitz με $\|f\|_{Lip}\leq 1$, τότε*

$$\gamma\left(x:\left|f(x)-\int_{\mathbb{R}^n}fd\gamma\right|>r\right)\leq 2e^{-r^2/2}.$$

Το Θεώρημα 5.2.2 προκύπτει από την εξής Πρόταση.

**Πρόταση 5.2.1** *Αν η $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Lipschitz με $\|F\|_{Lip} \leq 1$ και αν $\int_{\mathbb{R}^n} F d\gamma_n = 0$, τότε για κάθε $\lambda > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma \leq e^{\lambda^2/2}.$$

**Απόδειξη:** Έστω $F$ με $\int_{\mathbb{R}^n} F = 0$ και $\|F\|_{Lip} \leq 1$. Θέτουμε $f^2 = e^{\lambda F}$, οπότε

$$\nabla f = \frac{\lambda e^{\lambda F} \nabla F}{2f} = \frac{\lambda e^{\lambda F} \nabla F}{2e^{\lambda F/2}} = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda F/2} \nabla F.$$

Από την λογαριθμική ανισότητα Sobolev για την $f$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} \frac{\lambda F}{2} d\gamma - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma \log \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma \right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^2}{4} e^{\lambda F} |\nabla F|^2 d\gamma$$

Όμως $|\nabla F| \leq 1$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} |\nabla F|^2 d\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma$$

και αν ορίσουμε

$$H(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma$$

η παραπάνω ανισότητα γίνεται:

$$\frac{\lambda}{2} H'(\lambda) - \frac{1}{2} H(\lambda) \log H(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{4} H(\lambda).$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{\lambda H'(\lambda) - H(\lambda) \log H(\lambda)}{\lambda^2 H(\lambda)} \leq \frac{1}{2}.$$

Εαν θέσουμε $k(\lambda) = \frac{\log H(\lambda)}{\lambda}$ έχουμε

$$k'(\lambda) = \frac{\lambda H'(\lambda) - H(\lambda) \log H(\lambda)}{\lambda^2 H(\lambda)},$$

άρα $k'(\lambda) \leq \frac{1}{2}$. Παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to 0} \frac{\log H(\lambda)}{\lambda} &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{H'(\lambda)}{H(\lambda)} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\lambda \to 0} e^{\lambda F} F d\gamma}{\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\lambda \to 0} e^{\lambda F} d\gamma} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} F d\gamma = 0.
\end{aligned}$$

Μπορούμε λοιπόν να επεκτείνουμε τον ορισμό της $k$ θέτοντας $k(0) = 0$. Από την $k'(\lambda) \leq \frac{1}{2}$ έχουμε

$$k(\lambda) \leq k(0) + \frac{1}{2}\lambda = \frac{\lambda}{2}$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma \leq e^{\lambda^2/2}. \qquad \square$$

**Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.2:** Έστω $f$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $\|f\|_{Lip} \leq 1$. Θεωρούμε την $F = f - \int f d\gamma$. Τότε, $\int F d\gamma = 0$ και

$$|F(x) - F(y)| = |f(x) - f(y)| \leq \|f\|_{Lip}|x - y| \leq |x - y|.$$

Άρα $\|F\|_{Lip} \leq 1$. Από την Πρόταση 5.2.1 έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma \leq e^{\lambda^2/2}.$$

Άρα,

$$e^{\lambda r}\gamma(\{x : F(x) \geq r\}) = \int_{\{F \geq r\}} e^{\lambda F} d\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma \leq e^{\lambda^2/2}.$$

Δηλαδή, για κάθε $\lambda > 0$,

$$\gamma\left(\left\{x : f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma \geq r\right\}\right) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2} - \lambda r}.$$

Για $\lambda = r$ παίρνουμε

$$\gamma\left(\left\{x : f(x) - \int f d\gamma \geq r\right\}\right) \leq e^{-r^2/2}.$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την $-f$ βλέπουμε οτι

$$\gamma\left(\left\{x : -f(x) + \int f d\gamma \geq r\right\}\right) \leq e^{-r^2/2}.$$

Άρα,

$$\gamma\left(x : \left|f(x) - \int f d\gamma\right| \geq r\right) \leq 2e^{-r^2/2}. \qquad \square$$

**Αναφορές**. Το Θεώρημα 5.1.1 αποδείχθηκε πρόσφατα από τους Bobkov και Ledoux [BL]. Οι εφαρμογές της Παραγράφου 5.2 είναι κλασικές (βλεπε [Led]).

# Βιβλιογραφία


[ABV] J. Arias-de-Reyna, K. Ball and R. Villa, *Concentration of the distance in finite dimensional normed spaces*, Mathematika **45** (1998), 245-252.

[BL] S.G. Bobkov and M. Ledoux, *From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), 1028–1052.

[FLM] T. Figiel, J. Lindenstrauss and V.D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), 53-94.

[Ha] L.H. Harper, *Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs*, J. Combin. Theory **1** (1966), 385-393.

[JS] W.B. Johnson and G. Schechtman, *Remarks on Talagrand's deviation inequality for Rademacher functions*, Functional analysis (Austin, TX, 1987/1989), Lecture Notes in Math., **1470**, Springer, Berlin, (1991), 72-77.

[Led] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, 89. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Lei] L. Leindler, *On a certain converse of Hölder's inequality*, Acta Sci. Math. **33** (1972), 217-223.

[Lev] P. Lévy, *Problèmes Concrets d'Analyse Fonctionelle*, Gauthier-Villars, Paris (1951).

[LT] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Vol. 23 Springer, Berlin (1991).

[M1] B. Maurey, *Constructions de suites symétriques*, C.R. Acad. Sci. Paris **288** (1979), 679-681.

[M2] B. Maurey, *Some deviation inequalities*, Geom. Funct. Anal. **1** (1991), 188–197.

[MS] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200** (1986), Springer, Berlin.

[Pi1] G. Pisier, *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces*, CIME Varenna 1985, Springer Lecture Notes in Mathematics **1200**, 167-241.

[Pi2] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[Pr] A. Prékopa, *On logarithmically concave measures and functions*, Acta Sci. Math. **34** (1973), 335-343.

[Sc] G. Schechtman, *Concentration results and applications*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2 (to appear).

[Schm] E. Schmidt, *Die Brunn-Minkowski Ungleichung*, Math. Nachr. **1** (1948), 81-157.

[Schn] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[St] W.F. Stout, *Almost sure convergence*, Academic Press (1974).

[T1] M. Talagrand, *Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **81** (1995), 73–205.

[T2] M. Talagrand, *A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon*, Geometric aspects of functional analysis (1989–90), Lecture Notes in Math. **1469**, Springer, Berlin (1991), 94-124.

[T3] M. Talagrand, *An isoperimetric theorem on the cube and the Kintchine-Kahane inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 905–909.