ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Προβλήματα κατασκευών μή επιλύσιμα με κανόνα καί διαβήτη

Ιωάννης Γεωργίου Ξειδάκης

Επιβλέπων καθηγητής: Πάμφιλος Πάρις

ΜΑΡΤΙΟΣ 2013

Προβλήματα κατασκευών μη επιλύσιμων με κανόνα και διαβήτη

Ιωάννης Ξειδάκης
University of Crete, Greece
xidakis@math.uoc.gr

Περίληψη

Μελέτη προβλημάτων κατασκευής σύμφωνα με το άρθρο του Fursenko

1 Εισαγωγή

Η εργασία αυτή στηρίζεται στήν λεξικογραφική ταξινόμιση κατασκευών τριγώνων του Fursenko [Fur37], που περιλαμβάνουν τα επόμενα στοιχεία του τριγώνου με την σειρά που αναγράφεται και η οποία παίζει καθοριστικό ρόλο γιά την ταξινόμηση.

πλευρές	a	b	c
γωνίες	A	B	C
ύψη	h_a	h_b	h_c
διάμεσοι	m_a	m_b	m_c
διχοτόμοι	b_A	b_B	b_C
ακτ. περ/νου	R		
ακτ. εγγ/νου	r		
ακτ. παρ/νων	r_a	r_b	r_c
περίμετρος	$2p$		
εμβαδόν	Δ		

Όπως σημειώνει ο συγγραφέας οι συνδυασμοί των πρηγουμένων 22 στοιχείων ανά 3 οδηγούν σε 1540 προβλήματα, εκ των οποίων μόνο τα 350 αφορούν σε διαφορετικές κατασκευές. Με την ευκαιρία αυτής της ταξινόμησης, ο συγγραφέας, σημειώνει επίσης ότι εξ' αυτών των προβλημάτων κατασκευών, τα 247 δεν εμφανίζονται σε κανένα από τα γνωστά τότε (1937) σχετικά βιβλία, εγχειρίδεια και συλλογές ασκήσεων.

Στο άρθρο του ο Fursenko δίδει ή υποδεικνύει κατασκευές, τις περισσότερες με συνθετικό τρόπο, γιά 227 εκ των προβλημάτων που παραθέτει. Γιά τις υπόλοιπες 123 αναφέρει απλώς ότι οι λύσεις τους δεν κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη χωρίς να αποδεικνύει την μη κατασκευασιμότητα.

Ως γνωστόν, η μη-κατασκευασιμότητα αρρήτων αριθμών α με κανόνα και διαβήτη ανάγεται στην εύρεση πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές και ορισμένες πρόσθετες ιδιότητες, της οποίας ο α είναι ρίζα. Η εξίσωση αυτή ωστόσο, ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος, μπορεί να είναι μεγάλου βαθμού ή/και οι συντελεστές του σχετικού πολυωνύμου να είναι μεγάλοι ακέραιοι. Γιά παράδειγμα, ένα ανάγωγο πολυώνυμο μέσω του οποίου αποδεικνύεται η μη-κατασκευασιμότητα του τριγώνου από τις τρεις διχοτόμους του είναι 14−ου βαθμού ([MP94]). Ο Fursenko, ως παράδειγμα εξίσωσης με συντελεστές μεγάλους ακεραίους αναφέρει το

$$t^3 - 838t^2 + 379100t - 3611159296 = 0,$$

στο οποίο ανάγεται η μη-κατασκευασιμότητα της λύσης της (A, m_b, r)-κατασκευής. Αν και ισχυρίζεται την αδυναμία της κατασκευής, τόσο στο προηγούμενο παράδειγμα, όσο και στα υπόλοιπα, εν τούτοις, διατυπώνει και ό ίδιος κάποιες επιφυλάξεις γιά τους υπολογισμούς του. Τελικά στο άρθρο παραμένει το κενό της απόδειξης της μη κατασκευασιμότητας των 123 περιπτώσεων που αναφέρονται ως τέτοιες.

Στην εργασία αυτή γίνεται μία δειγματολειπτική έρευνα, ως προς την κατασκευασιμότητα, που αφορά σε 12 τυχαία επιλεγμένα προβλήματα από τα 123 που θεωρούνται ως μη-κατασκευάσιμα. Και γιά τα 12 αυτά προβλήματα αποδεικνύεται η ορθότητα του ισχυρισμού.

Η μέθοδος της απόδειξής μας είναι η κλασική, της εύρεσης κατάλληλης πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Αυτό επιτυγχάνεται με την αναγωγή της κατασκευής ή σε μία βασική, από τις πλευρές και τις γωνίες τριγώνου ή σε μία άλλη, γιά την οποία είναι γνωστή η κατασκευασιμότητα. Κατά κανόνα η εξίσωση που προκύπτει έχει συντελεστές που, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, δεν προσφέρονται γιά εφαρμογή των γνωστών κριτηρίων αναγωγιμότητας, όπως λ.χ. αυτό του Eisenstein [94, 338]. Αυτό καθιστά αναγκαία την αναζήτηση ειδικών μορφών των υπό κατασκευήν τριγώνων, γιά τις οποίες η αντίστοιχη εξίσωση απλοποιείται, έτσι ώστε να καθίσταται εφικτή η χρήση των προαναφερθέντων κριτηρίων. Οι ειδικές μορφές θα πρέπει ταυτόχρονα να μην συμπεριλαμβάνονται σε εκείνες οι οποίες δίδουν κατασκευασιμότητα, παρόλο που η γενική περίπτωση είναι μη-κατασκευάσιμη, όπως, λ.χ. η κατασκευασιμότητα της τριχοτόμησης της γωνίας $90°$, σε αντίθεση με την μη-κατασκευασιμότητα της γενικής τριχοτόμησης.

Πριν από την εξέταση των προβλημάτων κατασκευασιμότητας αποδεικνύονται ορισμένες προτάσεις, που χρησιμεύουν στην απόδειξη της μη κατασκευασιμότητας ρίζας μιάς τεταρτοβάθμιας εξίσωσης. Η κρίσιμη ιδιότητα που χρησιμεύει στην πράξη είναι ότι όταν μία ρίζα της τεταρτοβάθμιας κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη τότε όλες οι ρίζες της κατασκευάζονται επίσης με κανόνα και διαβήτη. Το θεώρημα αυτό σκιαγραφείται σε κλασικά συγγράμματα, όπως λ.χ. αυτό του Klein [Kle97, σ. 9]. Τα θεωρήματα της πρώτης παραγράφου αντιμετωπίζουν αυτό το θέμα και δίδουν μία απόδειξη χρησιμοποιώντας γενικές αρχές και θεωρήματα της θεωρίας σωμάτων.

2 Αλγεβρικά προαπαιτούμενα

Θεώρημα 2.1 *Αν $E(a), E(a,b), E(r), E(a,r), E(a,b,r)$ είναι επεκτάσεις ενός σώματος E τέτοιες ώστε, γιά $i \geq 2$:*

1. $a^2 \in E$ *καί* $a \notin E$,
2. $b^2 \in E(a)$ *καί* $b \notin E(a)$,
3. $[E(a,r) : E(a)] = [E(r) : E] = 2^i$,
4. $[E(a,b,r) : E(a,b)] = 2^{i-1}$.

Τότε υπάρχει επέκταση $E(d)$ τέτοια ώστε $E \subseteq E(d) \subseteq E(r)$ και $[E(d) : E] = 2$.

Απόδειξη:

$$\text{Απο τα δεδομένα προκύπτει οτι:}\quad [E(a):E]=2, [E(a,b):E(a)]=2, [E(a,r):E(r)]=2$$

$$\text{καί}\quad [E(a,b,r):E(a,r)]=1 \quad \text{άρα}\quad [E(b,r):E(r)]\in\{1,2\}$$

$A)$ αν $[E(b.r) : E(r)] = 1$ τότε $b \in E(r)$

$$[E(b) : E] \in \{2, 2^2\}$$

$[E(r):E)] = [E(b,r):E] = [E(b,r):E(b)]\cdot[E(b):E] \geq [E(a,b,r):E(a,b)]\cdot[E(b):E] \Rightarrow$

$$2^i \geq 2^{i-1}\cdot[E(b):E] \Leftrightarrow [E(b):E] \leq 2 \quad \text{άρα} \quad [E(b):E] = 2$$

$$\text{Οπότε έχω:} \quad E \subseteq E(b) \subseteq E(r) \quad \text{καί} \quad [E(b):E)] = 2$$

$B)$ αν $[E(b,r):E(r)] = 2$ τότε υπάρχουν $k, l \in E(r)$ τέτοια ώστε $b^2 + kb + l = 0$

$B1)$ αν $k = 0$ τότε $b^2 = -l \in E(r)$

Έστω ότι $l \notin E$ τότε $b^2 \notin E$. Όμως $b^2 \in E(a)$ καί $[E(a):E] = 2$

αρα $[E(b^2):E] = 2$

$$2 = [E(a):E] = [E(a,b^2):E] = [E(a,b^2):E(b^2)]\cdot[E(b^2):E] =$$

$= [E(a,b^2):E(b^2)]\cdot 2.$

Άρα $[E(a,b^2):E(b^2)] = 1$ άρα $a \in E(b^2) \subseteq E(r) \Rightarrow a \in E(r)$

άτοπο αφού $[E(a,r):E(r)] = 2$

Άρα $l \in E$ καί συνεπώς $b^2 \in E$

Όμως $[E(a,b,r):E(a,r)] = 1$ καί $a^2 \in E \subseteq E(r)$.

Υπάρχουν $d, h \in E(r)$ με $d \notin E$ ή $h \notin E$ καί $d \neq 0$ τέτοια ώστε: $b = d\cdot a + h$

(Άν $\{d,h\} \subseteq E$ τότε $b \in E(a)$ άτοπο,

καί αν $d = 0$ τότε $b \in E(r)$ άτοπο αφού $[E(b,r):E(r)] = 2$)

$b^2 = d^2\cdot a^2 + 2\cdot d\cdot h\cdot a + h^2$ με $\{b^2, d, a^2, h\} \subseteq E(r)$.

Άν $h \neq 0$ τότε $a \in E(r)$ πού είναι άτοπο, άρα $h = 0$.

Αφού $h = 0$ έχω: $d \notin E$ καί $b^2 = d^2\cdot a^2 \Rightarrow d^2 \in E$

οπότε $E \subseteq E(d) \subseteq E(r)$ καί $[E(d):E] = 2$

$B2)$ Αν $k \neq 0$ έχω: $b^2 + kb + l = 0$ με $k, l \in E(r)$ καί $k \notin E$ ή $l \notin E$

(αν $\{k,l\} \subseteq E$ τότε $b \in E(a)$, άτοπο)

Άν $b^2 \in E(r)$ τότε $b \in E(r)$ άτοπο αφού $[E(b,r):E(r)] = 2$

άρα $b^2 \notin E(r)$ άρα $b^2 \notin E$

όμως $b^2 \in E(a)$ καί $[E(a):E] = 2$ άρα υπάρχουν $d_1, d_2 \in E$ τέτοια ώστε

$(b^2)^2 + d_1\cdot b^2 + d_2 = 0 \Leftrightarrow b^4 = -d_1\cdot b^2 - d_2$

όμως $b^2 + kb + l = 0 \Leftrightarrow b^2 + l = -k\cdot b \Rightarrow b^4 + 2l\cdot b^2 + l^2 = b^2\cdot k^2 \Leftrightarrow$

$-d_1\cdot b^2 - d_2 + 2l\cdot b^2 + l^2 = b^2\cdot k^2 \Leftrightarrow (k^2 + d_1 - 2l)\cdot b^2 + d_2 - l^2 = 0.$ Όμως

$\{k, l, d_1, d_2\} \subseteq E(r)$ καί $b^2 \notin E(r)$ άρα $k^2 + d_1 - 2l = 0$ καί $d_2 - l^2 = 0$

με $d_2 \in E$ άρα $l^2 \in E$

$B2a)$ Άν $l \in E$ τότε $k \notin E$

$k^2 = 2l - d_1 \in E$ καί $k \in E(r)$ συνεπώς $E \subseteq E(k) \subseteq E(r)$ καί $[E(k):E)] = 2$

$B2b)$ Αν $l \notin E$ έχω:

$l^2 \in E$ καί $l \in E(r)$ άρα $E \subseteq E(l) \subseteq E(r)$ καί $[E(l):E)] = 2$

Θεώρημα 2.2 *Αν r κατασκευάσιμος με $r \notin Q$ καί $[Q(r):Q]=2^k$, τότε υπάρχει ακολουθία επεκτάσεων $Q=E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq E_k = Q(r)$ τέτοια ώστε* $[E_k : E_{k-1}] = [E_{k-1} : E_{k-2}] = ... = [E_1 : E_0] = 2$

Απόδειξη:

Αφού r κατασκευάσιμος υπάρχει πεπερασμένη ακολολουθία επεκτάσεων

$Q = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq E_n = E_{n-1}(r)$ τέτοια ώστε $[E_m : E_{m-1}] = 2$ $\forall m \in \{1, 2, ..., n\}$.

Έστω ότι η παραπάνω ακολουθία είναι η ακολουθία με το ελάχιστο πλήθος όρων.

Παίρνω τίς επεκτάσεις $Q(r) = E_0(r) \subseteq E_1(r) \subseteq E_2(r) \subseteq ... \subseteq E_{n-1}(r) = E_n$

Τότε έχω $[E_m(r) : E_{m-1}(r)] \in \{1, 2\}$ καί αν $[E_{m-1}(r) : E_{m-1}] = 2^t$ τότε $[E_m(r) : E_m] \in \{2^{t-1}, 2^t\}$ $\quad \forall m \in \{1, 2, ..., n-1\}$

με $[E_{n-1}(r) : E_{n-1}] = 2$ καί $[E_{n-2}(r) : E_{n-2}] = 2^2$ (Αν $[E_{n-2}(r) : E_{n-2}] = 2$ τότε η ακολουθία $E_0, E_1, ..., E_{n-2}, E_{n-2}(r)$ έχει πλήθος όρων μικρότερο τής αρχικής)

Έστω ότι υπάρχει $i \in \{2, 3, ..., n-1\}$ τέτοιο ώστε $[E_{n-j}(r) : E_{n-j}] = 2^j$

$\forall j \in \{1, 2, ..., i\}$ καί $[E_{n-i-1}(r) : E_{n-i-1}] = 2^i$ τότε:

$[E_{n-j+1}(r) : E_{n-j}(r)] = 1 \quad \forall j \in \{1, 2, ..., i\}$ καί $[E_{n-i}(r) : E_{n-i-1}(r)] = 2.$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει

$d_1 \in E_{n-i-1}(r) \subseteq E_{n-i}(r) \subseteq ... \subseteq E_{n-1}(r)$ με $[E_{n-i-1}(d_1) : E_{n-i-1}] = 2$ καί

$$[E_{n-i-1}(r) : E_{n-i-1}(d_1)] = 2^{i-1}$$

Θεωρώ την ακολουθία επεκτάσεων

$$E_0 \subseteq E_1 \subseteq ... \subseteq E_{n-i-1} \subseteq E_{n-i-1}(d_1) \subseteq E_{n-i}(d_1) \subseteq ... \subseteq E_n(d_1)$$

τότε $[E_{n-j}(d_1) : E_{n-j-1}(d_1)] \in \{1, 2\} \quad \forall j \in \{0, 1, ..., i\}$ με

$[E_{n-i}(d_1) : E_{n-i-1}(d_1)] = 2$ (Αν $[E_{n-i}(d_1) : E_{n-i-1}(d_1)] = 1$ τότε

$[E_{n-i}(r) : E_{n-i}(d_1)] = 2^i > [E_{n-i-1}(r) : E_{n-i-1}(d_1)]$ πού είναι άτοπο)

καί $[E_{n-i}(r) : E_{n-i}(d_1)] = 2^{i-1}$.

Άν $[E_{n-j}(r) : E_{n-j}(d_1)] = [E_{n-j+1}(r) : E_{n-j+1}(d_1)]$ γιά κάποιο $j \in \{0, 1, ..., i\}$ τότε $[E_{n-j+1}(d_1) : E_{n-j}(d_1)] = 1$

Επειδή το πλήθος των όρων της ακολουθίας $E_{n-i}, E_{n-i+1}, ..., E_{n-1}$ είναι i ενώ το πλήθος των όρων της ακολουθίας $2, 2^2, ..2^{i-1}$ είναι $i-1$

υπάρχει ακριβώς ένας $j \in \{3, 4, ..., i\}$ τέτοιο ώστε

$$[E_{n-j}(r) : E_{n-j}(d_1)] = [E_{n-j+1}(r) : E_{n-j+1}(d_1)]$$

καί συνεπώς $[E_{n-j+1}(d_1) : E_{n-j}(d_1)] = 1$

(Αν υπήρχαν περισσότεροι προκύπτει ακολουθία με πλήθος όρων μικρότερο τής αρχικής)

Άφαιρώντας την επέκταση $E_{n-j+1}(d_1)$ από την ακολουθία έχουμε:

$[E_{n-i}(r) : E_{n-i}(d_1)] = [E_{n-i-1}(r) : E_{n-i-1}(d_1)] = 2^{i-1}$ καί

$[E_{n-i+1}(r) : E_{n-i+1}(d_1)] = 2^{i-2}$ άρα υπάρχει $d_2 \in E_{n-i-1}(r)$ τέτοιος ώστε

$$[E_{n-i-1}(d_1, d_2) : E_{n-i-1}(d_1)] = 2$$

Επαγωγικά προκύπτει ότι υπάρχει ακολουθία επεκτάσεων

$E_{n-i-1} \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq ... \subseteq K_{i-1} \subseteq E_{n-i-1}(r)$ τέτοια ώστε

$$[E_{n-i-1}(r) : K_{i-1}] = [K_{i-1} : K_{i-2}] = ... = [K_1 : E_{n-i-1}] = 2$$

Τότε η ακολουθία επεκτάσεων βαθμού 2

$$Q = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq E_{n-i-1} \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq ... \subseteq K_{i-1} \subseteq E_{n-i-1}(r)$$

έχει πλήθος όρων μικρότερο τής αρχικής $Q = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq E_n$ πού είναι άτοπο. Άρα $[E_{n-i}(r) : E_{n-i}] = 2^i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

$$\text{Όμως} \quad 2^n = [E_0(r) : E_0] = [Q(r) : Q] = 2^k \ \text{άρα} \quad n = k$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι $[E_m(r) : E_{m-1}(r)] = 1 \quad \forall m \in \{1, 2, ..., k-1\}$

$$\text{Άρα} \quad Q(r) = E_{k-1}(r) = E_k.$$

Πόρισμα 2.1 *$P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ είναι πολυώνυμο τετάρτου βαθμού πού δέν έχει ρητή ρίζα. Άν το $P(x)$ έχει μιά ρίζα κατασκευάσιμη τότε όλες του οι ρίζες είναι κατασκευάσιμες.*

Απόδειξη:

Έστω r κατασκευάσιμη ρίζα τού πολυωνύμου $P(x)$ τότε $[Q(r) : Q] \in \{2, 2^2\}$

α) Άν $[Q(r) : Q] = 2$ υπάρχουν $a_1, a_2, b_1, b_2 \in Q$ τέτοια ώστε:

$P(x) = (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2)$. Άρα όλες οι ρίζες τού $P(x)$ είναι κατασκευάσιμες.

β) Άν $[Q(r) : Q] = 2^2$ σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα υπάρχει $d \in Q(r)$ τέτοιος ώστε: $[Q(r) : Q(d)] = [Q(d) : Q] = 2$.

Τότε υπάρχουν $a_1, a_2, b_1, b_2 \in Q(d)$, άρα κατασκευάσιμοι, τέτοιοι ώστε:

$$P(x) = (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2).$$

Άρα όλες οι ρίζες τού $P(x)$ είναι κατασκευάσιμες.

Θεώρημα 2.3 *Τό τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ πού δέν έχει ρητή ρίζα, έχει μιά κατασκευάσιμη ρίζα (στήν περίπτωση αυτή καί οι 4 ρίζες του είναι κατασκευάσιμες), άν καί μόνο άν η επιλύουσα του έχει μιά τουλάχιστον ρητή ρίζα.*

Απόδειξη:

Άν $P(x) = x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d$ τότε:

$P(x) = [x^2 + 2(a+m)x + b + 2l - n][x^2 + 2(a-m)x + b + 2l + n]$ με

$$m^2 = l + a^2 - b \quad (1), \qquad mn = ab + 2al - c \quad (2), \qquad n^2 = (b+2l)^2 - d \quad (3)$$

[Τζα10]. καί l οποιαδήποτε λύση τής επιλύουσας $4l^3 - g_2 l + g_3 = 0$ όπου

$$d - 4ac + 3b^2 = g_2 \in Q, \qquad bd + 2abc - b^3 - c^2 - a^2 d = g_3 \in Q$$

Από τίς ισότητες (1), (2) καί (3) είναι προφανές ότι άν ένας από τούς m, n, l είναι κατασκευάσιμος τότε καί οι άλλοι δύο είναι κατασκευάσιμοι.

Έστω ότι τό $P(x)$ έχει μιά ρίζα κατασκευάσιμη ρίζα, τότε καί οι 4 ρίζες του είναι κατασκευάσιμες. Άν x_1, x_2 οι ρίζες τού $h(x) = x^2 + 2(a+m)x + b + 2l - n$ τότε $x_1 + x_2$ κατασκευάσιμος,άρα $a + m$ κατασκευάσιμος καί m κατασκευάσιμος. Συνεπώς l είναι κατασκευάσιμος.

Άρα η επιλύουσα $4l^3 - g_2 l + g_3 = 0$ έχει μιά τουλάχιστον ρητή ρίζα.

Αντιστρόφως:

Έστω $l \in Q$ ρίζα τής επιλύουσας. Τότε m, n κατασκευάσιμοι. Συνεπώς τό πολυώνυμο $P(x) = [x^2 + 2(a+m)x + b + 2l - n][x^2 + 2(a-m)x + b + 2l + n]$ έχει καί τίς 4 ρίζες του είναι κατασκευάσιμες.

Θεώρημα 2.4 *Έστω r κατασκευάσιμος με $r \notin Q$ μέ $[Q(r) : Q] = 2^k$. Τό r είναι ρίζα ανάγωγου πολυωνύμου $f(x) \in Q[x]$ βαθμού 2^k.*

Έστω η ακολουθία επεκτάσεων $Q = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq E_k = Q(r)$ τέτοια ώστε $[E_k : E_{k-1}] = [E_{k-1} : E_{k-2}] = ... = [E_1 : E_0] = 2$

μέ $E_m = Q(a_1, a_2, ..., a_m) \quad \forall m \in \{1, 2, ..., k\}$ καί $a_m^2 \in E_{m-1}$

Θεωρώ τούς αυτομορφισμούς $\sigma_m : Q(a_1, a_2, ..., a_m) \to Q(a_1, a_2, ..., a_m)$ μέ

$$\sigma_m(a_m) = -a_m \quad \text{καί} \quad \sigma_m(a_i) = a_i, \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., m-1\}$$

Τότε από τούς παραπάνω αυτομορφισμούς καθώς καί τούς συνδιασμούς τών συνθέσεων τους προκυπτουν όλες οι ρίζες τού πολυωνύμου.

Απόδειξη:

$$a) \sigma_m \sigma_m(a_m) = a_m \quad \text{άρα } \sigma_m \sigma_m(a) = a \qquad \forall a \in Q(r)$$

b) Έστω $m < n \leq k$. Άν $b \in E_{n-1}$ τότε $\sigma_n \sigma_m(b) = \sigma_m \sigma_n(b) = \sigma_m(b)$ καί

$\sigma_m \sigma_n(a_n) = \sigma_m(-a_n) = -\sigma_m(a_n) = \sigma_n \sigma_m(a_n)$ άρα $\sigma_m \sigma_n(a) = \sigma_n \sigma_m(a) \quad \forall a \in Q(r)$

Έστω $\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} ... \sigma_{n_i}(r) = \sigma_{m_1} \sigma_{m_2} ... \sigma_{m_j}(r)$ εφαρμόζοντας αντίστροφους αυτομορφισμούς και τήν αντιμεταθετική ιδιότητα έχουμε : $\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}...\sigma_{k_n}(r)=r$ μέ $k_1<k_2<...<k_n$

Τό r είναι ρίζα ανάγωγου πολυωνύμου βαθμού 2^{k-k_1} μέ συντελεστές $b_i=a+b\cdot a_{k_1}$ μέ $a_{k_1}\in E_{k_1}$ καί $a,b\in E_{k_1-1}$ Τότε $\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}...\sigma_{k_n}(b_i)=b_i \Leftrightarrow \sigma_{k_1}(b_i)=b_i \Leftrightarrow$ $\sigma_{k_1}(a+b\cdot a_{k_1})=a+b\cdot a_{k_1} \Leftrightarrow a+b\cdot\sigma_{k_1}(a_{k_1})=a+b\cdot a_{k_1} \Leftrightarrow -b\cdot a_{k_1}=b\cdot a_{k_1} \Leftrightarrow$ $b\cdot a_{k_1}=0$ τότε $b_i\in E_{k_1-1}$ πού είναι άτοπο. Άρα $\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}...\sigma_{n_i}(r)\neq\sigma_{m_1}\sigma_{m_2}...\sigma_{m_j}(r)$

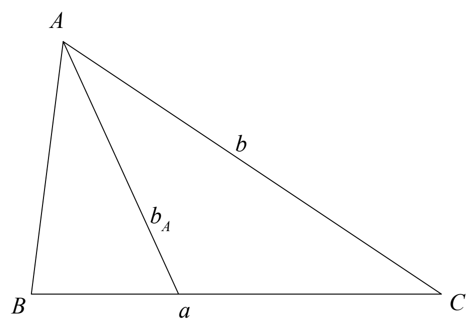
Τό r είναι ρίζα ανάγωγου πολυωνύμου $f(x)\in Q[x]$ βαθμού 2^k.

Από τούς παραπάνω αυτομορφισμούς καθώς καί τούς συνδιασμούς τών συνθέσεων τους $\binom{k}{1},\binom{k}{2},...,\binom{k}{k}$ προκύπτουν $\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+...+\binom{k}{k}=2^k$

διαφορετικές ρίζες τού πολυωνύμου.Άρα αυτές ακριβώς είναι οι ρίζες τού πολυωνύμου.

3 Κατασκευή από τα (a,b,b_A)

(Κατασκευή-8 σελιδα 27)
Απο την γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ABC και από το θεώρημα



Σχήμα 1: Κατασκευή από τα (a,b,b_A)

διχοτόμων έχω:

$$b_A^2=\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} \Leftrightarrow$$
$$b_A^2(b^2+2bc+c^2)=bc((b+c)^2-a^2) \Leftrightarrow$$

$$bc^3+(2b^2-b_A^2)c^2+(b^2-a^2b-2b_A^2b)c-b_A^2b^2 = 0.$$

Για $b=b_A=1$ εχω:
$$c^3+c^2-(a^2+1)c-1=0$$

Ομως αν $A=2x$ τότε:
$$0<x<\frac{\pi-x}{2}\Leftrightarrow 0<x<\frac{\pi}{3}$$

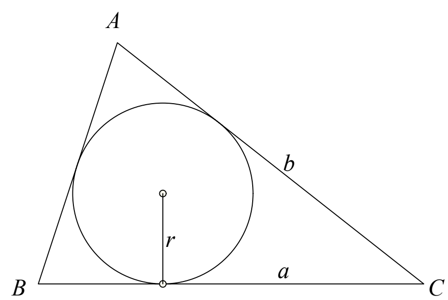
καί
$$\frac{a}{sin2x}=\frac{1}{sin\frac{\pi-3x}{2}}\Leftrightarrow a=\frac{sin2x}{cos\frac{3x}{2}}.$$

οποτε
$$\lim_{x\to 0}a(x)=0$$

καί
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} a(x) = +\infty$$
Συνεπώς αφου η $a(x)$ ειναι συνεχής, το a παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $(0,+\infty)$, γιά $a=1$ θα προκύπτει: $c^3+c^2-2c-1=0$. Έπεται ότι ο c δέν είναι κατασκευάσιμος αφού είναι ρίζα τού πολυωνύμου x^3+x^2-2x-1 που είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

4 Κατασκευή από τα (a,b,r)

(Κατασκευή-11 σελιδα 27)



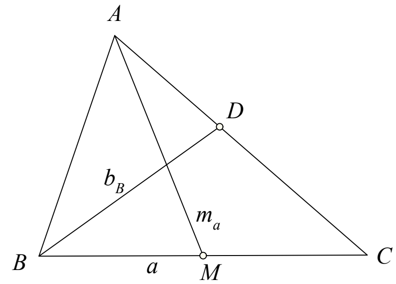
Σχήμα 2: Κατασκευή από τα (a,b,r)

$$\begin{aligned}
pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &\Leftrightarrow \\
pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) &\Leftrightarrow \\
r^2(a+b+c) = \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4} &\Leftrightarrow \\
4r^2(a+b)+4r^2c = [c^2-(a+b)^2](a+b-c) &\Leftrightarrow \\
c^3-(a+b)c^2+[4r^2-(a+b)^2]c+(a+b)[4r^2+(a-b)^2] &= 0.
\end{aligned}$$

Γιά $a=b=1$ εχω:
$$c^3-2c^2+4r^2c+8r^2=0$$
με $0<c<2$. Γιά την συνάρτηση
$$r^2=\frac{c^2(2-c)}{4(2+c)}$$
όταν $0<c<2$, τοτε
$$0<r^2\leq\frac{(3-\sqrt{5})^2}{2(1+\sqrt{5})}.$$
Γιά
$$r^2=\frac{1}{32}<\frac{(3-\sqrt{5})^2}{2(1+\sqrt{5})}$$
προκύπτει η εξίσωση:
$$8c^3-16c^2+c+2=0.$$
Έπεται ότι ο c δέν είναι κατασκευάσιμος, αφού είναι ρίζα τού πολυωνύμου $8x^3-16x^2+x+2$ που είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

5 Κατασκευή από (a, m_a, b_B)

(Κατασκευή-73, σελίδα 23)
Έστω $B(0,0)$, $C(a,0)$ και $\widehat{B} = 2x$ τοτε $A(c \cdot cos2x, c \cdot sin2x)$. Αν BD η διχοτόμος της



Σχήμα 3: Κατασκευή από (a, m_a, b_B)

γωνίας B καί AM η διάμεσος του τριγώνου τότε $D(b_B \cdot cosx, b_B \cdot sinx)$ καί $\mathrm{M}(\frac{a}{2}, 0)$. Τα σημεία A, D, C είναι συνευθειακά άρα

$$\begin{aligned} a(c \cdot sin2x - b_B \cdot sinx) + c \cdot b_B \cdot cos2x \cdot sinx - c \cdot b_B \cdot cosx \cdot sin2x = 0 &\Leftrightarrow \\ a \cdot sinx(2 \cdot c \cdot cosx - b_B) - c \cdot b_B \cdot (sin2x \cdot cosx - sinx \cdot cos2x) = 0 &\Leftrightarrow \\ a \cdot sinx \cdot (2 \cdot c \cdot cosx - b_B) - c \cdot b_B \cdot sinx = 0 &\Leftrightarrow \\ sinx \cdot (2 \cdot a \cdot c \cdot cosx - a \cdot b_B - c \cdot b_B) = 0 &\Leftrightarrow \\ cosx = \frac{(a+c) \cdot b_B}{2ac} \quad \text{και} \quad c = \frac{a \cdot b_B}{2 \cdot a \cdot cosx - b_B}. & \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} m_a^2 &= (c \cdot cos2x - \frac{a}{2})^2 + c^2 \cdot sin^2 2x \\ &= c^2 - a \cdot c \cdot (2cos^2 x - 1) + \frac{a^2}{4} \\ &= c^2 - a \cdot c \cdot \left(\frac{2(a+c)^2 b_B^2}{4a^2c^2} - 1 \right) + \frac{a^2}{4} \\ &= c^2 - \frac{(a+c)^2 b_B^2}{2ac} + ac + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \\ 2 \cdot a \cdot c \cdot m_a^2 &= 2ac^3 - (a+c)^2 b_B^2 + 2a^2c^2 + \frac{a^3 c}{2} \Leftrightarrow \\ 0 &= 2ac^3 + (2a^2 - b_B^2)c^2 + ac\left(\frac{a^2}{2} - 2b_B^2 - 2m_a^2 \right) - a^2 b_B^2. \end{aligned}$$

Γιά $a = 2$ και $b_B = 1$ έχω:

$$4c^3 + 7c^2 - 4m_a^2 c - 4 = 0.$$

Όμως:

$$\begin{aligned} m_a^2 &= c^2 - a \cdot c \cdot cos2x + \frac{a^2}{2} \\ &= c^2 - 2 \cdot c \cdot cos2x \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2}{4cosx - 1}\right)^2 - 2\frac{2}{4cosx - 1}cos2x + 1$$

$$= \frac{4 - 4(4cosx - 1)cos2x + (4cosx - 1)^2}{(4cosx - 1)^2}$$

Αν $0 < x < arccos\frac{1}{4}$ εχω:

$$\lim_{x \to 0} m_a^2 = \frac{1}{9}, \lim_{x \to arccos\frac{1}{4}} m_A^2 = +\infty$$

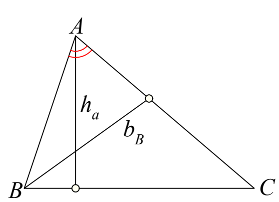
Αρα το m_a παίρνει όλες τις τιμές στό διαστημα $(\frac{1}{3}, +\infty)$. Γιά $m_a = \frac{3}{2}$εχω:

$$4c^3 + 7c^2 - 9c - 4 = 0$$

τότε ο c δέν είναι κατασκευάσιμος αφού είναι ρίζα τού πολυωνύμου $x^3 + 7x^2 - 9x - 4$ που είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

6 Κατασκευή από $(\widehat{A}, h_a, b_B)$

(Κατασκευή-139 σελίδα 29)
Αν $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ ισχύει:



Σχήμα 4: Κατασκευή από $(\widehat{A}, h_a, b_B)$

$$
\begin{aligned}
0 < x < \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad sin2x = \frac{h_a}{c},\ \ sinx = \frac{c \cdot tanx}{b_B} \quad &\Rightarrow \\
sin2xsinx = \frac{h_a tanx}{b_B} \quad &\Leftrightarrow \\
2sinxcos^2x = \frac{h_a}{b_B} \quad &\Leftrightarrow \\
2sinx(1 - sin^2x) = \frac{h_a}{b_B} \quad &\Leftrightarrow \\
2sin^3x - 2sinx + \frac{h_a}{b_B} = 0
\end{aligned}
$$

Γιά

$$\frac{h_a}{b_B} = \frac{1}{2}$$

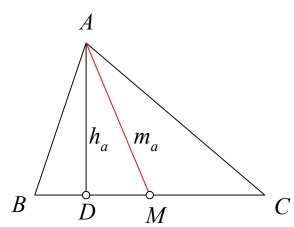
εχω:

$$4sin^3x - 4sinx + 1 = 0.$$

Υπάρχει x στο διάστημα $(0, arcsin\frac{\sqrt{3}}{3})$ πού είναι ριζα της εξίσωσης. Τό $sinx$ δεν είναι όμως κατασκευάσιμος αφού είναι ρίζα τού πολυωνύμου $4x^3 - 4x + 1$ που είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

7 Κατασκευή από $(h_a,\ m_a,\ 2p)$

(Κατασκευή-229 σελίδα 38)



Σχήμα 5: Κατασκευή από $(h_a,\ m_a,\ 2p)$

$$
\begin{aligned}
b^2 - c^2 = 2a|MD| = 2a\sqrt{m_a^2 - h_a^2} \quad &\Leftrightarrow \\
(b^2 - c^2)^2 = 4a^2(m_a^2 - h_a^2) \quad &\Leftrightarrow \\
(b-c)^2(b+c)^2 = 4(2p - b - c)^2(m_a^2 - h_a^2) \quad &\Leftrightarrow \\
(b-c)^2(b+c)^2 = 4[4p^2 + (b+c)^2 - 4p(b+c)](m_a^2 - h_a^2).
\end{aligned}
$$

Όμως:

$$
\begin{aligned}
b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \quad &\Leftrightarrow \\
b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{(2p - b - c)^2}{2} \quad &\Leftrightarrow \\
2b^2 + 2c^2 = 4m_a^2 + 4p^2 + (b+c)^2 - 4p(b+c) \quad &\Leftrightarrow \\
(b-c)^2 = 4m_a^2 + 4p^2 - 4p(b+c).
\end{aligned}
$$

Άρα

$$4[m_a^2 + p^2 - p(b+c)](b+c)^2 = 4[4p^2 + (b+c)^2 - 4p(b+c)](m_a^2 - h_a^2).$$

Θέτω $b+c=t, h_a=1, m_a=2$ η εξισωση γινεται:

$$pt^3 + (p^2-1) - 6pt + 12p^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = 8 + \frac{a^2}{2},$$

καί

$$b^2 - c^2 = 2a \cdot |DM| = 2\sqrt{3}a$$

αλλά

$$2p = a+b+c \Rightarrow 2p = a + \sqrt{4 + \frac{a^2}{4} + a\sqrt{3}} + \sqrt{4 + \frac{a^2}{4} - a\sqrt{3}}$$

Όμως:

$$\lim_{a\to 0} 2p = 4, \lim_{a\to +\infty} 2p = +\infty$$

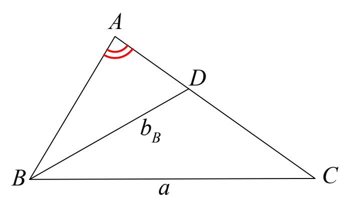
Άρα το p παίρνει την τιμη 8. Γιά $p=8$ η εξίσωση γίνεται:

$$8t^3 - 63t^2 - 48t + 2^8 3 = 0.$$

Συνεπώς ο t δέν είναι κατασκευάσιμος, αφού είναι ρίζα τού πολυωνύμου $8x^3 - 6x^2 - 48x + 2^8 \cdot 3$ που είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

8 Κατασκευή από $(a,\ \widehat{A},\ b_B)$

(Κατασκευή-22 σελίδα 28)
Έστω $\widehat{B} = 2x$ Τότε Έχω:



Σχήμα 6: Κατασκευή από $(a,\ \widehat{A},\ b_B)$

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sin2x} \quad \Leftrightarrow$$
$$b = \frac{2asinxcosx}{sinA}.$$

Αν BD η διχοτόμος της γωνίας Β τα σημεία A, D, C είναι συνευθειακά άρα

$$cosx = \frac{b_B(a+c)}{2ac} \quad \text{τότε}$$

$$b^2 = \frac{4a^2 sin^2 x cos^2 x}{sin^2 A} \quad =$$

$$\frac{4a^2(1-cos^2 x)cos^2 x}{sin^2 A} \quad =$$

$$\frac{[4a^2c^2 - b^2(a+c)^2]b_B^2(a+c)^2}{4a^2c^4 sin^2 A}.$$

Όμως:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos2x \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{[4a^2c^2 - b^2(a+c)^2]b_B^2(a+c)^2}{4a^2c^4 sin^2 A} \quad =$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\frac{b_B^2(a+c)^2 - 2a^2c^2}{2a^2c^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{[4a^2c^2 - b^2(a+c)^2]b_B^2(a+c)^2}{4ac^3 sin^2 A} = a^3c + ac^3 - b^2B(a+c)^2 + 2a^2c^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$b_B^2(a+c)^2[4a^2c^2 - b_B^2(a+c)^2] = 4asin^2A[a^3c^4 + ac^6 + b_B^2c^3(a+c)^2 + 2a^2c^5] \quad \Leftrightarrow$$

$$4a^2sin^2Ac^6 + 4a(b_B^2 + 2a^2)sin^2Ac^5 + 4(a^4sin^2A + 2a^2b_B^2sin^2A - a^2b_B^2 + b_B^4)c^4 \quad +$$
$$4(a^3b_B^2sin^2A - 2a^3b_B^2 + 4ab_B^4)c^3 - 2a^2b_B^2(2a^2 - 3b_B^2)c^2 + 4a^3b_B^4c + a^4b_B^4 = 0.$$

Θέτω $b_B^2 = ka^2$ και η εξίσωση γίνεται:

$$4a^2sin^2Ac^6 + 4a^3(k+2)sin^2Ac^5 + 4(a^4sin^2A + 2ka^4sin^2A - ka^4 + k^2a^4)c^4 \quad +$$
$$4(ka^5sin^2A - 2ka^5 + k^2a^5)c^3 - 2ka^4(2a^2 - 3ka^2)c^2 + 4k^2a^7c + k^2a^8 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4sin^2Ac^6 + 4a(k+2)sin^2Ac^5 + 4a^2[(1+2k)sin^2A + k^2 - k]c^4 \quad +$$
$$4a^3(ksin^2A - 2k + k^2)c^3 - 2ka^4(2-3k)c^2 + 4k^2a^5c + k^2a^6 = 0$$

Θέτω $sin^2A = \frac{1}{2}$ τότε η εξίσωση γίνεται:

$2c^6 + 2a(k+2)c^5 + 2a^2(1+2k^2)c^4 + 2a^3(-3k+2k^2)c^3 - 2ka^4(2-3k)c^2 + 4k^2a^5c + k^2a^6 = 0.$

Ο c είναι κατασκευάσιμος αν και μόνο αν ο $\frac{1}{c}$ είναι κατασκευάσιμος. Γιά $c = \frac{1}{y}$ έχω:

$k^2a^6y^6 + 4k^2a^5y^5 - 2ka^4(2-3k)y^4 + 2ka^3(2k-3)y^3 + 2a^2(2k^2+1)y^2 + 2a(k+2)y + 2 = 0$

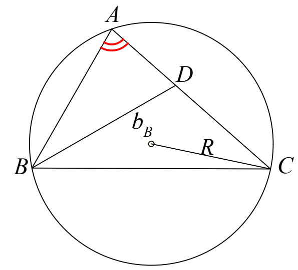
Όμως $0 < x < \frac{\pi - A}{2}$ καί $k = \frac{b_B^2}{a^2} = \frac{sin^2(2x+A)}{sin^2(x+A)}$ Όμως

$$\lim_{x\to 0} k = 1, \lim_{x\to\frac{\pi-A}{2}} k = 0.$$

Γιά $k = \frac{1}{2n+1}$ με n φυσικό και για a περιττό το πολυώνυμο είναι ανάγωγο.

9 Κατασκευή από $(\widehat{A},\ b_B,\ R)$

(Κατασκευή-188 σελίδα 33)
Λόγω της σχέσης



Σχήμα 7: Κατασκευή από $(\widehat{A},\ b_B,\ R)$

$$\frac{a}{sinA} = 2R \Leftrightarrow a = 2RsinA$$

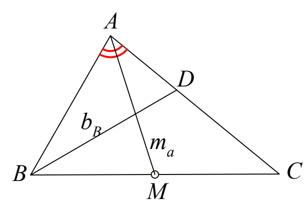
Η απόδειξη ανάγεται στην προηγούμενη.

10 Κατασκευή από $(\widehat{A},\ m_a,\ b_B)$

(Κατασκευή-162 σελίδα 31)
Έστω $B(0,0)$ και BD η διχοτόμος με $D(b_B, 0)$ και $B = 2x$. Τότε $A(ccosx, csinx)$ και $C(acosx, -asinx)$. Τα σημεία A, D, C είναι συνευθειακά άρα:

$$\begin{aligned} b_B(csinx + asinx) - 2acsinxcosx = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ (a+c)b_B = 2accosx &\quad \Leftrightarrow \\ cosx = \frac{(a+c)b_B}{2ac} & \end{aligned}$$

Όμως



Σχήμα 8: Κατασκευή από $(\widehat{A},\ m_a,\ b_B)$

$$\begin{aligned} m_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - accos2x &\quad = \\ \frac{a^2}{4} + c^2 - ac(2cos^2x - 1) &\quad = \\ \left(\frac{a}{2} + c\right)^2 - 2ac\frac{(a+c)^2 b_B^2}{(2ac)^2} &\quad \Leftrightarrow \\ c^2\left(\frac{a}{2c} + 1\right)^2 = m_a^2 + \frac{\left(\frac{a}{c} + 1\right)^2 b_B^2}{2ac}. & \end{aligned}$$

Θέτω $a = ct$ τότε έχω:

$$c^2 = \frac{4m_a^2 t + 2(t+1)^2 b_B^2}{t(t+2)^2} \ \ \text{και} \ \ cosx = \frac{(t+1)b_B}{2ct}$$

αλλά

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sin2x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2}{sin^2A} = \frac{b^2}{\frac{(t+1)^2 b_B^2[4c^2t^2 - (t+1)^2 b_B^2]}{4c^4t^4}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{c^2t^2}{sin^2A} = \frac{4c^4t^4[c^2t^2 + c^2 - 2c^2t(2cos^2x - 1)]}{(t+1)^2 b_B^2[4c^2t^2 - (t+1)^2 b_B^2]} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{sin^2A} = \frac{4c^2t^2\left[c^2t^2 + c^2 - 2c^2t\left(2\frac{(t+1)^2b_B^2}{4c^2t^2} - 1\right)\right]}{(t+1)^2 b_B^2[4c^2t^2 - (t+1)^2 b_B^2]} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{sin^2A} = \frac{4c^2t[c^2t^3 + c^2t - (t+1)^2b_B^2 + 2c^2t^2]}{(t+1)^2 b_B^2[4c^2t^2 - (t+1)^2 b_B^2]} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{sin^2A} = \frac{4c^2t(t+1)^2(c^2t - b_B^2)}{(t+1)^2 b_B^2[4c^2t^2 - (t+1)^2 b_B^2]} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{sin^2A} = \frac{4c^2t(c^2t - b_B^2)}{b_B^2[4c^2t^2 - (t+1)^2 b_B^2]} \quad \Leftrightarrow$$

$$b_B^2[4c^2t^2 - (t+1)^2b_B^2] = 4c^2t(c^2t - b_B^2)sin^2A \quad \Leftrightarrow$$

$$b_B^2\left[4\frac{4m_a^2t + 2(t+1)^2b_B^2}{t(t+2)^2}t^2 - (t+1)^2b_B^2\right] =$$
$$4\frac{4m_a^2t + 2(t+1)^2b_B^2}{t(t+2)^2}t\left[\frac{4m_a^2t + 2(t+1)^2b_B^2}{t(t+2)^2}t - b_B^2\right]sin^2A \quad \Leftrightarrow$$

$$b_B^2\left[4\frac{4m_a^2t + 2(t+1)^2b_B^2}{(t+2)^2}t - (t+1)^2b_B^2\right] =$$
$$4\frac{4m_a^2t + 2(t+1)^2b_B^2}{(t+2)^2}\left[\frac{4m_a^2t + 2(t+1)^2b_B^2}{(t+2)^2} - b_B^2\right]sin^2A \quad \Leftrightarrow$$

$$b_B^2(t+2)^2[16m_a^2t^2+8t(t+1)^2b_B^2-(t+2)^2(t+1)^2b_B^2] \quad =$$

$$8[2m_a^2t+(t+1)^2b_B^2][4m_a^2t+2(t+1)^2b_B^2-(t+2)^2b_B^2]sin^2A \quad \Leftrightarrow$$

$$b_B^4(t+2)^2\left[16(\frac{m_a}{b_B})^2t^2+8t(t+1)^2-(t+2)^2(t+1)^2\right] \quad =$$

$$8b_B^4\left[2(\frac{m_a}{b_B})^2t+(t+1)^2\right]\left[4(\frac{m_a}{b_B})^2t+2(t+1)^2-(t+2)^2\right]sin^2A \quad \Leftrightarrow$$

$$(t+2)^2\left[16(\frac{m_a}{b_B})^2t^2+8t(t+1)^2-(t+2)^2(t+1)^2\right] \quad =$$

$$8\left[2(\frac{m_a}{b_B})^2t+(t+1)^2\right]\left[4(\frac{m_a}{b_B})^2t+2(t+1)^2-(t+2)^2\right]sin^2A.$$

Θέτω

$$(\frac{m_a}{b_B})^2=k \text{ και } t+2=y.$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$y^6-10y^5-(16k-33-8sin^2A)y^4-8[5-8k+6(k-1)sin^2A]y^3+8[2(1-4k) + (3(1-4k)+8(k-1)^2)sin^2A]y^2+64sin^2A(k-1)(1-4k)y+16sin^2A(1-4k)^2=0.$$

Γιά

$$sin^2A=\frac{1}{8} \quad \text{και} \quad k=\frac{1}{2}$$

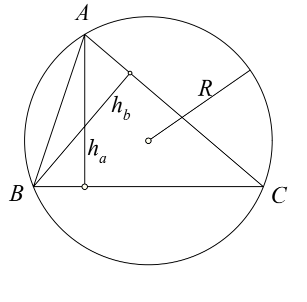
έχω:

$$y^6-10y^5+26y^4-35y^3-17y^2-4y+2=0.$$

τότε ο y δέν είναι κατασκευάσιμος αφού είναι ρίζα τού πολυωνύμου

$$x^6-10x^5+26x^4-35x^3-17x^2-4x+2 \quad \text{που είναι ανάγωγο στο} \quad \mathbb{Q}[x].$$

11 Κατασκευή από $(h_a,\ h_b,\ R)$



Σχήμα 9: Κατασκευή από $(h_a,\ h_b,\ R)$

(Κατασκευή-216 σελίδα 37)

$$\begin{aligned}
bc = 2Rh_a, ac = 2Rh_b \quad \text{καί} \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA \quad &\Leftrightarrow \\
cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad &\Rightarrow \\
1 - sin^2 A = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \\
1 - \frac{h_B^2}{c^2} = \left(\frac{\frac{4R^2h_a^2}{c^2} + c^2 - \frac{4R^2h_b^2}{c^2}}{\frac{4Rh_ac}{c}}\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \\
c^2 - h_b^2 = \left(\frac{4R^2h_a^2 - 4R^2h_b^2 + c^4}{4Rch_a}\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \\
\left[c^4 + 4R^2(h_a^2 - h_b^2)\right]^2 = 16R^2c^2h_a^2(c^2 - h_b^2)
\end{aligned}$$

Θέτω $c^2 = x \neq 0$ τότε έχω:

$$\begin{aligned}
\left[x^2 + 4R^2(h_a^2 - h_b^2)\right]^2 = 16R^2h_a^2x(x - h_b^2) \quad &\Leftrightarrow \\
x^4 + \left[8R^2(h_a^2 - h_b^2) - 16R^2h_a^2\right]x^2 + 16R^2h_a^2h_b^2x + 16R^4\left(h_a^2 - h_b^2\right)^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\
x^4 - 8R^2(h_a^2 + h_b^2)x^2 + 16R^2h_a^2h_b^2x + 16R^4\left(h_a^2 - h_b^2\right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Γιά $h_a = h_b$ η εξίσωση γίνεται:

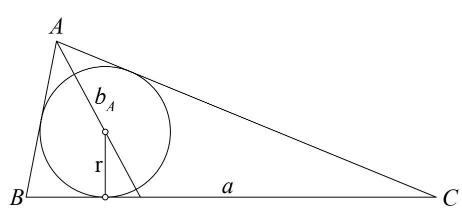
$$\begin{aligned}
x^4 - 16R^2h_a^2x^2 + 16R^2h_a^4x = 0 \quad &\Leftrightarrow \\
x^3 - 16R^2h_a^2x + 16R^2h_a^4 = 0
\end{aligned}$$

Γιά $R = \sqrt{3}h_a$ καί $h_a^2 \in N$ με $h_a^2 \neq 0 modulo 3$ έχω:

$$x^3 - 48h_a^4x + 48h_a^6 = 0$$

το οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο.

12 Κατασκευή από $(a,\ b_A,\ r)$



Σχήμα 10: Κατασκευή από $(a,\ b_A,\ r)$

(Κατασκευή-93 σελίδα 25)

$$(ABC) = tr = \sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)}$$

$$
\begin{aligned}
b_A^2 &= \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} \\
&= \frac{2tbc(2t-2a)}{(2t-a)^2} \\
&= \frac{4tbc(t-a)}{(2t-a)^2}
\end{aligned}
$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
(t-b)(t-c) = t^2-(b+c)t+bc \quad &\Leftrightarrow \\
bc = (t-b)(t-c)+(b+c)t-t^2 \quad &\Rightarrow \\
b_A^2 = \frac{4t(t-a)[(t-b)(t-c)+(b+c)t-t^2]}{(2t-a)^2} \quad &\Leftrightarrow \\
b_A^2 = \frac{4t(t-a)(t-b)(t-c)+4t^2(b+c-t)(t-a)}{(2t-a)^2} \quad &\Leftrightarrow \\
b_A^2 = \frac{4t^2r^2+4t^2(t-a)^2}{(2t-a)^2} \quad &\Leftrightarrow \\
b_A^2(4t^2-4at+a^2) = 4t^2r^2+4t^2(t^2-2at+a^2) \quad &\Leftrightarrow \\
t^4-2at^3+(r^2+a^2-b_A^2)t^2+ab_A^2t-\frac{a^2b_A^2}{4} = 0.&
\end{aligned}
$$

Γιά $a=3, b_A=2\sqrt{6}, r=1$ έχω:

$$t^4-6t^3-14t^2+72t-54=0$$

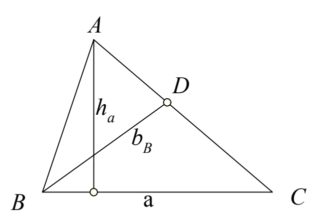
το οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο μέ αναλλοίωτες $g_2=-\dfrac{211}{3}$ καί $g_3=\dfrac{3359}{2\cdot 3^3}$

. Η επιλύουσα τριτοβάθμια εξίσωση της είναι:

$$4l^3+\frac{211}{3}l-\frac{3359}{2\cdot 3^3}=0 \Leftrightarrow (6l)^3+3\cdot 211(6l)-3359=0$$

πού δεν έχει ρητή ρίζα.

13 Κατασκευή από $(a,\ h_a,\ b_B)$



Σχήμα 11: Κατασκευή από $(a,\ h_a,\ b_B)$

(Κατασκευή-50 σελίδα 21)

Έστω τρίγωνο ABC με $B(0,0)$, $C(a,0)$, $B=2x$ καί BD η διχοτόμος του b_B

τότε: $A(ccos2x, csin2x)$ καί $D(b_B cosx, b_B sinx)$

$$sin2x = \frac{h_a}{c} \Leftrightarrow c = \frac{h_a}{2sinxcosx}.$$

Τα σημεία A, D, C είναι συνευθειακά άρα:

$$\begin{aligned}
a(csin2x - b_B sinx) + cb_B cos2xsinx - cb_B cosxsin2x = 0 &\quad \Leftrightarrow \\
asinx(2ccosx - b_B) - cb_B sinx = 0 &\quad \Leftrightarrow \\
a(2ccosx - b_B) = cb_B &\quad \Leftrightarrow \\
a(\frac{h_a}{sinx} - b_B) = \frac{h_a b_B}{2sinxcosx} &\quad \Leftrightarrow \\
2acosx(h_a - b_B sinx) = h_a b_B &\quad \Leftrightarrow \\
(h_a^2 - 2h_a b_B sinx + b_B^2 sin^2x)(1 - sin^2x) = \frac{h_a^2 b_B^2}{4a^2} &\quad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$b_B^2 sin^4x - 2h_a b_B sin^3x + (h_a^2 - b_B^2)sin^2x + 2h_a b_B sinx + h_a^2(\frac{b_B^2}{4a^2} - 1) = 0$$

Υπάρχει τρίγωνο τέτοιο ώστε $h_a = b_B$ οπότε γιά $h_a = b_B$ έχω:

$$\begin{aligned}
b_B^2 sin^4x - 2b_B^2 sin^3x + 2b_B^2 sinx + b_B^2(\frac{b_B^2}{4a^2} - 1) = 0 &\quad \Leftrightarrow \\
sin^4x - 2sin^3x + 2sinx + \frac{b_B^2}{4a^2} - 1 = 0 &
\end{aligned}$$

Απο την σχέση $2acosx(h_a - b_B sinx) = h_a b_B$ γιά $h_A = b_B$ έχω: $\frac{b_B}{a} = 2cosx(1 - sinx)$ και

$$\lim_{x \to 0} \frac{b_B}{a} = 2, \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{b_B}{a} = 0$$

$$\text{Γιά} \quad \frac{b_B}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{έχω:} \quad 3sin^4x - 6sin^3x + 6sinx - 2 = 0$$

το οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $sinx$

.

Θέτω $sinx = y$. Η εξίσωση γίνεται: $y^4 - 2y^3 + 2y^2 - \frac{2}{3} = 0$ μέ αναλλοίωτες

$g_2 = -\frac{1}{3}$ καί $g_3 = -\frac{5}{2 \cdot 3^3}$. Η επιλύουσα τριτοβάθμια εξίσωση της είναι:

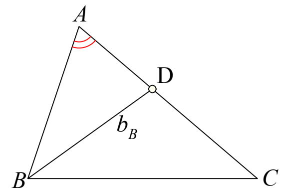
$4l^3 + \frac{1}{3}l - \frac{5}{2 \cdot 3^3} = 0 \Leftrightarrow (6l)^3 + 3(6l) - 5 = 0$ πού δεν έχει ρητή ρίζα.

14 Κατασκευή από $(A,\ b_B,\ 2p)$

(Κατασκευή-193 σελίδα 34)

Αν $BD = b_B$ η διχοτόμος της γωνιας B καί $A = \frac{\pi}{2}$ έχω:

$$\begin{aligned}
a = 2p - b - c &\quad \Leftrightarrow \\
a^2 = 4p^2 + b^2 + c^2 - 4pb - 4pc + 2bc &\quad \Leftrightarrow \\
c = \frac{2p(p - b)}{2p - b} &
\end{aligned}$$



Σχήμα 12: Κατασκευή από $(A,\ b_B,\ 2p)$

Όμως

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{b} &= \frac{c}{a+c} && \Leftrightarrow\\
\frac{AD^2}{b^2} &= \frac{c^2}{(a+c)^2} && \Leftrightarrow\\
\frac{b_B^2-c^2}{b^2} &= \frac{c^2}{(2p-b)^2} && \Leftrightarrow\\
\frac{b_B^2-\dfrac{4p^2(p-b)^2}{(2p-b)^2}}{b^2} &= \frac{\dfrac{4p^2(p-b)^2}{(2p-b)^2}}{(2p-b)^2} && \Leftrightarrow\\
(2p-b)^4 b_B^2 &= 4p^2b^2(p-b)^2+4p^2(p-b)^2(2p-b)^2 && \Leftrightarrow\\
(2p-b)^4\frac{b_B^2}{4p^2} &= b^2(p-b)^2+(p-b)^2(2p-b)^2 && \Leftrightarrow\\
\left(\frac{2p}{b}-1\right)^4\frac{b_B^2}{4p^2} &= \left(\frac{p}{b}-1\right)^2\left[1+\left(\frac{2p}{b}-1\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Θέτω $\dfrac{2p}{b}-1=x$ τότε έχω:

$$\begin{aligned}
x^4\frac{b_B^2}{p^2} &= (x-1)^2(1+x^2) \quad \Leftrightarrow\\
\left(\frac{b_B^2}{p^2}-1\right)x^4 &+ 2x^3-2x^2+2x-1=0
\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{b_B^2}{p^2}=4\frac{1-\sqrt{1-(\frac{c}{a})^2}}{(1+\frac{c}{a})^2} \quad \text{με} \quad 0<c<a$$

και

$$\lim_{c\to 0}\frac{b_B^2}{p^2}=0,\lim_{c\to a}\frac{b_B^2}{p^2}=1$$

. Γιά $\dfrac{b_B^2}{p^2}=\dfrac{2}{3}$ έχω:

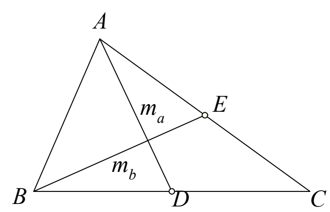
$$x^4-6x^3+6x^2-6x+3=0$$

το οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο μέ αναλλοίωτες $g_2=-3$ καί $g_3=-\dfrac{5}{2}$

.Η επιλύουσα τριτοβάθμια εξίσωση της είναι:

$$4l^3 + 3l - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow (2l)^3 - 3(2l) - 5 = 0 \text{ πού δεν έχει ρητή ρίζα.}$$

15 Κατασκευή από $(m_a,\ m_b,\ 2p)$



Σχήμα 13: Κατασκευή από $(m_a,\ m_b,\ 2p)$

(Κατασκευή-280 σελίδα 41)

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \text{ και } b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Άρα

$$a^2 = \frac{4}{9}(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2)$$

ομοίως

$$b^2 = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2) \quad \text{καί } c^2 = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2), a + b + c = 2p \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2} + \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2} + \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}\right) = 2p.$$

Θέτω $t^2 = 2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2$ μέ $t > 0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\sqrt{6m_b^2 + 3m_a^2 - 2t^2} + t = 3p - \sqrt{6m_a^2 + 3m_b^2 - 2t^2}$$

Όμως

$$0 < \frac{3p}{2} - (m_a + m_b) < m_c < 3p - (m_a + m_b)$$

. Γιά $p = 1, m_a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ καί $m_b = \sqrt{\frac{2}{3}}$ έχω:

$$\begin{aligned} \sqrt{5 - 2t^2} + \sqrt{4 - 2t^2} = 3 - t \quad &\Leftrightarrow \\ 9t^4 - 60t^3 + 108t^2 - 80 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ (3t)^4 - 20(3t)^3 + 108(3t)^2 - 720 = 0.& \end{aligned}$$

Γιά $3t = y$ έχω: $y^4 - 20y^3 + 108y^2 - 720 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^4 - 10\left(\frac{y}{2}\right)^3 + 27\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 45 = 0$

πού δέν έχει ρητή ρίζα. Οι αναλλοίωτες της είναι οι $g_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ καί $g_3 = -2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$.
Η επιλύουσα τριτοβάθμια εξίσωση της είναι:

$$4l^3 - 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7l - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 = 0 \Leftrightarrow (\frac{l}{3})^3 - 7(\frac{l}{3}) - \frac{2 \cdot 11}{3} = 0$$

Θέτω $\frac{l}{3} = \frac{1}{x}$ και η εξίσωση γίνεται: $22x^3 + 21x^2 - 3 = 0$ πού δεν έχει ρητή ρίζα.

16 Κατασκευή από $(h_a,\ m_b,\ R)$

(Κατασκευή- 235 σελίδα 39)

$$\text{Έστω } BM = m_b \text{ καί } MN = \frac{h_a}{2} \text{ τό ύψος τού τριγώνου } BMC$$

Έστω $c < a$ Από τήν γενίκευση τού πυθαγορείου θεωρήματος στό τρίγωνο BMC

$$\text{έχω: } \frac{b^2}{4} = m_b^2 + a^2 - 2a\sqrt{m_b^2 - \frac{h_a^2}{4}} \quad \text{Γιά } m_b = \sqrt{2} \text{ καί } h_a = 2 \text{ έχω:}$$

$b^2 = 4(a^2 - 2a + 2) = 4[(a-1)^2 + 1]$ Όμως $b \cdot c = 2R \cdot h_a \Leftrightarrow b \cdot c = 4R$ καί

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \quad \text{Άρα} \quad a^2 + \frac{16R^2}{b^2} = 4 + \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow a^2 \cdot b^2 + 16R^2 = 4b^2 + \frac{b^4}{2} \Leftrightarrow$$

$$4a^2[(a-1)^2 + 1] + 16R^2 = 16[(a-1)^2 + 1] + 8[(a-1)^2 + 1]^2 \quad \text{θέτω } a - 1 = t$$

η εξίσωση γίνεται: $(t+1)^2(t^2+1) + 4R^2 = 4(t^2+1) + 2(t^2+1)^2 \Leftrightarrow$

$$t^4 - 2t^3 + 6t^2 - 2t + 5 - 4R^2 = 0 \quad \text{μέ } 2R > m_b \text{ καί } 2R > h_a$$

Γιά $R^2 = \dfrac{11}{4}$ έχω: $t^4 - 2t^3 + 6t^2 - 2t - 6 = 0$

το οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο μέ αναλλοίωτες $g_2 = -4$ καί $g_3 = -\dfrac{21}{4}$

Η επιλύουσα τριτοβάθμια εξίσωση της είναι:

$$4l^3 + 4l - \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow 2(2l)^3 + 8(2l) - 21 = 0. \quad \text{Θέτω } 2l = \frac{1}{y}$$

η εξίσωση γίνεται: $21y^3 - 8y^2 - 2 = 0$ πού δεν έχει ρητή ρίζα.

Αναφορές

[Τζα10] Τζανάκης, N.: *Σημειώσεις Θεωρίας Σωμάτων.* Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2010.

[Fur37] Fursenko, V.B.: *Lexicographical account of constructional problems of triangle geometry.* Mathematics in school (in Russian), 5:4–30, 1937.

[Kle97] Klein, Felix: *Famous Problems of Elementary Geometry.* Ginn and Company, Boston, 1897.

[MP94] Mironescu, P. and L. Panaitopol: *The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths.* Amer. Math. Monthly, 101:58–60, 1994.

[94] John Fraleigh: *Εισαγωγή στην Άλγεβρα.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.