



**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**QUASIFUCHSIAN ΟΜΑΔΕΣ ΤΟΥ ΤΡΥΠΗΜΕΝΟΥ  
ΤΟΠΟΥ**

**ΓΙΑΝΝΗΣ ΛΙΟΚΑΛΟΣ**

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2002**

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο *τρυπημένος τόρος*  $\mathcal{T}_1$  είναι τοπολογικά ο τόρος μείον ένα σημείο. Στην εργασία αυτή μελετάμε τις διακριτές υποομάδες  $G \subset PSL(2, \mathbb{R})$  που είναι τέτοιες ώστε το πηλίκο  $\mathbb{H}^2/G$  να είναι ομοιομορφικό με τον  $\mathcal{T}_1$ . Μία τέτοια  $G$  παράγεται από δύο υπερβολικές ισομετρίες  $U, V \in G$ , τέτοιες ώστε ο μεταθέτης τους  $[U, V] = UVU^{-1}V^{-1}$  να είναι παραβολικός. Η τρύπα αντιστοιχεί στο σταθερό σημείο του παραβολικού μεταθέτη και είναι συνεπώς ένα σημείο στο άπειρο.

Ένα οποιοδήποτε ζεύγος απλών κλειστών καμπυλών  $(a, b)$  στον  $\mathcal{T}_1$  που τέμνονται ακριβώς μία φορά, είναι γεννήτορες της ελεύθερης ομάδας  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$ , της θεμελιώδους ομάδας του  $\mathcal{T}_1$ . Το ζεύγος  $(a, b)$  με έναν προσανατολισμό σε κάθε καμπύλη, ονομάζεται *marking* του  $\mathcal{T}_1$ .

Ορίζουμε *Fuchsian* χώρο του  $\mathcal{T}_1$ , που συμβολίζουμε  $\mathcal{F}$ , τον χώρο όλων των 1-1 ομομορφισμών  $p : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  modulo συζυγίας στην  $PSL(2, \mathbb{R})$ , με διακριτή εικόνα  $G$ , που διατηρούν τον προσανατολισμό του marking και είναι τέτοιοι ώστε  $\mathbb{H}^2/G \approx \mathcal{T}_1$ . Την ομάδα  $G$ , μαζί με την απεικόνιση  $p$ , θα την λέμε *marked fuchsian* ομάδα του *τρυπημένου τόρου*.

Ο Fuchsian χώρος  $\mathcal{F}$ , περιέχεται στον γενικότερο χώρο αναπαραστάσεων  $AH(\mathcal{T}_1)$  που ορίζουμε ως

$$AH(\mathcal{T}_1) = \{[p] : p : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})\},$$

όπου  $[p]$  συμβολίζουμε μία κλάση συζυγίας στην  $PSL(2, \mathbb{C})$  του 1-1 ομομορφισμού  $p$  με διακριτή εικόνα  $G \subset PSL(2, \mathbb{C})$ , έτσι ώστε ο μεταθέτης των γεννητόρων της  $p(\pi_1(\mathcal{T}_1))$  να είναι παραβολικός.

Εξετάζουμε ακόμα τον Quasifuchsian χώρο του  $\mathcal{T}_1$   $\mathcal{QF}$ , που είναι το υποσύνολο του  $AH(\mathcal{T}_1)$  που αποτελείται από τις  $[p] \in AH(\mathcal{T}_1)$  που διατηρούν τον προσανατολισμό του marking και το πηλίκο  $\mathbb{H}^3/G$  είναι ομοιομορφικό με την υπερβολική 3-πολλαπλότητα  $M = \mathcal{T}_1 \times (-1, 1)$ . Μία τέτοια  $G$ , μαζί με την  $p$ , ονομάζεται *marked quasifuchsian* ομάδα του *τρυπημένου τόρου*.

Ο Fuchsian χώρος  $\mathcal{F}$  περιέχεται στον  $\mathcal{QF}$ .

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε ακριβώς (μέχρι συζυγίας στην  $PSL(2, \mathbb{C})$ ) μία marked quasifuchsian ομάδα του *τρυπημένου τόρου*, και συνεπώς να έχουμε μία εικόνα για τον χώρο των marked quasifuchsian ομάδων του *τρυπημένου τόρου*  $\mathcal{QF}$ , μέσω κάποιων γεωμετρικών αναλλοίωτων που θα ονομάσουμε *pleating invariants*.

Μία quasifuchsian ομάδα του *τρυπημένου τόρου*  $G$ , δρα γνήσια ασυνεχώς στο  $\mathbb{H}^3$  και ο χώρος πηλίκο  $\mathbb{H}^3/G$  είναι μία υπερβολική 3-πολλαπλότητα ομοιομορφική με την  $\mathcal{T}_1 \times (-1, 1)$ . Το *οριακό σύνολο*  $\Lambda(G)$  της  $G$  είναι μία καμπύλη Jordan και το συμπλήρωμά του στο  $\partial\mathbb{H}^3$  ονομάζεται *σύνολο ασυνέχειας*, που συμβολίζουμε  $\Omega(G)$ .

Αν  $G \in \mathcal{QF} - \mathcal{F}$ , τότε το σύνολο ασυνέχειας  $\Omega(G)$  αποτελείται από δύο μη-κενές συνεκτικές συνιστώσες  $\Omega^\pm$  και οι  $\Omega^\pm/G$  είναι επιφάνειες ομοιομορφικές με τον  $\mathcal{T}_1$ . Αν  $G \in \mathcal{F}$ , τότε τα  $\Omega^\pm$  είναι κυκλικοί δίσκοι.

Η κυρτή θήκη  $C$  του οριακού συνόλου της  $G$  είναι  $G$ -αναλλοίωτο σύνολο στον  $\mathbb{H}^3$ . Το  $C/G$  ονομάζεται *κυρτός πυρήνας* της  $G$ . Αν η  $G$  είναι quasifuchsian αλλά όχι fuchsian, τότε το  $\partial C/G$  αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες  $\partial C^\pm/G$  που

είναι ομοιομορφικές με τον  $\mathcal{T}_1$ . Κάθε μία από αυτές είναι επιφάνεια τσακισμένη κατά μήκος μίας geodesic lamination που ονομάζουμε *pleating locus* της  $G$ .

Στο κεφάλαιο 3, ορίζουμε τον τοπολογικό χώρο των geodesic laminations  $\mathcal{GL}$  ως το σύνολο των laminations των οποίων τα φύλλα είναι γεωδαισιακές στον  $\mathcal{T}_1$ . Μία measured lamination  $\mu$  είναι μία geodesic lamination  $|\mu|$ , που ονομάζουμε φορέα της  $\mu$ , μαζί με ένα εγκάρσιο μέτρο  $\mu$ . Το σύνολο των measured laminations στον  $\mathcal{T}_1$  το συμβολίζουμε  $\mathcal{ML}$ . Ένα ειδικό υποσύνολο του  $\mathcal{ML}$ , είναι το σύνολο των ρητών measured laminations  $\mathcal{ML}_{\mathbb{Q}}$ . Αν μία  $\mu$  ανήκει στο  $\mathcal{ML}_{\mathbb{Q}}$  τότε είναι της μορφής  $\mu = k\delta_\gamma$ ,  $k > 0$  όπου  $\gamma$  είναι μία απλή κλειστή γεωδαισιακή στον  $\mathcal{T}_1$  και με  $\delta_\gamma$  συμβολίζουμε το μέτρο dirac της  $\gamma$ . Δύο measured laminations  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$  λέγονται προβολικά ισοδύναμες αν  $|\mu| = |\nu|$  και  $\mu = k\nu$ ,  $k > 0$ . Συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας της  $\mu$  με  $[\mu]$  και ορίζουμε το σύνολο  $\mathcal{PML}$  ως το σύνολο όλων των προβολικών κλάσεων ισοδυναμίας στον  $\mathcal{T}_1$ .

Στο κεφάλαιο 5, ορίζουμε το μήκος μίας measured lamination σε μία υπερβολική επιφάνεια και σε μία υπερβολική 3-πολλαπλότητα. Αν  $l_\mu$  είναι το μήκος της  $\mu \in \mathcal{ML}$ , τότε ονομάζουμε *προβολική κλάση* του ζεύγους  $(\mu, l_\mu)$  το σύνολο

$$[(\mu, l_\mu)] = \{(k\mu, kl_\mu) \in \mathcal{ML} \times \mathbb{R}^+ : k > 0\}.$$

Αν οι επιφάνειες  $\partial C^\pm / G$  είναι τσακισμένες κατά μήκος κάποιων laminations  $pl^\pm$  αντίστοιχα, ορίζουμε τα *pleating invariants* να είναι οι προβολικές κλάσεις των ζευγών  $[(\mu^\pm, l_\mu^\pm)]$  για  $\mu \in [pl^\pm]$ . Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της εργασίας είναι το ακόλουθο:

*‘Μία quasifuchsian ομάδα του τρυπημένου τόρου  $G \in \mathcal{QF} - \mathcal{F}$  καθορίζεται πλήρως, μεχρι συζυγίας στην  $PSL(2, \mathbb{C})$  από τα αντίστοιχα pleating invariants.’*

Σημειώνουμε εδώ ότι κάθε σημείο  $q \in \mathcal{QF}$ , αντιστοιχεί σε μία κλάση συζυγίας quasifuchsian ομάδων του τρυπημένου τόρου. Η αρχική ιδέα για να φτάσουμε στο αποτέλεσμά μας, είναι να διαμερίσουμε τον  $\mathcal{QF}$  σε υποσύνολα που ορίζουμε ως εξής: Αν  $(\mu, \nu) \in \mathcal{ML} \times \mathcal{ML}$  ονομάζουμε *pleating planes* τα σύνολα

$$\mathcal{P}_{\mu, \nu} = \{q \in \mathcal{QF} : [pl^+(q)] = [\mu], [pl^-(q)] = [\nu]\}.$$

Δεδομένου ότι αν  $q \in \mathcal{QF} - \mathcal{F}$ , οι επιφάνειες  $\partial C^\pm / G$ , όπου  $G = G(q)$ , είναι τσακισμένες κατά μήκος κάποιων measured laminations, τα  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$  διαμερίζουν τον  $\mathcal{QF} - \mathcal{F}$ .

Τα σύνολα

$$\mathcal{P}_{\mu, \nu, c} = \{q \in \mathcal{P}_{\mu, \nu} : l_\mu(q) = c\}$$

ονομάζονται *pleating rays* και είναι τέτοια ώστε

$$\mathcal{P}_{\mu, \nu} = \bigcup_{c \in \mathbb{R}^+} \mathcal{P}_{\mu, \nu, c}.$$

Συνεπώς ανάγουμε την μελέτη των pleating planes  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$  στην μελέτη των  $\mathcal{P}_{\mu, \nu, c}$ .

Η ιδέα αυτή, προέρχεται από την διαμέριση του fuchsian χώρου  $\mathcal{F}$  σε κάποια ειδικά υποσύνολά του. Στο κεφάλαιο 8, κάνουμε μία περιγραφή της εικόνας αυτής του  $\mathcal{F}$ . Συγκεκριμένα, ο  $\mathcal{F}$  είναι ομοιομορφικός με τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο  $D$  και συμπαγοποιείται με την προσθήκη του συνόλου  $\mathcal{PML}$  που είναι ομοιομορφικό με τον μοναδιαίο κύκλο  $S^1$ . Ορίζουμε την *earthquake παραμόρφωση* ως προς μία  $\mu \in \mathcal{ML}$ ,

η οποία επάγει έναν ισομορφισμό  $\mathcal{E}_\mu(t)$  στο επίπεδο των fuchsian ομάδων. Οι ισομορφισμοί αυτοί, είναι συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής  $t \in \mathbb{R}$ , και δεδομένου ενός βασικού σημείου  $p \in \mathcal{F}$ , ορίζουμε τα *earthquake paths*

$$\mathcal{E}_\mu^p = \{\mathcal{E}_\mu(t)(p) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Τα earthquake paths είναι τα σύνολα των εικόνων των ισομορφισμών, και συνεπώς αντιστοιχούν σε σύνολα από fuchsian ομάδες του τρυπημένου τόρου. Τα earthquake paths είναι ομοιομορφικά με ορόκυκλους στο  $D$ . Αν  $(\mu, \nu) \in \mathcal{ML} \times \mathcal{ML}$ , τότε κάνοντας earthquake παραμόρφωση ως προς την  $\mu$ , η συνάρτηση μήκους  $l_\mu$  περιορισμένη στο earthquake path  $\mathcal{E}_\mu^p$  είναι σταθερή. Μεταβάλλεται όμως το μήκος της  $\nu$ ,  $l_\nu$ . Η συνάρτηση μήκους  $l_\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$  περιορισμένη στο earthquake path  $\mathcal{E}_\mu^p(t_\mu)$  έχει ελάχιστο, και ορίζουμε τα σύνολα

$$\mathcal{F}_{\mu, \nu} = \{p \in \mathcal{F} : \frac{dl_\nu}{dt_\mu}(p) = 0\},$$

που ονομάζουμε *critical lines*. Οι critical lines είναι ομοιομορφικές με υπερβολικές γεωδαισιακές στο  $D$ , και τα σύνολα  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$  είναι οι επεκτάσεις τους στον  $\mathcal{QF}$ .

Ο Fuchsian χώρος  $\mathcal{F}$  δέχεται δύο διαφορετικές foliations από τα earthquake paths και από τις critical lines που τέμνονται μεταξύ τους εγκάρσια. Αυτή την εικόνα θέλουμε να επεκτείνουμε και στον  $\mathcal{QF}$ .

Η γενίκευση στον  $\mathcal{QF}$  της earthquake παραμόρφωσης στον  $\mathcal{QF}$ , ονομάζεται *quakebend παραμόρφωση*. Η quakebend παραμόρφωση είναι σύνθεση μίας earthquake παραμόρφωσης και μίας διαδικασίας τσακίσματος κατά μήκος των φύλλων μίας geodesic lamination που την ονομάζουμε *bending* παραμόρφωση. Στα κεφάλαια 9 και 10, περιγράφουμε αυτές τις παραμορφώσεις. Μία quakebend παραμόρφωση επάγει έναν ισομορφισμό στο επίπεδο των quasifuchsian ομάδων του τρυπημένου τόρου. Οι ισομορφισμοί είναι συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής  $\tau \in \mathbb{C}$  και ορίζουμε το *quakebend plane* με βασικό σημείο το  $q \in \mathcal{QF}$ ,  $Q_\mu^q$ , ως το σύνολο των εικόνων των ισομορφισμών, για τις διαφορετικές τιμές του  $\tau \in \mathbb{C}$ . Γενικά το  $Q_\mu^q$  περιέχεται στο  $AH(\mathcal{T}_1)$ .

Στο κεφάλαιο 6, ορίζουμε το *μιγαδικό μήκος*  $\lambda$  για μία measured lamination ως ολόμορφη συνάρτηση στον  $\mathcal{QF}$ . Εισάγουμε τις *μιγαδικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες* για τον  $\mathcal{QF}$ , σύμφωνα με τις οποίες, ο  $\mathcal{QF}$  εμβυθίζεται ολόμορφα σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}^2$ . Ειδικότερα, αν  $\mu \in \mathcal{ML}$  και  $q \in \mathcal{QF}$  τότε  $\lambda_\mu(q) \in \mathbb{C}$ . Το μεγάλο βήμα για να φτάσουμε στο τελικό μας αποτέλεσμα, είναι η πρόταση 9.8 που αποδεικνύεται, σύμφωνα με την οποία:

‘Αν  $q \in \mathcal{QF}$  και είναι τέτοιο ώστε  $pl^+(q) = \mu$ , τότε  $\lambda_\mu(q) \in \mathbb{R}$ .’

Στόχος μας, είναι να φτιάξουμε μια εικόνα για τα pleating planes  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$ . Στο κεφάλαιο 11, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τα *Limit pleating Theorem* και *Local Pleating Theorem*. Χρησιμοποιώντας τα, στο κεφάλαιο 12 αποδεικνύουμε ότι για  $(\mu, \nu) \in \mathcal{ML} \times \mathcal{ML}$ , η κλειστότητα του  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$  στον  $\mathcal{QF}$  τέμνει τον  $\mathcal{F}$  στην critical line  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$ . Τα  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$  και  $\mathcal{P}_{\nu, \mu}$  είναι ξένα μεταξύ τους υποσύνολα με κοινό σύνορο την  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$ . Θεωρούμε το earthquake path  $\mathcal{E}_{\mu, c}$  στον  $\mathcal{F}$  ως προς την  $\mu \in \mathcal{ML}$  που είναι τέτοιο ώστε  $l_\mu(p) = c$  για  $c > 0$  και αντίστοιχα το quakebend plane  $Q_{\mu, c}$  ως προς

την  $\mu \in \mathcal{ML}$  που είναι τέτοιο ώστε  $\lambda_\mu(q) = c$  για  $c > 0$ . Ορίζουμε ακόμα την συνάρτηση  $f_{\mu,\nu} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  με τύπο  $f_{\mu,\nu}(c) = l_\nu(p(\mu, \nu, c))$ , όπου  $p(\mu, \nu, c)$  είναι το σημείο ελαχίστου της συνάρτησης μήκους  $l_\nu$  περιορισμένης στο  $\mathcal{E}_{\mu,c}$ . Αποδεικνύουμε το θεώρημα 12.7 που είναι το ακόλουθο:

‘Έστω  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$  με  $i(\mu, \nu) > 0$  και έστω  $c > 0$ . Τότε το σύνολο  $\mathcal{P}_{\mu,\nu,c} \subset \mathcal{QF}$ , είναι μη κενή, συνεκτική, μη ιδιάζουσα συνιστώσα του  $\mathbb{R}$ -locus του περιορισμού της  $\lambda_\nu$  στο  $\mathcal{Q}_{\mu,c}$ . Ο περιορισμός της  $\lambda_\nu$  στο  $\mathcal{P}_{\mu,\nu,c}$  είναι αμφιδιαφόριση επί της εικόνας της  $(0, f_{\mu,\nu}(c)) \subset \mathbb{R}^+$ .

Έστω τώρα η συνάρτηση  $\mathcal{L}_{\mu,\nu} : \mathcal{QF} \rightarrow \mathbb{C}^2$  με τύπο  $\mathcal{L}_{\mu,\nu}(q) = (\lambda_\mu(q), \lambda_\nu(q))$ . Αποδεικνύουμε ότι ο  $\mathbb{R}^2$ -locus της  $\mathcal{L}_{\mu,\nu}$  στον  $\mathcal{QF}$ , δηλαδή τα  $q \in \mathcal{QF}$  για τα οποία  $\mathcal{L}_{\mu,\nu}(q) \in \mathbb{R}^2$ , είναι το σύνολο  $\mathcal{P}_{\mu,\nu} \cup \mathcal{P}_{\nu,\mu} \cup \mathcal{F}$ .

Συνδυάζοντας αυτά τα αποτελέσματα, δείχνουμε το θεώρημα 12.9:

‘Έστω  $(\mu, \nu)$  δύο *measured laminations* στον  $\mathcal{T}_1$  τέτοιες ώστε  $i(\mu, \nu) > 0$ . Τότε το σύνολο  $\mathcal{P}_{\mu,\nu} \subset \mathcal{QF}$  στο οποίο  $[pl^+] = [\mu]$ ,  $[pl^-] = [\nu]$  είναι μία μη κενή, συνεκτική, μη ιδιάζουσα συνιστώσα του  $\mathbb{R}^2$ -locus στο  $\mathcal{QF} - \mathcal{F}$  της συνάρτησης  $\mathcal{L}_{\mu,\nu}$ . Ο περιορισμός της  $\mathcal{L}_{\mu,\nu}$  στο  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$  είναι αμφιδιαφόριση επί της ανοιχτής περιοχής κάτω από το γράφημα της συνάρτησης  $f_{\mu,\nu}$  στο  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Το θεώρημα αυτό μας οδηγεί απευθείας στο βασικό μας θεώρημα που αποδεικνύει ότι μία quasifuchsian ομάδα του τρυπημένου τόρου καθορίζεται μοναδικά μέχρι συζυγίας στην  $PSL(2, \mathbb{C})$ , από τα pleating invariants της.

Τα θεωρήματα 12.9 και 12.10 δείχνουν ότι έχουμε ένα σύστημα συντεταγμένων για τον  $\mathcal{QF} - \mathcal{F}$ . Το θεώρημα 12.10 δείχνει ότι η συνάρτηση  $\mathcal{L}_{\mu,\nu}$  είναι 1-1 και το θεώρημα 12.9 προσδιορίζει την εικόνα της.

Στο κεφάλαιο 13, εξετάζουμε την περίπτωση κατά την οποία, κρατάμε σταθερή την pleating lamination στο ένα άκρο του συνόρου της κυρτής θήκης ενώ μεταβάλλουμε την pleating lamination στην άλλη μεριά.

Μία πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση, είναι οι περίπτωση των ρητών pleating planes  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$ ,  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Q}}$ . Στο θεώρημα 11.16, αποδεικνύουμε ότι τα ρητά pleating planes είναι πυκνά στον  $\mathcal{QF}$ . Το θεώρημα 12.9 έχει μία ειδική μορφή για τα ρητά pleating planes, που σημειώνουμε σαν θεώρημα 14.1:

‘Έστω  $\delta_\gamma, \delta_{\gamma'}$  ρητές laminations που αναπαριστώνται από μη-συζυγή στοιχεία  $V, V' \in G$ . Τότε τα  $\mathcal{P}_{\gamma,\gamma'}$  και  $\mathcal{P}_{\gamma',\gamma}$  είναι οι μοναδικές συνεκτικές συνιστώσες του  $\mathbb{R}^2$ -locus της συνάρτησης  $TrV \times TrV'$  στον  $\mathcal{QF} - \mathcal{F}$  των οποίων οι κλειστότητες τέμνουν τον  $\mathcal{F}$  κατά μήκος της  $\mathcal{F}_{\gamma,\gamma'}$ . Στην ένωση  $\mathcal{P}_{\gamma,\gamma'} \cup \mathcal{P}_{\gamma',\gamma}$  η συνάρτηση  $TrV \times TrV'$  είναι μη-ιδιάζουσα και το σύνολο της ένωσης  $\mathcal{P}_{\gamma,\gamma'} \cup \mathcal{P}_{\gamma',\gamma}$  μπορεί να υπολογιστεί, λύνοντας τις εξισώσεις  $TrV = \pm 2$  και  $TrV' = \pm 2$  στην ένωση.

Το θεώρημα αυτό μας επιτρέπει να έχουμε υπολογιστικά αποτελέσματα. Ειδικότερα, θα δούμε στο κεφάλαιο 14 πώς να υπολογίσουμε την θέση των ρητών pleating planes και των critical lines.

Το κείμενο αυτό, στηρίζεται στο άρθρο των Caroline Series και Linda Keen με τίτλο Pleating invariants for punctured torus groups που δημοσιεύτηκε τον Μάιο του 2002.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. <b>ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ</b>	3
1.1. Υπερβολικές ισομετρίες στο $\mathbb{H}^2$ και στο $\mathbb{H}^3$	3
1.2. Υπερβολικές επιφάνειες και υπερβολικές 3-πολλαπλότητες	5
2. <b>Ο ΤΡΥΠΗΜΕΝΟΣ ΤΟΡΟΣ</b>	8
2.1. Ο Τρυπημένος τόρος και οι ομάδες του τρυπημένου τόρου.	8
2.2. Η standard κανονικοποίηση	9
3. <b>LAMINATIONS</b>	10
3.1. Οι χώροι $\mathcal{GL}$ , $\mathcal{ML}$ , $\mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$ , και $\mathcal{PML}$	10
3.2. Σύγκριση των τοπολογιών των $\mathcal{ML}$ , $\mathcal{GL}$ .	12
4. <b>Ο FUCHSIAN και Ο QUASIFUCHSIAN ΧΩΡΟΣ ΤΟΥ <math>\mathcal{T}_1</math></b>	13
5. <b>ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΜΙΑΣ LAMINATION</b>	15
6. <b>ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΜΗΚΟΣ</b>	17
6.1. Μιγαδικό μήκος μιας λοξοδρομικής ισομετρίας	17
7. <b>ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ <math>\mathcal{F}</math> ΚΑΙ <math>\mathcal{QF}</math></b>	20
7.1. Οι Fenchel-Nielsen συντεταγμένες για τον $\mathcal{F}$ .	20
7.2. Οι μιγαδικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες για τον $\mathcal{QF}$ .	22
8. <b>ΜΙΑ ΕΙΚΟΝΑ ΓΙΑ ΤΟΝ FUCHSIAN ΧΩΡΟ ΤΟΥ <math>\mathcal{T}_1</math></b>	24
8.1. Earthquakes και Critical Lines	24
8.2. Αποτελέσματα για τον $\mathcal{F}$ .	28
9. <b>BENDING</b>	32
9.1. Μέτρο κάμψης και Pleated Surfaces	32
9.2. Pleating Varieties	37
9.3. Μιγαδικό μήκος και Pleating Varieties	38
10. <b>QUAKEBENDS και QUAKEBEND PLANES</b>	39
10.1. Quakebends	39
10.2. Quakebend Planes	41
11. <b>ΔΥΟ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ</b>	44
11.1. Υλοποιήσιμες γεωδαισιακές.	44
11.2. Το Limit Pleating Theorem	45
11.3. Το Local Pleating Theorem	56
11.4. Συνέπειες του local pleating theorem	60
12. <b>PLEATING RAYS ΚΑΙ Η ΔΟΜΗ ΤΩΝ PLEATING PLANES</b>	62
12.1. Pleating rays	63
12.2. Pleating planes και Pleating invariants	72
13. <b><math>\mathcal{BM}</math>-SLICES</b>	74

14. PHTA PLEATING PLANES



## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

### 1.1. Υπερβολικές ισομετρίες στο $\mathbb{H}^2$ και στο $\mathbb{H}^3$ .

Έστω  $\mathbb{H}^2 = \{x + iy : y > 0\}$  το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου για το υπερβολικό επίπεδο. Αν  $z, w \in \mathbb{H}^2$  και  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  μία  $C^1$  καμπύλη τέτοια ώστε  $\gamma(a) = z$ ,  $\gamma(b) = w$ , ορίζουμε *μήκος της  $\gamma$*  να είναι:

$$\|\gamma\|_2 = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}[\gamma(t)]} dt$$

Η συνάρτηση  $d : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  με τύπο  $d(z, w) = \inf \|\gamma\|_2$  με το infimum ως προς όλες τις  $\gamma$  που ενώνουν τα  $z, w$  είναι καλά ορισμένη και ο  $(\mathbb{H}^2, d)$  είναι μετρικός χώρος.

Για το υπερβολικό επίπεδο, χρησιμοποιούμε και το μοντέλο του δίσκου  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Η μετρική στο  $D$  προκύπτει από το διαφορικό  $\frac{2|ds|}{1-|z|^2}$ , δηλαδή αν  $z, w \in D$  και  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  μία  $C^1$  καμπύλη που ενώνει τα  $z, w$ , τότε

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt,$$

και ορίζουμε  $d(z, w) = \inf_\gamma \|\gamma\|$ , ως προς όλες τις  $\gamma$  που ενώνουν τα  $z, w$ . Οι καμπύλες ελαχίστου μήκους λέγονται *γεωδαισιακές* και στον  $\mathbb{H}^2$  έχουν τη μορφή ημιπεριφερειών ευκλειδίων κύκλων, με κέντρο στον άξονα  $\text{Im}(z) = 0$ , είτε ευκλειδίων ημιευθειών της μορφής  $c + iy$ ,  $y \in \mathbb{R}^+$  για  $c \in \mathbb{R}$ . Οι γεωδαισιακές στο  $D$ , έχουν την μορφή τόξων περιφερειών ευκλειδίων κύκλων με κέντρο έξω από το  $D$  που τέμνουν το  $\partial D$  κάθετα, είτε είναι διάμετροι του  $D$ . Στο μοντέλο του δίσκου  $D$ , ένας *ορόκυκλος* είναι μία καμπύλη που έχει την μορφή ευκλειδίας περιφέρειας στο εσωτερικό του  $D$  και εφάπτεται σε ένα σημείο στο  $\partial D$ . Στο  $\mathbb{H}^2$ , ορόκυκλος ονομάζεται μία καμπύλη που έχει την μορφή ευκλειδίου κύκλου που εφάπτεται στο  $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Οι κύκλοι με σημείο επαφής το  $\infty$  είναι καμπύλες της μορφής  $\{z = x + iy : y = c\}$ .

Για τον υπερβολικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του άνω ημιχώρου,  $\mathbb{H}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ .

Όπως και στην περίπτωση του  $\mathbb{H}^2$ , ορίζουμε *μήκος μιας  $C^1$  καμπύλης  $\gamma$*

$$\|\gamma\|_3 = \int \frac{|\gamma'(t)|}{\gamma_3(t)} dt$$

όπου  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , και μετρική,  $d_3(z, w) = \inf \|\gamma\|_3$ , με το infimum ως προς όλες τις  $\gamma$  στον  $\mathbb{H}^3$  που ενώνουν τα  $z, w$ .

Για τον υπερβολικό χώρο χρησιμοποιούμε επίσης και το μοντέλο της μοναδιαίας 3 μπάλας

$$B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}.$$

Το σύνορο του υπερβολικού χώρου στο μοντέλο της  $B^3$ , ταυτίζεται με το  $\partial B^3 = S^2 \approx \widehat{\mathbb{C}}$ . Η αντίστοιχη υπερβολική μετρική στο μοντέλο του  $B^3$ , προκύπτει από το διαφορικό

$$ds_B^2 = \frac{4|dx|^2}{(1 - |x|^2)^2}.$$

Μία *ισομετρία του  $(\mathbb{H}^3, d_3)$* , είναι μία απεικόνιση  $g : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  τέτοια ώστε  $d_3(g(z), g(w)) = d_3(z, w)$  για κάθε ζεύγος  $z, w \in \mathbb{H}^3$ . Κάθε Möbius μετασχηματισμός της μορφής

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = \pm 1 \text{ με } a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

αντιστοιχεί μέσω της επέκτασης Poincaré (βλέπε σχέση 4.1.4 στο [1]) σε μία *ισομετρία του  $(\mathbb{H}^3, d_3)$* . Η ομάδα των *ισομετριών του  $(\mathbb{H}^3, d_3)$*  που διατηρούν τον προσανατολισμό  $Isom^+(\mathbb{H}^3)$  είναι *ισόμορφη με την  $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$* . Συγκεκριμένα η απεικόνιση

$$\Phi : PSL(2, \mathbb{C}) \rightarrow Isom^+(\mathbb{H}^3)$$

με τύπο

$$\Phi \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \left[ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right]$$

είναι *ισομορφισμός*.

Για τον  $\mathbb{H}^2$ , η ομάδα *ισομετριών που διατηρούν τον προσανατολισμό*, είναι *ισόμορφη με την  $PSL(2, \mathbb{R})$* . Αποδεικνύεται ότι κάθε διακριτή υποομάδα της  $PSL(2, \mathbb{R})$  δρα γνήσια ασυνεχώς στο  $\mathbb{H}^2$ .

Οι *ισομετρίες του  $\mathbb{H}^2(\mathbb{H}^3)$*  χωρίζονται σε τρεις βασικές κατηγορίες. Μία *ισομετρία λέγεται:*

*Παραβολική*, αν και μόνο αν έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο στο  $\partial\mathbb{H}^2(\mathbb{H}^3)$ .

*Υπερβολική (Λοξοδρομική)*, αν και μόνο αν έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία στο  $\partial\mathbb{H}^2(\mathbb{H}^3)$ .

*Ελλειπτική*, αν και μόνο αν έχει σταθερό σημείο στο εσωτερικό του  $\mathbb{H}^2(\mathbb{H}^3)$ .

Για μία *λοξοδρομική* *ισομετρία  $g$  του  $\mathbb{H}^3$* , ορίζουμε τον *άξονα  $Ax(g)$*  ως τη γεωδαισιακή με άκρα τα δύο σταθερά σημεία της  $g$ . Ο *άξονας* είναι  $g$ -*αναλλοίωτο σύνολο*. Μία *λοξοδρομική* *ισομετρία* είναι *σύνθεση*

μίας μετατόπισης (κατά μήκος του άξονα) και μίας στροφής (γύρω από τον άξονα). Αν μία λοξοδρομική ισομετρία δεν στρέφει, τότε λέγεται *καθαρά υπερβολική*. Αν η  $g$  είναι υπερβολική ισομετρία του  $\mathbb{H}^2$ , ορίζουμε τον άξονα  $Ax(g)$  της  $g$  ως την γεωδαισιακή του  $\mathbb{H}^2$  με άκρα τα δύο σταθερά σημεία της  $g$ . Μία υπερβολική ισομετρία είναι μία μετατόπιση κατά μήκος του  $Ax(g)$ . Έστω  $a, b$  τα σταθερά σημεία μιας λοξοδρομικής ή υπερβολικής ισομετρίας  $g$ . Τα  $g^n(z)$  για  $n \in \mathbb{Z}$  είναι διακριτά σημεία και τείνουν στα  $a, b$ . Αν  $g^n(z) \rightarrow a$  καθώς  $n \rightarrow +\infty$  (για  $z \neq b$ ), τότε το  $a$  λέγεται *ελκτικό σταθερό σημείο* για την  $g$  και το  $b$  *απωθητικό σταθερό σημείο*.

Δεδομένου ότι κάθε ισομετρία αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο της  $PSL(2, \mathbb{C})$ , υπάρχει και άλλος τρόπος να διακρίνουμε τις ισομετρίες. Συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο, που είναι το θεώρημα 3.4.3 του [1].

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1:** Έστω  $g \neq id$  μία ισομετρία που αντιστοιχεί στο  $V \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Η  $g$  λέγεται

- (α) Παραβολική, αν και μόνο αν  $Tr^2V = 4$
- (β) Ελλειπτική, αν και μόνο αν  $Tr^2V \in [0, 4)$
- (γ) Καθαρά υπερβολική, αν και μόνο αν  $Tr^2V \in (4, +\infty)$
- (δ) Λοξοδρομική, αν και μόνο αν  $Tr^2V \notin [0, +\infty)$

Για μία διακριτή υποομάδα  $G$  της  $PSL(2, \mathbb{C})$  ( $PSL(2, \mathbb{R})$ ), ορίζουμε την τροχιά ενός σημείου  $p \in \mathbb{H}^3$  ( $\mathbb{H}^2$ ) υπό τη δράση της  $G$ , να είναι το σύνολο  $G(p) = \{g(p) : g \in G\}$ . Κάθε διακριτή υποομάδα της  $PSL(2, \mathbb{C})$  ( $PSL(2, \mathbb{R})$ ), δρα γνήσια ασυνεχώς στο  $\mathbb{H}^3$  ( $\mathbb{H}^2$ ) και άρα το  $G(p)$  έχει σημεία συσσώρευσης στο  $\partial\mathbb{H}^3$  ( $\partial\mathbb{H}^2$ ), που λέγονται *οριακά σημεία*. Η κλειστότητα στο  $\hat{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{C}})$  του συνόλου των οριακών σημείων λέγεται *οριακό σύνολο* και συμβολίζεται  $\Lambda(G)$ . Το συμπλήρωμα του  $\Lambda(G)$  στο  $\hat{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{C}})$ , λέγεται σύνολο ασυνέχειας, και συμβολίζεται  $\Omega(G)$ .

## 1.2. Υπερβολικές επιφάνειες και υπερβολικές 3-πολλαπλότητες.

Έστω  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ανοιχτό και  $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  αναλυτική συνάρτηση. Η  $f$  λέγεται *σύμμορφη* αν διατηρεί τις γωνίες, αν δηλαδή για κάθε ζεύγος λείων καμπυλών  $\gamma_1, \gamma_2$  που τέμνονται στο  $\Omega$ , έχουμε ότι  $\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \angle(f(\gamma_1), f(\gamma_2))$ . Οι σύμμορφες απεικονίσεις απεικονίζουν ανοιχτούς δίσκους σε ανοιχτούς δίσκους, διατηρώντας τις γωνίες.

Έστω  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ανοιχτό και  $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Ο  $f$  λέγεται *quasiconformal* αν είναι φραγμένης

παραμόρφωσης, αν δηλαδή η ποσότητα

$$D_f(z) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max_{\theta} |f(z + r \exp(i\theta)) - f(z)|}{\min_{\theta} |f(z + r \exp(i\theta)) - f(z)|}$$

είναι φραγμένη στο  $\Omega$ . Γεωμετρικά, μία quasiconformal απεικόνιση απεικονίζει απειροστούς ανοιχτούς δίσκους σε ανοιχτές ελλείψεις.

Έστω τώρα  $G$  μία ομάδα ισομετριών του  $\mathbb{H}^2$ . Η  $G$  λέγεται *fuchsian* αν υπάρχει ένας  $G$ -αναλοίωτος δίσκος στον οποίο η  $G$  δρα γνήσια ασυνεχώς. Συνήθως, θεωρούμε σαν  $G$ -αναλοίωτο δίσκο ολόκληρο το  $\mathbb{H}^2$ . Η δράση μίας fuchsian ομάδας  $G$  στο  $\mathbb{H}^2$ , το διαμερίζει σε συνεκτικά υποσύνολα τέτοια ώστε καθένα από αυτά να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε τροχιά.

Οι fuchsian ομάδες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Μία fuchsian ομάδα  $G$  λέγεται *στοιχειώδης* αν έχει τουλάχιστον μία πεπερασμένη  $G$ -τροχιά. Το οριακό σύνολο μιας στοιχειώδους ομάδας είναι γνήσιο υποσύνολο του  $S^1$ . Αν η  $G$  δεν είναι στοιχειώδης, τότε  $\Lambda(G) = S^1$ . Μία μη στοιχειώδης fuchsian ομάδα, δεν περιέχει ελλειπτικά στοιχεία. Οι fuchsian ομάδες που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια, είναι οι λεγόμενες ομάδες τρυπημένου τόρου, που είναι μη στοιχειώδεις και συνεπώς δεν περιέχουν ελλειπτικά στοιχεία.

Μία υπερβολική επιφάνεια Riemann (ή μία υπερβολική 2-πολλαπλότητα) είναι ένας συνεκτικός χώρος Hausdorff  $\Sigma$  για τον οποίο υπάρχει μία οικογένεια χαρτών  $\{(\phi_j, U_j) : j \in J\}$  που ονομάζεται *άτλας της  $\Sigma$* , τέτοια ώστε:

- (α) η  $\{U_j : j \in J\}$  είναι μία ανοιχτή κάλυψη του  $\Sigma$
- (β) κάθε  $\phi_j$  είναι ομοιομορφισμός του  $U_j$  επί κάποιου ανοιχτού υποσυνόλου του  $\mathbb{H}^2$ , και
- (γ) αν  $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , τότε η αλλαγή συντεταγμένων  $\phi_i \circ (\phi_j)^{-1} : \phi_j(U_{ij}) \rightarrow \phi_i(U_{ij})$  είναι ισομετρία.

Μία υπερβολική 2-πολλαπλότητα  $\Sigma$  λέγεται *πλήρης* αν για όλα τα  $p \in \Sigma$  η γεωδαισιακή  $\gamma(t)$  στην επιφάνεια τέτοια ώστε  $\gamma(0) = p$ , είναι ορισμένη για όλες τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου  $t$ .

Ένας συνεκτικός χώρος Hausdorff  $M$  λέγεται *υπερβολική 3-πολλαπλότητα*, αν υπάρχει μία οικογένεια χαρτών  $\{(V_i, f_i) : i \in I\}$  που ονομάζεται *άτλας της  $M$*  τέτοια ώστε:

- (α) η  $\{V_i : i \in I\}$  είναι μία ανοιχτή κάλυψη του  $M$

(β) κάθε  $f_i$  είναι ομοιομορφισμός του  $V_i$  επί κάποιου ανοιχτού υποσυνόλου του  $\mathbb{H}^3$ , και  
 (γ) αν  $V_{ij} = V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , τότε η αλλαγή συντεταγμένων  $f_i \circ (f_j)^{-1} : f_j(V_{ij}) \rightarrow f_i(V_{ij})$  είναι ισομετρία.

Οι συναρτήσεις αλλαγής συντεταγμένων στους δύο παραπάνω ορισμούς, διατηρούν τον προσανατολισμό. Μάλιστα αποδεικνύεται ότι κάθε τέτοια συνάρτηση αλλαγής συντεταγμένων, είναι ο περιορισμός μίας ισομετρίας που διατηρεί τον προσανατολισμό.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2:** Έστω  $\Delta \subset \mathbb{H}^2$  και  $G$  μία fuchsian ομάδα που δρα στο  $\Delta$ . Ο χώρος πηλίκου  $\Delta/G$  είναι μία υπερβολική επιφάνεια Riemann.

Το παραπάνω αποδεικνύεται στο [1].

Για κάθε fuchsian ομάδα  $G$ , η επιφάνεια  $\Sigma = \mathbb{H}^2/G$  αποκτάει μία δομή μετρικού χώρου που προκύπτει από τον  $\mathbb{H}^2$  και ονομάζεται υπερβολική δομή της  $\Sigma$ .

Έστω τώρα μία fuchsian ομάδα  $G$  και  $f$  ένας quasiconformal ομοιομορφισμός τέτοιος ώστε για κάθε  $g \in G$  η  $fgf^{-1} \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Τότε η ομάδα  $G_0 = fGf^{-1}$  ονομάζεται quasifuchsian. Μία quasifuchsian ομάδα δρά γνήσια ασυνεχώς στο  $\mathbb{H}^3$ . Μία fuchsian ομάδα είναι quasifuchsian. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Το παρακάτω, αποδεικνύεται στο [15].

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3:** Αν η  $G_0 \subset PSL(2, \mathbb{C})$  είναι quasifuchsian ομάδα που δρά στο  $\mathbb{H}^3$ , τότε ο χώρος πηλίκου  $\mathbb{H}^3/G_0$  είναι μία υπερβολική 3-πολλαπλότητα, ομοιομορφική με το  $\Sigma \times (-1, 1)$ .

Έστω  $\Sigma$  μία υπερβολική επιφάνεια και  $\pi_1(\Sigma)$  η θεμελιώδης ομάδα της  $\Sigma$ . Ορίζουμε τον χώρο των αναπαραστάσεων της  $\Sigma$ ,  $\mathfrak{R}(\pi_1(\Sigma); PSL(2, \mathbb{C}))$ , να είναι το σύνολο όλων των 1-1 ομομορφισμών  $f : \pi_1(\Sigma) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$  με διακριτή εικόνα  $G$  τέτοια ώστε  $\Sigma \times (-1, 1) \approx \mathbb{H}^3/G$ . Στον χώρο των αναπαραστάσεων  $\mathfrak{R}(\pi_1(\Sigma); PSL(2, \mathbb{C}))$ , ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας ως εξής: Δύο αναπαραστάσεις  $f_1, f_2$  είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν είναι συζυγείς στην  $PSL(2, \mathbb{C})$ , αν δηλαδή υπάρχει  $V \in PSL(2, \mathbb{C})$  τέτοια ώστε  $f_1(\pi_1(\Sigma)) = V^{-1}f_2(\pi_1(\Sigma))V$ . Ορίζουμε τον quasifuchsian χώρο της  $\Sigma$   $\mathcal{QF}(\Sigma)$ , ως τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας στο  $\mathfrak{R}(\pi_1(\Sigma); PSL(2, \mathbb{C}))$ . Αν  $G_0 = f(\pi_1(\Sigma))$  τότε η  $G_0$  είναι quasifuchsian και θα θεωρούμε την κλάση συζυγίας των αναπαραστάσεων  $f$  ως σημείο του  $\mathcal{QF}(\Sigma)$ .

Το οριακό σύνολο  $\Lambda(G_0)$  μίας quasifuchsian ομάδας είναι ομοιομορφικό με κύκλο είτε με κάποιο γνήσιο υποσύνολο του κύκλου. Το σύνολο

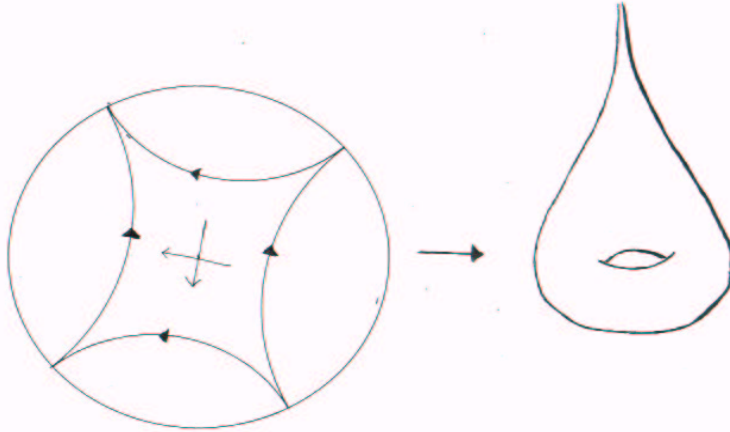
ασυνέχειας  $\Omega(G_0)$  είναι ένωση δύο συνεκτικών συνιστωσών  $\Omega^\pm(G_0)$  και οι  $\Omega^\pm/G_0$  είναι επιφάνειες Riemann ομοιομορφικές με την  $\Sigma$ . Η  $\Omega^+/G_0$  έχει αντίθετο προσανατολισμό από την  $\Omega^-/G_0$ .

Ο *Fuchsian* χώρος  $\mathcal{F}(\Sigma)$  είναι το υποσύνολο του  $\mathcal{QF}(\Sigma)$  στο οποίο τα  $\Omega^\pm$  είναι δίσκοι. Ένα σημείο στον Fuchsian χώρο, είναι μία κλάση συζυγίας στο  $\mathfrak{R}(\Sigma; PSL(2, \mathbb{R}))$ . Ένα σημείο  $p \in \mathcal{F}$  αντιστοιχεί σε μία υπερβολική δομή  $\Sigma(p) = \mathbb{H}^2/f(\pi_1(\Sigma))$  της  $\Sigma$  και η  $f(\pi_1(\Sigma))$  είναι μία υποομάδα της  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Η επιφάνεια  $\Sigma$ , εκτός από την υπερβολική δομή που κληρονομεί από τον  $\mathbb{H}^2$  κληρονομεί και μία μιγαδική δομή από το  $\mathbb{C}$ . Έστω λοιπόν η  $\Sigma$  με κάποια μιγαδική δομή. Ορίζουμε το σύνολο  $Diff^+(\Sigma)$  ως το σύνολο όλων των αμφιδιαφορίσεων  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  που διατηρούν τον προσανατολισμό. Στο  $Diff^+(\Sigma)$  ορίζουμε την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας: Αν  $f_1, f_2 \in Diff^+(\Sigma)$ , τότε  $f_1 \sim f_2$  αν και μόνο αν η  $f_1 \circ f_2^{-1}$  είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση. Ο χώρος  $Diff^+(\Sigma)/\sim$  είναι ο χώρος όλων των μιγαδικών (ή σύμμορφων δομών) της  $\Sigma$  και ονομάζεται *Teichmüller* χώρος της  $\Sigma$ , που θα συμβολίζουμε  $T(\Sigma)$ .

## 2. Ο ΤΡΥΠΗΜΕΝΟΣ ΤΟΡΟΣ

### 2.1. Ο Τρυπημένος τόρος και οι ομάδες του τρυπημένου τόρου.



Σχήμα 1. Η δράση στο υπερβολικό επίπεδο  $D$  μίας διακριτής υποομάδας  $G$  της  $PSL(2, \mathbb{R})$  που παράγει τον  $T_1$ .

Έστω το υπερβολικό επίπεδο  $\mathbb{H}^2$  και δύο υπερβολικές ισομετρίες  $V, W$  που παράγουν μία υποομάδα  $G$  της  $PSL(2, \mathbb{R})$ , τέτοιες ώστε ο μεταθέτης

τους  $K = [V, W] = VWV^{-1}W^{-1}$  να είναι παραβολικός. Τότε η επιφάνεια που προκύπτει από την δράση της ομάδας στο  $\mathbb{H}^2$ , είναι ο *τρυπημένος τόρος* (*punctured torus*) δηλαδή ο τόρος με μία τρύπα, που είναι μία πλήρης υπερβολική επιφάνεια. Θα τον συμβολίζουμε με  $\mathcal{T}_1 = \mathbb{H}^2/G$ . Η τρύπα αντιστοιχεί στο σταθερό σημείο του παραβολικού μεταθέτη και ονομάζεται *cusp*.

Δίνουμε έναν προσανατολισμό στον  $\mathcal{T}_1$ . Οποιοδήποτε ζεύγος απλών κλειστών καμπυλών που τέμνονται ακριβώς μια φορά, είναι γεννήτορες της  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$ . Έστω  $(a, b)$  ένα τέτοιο διατεταγμένο ζεύγος γεννητόρων της ελεύθερης ομάδας  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$ , επιλεγμένων έτσι, ώστε ο μεταθέτης τους  $aba^{-1}b^{-1}$  να αναπαριστά μία καμπύλη γύρω από την τρύπα, που είναι θετικά προσανατολισμένη στο κομμάτι του  $\mathcal{T}_1$  που δεν περιέχει την τρύπα. Το ζεύγος  $(a, b)$  ονομάζεται *marking*.

Μία ομάδα του τρυπημένου τόρου, είναι μία διακριτή υποομάδα  $G \subset PSL(2, \mathbb{C})$ , που είναι η εικόνα μίας αναπαράστασης  $\rho$  της  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$  που διατηρεί τον προσανατολισμό, έτσι ώστε, η εικόνα της καμπύλης γύρω από την τρύπα να είναι παραβολική. Μία ομάδα του τρυπημένου τόρου  $G$  είναι μη στοιχειώδης και  $\Lambda(G) = S^1$ . Αν  $(a, b)$  είναι ένα marking του  $\mathcal{T}_1$  και αν  $A = \rho(a)$ ,  $B = \rho(b)$ , τότε ο μεταθέτης  $K = ABA^{-1}B^{-1}$  είναι παραβολικός και το διατεταγμένο ζεύγος  $(A, B) = (\rho(a), \rho(b))$  λέγεται *marking* της  $G$ . Αν  $\gamma$  είναι μια οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη στον  $\mathcal{T}_1$ , τότε μπορούμε να διαλέξουμε καμπύλη  $\delta$  τέτοια ώστε το  $(\gamma, \delta)$  να είναι marking του  $\mathcal{T}_1$ .

## 2.2. Η standard κανονικοποίηση.

Μία ισομετρία  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$  προσδιορίζεται μοναδικά από το πού απεικονίζει μία καθορισμένη τριάδα σημείων. Συγκεκριμένα, για κάθε ζεύγος από τριάδες  $(z_1, z_2, z_3)$  και  $(w_1, w_2, w_3)$  από διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, υπάρχει μοναδική ισομετρία που διατηρεί προσανατολισμό τέτοια ώστε  $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (g(z_1), g(z_2), g(z_3)) = (w_1, w_2, w_3)$ .

Ένα σημείο  $g \in \mathcal{QF}$  αναπαριστά μία κλάση ισοδυναμίας marked ομάδων στην  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Θέλουμε να είμαστε συγκεκριμένοι ως προς τον αντιπρόσωπο της κλάσης με τον οποίο δουλεύουμε. Επιλέγουμε και σταθεροποιούμε μία και για πάντα, μία τριάδα σημείων στο  $\hat{\mathbb{C}}$ . Για κάθε  $g \in \mathcal{QF}$ , θεωρούμε τα σημεία  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $K^\infty$ , όπου  $A^+$ ,  $A^-$  είναι τα σταθερά σημεία του γεννήτορα  $A$  της  $G$  και  $K^\infty$  είναι το σταθερό σημείο του παραβολικού μεταθέτη  $K$ . Επιλέγουμε το στοιχείο εκείνο της κλάσης ισοδυναμίας στον  $\mathfrak{H}(\Sigma, PSL(2, \mathbb{C}))$  που απεικονίζει την τριάδα  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $K^\infty$ , στην προεπιλεγμένη τριάδα. Θα αναφερόμαστε σε αυτήν την

επιλογή με τον όρο *standard κανονικοποίηση*, και θα συμβολίζουμε τον κανονικοποιημένο αντιπρόσωπο του  $q$ ,  $G = G(q)$

Από εδώ και πέρα στο κείμενο, τα  $\mathcal{QF}$ ,  $\mathcal{F}$  θα αναφέρονται, εκτός αν σημειώνεται διαφορετικά, στην ειδική περίπτωση του τρυπημένου τόρου  $\mathcal{T}_1$ .

### 3. LAMINATIONS

Σε αυτήν την παράγραφο, θα μιλήσουμε για laminations σε μία τυχαία υπερβολική επιφάνεια και θα δείξουμε λίγη περισσότερη προσοχή για τον  $\mathcal{T}_1$ .

#### 3.1. Οι χώροι $\mathcal{GL}$ , $\mathcal{ML}$ , $\mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$ , και $\mathcal{PML}$ .

Έστω  $\Sigma$  μία υπερβολική επιφάνεια. Θα συμβολίζουμε με  $S$  το σύνολο όλων των απλών κλειστών γεωδαισιακών στην  $\Sigma$ . Υπάρχει μία τέτοια γεωδαισιακή σε κάθε ελεύθερη κλάση ομοτοπίας κλειστών, απλών, μη-συνοριακών καμπύλων και το σύνολο  $S$  είναι ανεξάρτητο της υπερβολικής δομής στην  $\Sigma$ . Μία *geodesic lamination* στην  $\Sigma$  είναι ένα κλειστό σύνολο που είναι ένωση ανά δύο ξένων απλών γεωδαισιακών, που λέγονται *φύλλα της lamination*. Συμβολίζουμε  $\mathcal{GL} = \mathcal{GL}(\Sigma)$  το σύνολο όλων των geodesic laminations στην  $\Sigma$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1:** *Το  $\mathcal{GL}(\Sigma)$  είναι ανεξάρτητο της υπερβολικής δομής της  $\Sigma$ .*

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Έστω δύο υπερβολικές επιφάνειες  $\Sigma_1 = \mathbb{H}^2/G_1$ ,  $\Sigma_2 = \mathbb{H}^2/G_2$  με διαφορετική υπερβολική δομή και  $\phi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  ένας ομοιομορφισμός. Έστω ακόμα μία geodesic lamination  $\lambda$  στην  $\Sigma_1$ . Θεωρούμε την ανύψωση της  $\phi$ ,  $\tilde{\phi} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ . Παρατηρούμε ότι  $\tilde{\phi} \circ G_1 \circ \tilde{\phi}^{-1} = G_2$ . Η πρόταση 0.16 του [15] αποδεικνύει ότι αν υπάρχει ομοιομορφισμός  $\tilde{\phi} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  τέτοιος ώστε  $\tilde{\phi} \circ G_1 \circ \tilde{\phi}^{-1} = G_2$ , τότε η  $\tilde{\phi}$  επεκτείνεται συνεχώς σε ομοιομορφισμό ανάμεσα στα  $\partial\mathbb{H}^2$ . Αφού μία γεωδαισιακή είναι ένα μη-διατεταγμένο ζεύγος σημείων στο  $\partial\mathbb{H}^2$ , μπορούμε να μεταφέρουμε μία γεωδαισιακή από την  $\Sigma_1$  στην  $\Sigma_2$ . Η μεταφορά αυτή επάγει έναν κανονικό ομοιομορφισμό  $\phi_{\#} : \mathcal{GL}(\Sigma_1) \rightarrow \mathcal{GL}(\Sigma_2)$  που εξαρτάται μόνο από την κλάση ισοτοπίας της  $\phi$ .  $\square$



Θα θεωρούμε το  $\mathcal{GL}(\Sigma)$  με την Hausdorff τοπολογία που επάγεται από την Hausdorff τοπολογία στο σύνολο των κλειστών υποσυνόλων της  $\Sigma$ . Συγκεκριμένα, για κάθε  $\lambda \in \mathcal{GL}(\Sigma)$  και κάθε  $\varepsilon > 0$ , θέτουμε:

$$V_\varepsilon(\lambda) = \{\lambda' \in \mathcal{GL}(\Sigma) : N_\varepsilon(\lambda') \supset \lambda, N_\varepsilon(\lambda) \supset \lambda'\},$$

όπου  $N_\varepsilon(\lambda)$  είναι μία  $\varepsilon$ -περιοχή της  $\lambda$  στην  $\Sigma$ . Τότε η  $\{V_\varepsilon(\lambda)\}_{\varepsilon>0}$  σχηματίζει σύστημα βάσης περιοχών για κάθε  $\lambda$ . Μάλιστα στην πρόταση 4.17 του [4], αποδεικνύεται ότι ο  $\mathcal{GL}(\Sigma)$  με αυτήν την τοπολογία είναι συμπαγής χώρος. Με άλλα λόγια, δύο laminations είναι κοντά στην τοπολογία αυτή, αν οποιοδήποτε μη τετριμμένο φύλλο της μιας, προσεγγίζεται από ένα μη τετριμμένο φύλλο της άλλης.

Μία lamination  $\lambda$  στην  $\Sigma$ , χωρίζει το  $\Sigma \setminus \lambda$  σε συνεκτικές συνιστώσες που λέγονται *επίπεδα κομμάτια της  $\lambda$  στην  $\Sigma$* . Μία lamination λέγεται *maximal* αν η  $\Sigma \setminus \lambda$  είναι ένωση από *ιδεώδη τμήματα*, δηλαδή τρίγωνα των οποίων οι κορυφές είναι στο  $\partial\mathbb{H}^2$ . Στο [4] αποδεικνύεται ότι κάθε lamination περιέχεται σε μία maximal lamination.

Έστω τώρα  $\lambda \in \mathcal{GL}(\Sigma)$  και  $\tilde{\lambda}$  η ανύψωσή του στο  $\mathbb{H}^2$ . Ένα *εγκάρσιο μέτρο (transverse measure)*  $\mu$  για την  $\lambda$  είναι ένα πεπερασμένο μέτρο Borel  $\mu_a$  με μιγαδικές τιμές, σε κάθε συμπαγές μη-τετριμμένο γεωδαισιακό τμήμα  $a$  στο  $\mathbb{H}^2$  τέτοιο ώστε:

(α) αν το  $a$  περιέχεται εξ' ολοκλήρου σε ένα επίπεδο κομμάτι της  $\tilde{\lambda}$ , τότε  $\mu_a(a) = 0$ .

(β) Αν τα  $a$  και  $b$  είναι γεωδαισιακά τμήματα στο  $\mathbb{H}^2$  με τα άκρα τους να βρίσκονται αντίστοιχα στα ίδια επίπεδα κομμάτια της  $\tilde{\lambda}$ , τότε  $\mu_a(a) = \mu_b(b)$ .

Αν  $a, b$  είναι δύο γεωδαισιακά τμήματα και  $U$  ένα σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία τέτοιο ώστε  $U \subset a \cap b$ , τότε  $\mu_a(U) = \mu_b(U)$  και το συμβολίζουμε  $\mu(U)$ . Αν το  $x$  περιέχεται σε κάποιο φύλλο  $f$  της  $\tilde{\lambda}$ , τότε  $\mu(\{x\})$  θα συμβολίζουμε το  $\mu_a$  μέτρο του  $\{x\}$ , όπου  $a$  γεωδαισιακό τμήμα που περιέχει το  $x$  και δεν περιέχεται στο  $f$ .

Μία *measured lamination*  $\mu$  στην  $\Sigma$  είναι μία *geodesic lamination*, που ονομάζεται *φορέας της  $\mu$*  και συμβολίζεται  $|\mu|$ , μαζί με ένα εγκάρσιο μέτρο που συμβολίζεται  $\mu$ . Θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των *measured laminations* στην  $\Sigma$  με  $\mathcal{ML}(\Sigma)$ . Η τοπολογία στο  $\mathcal{ML}(\Sigma)$  ορίζεται ως εξής: Αν  $\{\mu_n\} \in \mathcal{ML}(\Sigma)$  μία ακολουθία από *measured laminations* στην  $\Sigma$ , τότε  $\mu_n \rightarrow \mu \in \mathcal{ML}(\Sigma)$ , αν  $\mu_n(a) \rightarrow \mu(a)$  για οποιοδήποτε τόξο  $a$  που τέμνει τα φύλλα των  $\mu_n$  και  $\mu$ . Με άλλα λόγια, δύο laminations είναι κοντά σ' αυτήν την τοπολογία, αν τα μέτρα που επισυνάπτουν σε οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο τεμνουσών είναι κοντά. Στο κεφάλαιο

5, θα ορίσουμε το μήκος μιας measured lamination  $\mu \in \mathcal{ML}$ . Προκειμένου να ορίζεται καλά η συνάρτηση μήκους, αναγκαζόμαστε να κάνουμε μία σύμβαση, σύμφωνα με την οποία ο φορέας μίας measured lamination αποφεύγει πάντα μία ορισμένη περιοχή του cusp. Λεπτομέρειες στην παρατήρηση 5.1.

Από τους ορισμούς των τοπολογιών στα  $\mathcal{GL}$  και  $\mathcal{ML}$ , προκύπτει το ακόλουθο ερώτημα: Αν  $\{\mu_n\} \in \mathcal{ML}$  τέτοια ώστε  $\mu_n \rightarrow \mu$  στο  $\mathcal{ML}$ , τότε έπεται ότι  $|\mu_n| \rightarrow |\mu|$  στο  $\mathcal{GL}$ ; Στο ερώτημα αυτό θα απαντήσουμε στην παράγραφο 3.2 παρακάτω.

Κάθε στοιχείο  $\gamma \in S$  φέρει ένα φυσιολογικό εγκάρσιο μέτρο  $\delta_\gamma$ , το οποίο επισυνάπτει μονάδα βάρους σε κάθε τομή με την  $\gamma$ . Λέμε ότι μία measured lamination στην  $\Sigma$  είναι *ρητή* αν ο φορέας της είναι ένωση καμπυλών του  $S$ . Ειδικά για τον  $\mathcal{T}_1$ , παρατηρούμε ότι η  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$  παράγεται από τις δύο διαφορετικές κλάσεις ομοτοπίας απλών κλειστών καμπυλών  $\alpha$  και  $\beta$  που τέμνονται ακριβώς μία φορά, συνεπώς ο μέγιστος αριθμός ομοτοπικά ξένων κλειστών καμπυλών στο  $S$  για τον  $\mathcal{T}_1$  είναι 1. Συνεπώς οι ρητές measured laminations για τον  $\mathcal{T}_1$  είναι του τύπου  $\mu = k\delta_\gamma$ ,  $k > 0$ . Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ρητών measured laminations στην  $\Sigma$  με  $\mathcal{ML}_Q(\Sigma)$ . Το σύνολο  $\mathcal{ML}(\Sigma) - \mathcal{ML}_Q(\Sigma)$  ονομάζεται *σύνολο των άρρητων measured laminations* της  $\Sigma$ . Το ακόλουθο, είναι ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα που δείχνει ο Kerchoff στο [9].

**ΛΗΜΜΑ 3.2:** *Το σύνολο των  $\mathcal{ML}_Q$  είναι πυκνό στο  $\mathcal{ML}$ .*

Δύο measured laminations  $\mu, \mu'$  λέγονται *προβολικά ισοδύναμες* αν  $|\mu| = |\mu'|$  και υπάρχει  $k > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε τόξο  $\sigma$  που τέμνει τα φύλλα της  $\mu$  να ισχύει  $\mu(\sigma) = k\mu'(\sigma)$ . Γράφουμε  $[\mu]$  για την προβολική κλάση της  $\mu$ . Συμβολίζουμε το σύνολο των προβολικών κλάσεων στην  $\Sigma$  με  $\mathcal{PML}(\Sigma)$ . Από το θεώρημα του Thurston για την συμπαγοποίηση του Teichmüller χώρου (θεώρημα 6.9 στο [15]), προκύπτει ότι το  $\mathcal{PML}(\mathcal{T}_1)$  είναι ομοιομορφικό με τον  $S^1 \approx \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

### 3.2. Σύγκριση των τοπολογιών των $\mathcal{ML}$ , $\mathcal{GL}$ .

Γενικά laminations που είναι κοντά στο  $\mathcal{ML}$  μπορεί να μην είναι κοντά ως προς την Hausdorff τοπολογία στο  $\mathcal{GL}$ . Για παράδειγμα, μπορούμε να βάλουμε εγκάρσιο μέτρο  $\nu'$  σε μία μεγάλη κλειστή γεωδαισιακή  $\gamma'$  που 'μαζεύεται' σε μία κλειστή γεωδαισιακή  $\gamma$  με εγκάρσιο μέτρο  $\nu$ , έτσι ώστε τα  $\nu', \nu$  να είναι κοντά στο  $\mathcal{ML}$ , αλλά η  $\gamma'$  να έχει τόξα μακριά

απο την  $\gamma$ . Μία ακολουθία από laminations μπορεί να συγκλίνει στο  $\mathcal{ML}$  σε μία measured lamination  $\nu_0$ , ενώ ταυτόχρονα να τείνει σε μια κλειστή καμπύλη με φορέα διαφορετικό από τον  $|\nu_0|$ . Το ακόλουθο λήμμα, περιγράφει τις συνθήκες υπό τις οποίες η Hausdorff σύγκλιση είναι αποτέλεσμα της σύγκλισης στο  $\mathcal{ML}$ . Σημειώνουμε, ότι το λήμμα εξαρτάται σημαντικά από το γεγονός ότι στον  $\mathcal{T}_1$ , κάθε άρρητη measured lamination  $\nu_0$  είναι maximal.

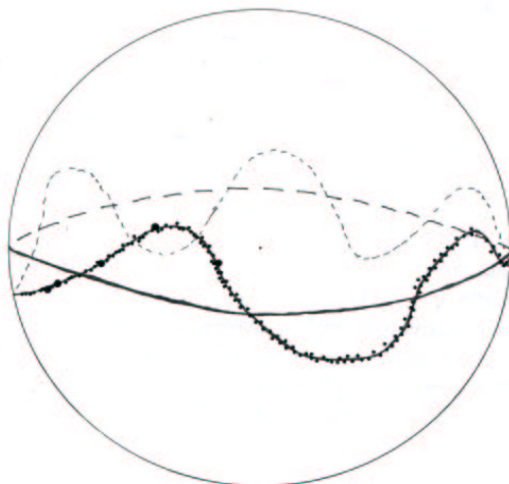
**ΛΗΜΜΑ 3.3:** Υποθέτουμε ότι  $\nu_0 \in \mathcal{ML}(\mathcal{T}_1) \setminus \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{T}_1)$  και ότι  $\nu_n \rightarrow \nu_0$  στο  $\mathcal{ML}(\mathcal{T}_1)$ . Τότε,  $|\nu_n| \rightarrow |\nu_0|$  στην Hausdorff τοπολογία του  $\mathcal{T}_1$ .

Η απόδειξη είναι πολύ τεχνική και παραλείπεται.

Από εδώ και πέρα, εκτός αν σημειώνεται διαφορετικά, τα  $\mathcal{GL}$ ,  $\mathcal{ML}$ ,  $\mathcal{PML}$ ,  $\mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$ , θα αναφέρονται στον  $\mathcal{T}_1$ .

#### 4. Ο FUCHSIAN ΚΑΙ Ο QUASIFUCHSIAN ΧΩΡΟΣ ΤΟΥ $\mathcal{T}_1$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε για τον fuchsian και τον Quasifuchsian χώρο του  $\mathcal{T}_1$ .



Σχήμα 2. Το οριακό σύνολο μίας quasifuchsian (η κυματοειδής καμπύλη) και μίας fuchsian ομάδας (ο ισημερινός της σφαίρας).

Η ομάδα  $G$  είναι quasifuchsian αν το οριακό σύνολο  $\Omega$ , αποτελείται από δύο μη-κενές, απλά συνεκτικές αναλλοίωτες συνιστώσες  $\Omega^\pm$ . Το οριακό σύνολο  $\Lambda(G)$  είναι τοπολογικά κύκλος (στην πραγματικότητα είναι ένα fractal). Ο *Quasifuchsian* χώρος  $\mathcal{QF} = \mathcal{QF}(\mathcal{T}_1)$  είναι ο χώρος των marked quasifuchsian ομάδων του τρυπημένου τόρου, modulo συζυγίας στην  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Ο  $\mathcal{QF}$  έχει ολομορφική δομή που επάγεται από την φυσιολογική ολομορφική δομή της  $SL(2, \mathbb{C})$ . Ο *Fuchsian* χώρος  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{T}_1)$  είναι το υποσύνολο του οποίου οι συνιστώσες  $\Omega^\pm$  είναι κυκλικοί δίσκοι.

Έστω  $G$  μία fuchsian ομάδα τέτοια ώστε  $\mathcal{T}_1 = \mathbb{H}^2/G$ . Θεωρούμε έναν ισομορφισμό  $p : G \rightarrow p(G) \subset PSL(2, \mathbb{R})$ , που επάγει έναν ομοιομορφισμό  $\Phi$  ανάμεσα στις επιφάνειες  $\mathcal{T}_1 = \mathbb{H}^2/G$  και  $\mathcal{T}'_1 = \mathbb{H}^2/p(G)$ . Οι δύο επιφάνειες είναι ομοιομορφικές, έχουν όμως διαφορετική υπερβολική δομή, και ο  $\Phi$  είναι ένα στοιχείο του  $\mathcal{F}$ , αν δούμε τον  $\mathcal{F}$  σαν το σύνολο των κλάσεων συζυγίας των ομομορφισμών και συνεπώς των διαφορετικών υπερβολικών δομών.

Το θεώρημα του Nielsen για επιφάνειες που βρίσκεται στο [13], αποδεικνύει ότι υπάρχει ομοιομορφισμός  $\tilde{f} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  που επάγει τον ισομορφισμό  $p$ , δηλαδή ο  $\tilde{f}$  είναι τέτοιος ώστε για κάθε  $g \in G$ ,

$$p(g) = \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1}.$$

Οι επιφάνειες  $\mathcal{T}_1$  και  $\mathcal{T}'_1$ , εκτός από την υπερβολική δομή, είναι εφοδιασμένες και με μία μιγαδική δομή που επάγεται από το  $\mathbb{C}$ . Ο  $\tilde{f}$  προβάλλεται σε έναν ομοιομορφισμό  $f : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}'_1$  ανάμεσα στις επιφάνειες με διαφορετική μιγαδική δομή. Συνεπώς, μπορούμε να δούμε τον  $f$  ως το στοιχείο του Teichmüller χώρου  $T(\mathcal{T}_1)$  που προέρχεται από τον ομοιομορφισμό  $\Phi \in \mathcal{F}$ .

Αντίστροφα, έστω  $\phi \in T(\mathcal{T}_1)$  τέτοια ώστε  $\phi : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}'_1$ . Η  $\phi$  ανυψώνεται σε έναν ομοιομορφισμό  $\tilde{\phi} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  έτσι ώστε

$$\tilde{\phi} = (\pi')^{-1} \circ \phi \circ \pi,$$

όπου  $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}_1$  και  $\pi' : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}'_1$  οι απεικονίσεις πηλίκο. Τότε μέσω της απεικόνισης  $g \mapsto \tilde{\phi} \circ g \circ \tilde{\phi} = r(g)$ , επάγεται ισομορφισμός ανάμεσα στις  $G$  και  $r(G) = G'$  και συνεπώς ένας ομοιομορφισμός ανάμεσα στις επιφάνειες  $\mathcal{T}_1 = \mathbb{H}^2/G$  και  $\mathcal{T}'_1 = \mathbb{H}^2/G'$ . Αφού η ανύψωση είναι μοναδική μέχρι συζυγίας, έπεται ότι ο  $\phi$  καθορίζει μία κλάση συζυγίας  $[r] \in \mathcal{F}$ .

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι ο Fuchsian χώρος  $\mathcal{F}$  ταυτίζεται με τον χώρο Teichmüller  $T(\mathcal{T}_1)$ .

Θα δούμε στο κεφάλαιο 7 παρακάτω, ότι ο Fuchsian χώρος του  $\mathcal{T}_1$  απεικονίζεται μέσω των Fenchel-Nielsen συντεταγμένων στο  $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ . Συνεπώς, είναι ομοιομορφικός με τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο  $D$ . Στο θεώρημα συμπαγοποίησης του Thurston (θεώρημα 6.9 του [15]) αποδεικνύεται ότι το σύνορο του Teichmüller χώρου  $\partial T(\mathcal{T}_1)$  είναι ομοιομορφικό με το  $\mathcal{PML}$ . Δεδομένου ότι ο  $T(\mathcal{T}_1)$  είναι ίδιος με τον  $\mathcal{F}$ , μπορούμε να βλέπουμε τον  $\mathcal{F}$  ως τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο  $D$  και το  $\partial \mathcal{F}$  ως το  $\partial D = S^1$ , που αποτελείται από όλες τις  $[\mu] \in \mathcal{PML}$ . Την εικόνα αυτή για τον  $\mathcal{F}$  θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια στο κεφάλαιο 8.

## 5. ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΜΙΑΣ LAMINATION

Έστω  $\gamma$  μία κλειστή γεωδαισιακή στην  $\Sigma = \mathbb{H}^2/G$ . Θεωρούμε την ανύψωση  $\tilde{\gamma}$  της  $\gamma$  στο  $\mathbb{H}^2$ . Η  $\tilde{\gamma}$  είναι ο άξονας μίας υπερβολικής ισομετρίας  $g \in G$ . Αφού ο άξονας μίας υπερβολικής ισομετρίας καθορίζεται από τα άκρα του στο σύνορο του υπερβολικού επιπέδου, δηλαδή από τα σταθερά σημεία της ισομετρίας, και η  $g^2 = g \circ g \in G$  έχει τα ίδια σταθερά σημεία με την  $g$  συνεπώς και τον ίδιο άξονα. (Για μία παραβολική ισομετρία  $h \in G$  με σταθερό σημείο  $x \in \partial \mathbb{H}^2$ , οι  $h^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , έχουν το ίδιο σταθερό σημείο). Συνεπώς, υπάρχουν πολλές ισομετρίες που αντιστοιχούν σε κάποιον άξονα. Λέμε ότι το υπερβολικό ή παραβολικό στοιχείο  $g \in G$  είναι πρωταρχικό, αν παράγει το σύνολο των ισομετριών που έχουν τα ίδια σταθερά σημεία. Από εδώ και στο εξής, όταν θα μιλάμε για την ισομετρία στην  $G$  που αντιστοιχεί σε κάποιον άξονα, θα εννοούμε το πρωταρχικό στοιχείο με αυτόν τον άξονα. Στην περίπτωσή μας, θεωρούμε το πρωταρχικό  $g \in G$  με άξονα την  $\tilde{\gamma}$ . Ορίζουμε μήκος μετατόπισης για την  $g$  την ελάχιστη απόσταση μετατόπισης των  $z \in \mathbb{H}^2$  από την  $g$ . Το μήκος της γεωδαισιακής  $\gamma$  ορίζεται να είναι αυτό ακριβώς το μήκος μετατόπισης της  $g$ . Ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε το μήκος  $l_\gamma$  της  $\gamma$  μέσω της εξίσωσης

$$\operatorname{Tr}(g) = 2 \cosh\left(\frac{l_\gamma}{2}\right)$$

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, το μήκος μιας γεωδαισιακής εξαρτάται από την υπερβολική δομή της  $\Sigma$ .

Το μήκος μίας γεωδαισιακής  $\gamma \in S$  γενικεύεται στις measured laminations. Έστω  $\phi$  που αναπαριστά μία υπερβολική δομή στην  $\Sigma$ . Για  $\mu \in \mathcal{ML}$ , το μήκος  $l_\mu(\phi)$  είναι το συνολικό βάρος του μέτρου στην επιφάνεια με δομή  $\phi$ . Δηλαδή, το  $l_\mu(\phi)$  είναι το γινόμενο της υπερβολικής

απόστασης κατά μήκος των φύλλων της  $\mu$ , με το εγκάρσιο μέτρο  $\mu$ . Συμβολικά,

$$l_\mu(\phi) = \int_\Sigma d\mu ds.$$

Ειδικότερα, αν  $\mu \in \mathcal{ML}_Q(\Sigma)$  με  $\mu = \delta_\gamma$  (όπου  $\delta_\gamma$  το μέτρο Dirac) τότε

$$l_\mu = \int_\Sigma d\delta_\gamma ds,$$

που είναι ακριβώς το υπερβολικό μήκος της  $\gamma$ . Ο Wolpert στο [21] δείχνει ότι η συνάρτηση μήκους μίας measured lamination είναι πραγματικά αναλυτική συνάρτηση στον  $\mathcal{F}(\Sigma)$ .

Παρατηρούμε ότι αν  $\mu' = k\mu$ , τότε  $l_{k\mu} = kl_\mu$ . Ορίζουμε

$$[\mu, l_\mu] := \{(k\mu, kl_\mu) \in \mathcal{ML} \times \mathbb{R}^+ : k > 0\}$$

που ονομάζεται προβολική κλάση του ζεύγους  $(\mu, l_\mu)$ .

**Παρατήρηση 5.1:** Προκειμένου να ορίζεται καλά το μήκος μίας measured lamination σε μία επιφάνεια με τρύπες, κάνουμε την ακόλουθη σύμβαση. Θεωρούμε ότι κανένα από τα φύλλα μίας measured lamination δεν καταλήγει στην τρύπα. Ειδικότερα, θεωρούμε ότι όλα τα φύλλα της lamination αποφεύγουν μία συγκεκριμένη οροκυκλική περιοχή της τρύπας.

Αναγκάζομαστε να κάνουμε αυτή τη σύμβαση, διότι η τρύπα είναι το σταθερό σημείο ενός παραβολικού στοιχείου και άρα ένα σημείο στο  $\infty$ . Ας υποθέσουμε ότι κάποιο φύλλο της lamination  $\mu \in \mathcal{ML}$  καταλήγει στην τρύπα. Τότε το υπερβολικό μήκος αυτού του φύλλου (και συνεπώς και της  $|\mu|$ ) δεν είναι φραγμένο. Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω, το μήκος μίας  $\mu \in \mathcal{ML}$  ισούται με το υπερβολικό μήκος των φύλλων της  $|\mu|$  επί το εγκάρσιο μέτρο σε κάθε τέμνουσα των φύλλων της  $|\mu|$ . Κοντά στην τρύπα, η υπερβολική απόσταση απειρίζεται, και άρα ο ορισμός που δίνουμε παραπάνω δεν είναι καλός.

Ορίζουμε για οποιοδήποτε τόξο  $\sigma$  στην  $\Sigma$  την συνάρτηση  $i(\sigma, \mu)$ , τον αριθμό γεωμετρικής τομής του  $\sigma$  με την  $\mu$ , ως

$$i(\sigma, \mu) = \inf \int_{\sigma'} d\mu$$

με το  $\inf$  να λαμβάνεται ως προς όλα τα τόξα  $\sigma'$  στην κλάση ισοτοπίας με σταθερά άκρα της  $\sigma$ . Αν  $\sigma \in S$ , τότε το  $\inf$  πιάνεται από τον γεωδαισιακό αντιπρόσωπο στην κλάση ισοτοπίας της  $\sigma$ . Η συνάρτηση  $i$  γενικεύεται για δύο laminations  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$ , χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.2. Από τον ορισμό της τοπολογίας στο  $\mathcal{ML}$ , η  $i(\mu, \nu)$  είναι συνεχής στο  $\mathcal{ML} \times \mathcal{ML}$ .

Σημειώνουμε ακόμα ότι στον  $\mathcal{T}_1$ , όπως προκύπτει από τον ορισμό την προβολικής κλάσης, οι measured laminations είναι μοναδικά ερгодικές δηλαδή, αν  $\mu, \mu' \in \mathcal{ML}(\mathcal{T}_1)$  με  $|\mu| = |\mu'|$ , τότε  $[\mu] = [\mu']$ .

Έστω  $M = \mathbb{H}^3/G$  μία υπερβολική 3-πολλαπλότητα. Θα ορίσουμε το μήκος μίας lamination  $\mu \in \mathcal{ML}$  στην  $M$ . Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι  $\mu = \delta_\gamma$ , όπου η  $\gamma \in S$ , αναπαριστάται από ένα στοιχείο  $V \in G \subset PSL(2, \mathbb{C})$ . Ορίζουμε το μιγαδικό μήκος μετατόπισης  $\lambda_V$  μέσω της σχέσης

$$\pm Tr V = 2 \cosh\left(\frac{\lambda_V}{2}\right),$$

όπου το πρόσημο έχει να κάνει με τον προσανατολισμό του άξονα της ισομετρίας  $V$ .

Το μιγαδικό μήκος μετατόπισης είναι η γενίκευση του μήκους μετατόπισης που είδαμε για υπερβολικές ισομετρίες του  $\mathbb{H}^2$ . Στον  $\mathbb{H}^3$ , μία λοξοδρομική ισομετρία, μετατοπίζει και στρέφει. Έτσι για την  $V$ , το  $Re(\lambda_V)$ , είναι η ελάχιστη απόσταση μετακίνησης ενός σημείου του  $\mathbb{H}^3$  από την  $V$ , ενώ το  $Im(\lambda_V)$  είναι η γωνία στρέψης της  $V$ . Στην παράγραφο 6.1, κάνουμε αναλυτικότερη περιγραφή του μιγαδικού μήκους μετατόπισης.

Αφού το  $Re(\lambda_V)$  είναι το πραγματικό μήκος μετατόπισης της υπερβολικής ισομετρίας  $V$ , ισοδύναμα είναι και το μήκος του γεωδαισιακού αντιπροσώπου της  $\gamma$  στην  $M$ , τέτοιου ώστε  $l_{\delta_\gamma}(M) = Re(\lambda_V)$ . Αποδεικνύεται στην πρόταση 9.21 του [20], ότι αυτός ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί μέσω γραμμικότητας και συνέχειας για να ορίσουμε το μήκος μίας lamination για  $\mu \in \mathcal{ML}$ .

## 6. ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΜΗΚΟΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο, εισάγουμε την συνάρτηση μιγαδικού μήκους μίας measured lamination. Όπως το μήκος μίας lamination είναι πραγματικά αναλυτική συνάρτηση στο  $\mathcal{F}$ , το μιγαδικό μήκος μίας lamination είναι ολόμορφη συνάρτηση στον  $\mathcal{QF}$ .

### 6.1. Μιγαδικό μήκος μίας λοξοδρομικής ισομετρίας.

Έστω  $V \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Το μιγαδικό μήκος μετατόπισης  $\lambda_V \in \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$  δίδεται από την εξίσωση

$$\pm Tr V = 2 \cosh\left(\frac{1}{2}\lambda_V\right) \quad (1)$$

όπου  $TrV$  είναι το ίχνος της  $V$  και επιλέγουμε το πρόσημο, έτσι ώστε  $Re(\lambda_V) > 0$ . Το μιγαδικό μήκος είναι αναλλοίωτο από συζυγίες με Möbius μετασχηματισμούς και έχει την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία, δεδομένου ότι το  $V$  δεν είναι παραβολικό. Συμβολίζουμε  $Ax(V)$  τον άξονα της  $V$ . Έστω  $x \in Ax(V)$  και  $\vec{v}$  ένα κανονικοποιημένο κάθετο διάνυσμα στο  $x$ . Τότε το  $Re(\lambda_V)$  είναι η υπερβολική απόσταση του  $x$  από το  $V(x)$  και το  $Im(\lambda_V)$  είναι η γωνία modulo  $2\pi$ , ανάμεσα στο  $V(\vec{v})$  και το  $\vec{v}$ , μεταφερόμενου στο  $V(x)$ , μετρώντας έτσι ώστε η θετική φορά να είναι αυτή που συμπίπτει με τη φορά στον  $Ax(V)$  από το απωθητικό σταθερό σημείο  $V^-$  προς το ελκτικό σταθερό σημείο  $V^+$ . Ειδικότερα, αν ο  $V$  είναι λοξοδρομικός, τότε  $Re(\lambda_M) > 0$  και αν ο  $V$  είναι καθαρά υπερβολικός, τότε ισχύει ακόμα και ότι  $Im(\lambda_V) \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Ισοδύναμα,  $TrV \in \mathbb{R}$ ,  $|TrV| > 2$ .

Έστω  $q \in \mathcal{QF}$ ,  $\gamma \in S$  και ας συμβολίσουμε το στοιχείο που αναπαριστά την  $\gamma$  στην ομάδα  $G(q)$  με  $W(q)$ . Επειδή το ίχνος είναι αναλλοίωτο από συζυγίες, το μιγαδικό μήκος μετατόπισης  $\lambda_{W(q)}$  εξαρτάται μόνο από το  $q$  και είναι ανεξάρτητο από την κανονικοποίηση της  $G(q)$ . Θέλουμε να ορίσουμε το μιγαδικό μήκος σαν ολόμορφη συνάρτηση στον  $\mathcal{QF}$  με τιμές στο  $\mathbb{C}$  και όχι στο  $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ . Για να το κάνουμε αυτό, επιλέγουμε τον κλάδο που έχει πραγματικές τιμές για  $q \in \mathcal{F}$ . Αφού  $\lambda_\gamma \neq 0$  στον  $\mathcal{QF}$  η επιλογή αυτή καθορίζει μοναδικά μία ολόμορφη συνάρτηση  $\lambda_\gamma : \mathcal{QF} \rightarrow \mathbb{C}$ . Από εδώ και πέρα ο όρος ‘μιγαδικό μήκος’ θα αναφέρεται σ’ αυτόν τον κλάδο.

Ορίζουμε το μιγαδικό μήκος για μία ρητή lamination  $\mu = c\delta_\gamma \in \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$  με  $c > 0$  ως:  $\lambda_\mu(q) = c\lambda_\gamma(q)$ . Σύμφωνα με την σύμβαση που κάναμε παραπάνω για την επιλογή του προσήμου στην εξίσωση (1),  $Re(\lambda_\mu(q)) > 0$ . Συνεπώς, αν  $\mu \in \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$ ,  $\lambda_\mu(q) \in \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : Rez \leq 0\}$ . Για να ορίσουμε μιγαδικό μήκος  $\lambda_\mu(q)$  για οποιαδήποτε  $\mu \in \mathcal{ML}$  και  $q \in \mathcal{QF}$ , θα θέλαμε να επιλέξουμε  $\mu_n \in \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$  με  $\mu_n \rightarrow \mu$  και να θέσουμε  $\lambda_\mu(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\mu_n}(q)$ . Για να το κάνουμε αυτό, χρειάζεται να δείξουμε ότι αυτά τα όρια υπάρχουν και είναι ανεξάρτητα από την επιλογή της ακολουθίας  $\{\mu_n\}$ . Το κάνουμε χρησιμοποιώντας το ακόλουθο θεώρημα, που προκύπτει συνδυάζοντας το θεώρημα 1 του [9] και το λήμμα 2.4 του [10].

**ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1:** Η συνάρτηση  $(c\delta_\gamma, p) \mapsto cl_{\delta_\gamma}(p)$  από το  $\mathcal{ML}_{\mathcal{Q}} \times \mathcal{F}$  στο  $\mathbb{R}^+$ , επεκτείνεται σε μία συνεχή συνάρτηση  $(\mu, p) \mapsto l_\mu(p)$  από το  $\mathcal{ML} \times \mathcal{F}$  στο  $\mathbb{R}^+$ .



Αν  $\mu_n \in \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$  με  $\mu_n \rightarrow \mu$  και  $p \in \mathcal{F}$ , τότε  $l_{\mu_n}(p) \rightarrow l_{\mu}(p)$ . Οι οριακές συναρτήσεις δεν είναι σταθερές και το όριο είναι ομοιόμορφο στα συμπαγή υποσύνολα του  $\mathcal{F}$ .

Θα χρειαστούμε ακόμα δύο λήμματα για ολόμορφες συναρτήσεις:

**ΛΗΜΜΑ 6.2:** Αν η  $f : \mathcal{QF} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ολόμορφη και αν  $f = c$  στον  $\mathcal{F}$  για κάποια σταθερά  $c$ , τότε  $f = c$  και στον  $\mathcal{QF}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Αφού ο  $\mathcal{F}$  είναι ο  $\mathbb{R}^2$ -locus των μιγαδικών Fenchel-Nielsen συντεταγμένων  $(\lambda, \tau)$  στον  $\mathcal{QF}$  όπως θα δούμε παρακάτω, το αποτέλεσμα έπεται απευθείας από την αρχή αναλυτικής συνέχισης.  $\square$

Μία οικογένεια ολόμορφων συναρτήσεων λέγεται *κανονική* (normal) σε ένα χωρίο  $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , αν κάθε ακολουθία της οικογένειας, έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $\Omega$ , ή αν έχει υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα στο  $\infty$ .

**ΛΗΜΜΑ 6.3:** Οι συναρτήσεις  $\{\lambda_{\mu}\}_{\mu \in \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}}$  σχηματίζουν κανονική οικογένεια στα συμπαγή υποσύνολα του  $\mathcal{QF}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Αφού οι  $\lambda_{\mu} : \mathcal{QF} \subset \mathbb{C}^2$  παίρνουν τιμές για κάθε  $\mu \in \mathcal{ML}$  στο  $\mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ , τότε υπάρχει Möbius μετασχηματισμός

$$\rho_{\mu}(\omega) = \frac{\lambda_{\mu}(\omega) - 1}{\lambda_{\mu}(\omega) + 1}$$

που απεικονίζει το δεξί ημιπίπεδο στον μοναδιαίο δίσκο  $D$ . Οι  $\rho_{\mu} : \mathcal{QF} \rightarrow D$  είναι φραγμένες και άρα κάθε ακολουθία των  $\rho_{\mu}$  έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, που συγκλίνει στο  $D$  ομοιόμορφα στα συμπαγή. Θεωρούμε τώρα τους μετασχηματισμούς

$$\lambda_{\mu}(\omega) = \frac{1 + \rho_{\mu}(\omega)}{1 - \rho_{\mu}(\omega)}.$$

Έστω  $\tilde{\rho}_{\mu_n}$  μία συγκλίνουσα υπακολουθία της  $\rho_{\mu_n}$  τέτοια ώστε  $\tilde{\rho}_{\mu_n} \rightarrow \tilde{\rho}_{\mu}$ . Τότε:

Αν  $\tilde{\rho}_{\mu} \neq 1$ , η  $\lambda_{\mu_n}$  έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

$$\tilde{\lambda}_{\mu_n} \rightarrow (1 + \tilde{\rho}_{\mu}) / (1 - \tilde{\rho}_{\mu}),$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή.

Αν  $\tilde{\rho}_\mu = 1$  για κάποιο  $\omega$ , τότε από αρχή μεγίστου στο  $D$  η  $\tilde{\rho}_\mu = 1$  στο  $\partial D$  και άρα  $\tilde{\rho}_\mu \equiv 1$  στο  $D$ . Σε αυτήν την περίπτωση η  $\lambda_{\mu_n}$  έχει υπακολουθία  $\tilde{\lambda}_{\mu_n}$  που τείνει στην σταθερή συνάρτηση  $\infty$ . Άρα η  $\{\lambda_\mu\}_{\mu \in \mathcal{ML}_\mathcal{Q}}$  είναι κανονική οικογένεια στα συμπαγή του  $\mathcal{QF}$ .  $\square$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 6.4:** Η συνάρτηση  $(\mu, q) \mapsto \lambda_\mu(q)$  από το  $\mathcal{ML}_\mathcal{Q} \times \mathcal{QF}$  στο  $\mathbb{C}$  επεκτείνεται σε μία συνεχή συνάρτηση από το  $\mathcal{ML} \times \mathcal{QF}$  στο  $\mathbb{C}$ , που θα συμβολίζουμε επίσης  $\lambda_\mu(q)$ . Η συνάρτηση  $q \mapsto \lambda_\mu(q)$  είναι ολόμορφη και όχι σταθερή για όλες τις  $\mu$  και η οικογένεια  $\{\lambda_\mu\}$  είναι φραγμένη και ισοσυνεχής στα συμπαγή υποσύνολα του  $\mathcal{QF}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Η οικογένεια  $\{\lambda_\mu\}$  με  $\mu \in \mathcal{ML}_\mathcal{Q}$  είναι κανονική οικογένεια στα συμπαγή του  $\mathcal{QF}$  σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα. Από το θεώρημα του Ascoli η  $\{\lambda_\mu\}$  είναι ισοσυνεχής και κάθε ακολουθία της  $\lambda_\mu$  έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποια ολόμορφη συνάρτηση, ομοιόμορφα στα συμπαγή. Έπεται ότι αν η  $\mu_n \rightarrow \mu$  με  $\mu_n \in \mathcal{ML}_\mathcal{Q}$ , τότε υπάρχουν κατάλληλες υπακολουθίες της  $\{\lambda_\mu\}$  που συγκλίνουν σε ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Συνεπώς, μπορούμε θέτοντας  $\lambda_\mu(q) = \lim_n \lambda_{\mu_n}(q)$  να επεκτείνουμε συνεχώς την  $(\mu, q) \mapsto \lambda_\mu(q)$  από το  $\mathcal{ML}_\mathcal{Q} \times \mathcal{QF}$  στο  $\mathbb{C}$  στο  $\mathcal{ML} \times \mathcal{QF}$ . Σημειώστε ότι στον  $\mathcal{F}$ , αν  $\mu \in \mathcal{ML}_\mathcal{Q}$ , τότε  $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$  και  $l_\mu = \lambda_\mu$ . Από το θεώρημα 6.1, αν  $\mu_n \rightarrow \mu$  (στον  $\mathcal{F}$ ) με  $\mu_n \in \mathcal{ML}_\mathcal{Q}$ , τότε:

1. Η απεικόνιση  $\mathcal{ML}_\mathcal{Q} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$  με  $(\mu, p) \mapsto l_\mu(p)$  επεκτείνεται συνεχώς στην  $\mathcal{ML} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , με  $(\mu, p) \mapsto l_\mu(p)$  και
2.  $l_{\mu_n}(p) \rightarrow l_\mu(p)$ , όπου οι συναρτήσεις  $p \mapsto l_\mu(p)$  δεν είναι σταθερές για όλα τα  $\mu$  και το όριο είναι ομοιόμορφο στα συμπαγή του  $\mathcal{F}$ .

Για  $q \in \mathcal{QF}$ , η  $q \mapsto \lambda_\mu(q)$  δεν είναι σταθερή για όλα τα  $\mu$  γιατί αν ήταν, από το λήμμα 6.2, θα έπρεπε να είναι σταθερή στο  $\mathcal{F}$ . Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι δυνατόν λόγω του 2 που αναφέραμε παραπάνω. Τέλος, η  $\{\lambda_\mu\}$  είναι φραγμένη και ισοσυνεχής στα συμπαγή του  $\mathcal{QF}$ .  $\square$

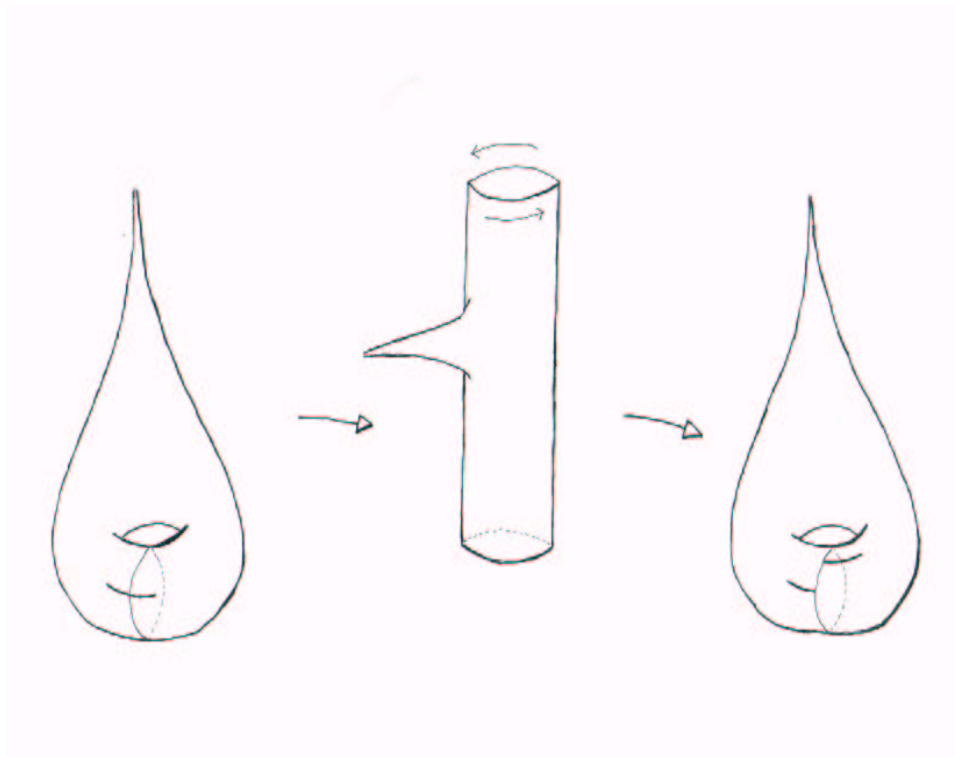
Για  $\mu \in \mathcal{ML}$ , ονομάζουμε το  $\lambda_\mu$  *μιγαδικό μήκος* της  $\mu$ . Από εδώ και πέρα, οι συναρτήσεις μιγαδικού μήκους θα είναι θεμελιώδες εργαλείο.

## 7. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ $\mathcal{F}$ ΚΑΙ $\mathcal{QF}$

### 7.1. Οι Fenchel-Nielsen συντεταγμένες για τον $\mathcal{F}$ .

Είπαμε νωρίτερα ότι ο Fuchsian χώρος του  $\mathcal{T}_1$ , είναι το σύνολο όλων των διαφορετικών υπερβολικών δομών του  $\mathcal{T}_1$ . Πώς όμως, ξεκινώντας από μία συγκεκριμένη υπερβολική δομή μπορούμε να παραμορφώσουμε τον  $\mathcal{T}_1$ , έτσι ώστε να προκύψει μία διαφορετική υπερβολική δομή χωρίς να μεταβάλλουμε τοπολογικά την επιφάνεια; Την διαδικασία αυτή περιγράφουμε σε αυτή την παράγραφο.

Έστω ο  $\mathcal{T}_1$  και  $(a, b)$  ένα marking του  $\mathcal{T}_1$ . Θεωρούμε την εξής παραμόρφωση του  $\mathcal{T}_1$ : Κόβουμε τον  $\mathcal{T}_1$  κατά μήκος της  $a$ . Τότε προκύπτει ένας τρυπημένος κύλινδρος. Κρατώντας σταθερό το ένα από τα δύο άκρα του κυλίνδρου, στρίβουμε το άλλο και επανασυγκολάμε κατά μήκος της  $a$ . Προκύπτει πάλι ένας τρυπημένος τόρος, ίδιος τοπολογικά με τον αρχικό, αλλά με διαφορετική υπερβολική δομή. Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο, ότι καθόλη τη διαδικασία της παραμόρφωσης το μήκος της γεωδαισιακής  $l_a$  έμεινε αμετάβλητο.



Σχήμα 3. Η *twist* παραμόρφωση του  $\mathcal{T}_1$ .

Η παραμόρφωση αυτή ονομάζεται *twist* παραμόρφωση ως προς την  $a$ . Δεδομένου ότι η *twist* παραμόρφωση που περιγράψαμε μας έδωσε και πάλι τον  $\mathcal{T}_1$  (με διαφορετική υπερβολική δομή), και άρα ένα νέο σημείο

στον  $\mathcal{F}$ , μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$t_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}, \text{ με } \theta \mapsto t_a(\theta),$$

όπου με  $\theta$  συμβολίζουμε την γωνία στρέψης. Θα θεωρούμε ότι για τον ορθογώνιο τρυπημένο τόρο (τον τόρο δηλαδή με τους γεννήτορες της  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$   $a, b$  να τέμνονται κάθετα) η γωνία στρέψης  $\theta = 0$ . Στα [9] και [10] ο Kerchoff δείχνει ότι η παραμόρφωση αυτή γενικεύεται και ως προς measured laminations. Τέτοιες απεικονίσεις λέγονται Earthquakes και θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

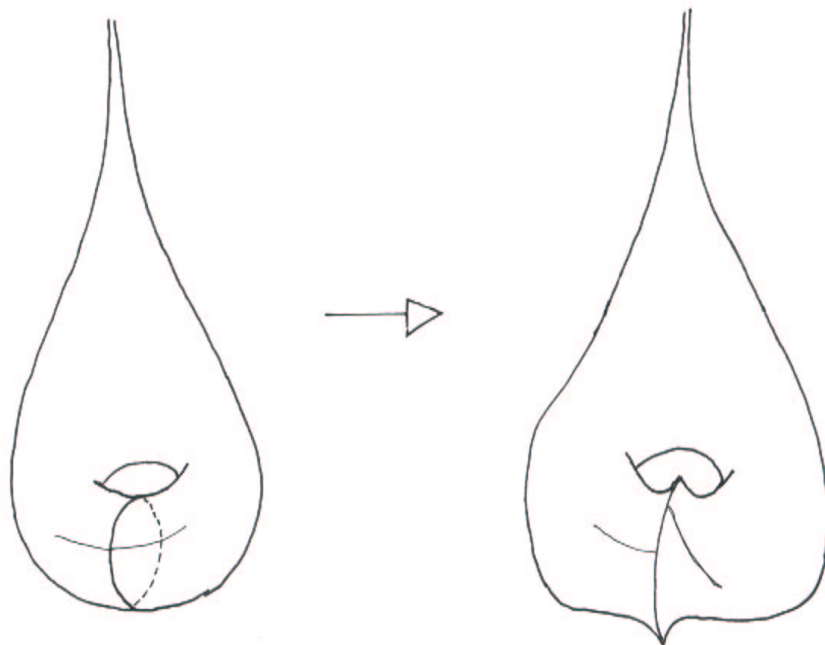
Το  $t_a$  μαζί με το  $l_a$ , όπου  $l_a$  είναι το μήκος της καμπύλης γεννήτορα  $a$ , αποτελούν ζεύγος συντεταγμένων για τον  $\mathcal{F}$ . Τα ζεύγη  $(l_a, t_a)$  ονομάζονται *Fenchel-Nielsen συντεταγμένες*, και ο Wolpert στο [21] δείχνει ότι εμβυθίζουν τον  $\mathcal{F}$  πραγματικά αναλυτικά στο  $\mathbb{R}^2$ .

## 7.2. Οι μιγαδικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες για τον $\mathcal{QF}$ .

Οι μιγαδικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες αποτελούν γενίκευση των κλασικών Fenchel-Nielsen συντεταγμένων για fuchsian ομάδες. Εδώ θα αναφέρουμε τα βασικά σημεία, όπως εφαρμόζονται στον  $\mathcal{T}_1$ .

Έστω  $\langle G; A, B \rangle$  μία marked quasifuchsian ομάδα του τρυπημένου τόρου, που παράγεται από ένα ζεύγος marked γεννητόρων  $a, b$  της  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$ , που αντιστοιχούν στα λοξοδρομικά στοιχεία  $A, B$ . Οι μιγαδικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες  $(\lambda_A, \tau_{A,B})$  για την  $\langle G; A, B \rangle$  προκύπτουν ως εξής: Η παράμετρος  $\lambda_A \in \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$  είναι το μήκος της μετατόπισης του γεννήτορα  $A$  ή ισοδύναμα το μιγαδικό μήκος  $\lambda_a$  της καμπύλης  $a$ . Η twist παράμετρος  $\tau_{A,B} \in \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ , προκύπτει από την μιγαδική επέκταση της twist παραμόρφωσης που αναφέραμε παραπάνω. Το μιγαδικό twist ως προς το marking  $(A, B)$ , έχει την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία: Αν κόψουμε τον  $\mathcal{T}_1$  κατά μήκος του γεννήτορα  $a$  (που αντιστοιχεί στην λοξοδρομική ισομετρία  $A \in G$ ) τότε στρέφουμε το ένα από τα δύο άκρα του τρυπημένου κυλίνδρου, όπως και στην πραγματική twist παραμόρφωση, και επανασυγκολλάμε κατά μήκος του  $a$  υπό κάποια γωνία. Η μιγαδική twist παράμετρος  $\tau_{A,B}$  είναι τέτοια ώστε το  $Re(\tau_{A,B})$  να ισούται με την στροφή του ενός άκρου του κυλίνδρου, και το  $Im(\tau_{A,B})$  να μετράει την γωνία υπό την οποία γίνεται η συγκόλληση. Ανυψώνοντας στον  $\mathbb{H}^3$ , η μιγαδική twist παράμετρος μετράει την μιγαδική απόσταση, όταν ο άξονας  $Ax(B^{-1}AB)$  ταυτιστεί μέσω της  $B$  με τον άξονα της  $A$   $Ax(A)$ . Ειδικότερα, αν η κοινή κάθετος  $\delta$  των δύο αξόνων τέμνει τους άξονες σε σημεία  $X, Y$  αντίστοιχα, τότε το  $Re(\tau_{A,B})$  είναι η προσημασμένη απόσταση του  $X$  από το  $B(Y)$  και το  $Im(\tau_{A,B})$  είναι η γωνία ανάμεσα στην  $\delta$  και την παράλληλη μεταφορά της  $B(\delta)$  κατά μήκος του  $Ax(A)$  στο  $X$ , κοιτάζοντας προς το ελκτικό σταθερό σημείο του  $A$ . Οι

συμβάσεις για το πρόσημο της παραμέτρου  $\tau$ , δεν θα μας απασχολήσουν εδώ.



Σχήμα 4. Η μυγαδική *twist* παραμόρφωση ξεκινώντας από μία *fuchsian* δομή.

Το θεώρημα A στο [11] αποδεικνύει ότι δεδομένων των παραμέτρων  $\lambda_A$  και  $\tau_{A,B}$ , και μίας σταθερής κανονικοποίησης, μπορεί κανείς να γράψει τους πίνακες γεννήτορες για μία ομάδα δύο γεννητόρων  $G(\lambda_A, \tau_{A,B}) \subset PSL(2, \mathbb{C})$ , της οποίας ο μεταθέτης είναι παραβολικός. Το διατυπώνουμε, στην περίπτωση μας.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1:** Οι μυγαδικές *Fenchel-Nielsen* συντεταγμένες είναι ολόμορφες συντεταγμένες για τον  $\mathcal{QF}$  και η απεικόνιση

$$\mathcal{QF} \rightarrow \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \times \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}, \quad (G; A, B) \mapsto (\lambda_A, \tau_{A,B})$$

είναι ολόμορφη εμβύθιση του  $\mathcal{QF}$  σε ένα υποσύνολο του  $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \times \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ .

Σε αυτή την εμβύθιση του  $\mathcal{QF}$ , ο Fuchsian χώρος  $\mathcal{F}$ , αντιστοιχεί στο υποσύνολο  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**Παρατήρηση 7.1:** Η ομάδα που αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος  $(\lambda_A, \tau_{A,B}) \in \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \times \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ , μπορεί να μην είναι διακριτή άρα ούτε quasifuchsian.

Θέλουμε να ανυψώσουμε αυτήν την εικόνα σε εμβύθιση του  $\mathcal{QF}$  μέσα στον  $\mathbb{C}^2$ . Είδαμε νωρίτερα, πως να ανυψώσουμε την συνάρτηση μήκους  $\lambda_A$  στον  $\mathcal{QF}$  σε ολόμορφη συνάρτηση στο  $\mathbb{C}$ . Όμοια, μπορούμε να ανυψώσουμε την twist παράμετρο  $\tau_{A,B}$  ζητώντας να είναι πραγματική για  $q \in \mathcal{F}$ .

Στον  $\mathcal{F}$ , οι πραγματικές Fenchel-Nielsen παράμετροι  $\lambda_A$  και  $\tau_{A,B}$  είναι οι κλασσικές Fenchel-Nielsen παράμετροι  $l_A, t_{A,B}$ .

## 8. ΜΙΑ ΕΙΚΟΝΑ ΓΙΑ ΤΟΝ FUCHSIAN ΧΩΡΟ ΤΟΥ $\mathcal{T}_1$

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνουμε μία εικόνα για τον Fuchsian χώρο του  $\mathcal{T}_1$ , η οποία μας δίνει την ιδέα την οποία γενικεύουμε στην συνέχεια προκειμένου να φτάσουμε στο τελικό μας αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, θεωρώντας τον  $\mathcal{T}_1$  ως τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο  $D$ , παίρνουμε δύο διαφορετικές διαμερίσεις του από κάποιες ειδικές καμπύλες που θα ονομάσουμε Earthquake paths και Critical Lines αντίστοιχα. Θα γενικεύσουμε τις καμπύλες αυτές στον  $\mathcal{QF}$ , και μέσω αυτών θα σχηματίσουμε μία εικόνα για τον quasifuchsian χώρο του  $\mathcal{T}_1$ .

### 8.1. Earthquakes και Critical Lines.

Η παραπάνω παραμόρφωση του  $\mathcal{T}_1$  που περιγράψαμε μεταβάλλοντας την twist παράμετρο, μπορεί να γενικευτεί και σε measured laminations. Έστω ο τρυπημένος τόρος  $\mathcal{T}_1$  και έστω  $p \in \mathcal{F}$  μία υπερβολική δομή του. Αν κάνουμε twist παραμόρφωση ως προς μία  $\mu \in \mathcal{ML}$ , παίρνουμε μία νέα δομή  $p' \in \mathcal{F}$ . Συνεπώς, η παραμόρφωση αυτή επάγει έναν ισομορφισμό στο επίπεδο των fuchsian ομάδων του τρυπημένου τόρου. Αν θεωρήσουμε την παραμόρφωση αυτή ως συνεχή συνάρτηση του χρόνου  $t$ , θεωρώντας ότι όσο περνάει ο χρόνος τόσο περισσότερο στρέφουμε, μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$\mathcal{E}_\mu(t) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

ως προς την lamination  $\mu \in \mathcal{ML}$ . Ειδικότερα, αν  $G = G(p)$  μία fuchsian ομάδα του τρυπημένου τόρου, τότε για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , ορίζεται ο ισομορφισμός

$$G \mapsto \mathcal{E}_\mu(t)(G).$$

Η απεικόνιση  $\mathcal{E}_\mu(t)$  ονομάζεται *earthquake* χρόνου  $t$  κατά μήκος της  $\mu$ . Όταν χρειάζεται για αποσαφήνιση, θα γράφουμε την παράμετρο  $t$  ως  $t_\mu$ . Η οικογένεια  $\mathcal{E}_\mu(t)$  για  $t \in \mathbb{R}$  είναι μονοπαραμετρική οικογένεια παραμορφώσεων του  $\mathcal{F}$ . Ειδικότερα  $\mathcal{E}_\mu(0) = id$ .

**Παρατήρηση 8.1:** Μία  $\mu \in \mathcal{ML}$  ως προς την οποία κάνουμε earthquake παραμόρφωση, μπορεί να έχει υπεραριθμήσιμα φύλλα. Για να προσπαθήσουμε να δώσουμε μία εικόνα της παραμόρφωσης σε αυτήν την περίπτωση, ας θεωρήσουμε ότι η  $\mu$  είναι μία lamination στο ευκλείδειο επίπεδο, που τέμνει ένα τόξο υπεραριθμήσιμες φορές. Για ευκολία, ας θεωρήσουμε ότι το εγκάρσιο τόξο στα φύλλα της lamination είναι το διάστημα  $[0, 1]$  και ότι τα σημεία τομής των φύλλων της  $\mu$  με το  $[0, 1]$  είναι ένα σύνολο Cantor  $\mathcal{C}$ , μη-μηδενικού μέτρου. Η συνάρτηση

$$F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

με τύπο

$$F(t) = \int_0^t X_C d\lambda,$$

όπου  $X_C$  είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του  $\mathcal{C}$  και  $\lambda$  το μέτρο Lebesgue, περιγράφει την απομάκρυνση κάθε σημείου του τόξου  $[0, 1]$  από την αρχική του θέση, στη μονάδα του χρόνου. Μεταφέροντας τώρα αυτή την περιγραφή στο υπερβολικό επίπεδο, έχουμε μία εικόνα της παραμόρφωσης ενός τόξου από μία τέτοια earthquake param'orfws.

Για  $p \in \mathcal{F}$ , ορίζουμε *earthquake path* κατά μήκος της  $\mu$  που διέρχεται από το  $p$ , το σύνολο

$$\mathcal{E}_\mu^p = \{\mathcal{E}_\mu(t)(p) \in \mathcal{F} : t \in \mathbb{R}\}$$

Μία earthquake παραμόρφωση ως προς μία  $\mu \in \mathcal{ML}$  δεν αλλάζει το μήκος της  $\mu$ . Παρατηρούμε ότι αν  $p_0 \in \mathcal{E}_\mu^p$  τότε  $p_0 = \mathcal{E}_\mu(t_0)(p)$  για κάποιο  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\mu^{p_0} &= \{\mathcal{E}_\mu(t)(p_0) \in \mathcal{F} : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mathcal{E}_\mu(t)(\mathcal{E}_\mu(t_0)(p)) \in \mathcal{F} : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mathcal{E}_\mu(t + t_0)(p) \in \mathcal{F} : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι το  $\mathcal{E}_\mu^{p_0}$  είναι αναλλοίωτο από τα earthquakes  $\mathcal{E}_\mu(t)$ .

Ο Kerchhoff στο [10] έδειξε ότι το  $\mathcal{E}_\mu^p$  είναι πραγματικά αναλυτικό μονοπάτι στον  $\mathcal{F}$ . Κάτα μήκος του  $\mathcal{E}_\mu^p$ , το μήκος  $l_\mu$  είναι σταθερό. Άρα, για κάθε

$p \in \mathcal{F}$ , το  $\mathcal{E}_\mu(t)(p)$  τείνει στο ίδιο σημείο  $[\mu] \in \partial\mathcal{F}$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Το ακόλουθο οφείλεται στον Kerchoff ([9])

**ΘΕΩΡΗΜΑ 8.1:** *Η συνάρτηση μήκους μίας lamination  $l_\nu$  είναι κυρτή κατά μήκος οποιουδήποτε earthquake path  $\mathcal{E}_\mu(t)$ . Είναι αυστηρά κυρτή αν και μόνο αν  $i(\mu, \nu) \neq 0$ .*

Άρα, αν  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$  με  $i(\mu, \nu) > 0$ , κατά μήκος του earthquake path  $\mathcal{E}_\mu^p$ , η συνάρτηση μήκους  $l_\nu$  είναι αυστηρά κυρτή, πραγματικά αναλυτική συνάρτηση του  $t$ . Ακόμα  $l_\nu(t) \rightarrow \infty$  καθώς  $t \rightarrow \pm\infty$ . Άρα η  $l_\nu$  έχει μοναδικό σημείο ελαχίστου στο  $\mathcal{E}_\mu^p$ . Το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύεται στο [9], για γενικές επιφάνειες. Θα το διατυπώσουμε για την περίπτωση του  $\mathcal{T}_1$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2:** *Έστω  $\mu \in \mathcal{ML}$ , και  $\gamma$  απλή κλειστή γεωδαισιακή στον  $\mathcal{T}_1$ , τέτοια ώστε  $i(\gamma, \mu) > 0$ . Θεωρούμε το Earthquake path  $\mathcal{E}_\mu^p(t_\mu)$ . Τότε*

$$\frac{dl_\gamma}{dt_\mu}(p) = \int_\gamma \cos \theta d\mu = \int_{\mathcal{T}_1} \cos \theta d\mu d\delta_\gamma,$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία ανάμεσα στις  $\gamma$  και  $\mu$  στα σημεία τομής, μετρώ- ντας αντίστροφα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού από την  $\gamma$  στο αντίστοιχο φύλλο της  $|\mu|$ , και  $\delta_\gamma$  το εγκάρσιο μέτρο για την  $\gamma$ .

Στο [21], ο Wolpert έδειξε ακόμα ότι στο σημείο ελαχίστου  $p$ ,

$$\frac{d^2 l_\nu}{dt_\mu^2}(p) > 0.$$

Θέλουμε να γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα για τυχούσες  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$ . Αν  $\nu \in \mathcal{ML}_Q$  τότε  $\nu = k\delta_\gamma$ ,  $\gamma \in S$  και το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Έστω λοιπόν ότι  $\mu \in \mathcal{ML}$  και  $\nu \in \mathcal{ML} - \mathcal{ML}_Q$  με  $i(\mu, \nu) > 0$  και  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει ένα φύλλο της  $\mu$  με κάποιο φύλλο της  $\nu$ , μετρώντας αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού. Θεωρούμε  $\{\nu_n\} \in \mathcal{ML}_Q$  ακολουθία τέτοια ώστε  $\nu_n \rightarrow \nu$  στο  $\mathcal{ML}$ . Τότε, από το λήμμα 3.3, έπεται ότι  $i(\nu_n, \mu) \rightarrow i(\nu, \mu)$ , και για μεγάλα  $n$ , η γωνία  $\theta_n$  που σχηματίζουν τα φύλλα της  $\nu_n$  με την  $\mu$  είναι κοντά στην  $\theta$ . Συνεπώς,

$$\int_{\mathcal{T}_1} \cos \theta_n d\mu d\nu_n \rightarrow \int_{\mathcal{T}_1} \cos \theta d\mu d\nu.$$

Άρα

$$\frac{dl_\nu}{dt_\mu}(p) = \int_{\mathcal{T}_1} \cos \theta d\mu d\nu.$$



Ομοίως, θεωρώντας το earthquake path  $\mathcal{E}_\nu^p$  προκύπτει

$$\frac{dl_\nu}{dt_\nu}(p) = \int_{\mathcal{T}_1} \cos \theta' d\mu d\nu.$$

Όμως  $\theta' = \pi - \theta$  και συνεπώς

$$\begin{aligned} \frac{dl_\mu}{dt_\nu}(p) &= \int_{\mathcal{T}_1} \cos \theta' d\mu d\nu = \int_{\mathcal{T}_1} \cos(\pi - \theta) d\mu d\nu \\ &= - \int_{\mathcal{T}_1} \cos \theta d\mu d\nu = - \frac{dl_\nu}{dt_\mu}(p). \end{aligned}$$

Αν ακόμα η  $l_\mu$  περιορισμένη στο  $\mathcal{E}_\nu^p$  έχει ελάχιστο στο  $p$ , τότε

$$0 = \frac{dl_\mu}{dt_\nu}(p) = - \frac{dl_\nu}{dt_\mu}(p).$$

Συνεπώς έχουμε δείξει δύο πράγματα: Αν  $\mathcal{E}_\mu^p$  και  $\mathcal{E}_\nu^p$  δύο earthquake paths με  $[\mu] \neq [\nu]$ ,

1. Για κάθε σημείο  $p_0 \in \mathcal{E}_\mu^p(t_\mu) \cap \mathcal{E}_\nu^p(t_\nu)$  ισχύει  $\frac{dl_\nu(p_0)}{dt_\mu} = - \frac{dl_\mu(p_0)}{dt_\nu}$
2. Αν το  $p_0 \in \mathcal{E}_\mu^p(t_\mu) \cap \mathcal{E}_\nu^p(t_\nu)$  είναι σημείο ελαχίστου για την  $l_\nu$  στο  $\mathcal{E}_\mu$  τότε είναι και σημείο ελαχίστου για την  $l_\mu$  στο  $\mathcal{E}_\nu$ .

Σ' αυτό το σημείο ελαχίστου  $p$ , ισχύει

$$D_{\mathcal{E}_\mu(t_\mu)}(p) = -D_{\mathcal{E}_\nu(t_\nu)}(p),$$

όπου με  $D$  συμβολίζουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα στα earthquake paths στο σημείο  $p$ .

Για κάθε ζεύγος  $(\mu, \nu) \in \mathcal{ML} \times \mathcal{ML}$  με  $\mu \notin [\nu]$ , ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{F}_{\mu, \nu} = \{p \in \mathcal{F} : \frac{dl_\nu(p)}{dt_\mu} = 0\}$$

που ονομάζουμε  $\mu, \nu$ -Critical Line. Παρατηρούμε ότι το  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  εξαρτάται μόνο από τις  $[\mu], [\nu]$ . Η ονομασία του θα δικαιολογηθεί στη συνέχεια.

Έστω  $a, b$  δύο απλές κλειστές γεωδαισιακές στον  $\mathcal{T}_1$  που αντιστοιχούν στους άξονες των  $A, B \in G$ ,  $Ax(A), Ax(B)$ , έτσι ώστε το  $(A, B)$  να είναι marking της  $G$ . Στην critical line  $\mathcal{F}_{a,b}$ , το  $\tau_{A,B} \equiv 0 \pmod{2\pi i}$  και οι άξονες  $Ax(A), Ax(B)$  τέμνονται κάθετα. Γεωμετρικά αυτό το περιμέναμε, διότι αν  $p \in \mathcal{F}_{a,b}$  τότε η  $l_a$  έχει ελάχιστο ως προς τις earthquake παραμορφώσεις κατά μήκος της  $b$ . Άρα το μήκος της θα είναι ελάχιστο όταν η  $a$  δεν 'σπάει' στο σημείο τομής της με την  $b$ , πράγμα που σημαίνει ότι οι  $a$  και  $b$  τέμνονται κάθετα. Άρα ένα σημείο στην critical line αντιστοιχεί σε έναν

ορθογώνιο τόρο (δηλαδή τόρο που οι γεννήτορες της  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$  τέμνονται κάθετα) με γεννήτορες  $(A, B)$ .

Είδαμε ότι η πραγματικά αναλυτική συνάρτηση  $l_{\nu|\mathcal{E}_\mu}$  είναι αυστηρά κυρτή, όταν  $[\mu] \neq [\nu]$ , και έχει πεδίο τιμών το  $(0, +\infty)$ . Από το θεώρημα πεπλεγμένης παραγωγίσιμης, το  $\mathcal{E}_\mu$  είναι ένα λείο τόξο στον  $\mathcal{F}$ . Παρατηρώντας ακόμα ότι για κάθε  $p \in \mathcal{E}_\mu$  ισχύει  $l_\mu(p) = c$  συμπεραίνουμε ότι  $\mathcal{E}_\mu(t) \rightarrow [\mu]$  καθώς  $t \rightarrow \pm\infty$ . Συνεπώς το earthquake path  $\mathcal{E}_\mu$  είναι ομοιομορφικό με έναν ορόκυκλο στον  $\mathcal{F}$ , που εφάπτεται του  $\partial\mathcal{F}$  στο σημείο  $[\mu]$ . Σημειώνουμε ότι δύο ορόκυκλοι που εφάπτονται στο ίδιο σημείο στο  $\partial\mathcal{F}$ , δεν τέμνονται στο εσωτερικό του  $\mathcal{F}$ .

## 8.2. Αποτελέσματα για τον $\mathcal{F}$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 8.3:** Για κάθε  $c \in \mathbb{R}^+$  και  $\mu \in \mathcal{ML}$ , υπάρχει το πολύ ένα earthquake path  $\mathcal{E}_\mu^c$ , κατά μήκος του οποίου  $l_\mu = c$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο earthquake paths  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  κατά μήκος των οποίων  $l_\mu = c$ . Τότε και τα δύο θα συγκλίνουν στο ίδιο  $[\mu] \in \partial\mathcal{F}$ , όταν  $t \rightarrow \pm\infty$ , και άρα δεν θα τέμνονται στον  $\mathcal{F}$ . Αφού ο  $\mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F}$  είναι κλειστός δίσκος, το ένα μονοπάτι,  $\mathcal{E}_1$  για παράδειγμα, χωρίζει το  $\mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F}$  έτσι ώστε μία από τις δύο συνεκτικές συνιστώσες του  $(\mathcal{E}_1)^c$  να περιέχει και το  $\mathcal{E}_2$  και το  $\partial\mathcal{F} \setminus \{[\mu]\}$ . Επιλέγουμε μία  $\nu \in \mathcal{ML}$ , με  $i(\mu, \nu) > 0$  και έστω  $p$  το σημείο ελαχίστου για την  $l_\nu$  στο  $\mathcal{E}_1$ . Τότε το  $\mathcal{E}_\nu^p$  πρέπει να τέμνει το  $\mathcal{E}_2$  σε σημείο  $p'$ . Λόγω συμμετρίας των σημείων ελαχίστου το  $p$  είναι το μοναδικό σημείο ελαχίστου για την  $l_\mu$  στο  $\mathcal{E}_\nu^p$ . Όμως εξ' υποθέσεως  $l_\mu(p) = l_\mu(p')$ , και έχουμε αντίφαση.  $\square$

Θα συμβολίζουμε ένα earthquake path ως προς την  $\mu \in \mathcal{ML}$  τέτοιο ώστε  $l_\mu(p) = c$  για κάθε  $p$  στο earthquake path με  $\mathcal{E}_{\mu,c}$ . Έστω  $\mu, \mu' \in \mathcal{ML}$  με  $\mu' = k\mu$  για κάποιο  $k > 0$ . Έστω ότι κάνοντας την earthquake παραμόρφωση κατά μήκος της  $\mu$  για χρόνο  $t$  έχουμε πραγματοποιήσει twist ως προς την  $\mu$  κατά γωνία  $\phi$ . Κάνοντας τώρα earthquake παραμόρφωση κατά μήκος της  $\mu'$  τότε η παραμόρφωση αυτή θα πραγματοποιηθεί πάνω στον κοινό φορέα των  $\mu, \mu'$ . Η  $\mu'$  όμως έχει  $k$ -πλάσιο μέτρο που σημαίνει ότι θα στρέφει κατά γωνία  $k\phi$  στον ίδιο χρόνο  $t$ . Για να το καταλάβουμε αυτό αρκεί να επισημάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση.

Έστω  $\mu$  μία measured lamination με μέτρο  $\delta_\mu$ . Αν  $\mu' = k\mu$ , μπορούμε να αντικαταστήσουμε την  $\mu'$  με την  $\mu$  που διαγράφει το ίδιο τόξο  $k$  φορές. Άρα κάνοντας earthquake παραμόρφωση κατά μήκος της  $\mu$  για χρόνο  $kt$

είναι το ίδιο σαν να κάνουμε earthquake κατά μήκος της  $\mu'$  για χρόνο  $t$ . Συνεπώς  $\mathcal{E}_{k\mu}(t) = \mathcal{E}_\mu(kt)$ .

Ακόμα παρατηρούμε ότι

$$l_{\mu'} = \int_{\mathcal{T}_1} d\mu' ds = \int_{\mathcal{T}_1} d(k\mu) ds = k \int_{\mathcal{T}_1} d\mu ds = kl_\mu.$$

Τότε αν  $k > 0$  και  $\mu' = k\mu$ ,  $\mathcal{E}_{k\mu, kc} = \mathcal{E}_{\mu, c}$ .

Στο πρόρισμα 8.5 που ακολουθεί, θα δούμε ότι το earthquake path στο οποίο  $l_\mu = c$ , υπάρχει και είναι μοναδικό. Θα το συμβολίζουμε με  $\mathcal{E}_{\mu, c}$ . Για  $\nu \notin [\mu]$ , συμβολίζουμε το σημείο ελαχίστου για την  $l_\nu$  στο  $\mathcal{E}_{\mu, c}$ , με  $p(\mu, \nu, c)$ . Ορίζουμε συνάρτηση:

$$f_{\mu, \nu} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f_{\mu, \nu}(c) = l_\nu(p(\mu, \nu, c))$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 8.4:** Για κάθε ζεύγος  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$  με  $i(\mu, \nu) > 0$ , το  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  είναι πραγματικά αναλυτικό μονοπάτι στον  $\mathcal{F}$ , με άκρα τα  $[\mu]$  και  $[\nu]$  στο  $\partial\mathcal{F}$ . Οι  $l_\mu$  και  $l_\nu$  περιορισμένες στο  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  είναι αυστηρά μονότονες και μεταβάλλονται από το 0 στο  $\infty$  σε αντίθετες κατευθύνσεις.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Από το αποτέλεσμα του Wolpert,  $\frac{d^2 l_\nu}{d\mu^2} > 0$  για κάθε σημείο του  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$ . Άρα, από το θεώρημα πεπλεγμένης παραγωγίσης, η  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  είναι ένωση από πραγματικά αναλυτικά τόξα. Ισχυριζόμαστε ότι η συνάρτηση  $l_\mu$  είναι γνήσια μονότονη σε κάθε συνιστώσα του  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$ . Αν όχι, τότε υπάρχει ένα earthquake path  $\mathcal{E}_{\mu, c}$  που τέμνει την  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  σε δύο διαφορετικά σημεία. Αυτό γίνεται γιατί αν η  $l_\mu$  δεν είναι γνήσια μονότονη, τότε θα παίρνει την τιμή  $c \in \mathbb{R}$  για δύο τουλάχιστον σημεία. Και τα δύο αυτά σημεία είναι κρίσιμα για την  $l_\nu$  στο  $\mathcal{E}_{\mu, c}$ , κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει. Αφού η  $l_\mu$  είναι πραγματικά αναλυτική συνάρτηση, ο περιορισμός της στο  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  είναι ανοιχτή και γνήσια (proper) συνάρτηση. Άρα το πεδίο τιμών της θα είναι το  $(0, \infty)$ . Είναι προφανές ότι καθώς  $l_\mu(p) \rightarrow 0$  κατά μήκος της  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$ , τότε  $p \rightarrow [\mu] \in \partial\mathcal{F}$ . Άρα κάθε συνιστώσα του  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  είναι ένα τόξο στον  $\mathcal{F}$  με άκρα  $[\mu], [\nu]$  στο  $\partial\mathcal{F}$ , λόγω της συμμετρίας των παραγώγων των  $l_\mu, l_\nu$ . Αν το  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  ήταν ένωση δύο συνεχτικών συνιστωσών, τότε για κάθε  $c > 0$  θα μπορούσαμε να βρούμε ένα μονοπάτι  $\mathcal{E}_{\mu, c}$  που να τέμνει και τις δύο συνιστώσες της  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$ . Τότε η  $l_\nu$  θα έπρεπε να έχει δύο σημεία ελαχίστου στην  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  που είναι αδύνατον. Από την συμμετρία των τύπων βλέπουμε ότι η  $l_\nu$  μεταβάλλεται επίσης μονότονα από το 0 στο  $\infty$ , αλλά με αντίθετη κατεύθυνση.  $\square$

**ΠΟΡΙΣΜΑ 8.5:** Για κάθε  $c \in \mathbb{R}^+$  και  $\mu \in \mathcal{ML}$ , υπάρχει μοναδικό earthquake path  $\mathcal{E}_\mu^c$ , κατά μήκος του οποίου  $l_\mu = c$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω  $c \in \mathbb{R}^+$  και  $\mu \in \mathcal{ML}$ . Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα earthquake path  $\mathcal{E}_\mu^p$  κατά μήκους του οποίου  $l_\mu = c$ . Η μοναδικότητα έπεται από την πρόταση 8.3.

Θεωρούμε  $\nu \in \mathcal{ML}$  τέτοια ώστε  $i(\mu, \nu) > 0$ . Από την πρόταση 8.4, ο περιορισμός της συνάρτησης  $l_\mu$  στην critical line  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  έχει πεδίο τιμών το  $(0, \infty)$ . Συνεπώς, υπάρχει  $p \in \mathcal{F}_{\mu, \nu}$  τέτοιο ώστε  $l_\mu(p) = c$ . Τότε, το earthquake path  $\mathcal{E}_\mu^p$  είναι αυτό που ζητάμε.  $\square$

Αν σταθεροποιήσουμε ένα  $[\mu] \in \mathcal{PML}$ , τα earthquake paths  $\mathcal{E}_{\mu, c}$ ,  $c \in \mathbb{R}^+$ , αποτελούν foliation για τον Fuchsian χώρο του  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{F}$ . Αυτό είναι το ανάλογο για την foliation του υπερβολικού δίσκου  $D$  από ορόκυκλους εφαπτόμενους σε ένα σημείο του  $\partial D$ . Στην πρόταση 8.7, δείχνουμε κάτι ανάλογο για τις critical lines  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$ . Το ακόλουθο λήμμα, είναι το θεώρημα 3.5 στο [12].

**ΛΗΜΜΑ 8.6:** Κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο  $p \in \mathcal{F}$ , εφάπτεται σε ένα μοναδικό earthquake path. Η απεικόνιση από το  $\mathcal{ML}$  στον εφαπτόμενο χώρο του  $p$   $T_p\mathcal{F}$ , η οποία απεικονίζει μία  $\mu \in \mathcal{ML}$  στο εφαπτόμενο διάνυσμα  $D\mathcal{E}_\mu^p(t_\mu)|_{t_\mu=0}$ , είναι ομοιομορφισμός.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 8.7:** Σταθεροποιούμε ένα  $[\mu] \in \mathcal{PML}$ . Τότε τα τόξα  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$ ,  $[\nu] \in \mathcal{PML} \setminus \{[\mu]\}$  είναι άνα δύο ξένα και αποτελούν foliation για τον  $\mathcal{F}$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω  $p \in \mathcal{F}$ . Έστω  $\beta = \beta_p : \mathcal{ML} \rightarrow T_p\mathcal{F}$  με τύπο  $\beta_p(\mu) = D\mathcal{E}_\mu^p(t_\mu)|_{t_\mu=0}$ , η οποία απεικονίζει την  $\mu \in \mathcal{ML}$  στο  $D\mathcal{E}_\mu^p(t_\mu)|_{t_\mu=0}$ , την παράγωγο του  $\mathcal{E}_\mu(t_\mu)$  που περνάει από το  $p$ , υπολογισμένη στο  $p$ . Από το λήμμα 8.6, η  $\beta$  είναι ομοιομορφισμός. Ισχυριζόμαστε ότι η  $\beta$  επάγει ομοιομορφισμό ανάμεσα στο  $\mathcal{PML}$  και το σύνολο των ακτίνων που περνάνε από την αρχή στο  $T_p\mathcal{F}$ . Πράγματι: Αν  $\mu' = k\mu$ , τότε

$$D\mathcal{E}_{\mu'}(t_{\mu'})(p)|_{t_{\mu'}=0} = kD\mathcal{E}_\mu(t_\mu)(p)|_{t_\mu=0}$$

δηλαδή το  $\beta(\mu') = k\beta(\mu)$ . Έστω λοιπόν  $[\mu]$ ,  $[\nu]$ ,  $[\nu'] \in \mathcal{PML}$  διαφορετικά και έστω ότι  $p \in \mathcal{F}_{\mu, \nu} \cap \mathcal{F}_{\mu, \nu'}$ . Επιλέγουμε αντιπροσώπους  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\nu'$  αντίστοιχα και έστω  $c = l_\mu(p)$ ,  $d = f_{\mu, \nu}(c)$ ,  $d' = f_{\mu, \nu'}(c)$ . Τα earthquake paths  $\mathcal{E}_{\nu, d}$  και  $\mathcal{E}_{\nu', d'}$  περνάνε και τα δύο από το  $p$  και επειδή το  $l_\mu$  είναι ελάχιστο στο  $p$ , έπεται ότι

$$D\mathcal{E}_\nu(t_\nu)(p)|_{t_\nu=0} = -D\mathcal{E}_{\nu'}(t_{\nu'})|_{t_{\nu'}=0}.$$

Αφού η  $\beta_p$  είναι μονομορφισμός στο  $\mathcal{PML}$ , έχουμε  $[\nu] = [\nu']$ . Έστω τώρα  $p \in \mathcal{F}$ . Αφού η  $\beta_p$  είναι και επιμορφισμός, υπάρχει  $\nu \in \mathcal{ML}$ , τέτοιο

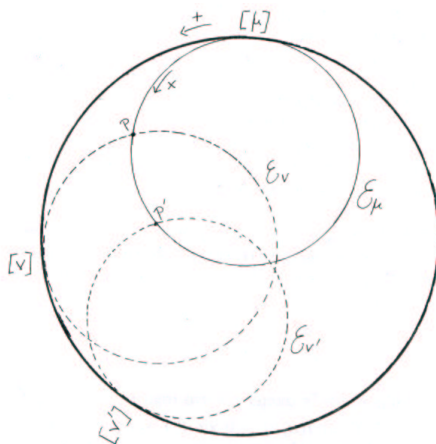
ώστε

$$D\mathcal{E}_\nu(t_\nu)(p)|_{t_\nu=0} = -D\mathcal{E}_\mu(t_\mu)(p)|_{t_\mu=0}.$$

Άρα τα earthquake paths  $\mathcal{E}_{\nu, l_\nu(p)}$  και  $\mathcal{E}_{\mu, l_\mu(p)}$  είναι εφαπτόμενα στο  $p$ . Αφού τα earthquake paths μπορούν να τέμνονται το πολύ σε δύο σημεία, έπεται ότι το  $l_\nu$  είναι ελάχιστο στο  $p$  κατά μήκος του  $\mathcal{E}_\mu$ , άρα  $p \in \mathcal{F}_{\mu, \nu}$ . Συνεπώς οι  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  αποτελούν foliation για τον  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**ΛΗΜΜΑ 8.8:** Για σταθερό  $\mu \in \mathcal{ML}$  και  $c \in \mathbb{R}^+$ , η απεικόνιση  $\psi : \mathcal{PML} \setminus \{[\mu]\} \rightarrow \mathcal{E}_{\mu, c}$  με  $\psi([\nu]) = p(\mu, \nu, c)$  είναι ομοιομορφισμός.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Από την πρόταση 8.7, η  $\psi$  είναι καλά ορισμένη και είναι 1-1 και επί. Το  $\mathcal{PML} \setminus \{[\mu]\}$  είναι ο  $S^1$  εκτός από ένα σημείο άρα είναι ομοιομορφικός με ένα ανοιχτό διάστημα στο  $\mathbb{R}$ . Ομοίως το  $\mathcal{E}_{\mu, c}$ , αφαιρώντας το σημείο  $[\mu]$  στο  $\partial D$ , είναι και αυτό ομοιομορφικό με διάστημα. Θεωρώντας ότι όσο απομακρυνόμαστε στο  $\partial D$  από το  $[\mu]$  με φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού τα στοιχεία του  $\mathcal{PML}$  αυξάνουν και υποθέτωντας ομοίως και για το  $\mathcal{E}_{\mu, c}$  τότε έχουμε την ακόλουθη κατάσταση (βλέπε Σχήμα 5):

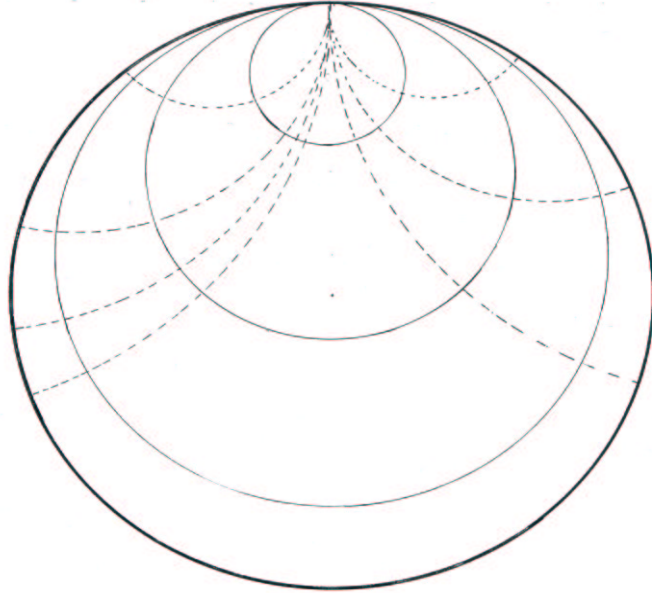


Σχήμα 5.

Αν  $[\nu], [\nu'] \in \mathcal{PML}$  τέτοια ώστε  $[\nu] > [\nu']$ , τότε για τα σημεία τομής  $p, p'$  των  $\mathcal{E}_\nu, \mathcal{E}_{\nu'}$  αντίστοιχα με το  $\mathcal{E}_{\mu, c}$  ισχύει (σύμφωνα με την διαταξη που ορίσαμε παραπάνω)  $p > p'$ . Όπως είδαμε νωρίτερα τα  $p, p'$  είναι ακριβώς τα σημεία  $p(\mu, \nu, c)$  και  $p(\mu, \nu', c)$  αντίστοιχα, άρα η  $\psi$  είναι και μονότονη. Το συμπέρασμα τώρα είναι άμεσο.  $\square$

Από την πρόταση 8.7, οι  $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$  αποτελούν foliation για τον  $\mathcal{F}$ , που είναι ανάλογη με την foliation από γεωδαισιακές στο  $D$ , που ενώνουν δύο

διαφορετικά σημεία στο  $\partial D$ . Για σταθερό  $[\mu] \in \mathcal{PML}$ , η foliation με φύλλα  $\mathcal{F}_{\mu,\nu}$ ,  $[\nu] \neq [\mu]$ , τέμνει την foliation από τα earthquake paths  $\mathcal{E}_{\mu,c}$ .



Σχήμα 6: Ο  $\mathcal{F}$  δέχεται foliation από τα earthquake paths και τις critical lines.

Αυτή την εικόνα, θα επεκτείνουμε στον  $\mathcal{QF}$  παρακάτω.

## 9. BENDING

### 9.1. Μέτρο κάμψης και Pleated Surfaces.

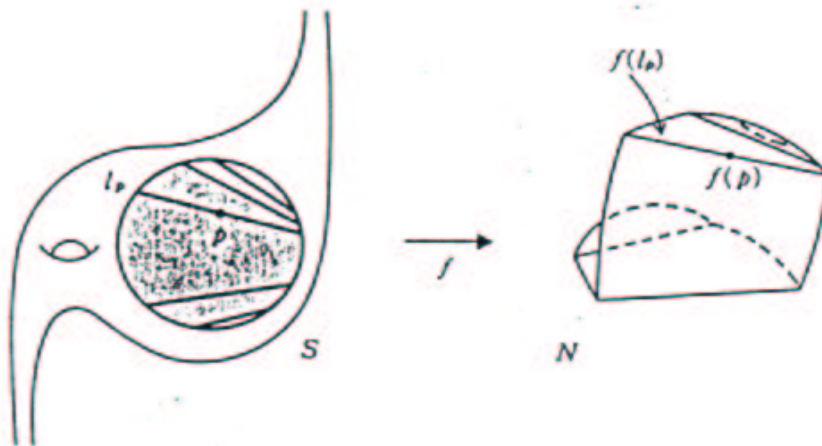
Ορίζουμε *pleated surface*  $(\Sigma, \psi)$  σε μία υπερβολική 3-πολλαπλότητα  $M$ , να είναι μία πλήρης υπερβολική επιφάνεια  $\Sigma$  μαζί με μία συνεχή απεικόνιση  $\psi: \Sigma \rightarrow M$ , τέτοια ώστε:

(α) Η  $\psi$  να είναι ισομετρία, με την έννοια ότι κάθε γεωδαισιακό τμήμα στην  $\Sigma$  απεικονίζεται μέσω της  $\psi$  σε ένα μετρήσιμο τόξο στην  $M$  του ίδιου μήκους.

(β) Για κάθε  $x \in \Sigma$ , να υπάρχει τουλάχιστον ένα ανοιχτό γεωδαισιακό τμήμα  $a_x$  που περνάει από το  $x$ , και απεικονίζεται σε γεωδαισιακό τμήμα στην  $M$ .

(γ) Η  $\psi$  απεικονίζει cusps σε cusps.

Το σύνολο των σημείων με μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα  $a_x$  που ικανοποιεί το (β) είναι το *pleating locus* της  $\psi$ . Το *pleating locus* της  $\psi$  είναι ένωση γεωδαισιακών στην  $\Sigma$ , και άρα μία geodesic lamination. Μπορούμε να φανταζόμαστε τις *pleated surfaces* σαν επιφάνειες τσακισμένες (αλλά όχι τσαλακωμένες) κατά μήκος των γεωδαισιακών του *pleating locus*.



Σχήμα 7.  $H(f, S)$  είναι μία *pleated surface*.

Έστω  $q \in \mathcal{QF}$  και  $G = G(q)$  η ομάδα που αναπαριστά το  $q$  με την standard κανονικοποίηση. Η  $G$  δρα σαν διακριτή ομάδα ισομετριών στο  $\mathbb{H}^3$  και η υπερβολική πολλαπλότητα  $M = \mathbb{H}^3/G$  είναι ομοιομορφική με το γινόμενο  $\mathcal{T}_1 \times (-1, 1)$ . Αν η  $G$  είναι *quasifuchsian* και όχι *fuchsian* το σύνορο  $\partial C$  της υπερβολικής κυρτής θήκης του οριακού συνόλου  $\Lambda(\Gamma)$  στο  $\mathbb{H}^3$  έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες  $\partial C^\pm$ , κάθε μία από τις οποίες είναι  $G$ -αναλλοίωτη. Τα πηλίκια  $\partial C^\pm/G$  είναι ομοιομορφικά με τον  $\mathcal{T}_1$ .

Η μετρική που επάγεται στα  $\partial C^\pm$  από τον  $\mathbb{H}^3$  τα κάνει *pleated surfaces*. Δηλαδή υπάρχουν επί ισομετρίες  $\psi^\pm : D \rightarrow \partial C^\pm$ , τέτοιες ώστε για κάθε  $z \in D$  να υπάρχει τουλάχιστον ένα γεωδαισιακό τμήμα από

το  $z$  που απεικονίζεται σε γεωδαισιακό τμήμα στο  $\partial C^\pm$ . Το pleating locus των  $\psi^\pm$  είναι γεωδαισιακές στα  $\partial C^\pm = \partial C^\pm(q)$ , που συμβολίζουμε  $pl^\pm(q)$ . Η ομάδα  $G$  δρα σαν διακριτή υποομάδα ισομετριών σε κάθε συνιστώσα του  $\partial C$ . Αφού οι  $\partial C^\pm/G$  είναι ομοιομορφικές με τον  $\mathcal{T}_1$ , οι δύο ομάδες ισομετριών είναι ισόμορφες με την  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$  και κληρονομούν ένα marking με τον προφανή τρόπο. (Το marking του  $\partial C^-/G$  έχει αντίθετο προσανατολισμό).

Οι ισομετρίες  $\psi^\pm$  επάγουν ισομορφισμούς στις marked fuchsian ομάδες του τρυπημένου τόρου  $F^\pm = F^\pm(q)$  που δρουν στο  $D$ , για τις οποίες θεωρούμε πάλι ότι έχουν την standard κανονικοποίηση. Συγκεκριμένα,  $\gamma \in F^\pm \Leftrightarrow (\psi^\pm)^{-1} \circ g \circ \psi^\pm$ , όπου  $g \in G$  ένας αυτομορφισμός του  $\partial C^\pm$ . Θα αναφερόμαστε στις marked ομάδες  $F^\pm(q)$  και στα πηλίκα  $D/F^\pm(q)$  με τον όρο *επίπεδες δομές (flat structures)*, για κάθε μία από τις  $\partial C^\pm/G(q)$  ή για κάθε ένα από τα universal covers αυτών,  $\partial C^\pm$ . Τις επίπεδες δομές μπορούμε να τις φανταζόμαστε σαν τις επιφάνειες που προκύπτουν, αν πάρουμε τις τσακισμένες pleated surfaces και τις τεντώσουμε.

Μία pleated surface αποτελείται από κάποια επίπεδα κομμάτια, που ενώνονται κατά μήκος των γεωδαισιακών του pleating locus. Αν  $x$  είναι ένα σημείο πάνω σε μία από τις γεωδαισιακές του pleating locus ορίζουμε την *γωνία κάμψης (bending angle)* να είναι η γωνία  $\phi$  ανάμεσα στα εξωτερικά μοναδιαία κάθετα διανύσματα των δύο γειτονικών επίπεδων κομματιών. Προφανώς, αν το  $x$  ανήκει σε κάποιο επίπεδο κομμάτι, τότε η γωνία κάμψης είναι 0. Έστω τώρα  $\mu$  μια geodesic lamination στο  $D$  τέτοια ώστε η εικόνα της μέσω της  $\psi^\pm$  να είναι η  $pl^\pm(q)$  στην  $\partial C^\pm(q)$ . Θεωρούμε ένα τόξο  $\sigma$  στο  $D$  που τέμνει τα φύλλα της  $|\mu|$ . Το  $\sigma$  απεικονίζεται μέσω της  $\psi^\pm$  στην  $\partial C^\pm(q)$  σε ένα 'τσακισμένο' τόξο, που τέμνει κάποιες από τις γεωδαισιακές του pleating locus. Για κάθε σημείο  $x \in \psi^\pm(\sigma)$  ορίζουμε  $b(x)$  να είναι η γωνία κάμψης στο  $x$ . Προφανώς, το  $b(x)$  είναι μή-μηδενικό, αν και μόνο αν το  $x$  ανήκει σε κάποιο φύλλο της pleating lamination  $pl^\pm(q)$ . Αν το  $x$  ανήκει σε κάποιο επίπεδο κομμάτι της  $\partial C^\pm(q)$ , τότε  $b(x) = 0$ .

Ορίζουμε *transverse measure*  $\beta$  για την geodesic lamination  $pl^\pm(q)$  ως εξής: Αν  $s = \psi^\pm(\sigma)$  ένα τόξο στην  $\partial C^\pm(q)$  που τέμνει τα φύλλα της lamination  $pl^\pm(q)$ , τότε

$$\beta(s) = \int_s b(x) ds.$$

Το μέτρο αυτό κάνει την  $pl^\pm(q)$  measured lamination. Θα το ονομάζουμε *μέτρο κάμψης (bending measure)* και θα το συμβολίζουμε και αυτό  $pl^\pm(q)$ . Άρα η  $pl^\pm(q)$  είναι μία measured lamination με φορέα  $|pl^\pm(q)|$ . Αν η  $G \in \mathcal{QF}$  είναι fuchsian ομάδα που δρα στον υπερβολικό δίσκο



$D \subset \mathbb{H}^3$ , τότε η κυρτή θήκη  $C$  του  $\Lambda(G)$ , είναι το  $D$ . Τότε θεωρούμε τα  $\partial C$  και  $\partial C/G$  σαν δίπλευρες επιφάνειες, τέτοιες ώστε κάθε μία από τις δύο πλευρές να είναι pleated surface με κενό pleating locus και μηδενικό μέτρο.

**Παρατήρηση 9.1:** Είναι σκόπιμο σε αυτό το σημείο να κάνουμε την παρακάτω διευκρίνιση: Η pleating lamination σε μία γενική pleated surface δεν είναι measured lamination με την έννοια που την ορίσαμε στο κεφάλαιο 3. Εκεί, ορίσαμε το εγκάρσιο μέτρο να επισυνάπτει έναν θετικό αριθμό σε κάθε τομή των φύλλων της με μία τέμνουσα. Για μία pleating lamination **δεν** υποθέτουμε ότι το μέτρο κάμψης παίρνει μόνο θετικές τιμές. Παρόλα αυτά, για τις  $pl^\pm$  στις  $\partial C^\pm$  το μέτρο κάμψης παίρνει μόνο θετικές τιμές, αφού όπως θα δούμε οι  $\partial C^\pm$  είναι κυρτές επιφάνειες εμβυθισμένες στον  $\mathbb{H}^3$ .

Ορίζουμε *pleating invariants* για μία  $G \in \mathcal{QF} - \mathcal{F}$  να είναι οι προβολικές κλάσεις των ζεύγων  $(\mu^\pm, l_{\mu^\pm})$  για οποιαδήποτε επιλογή μιας measured lamination  $\mu^\pm \in [pl^\pm]$ .

Για  $q \in \mathcal{QF}$ , θα ονομάζουμε το  $C/G$  *κυρτό πυρήνα*. Οι δύο προτάσεις που ακολουθούν αποδεικνύονται στο [8].

**ΠΡΟΤΑΣΗ 9.1:** Έστω  $q \in \mathcal{QF}$  και  $G = G(q)$  μία *quasifuchsian* ομάδα του τρυπημένου τόρου. Αν υπάρχει γεωδαισιακή  $\gamma \subset \mathbb{H}^3$  που περιέχεται στην  $|pl^+(q)|$  και στην  $|pl^-(q)|$ , τότε η  $G$  είναι *fuchsian*.

Κάτι τέτοιο είναι διαισθητικά προφανές, διότι αν η  $\gamma$  περιέχεται και στο  $|pl^+(q)|$  και στο  $|pl^-(q)|$ , τότε η  $\gamma$  πρέπει να ανήκει στο  $\partial C^+(q)$  και στο  $\partial C^-(q)$ . Κάτι τέτοιο όμως μπορεί να συμβαίνει, μόνο αν τα  $\partial C^+(q)$  και  $\partial C^-(q)$  συμπίπτουν, αν δηλαδή  $q \in \mathcal{F}$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 9.2 :** Έστω  $G \in \mathcal{QF}(\mathcal{T}_1)$ . Τότε οι laminations  $[\mu], [\nu] \in \mathcal{PML}(\mathcal{T}_1)$  περιέχουν κοινό φύλλο αν και μόνο αν  $[\mu] = [\nu]$ .

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι άμεσο πόρισμα των προτάσεων 9.1 και 9.2.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 9.3:** Υποθέτουμε ότι  $q \in \mathcal{QF} \setminus \mathcal{F}$ . Τότε η προβολική κλάση του μέτρου κάμψης δεν μπορεί να είναι ίδια και στις δύο πλευρές του κυρτού πυρήνα, δηλαδή  $[pl^+(q)] \neq [pl^-(q)]$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Έστω  $q \in \mathcal{QF} - \mathcal{F}$  και έστω  $[pl^+(q)] = [pl^-(q)]$ . Τότε από την πρόταση 9.2, οι  $[pl^+(q)], [pl^-(q)]$  περιέχουν κοινό φύλλο. Από την πρόταση 9.1 έπεται ότι  $q \in \mathcal{F}$ , που αντιφάσκει με την υπόθεση.  $\square$

**Παρατήρηση 9.2:** 1. Έστω  $q \in \mathcal{QF}$  και έστω  $F^\pm(q) \in \mathcal{F}$ , οι επίπεδες δομές στο σύνορο του κυρτού πυρήνα  $\partial C^\pm(q)/G(q)$ . Αν  $\mu \in [pl^\pm(q)]$ , τότε  $l_\mu(F^\pm(q)) = Re\lambda_\mu(q)$ .

2. Για  $q \in \mathcal{QF}$ ,  $\mu \in \mathcal{ML}$ , το  $Re\lambda_\mu$  συμπίπτει με το μήκος της lamination  $l_\mu(M(q))$  στην 3 πολλαπλότητα  $M(q) = \mathbb{H}^3/G(q)$ .

Για  $\mu \in \mathcal{ML}_Q$ ,  $Re\lambda_\mu = l_\mu(M(q))$  άρα λόγω συνέχειας, οι δύο παραπάνω παρατηρήσεις ισχύουν για όλες τις  $\mu \in \mathcal{ML}$ .

Σημαντικό για τη συνέχεια είναι το παρακάτω. Η απόδειξή του βρίσκεται στο [5].

**ΘΕΩΡΗΜΑ 9.4:** Οι απεικονίσεις  $\mathcal{QF} \rightarrow \mathcal{F}$  με  $\vartheta \mapsto F^\pm(q)$  και  $\mathcal{QF} \setminus \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{ML}$  με  $\vartheta \mapsto pl^\pm(q)$  είναι συνεχείς.

**Παρατήρηση 9.3:** Στην παράγραφο 7.2 είδαμε τις μιγαδικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες  $(\lambda_A, \tau_{A,B}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  ως προς ένα marking της  $G = G(q)$  για  $q \in \mathcal{QF}$ . Αλλάζοντας τις παραμέτρους αυτές πετυχαίνουμε την λεγόμενη μιγαδική Fenchel-Nielsen παραμόρφωση του  $\mathcal{T}_1$ . Η παραμόρφωση αυτή μπορεί να γίνει ως προς οποιοδήποτε marking  $(V, W)$  της  $G$ . Για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  σταθερό και  $\tau \in \mathbb{C}$ , η μιγαδική Fenchel-Nielsen παραμόρφωση ορίζει μία απεικόνιση  $D \rightarrow \mathbb{H}^3$ , που είναι σύνθεση μίας earthquake παραμόρφωσης  $\mathcal{E}_\gamma(Re\tau) : D \rightarrow D$  κατά μήκος της γεωδαισιακής  $\gamma$  που αναπαριστάται από το  $V$ , και μίας ισομετρίας  $\psi : D \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Συγκεκριμένα, η  $\mathcal{E}_\gamma(Re\tau)$  μεταφέρει τη δράση της ομάδας του παραλληλόγραμου τόρου  $G(\lambda, 0)$  στην  $G(\lambda, Re\tau)$ . Η ισομετρία  $\psi$  είναι μία pleated surface απεικόνιση με pleating locus  $\gamma$  και γωνία κάμψης  $Im\tau$ . Θέτουμε  $D_\gamma(\lambda, \tau) = \psi(D)$ . Σύμφωνα με όσα έχουμε πει σε αυτή την παράγραφο, το μέτρο κάμψης μίας τέμνουσας  $\sigma$  της  $\gamma$  στην pleated surface  $D_\gamma(\lambda, \tau)$  είναι  $i(\gamma, \sigma)Im\tau$ .

**Παρατήρηση 9.4:** Η  $G(\lambda_A, Re\tau_{A,B})$  που αναφέραμε παραπάνω, δεν είναι τίποτε άλλο παρά η επίπεδη δομή του  $\partial C^+(q)$ . Δεδομένου ότι για κάθε  $q \in \mathcal{QF}$  η επιφάνεια  $\partial C^+(q)$  αποκτά μία διαφορετική υπερβολική δομή, έχουμε έναν τρόπο να διακρίνουμε τα διαφορετικά  $q \in \mathcal{QF}$ , από το τι συμβαίνει στις  $\partial C^+(q)$ .

Παρατηρούμε ακόμα ότι, αφού η pleated surface  $\partial C^+(q)$  προκύπτει από την επίπεδη δομή κάνοντας pure bend κατά μήκος των γεωδαισιακών

του pleating locus, η απεικόνιση

$$\mathcal{QF} - \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{ML} \times \mathcal{F}$$

για την οποία

$$\vartheta^* (pl^+(q), F^+(q)),$$

όπου  $F^+(q)$  η επίπεδη δομή του  $\partial C^+(q)$ , είναι μονομορφισμός.

## 9.2. Pleating Varieties.

Έστω  $\mu \in \mathcal{ML}$ . Ορίζουμε τα σύνολα

$$\mathcal{P}_\mu^\pm = \{q \in \mathcal{QF} : [pl^\pm(q)] = [\mu]\}, \quad \mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_\mu^+ \cup \mathcal{P}_\mu^-$$

που τα ονομάζουμε  $\mu$ -pleating varieties. Για ένα ζεύγος  $(\mu, \nu) \in \mathcal{ML} \times \mathcal{ML}$ , θέτουμε

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu} = \{q \in \mathcal{QF} : [pl^+(q)] = [\mu], [pl^-(q)] = [\nu]\}$$

Ονομάζουμε αυτό το σύνολο  $\mu, \nu$ -pleating plane. Παρατηρούμε ότι οι δύο αυτοί ορισμοί εξαρτώνται μόνο από τις κλάσεις  $[\mu], [\nu]$ . Τέλος δεδομένου ενός διατεταγμένου ζεύγους  $(\mu, \nu) \in \mathcal{ML} \times \mathcal{ML}$  και ενός  $c > 0$ , ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu,c} = \{q \in \mathcal{P}_{\mu,\nu} : l_\mu(q) = c\}$$

που ονομάζουμε pleating ray. Παρατηρούμε ότι αν  $s > 0$ , η  $s\mu \in [\mu]$  και  $l_{s\mu} = sl_\mu$ . Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{s\mu,\nu,sc} &= \{q \in \mathcal{P}_{s\mu,\nu} : l_{s\mu}(q) = sc\} \\ &= \{q \in \mathcal{P}_{\mu,\nu} : sl_\mu(q) = sc\} \\ &= \{q \in \mathcal{P}_{\mu,\nu} : l_\mu(q) = c\} = \mathcal{P}_{\mu,\nu,c}. \end{aligned}$$

Συνεπώς για  $s \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mathcal{P}_{\mu,\nu,c} = \mathcal{P}_{s\mu,\nu,sc}$ . Άρα η  $\mathcal{P}_{\mu,\nu,c}$  εξαρτάται μόνο από την προβολική κλάση του  $(\mu, c)$  και την κλάση του  $\nu$ ,  $[\nu]$ . Οι ονομασίες rays και planes θα δικαιολογηθούν αργότερα.

Από την πρόταση 9.3 προκύπτει ότι  $\mathcal{P}_{\mu,\mu} = \emptyset$ . Είναι ακόμα προφανές ότι  $\mathcal{P}_{\mu,\nu} \cap \mathcal{P}_{\mu',\nu'} = \emptyset$ , εκτός αν  $[\mu] = [\mu']$  και  $[\nu] = [\nu']$ . Ειδικότερα  $\mathcal{P}_{\mu,\nu} \neq \mathcal{P}_{\nu,\mu}$ , όταν  $i(\mu, \nu) > 0$ .

**Παρατήρηση 9.5:** Το αν μία ομάδα ανήκει στο  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$  ή στο  $\mathcal{P}_{\nu,\mu}$  εξαρτάται από τις συμβάσεις μας για το πώς ονοματίζουμε τις πλευρές  $\partial C^\pm$  του  $\partial C$ . Το σημαντικό εδώ είναι ότι δύο ομάδες που διαφέρουν μόνο στον χαρακτηρισμό των + και - πλευρών τους δεν είναι ίδιες σαν marked ομάδες στον  $\mathcal{QF}$ . Η διαφορά τους είναι στον προσανατολισμό των καμπυλών γεννητόρων που είναι αντίθετος.

Το κεντρικό αποτέλεσμα του [8] είναι ότι οι pleating varieties δεν είναι κενές. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται το ακόλουθο

**ΘΕΩΡΗΜΑ 9.5:** Έστω  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$ ,  $[\mu] \neq [\nu]$ . Τότε  $P_{\mu, \nu} \neq \emptyset$ .

### 9.3. Μιγαδικό μήκος και Pleating Varieties.

Το πρώτο βήμα για να αποδείξουμε τα βασικά μας θεωρήματα είναι να δείξουμε ότι για κάθε  $\mu \in \mathcal{ML}$ , το μιγαδικό μήκος  $\lambda_\mu$  έχει πραγματικές τιμές στο  $\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_\mu^+ \cup \mathcal{P}_\mu^-$ . Θα θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου  $\mu \in \mathcal{ML}_\mathbb{Q}$ . Το ακόλουθο είναι αναδιατύπωση του λήμματος 4.6 στο [6].

**ΛΗΜΜΑ 9.6:** Έστω  $\gamma$  κλειστή γεωδαισιακή που περιέχεται στο pleating locus της  $G$ ,  $|pl^\pm(G)|$ . Τότε αν η  $M \in PSL(2, \mathbb{C})$  αναπαριστά την  $\gamma$ , η  $M$  είναι καθαρά υπερβολική ισομετρία.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 9.7:** Υποθέτουμε ότι  $\mu \in \mathcal{ML}_\mathbb{Q}$ . Τότε  $P_\mu \subset \lambda_\mu^{-1}(\mathbb{R})$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Αν η  $\mu$  ανήκει στο pleating locus της  $G$  και η  $M \in PSL(2, \mathbb{C})$  που αναπαριστά την  $\mu$ , από το λήμμα 9.6 η  $M$  είναι καθαρά υπερβολική ισομετρία. Συνεπώς  $|Tr M| > 2$  και ειδικότερα,  $Tr M \in \mathbb{R}$ , άρα  $Im \lambda_M = 0$ .  $\square$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την γενίκευση της πρότασης 9.7 για laminations  $\mu \in \mathcal{ML}$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 9.8:** Έστω  $q \in \mathcal{QF}$  και έστω ότι  $pl^+ = \mu$ . Τότε  $\lambda_\mu(q) \in \mathbb{R}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Για  $[\mu] \in \mathcal{ML}_\mathbb{Q}$  το έχουμε δείξει. Έστω λοιπόν  $[\mu] \notin \mathcal{ML}_\mathbb{Q}$ . Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\mathcal{QF} - \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{ML} \times \mathcal{F}$$

με τύπο

$$\vartheta \mapsto (pl^+(q), F^+(q)),$$

όπου  $F^+(q)$  είναι η επίπεδη δομή του  $\partial C^+(q)$ . Από το θεώρημα 9.4 η απεικόνιση είναι συνεχής. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.4, η παραπάνω απεικόνιση είναι και μονομορφισμός.

Έστω τώρα  $U \subset \mathcal{QF} - \mathcal{F}$  μία ανοιχτή περιοχή που περιέχει το  $q$ . Αν η  $[pl^+(q')]$  ήταν σταθερή για κάθε  $q' \in U$ , τότε η τετραδιάστατη περιοχή  $U$  θα είχε, μέσω της παραπάνω απεικόνισης, τριδιάστατη εικόνα. Κάτι

τέτοιο όμως δεν μπορεί να συμβαίνει αφού η απεικόνιση είναι συνεχής και 1-1.

Από το θεώρημα συνέχειας 9.4, μπορούμε να βρούμε ακολουθία  $q_n$  με  $q_n \rightarrow q$  στο  $U$ , με  $pl^+(q_n) = \mu_n$  και  $\mu_n \in \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$ . Από την πρόταση 9.7, έπεται ότι  $\lambda_{\mu_n}(q_n) \in \mathbb{R}^+$ . Από το θεώρημα 9.4 και πάλι,  $\mu_n \rightarrow \mu$  και από το θεώρημα 6.4,  $\lambda_{\mu_n} \rightarrow \lambda_{\mu}$  στα συμπαγή του  $\mathcal{QF}$ . Συνεπώς, επιλέγοντας κατάλληλες υπακολουθίες, έχουμε ότι  $\lambda_{\mu_n}(q_n) \rightarrow \lambda_{\mu}(q)$  και τότε  $\lambda_{\mu}(q) \in \mathbb{R}^+$  που θέλαμε να δείξουμε.  $\square$

## 10. QUAKEBENDS ΚΑΙ QUAKEBEND PLANES

### 10.1. Quakebends.

Τα Quakebends είναι η μιγαδική γενίκευση των earthquakes, η κατασκευή των οποίων εισήχθη από τον Thurston. Στην περίπτωση των earthquakes η παραμόρφωση εξαρτάται από μία πραγματική παράμετρο  $t$  και μία  $\mu \in \mathcal{ML}$ . Ανάλογα, η quakebend παραμόρφωση, εξαρτάται από μία μιγαδική παράμετρο  $\tau$  και μία  $\mu \in \mathcal{ML}$ .

Έστω  $p \in \mathcal{F}$  και  $G_0 = G(p)$  που δρα στο  $D \subset \mathbb{H}^3$ . Η quakebend παραμόρφωση είναι σύνθεση μίας earthquake παραμόρφωσης και μιας διαδικασίας bending. Θα την περιγράψουμε στην ειδική περίπτωση  $\mu = \delta_{\gamma}$ , όπου  $\gamma$  μία απλή κλειστή καμπύλη στον  $\mathcal{T}_1$  και η παράμετρος  $\tau = i\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , καθαρά μιγαδική. Έστω  $V = V(\gamma) \in G_0$  που αναπαριστά την  $\gamma$  και έστω  $\tilde{V} = \tilde{V}(\gamma)$  το σύνολο των ανυψώσεων της  $\gamma$  στο  $D$ . Το σύνολο  $\tilde{V}$  αποτελείται από ανά δύο ξένες γεωδαισιακές στο  $D$ , που δεν είναι τίποτα άλλο από τον άξονα της  $V$  και όλους τους συζυγείς του. Αυτοί οι άξονες στο  $\tilde{V}$  διαμερίζουν το  $D$  σε συνεκτικά υποσύνολα  $P_i$ . Ορίζουμε την pleated surface απεικόνιση  $\psi(\tau) : D \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Η  $(\psi(\tau), D)$  είναι μία pleated surface στο  $\mathbb{H}^3$  με  $\psi(\tau)(D) = D_{\mu}^p(\tau)$  και η  $\psi(\tau)$  είναι ισομετρία σε κάθε άξονα στο  $\tilde{V}$  και σε κάθε κλειστή συνιστώσα  $P_i$ . Αν οι συνιστώσες  $P_i, P_j$  τέμνονται κατά μήκος ενός άξονα  $a \in \tilde{V}$ , τότε οι  $\psi(\tau)(P_i), \psi(\tau)(P_j)$  είναι επίπεδα που τέμνονται κατά μήκος της  $\psi(\tau)(a)$ . Η γωνία κάμψης μεταξύ των  $\psi(\tau)(P_i), \psi(\tau)(P_j)$  είναι  $\theta$ . Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *pure bending κατά μήκος της  $\gamma$* . Σημειώνουμε ότι καθόλη τη διάρκεια του bending το μήκος της  $\gamma$  παρέμεινε σταθερό.

Στην γενική περίπτωση, όπου  $\mu \in \mathcal{ML}$  και  $\tau \in \mathbb{C}$ , η quakebend παραμόρφωση, είναι σύνθεση μίας earthquake παραμόρφωσης  $\mathcal{E}_{\mu}(Re\tau)$  και μίας pure bend παραμόρφωσης κατά γωνία  $\theta = Im\tau$ . Αφού η earthquake

παραμόρφωση κατά μήκος της  $\mu \in \mathcal{ML}$  δεν μεταβάλλει το μήκος της  $\mu$ , το μήκος της  $\mu$  δεν αλλάζει από την quakebend παραμόρφωση.

**Παρατήρηση 10.1:** Όπως αναφέραμε και στην παρατήρηση 9.1, μία  $\mu \in \mathcal{ML}$  μπορεί να έχει υπεραριθμήσιμα φύλλα. Θα ήταν καλό να δούμε ε σε αυτό το σημείο, πώς περιγράφεται μία pure bend παραμόρφωση ως προς μία τέτοια lamination. Όπως και στην παρατήρηση 9.1, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μία εικόνα μέσα από ένα ευκλείδιο σχήμα. Ας υποθέσουμε και εδώ, ότι το διαστήμα  $[0, 1]$  τέμνει εγκάρσια τα φύλλα της  $\mu$  και ότι τα σημεία τομής των φύλλων της  $\mu$  με το  $[0, 1]$  είναι ένα σύνολο Cantor. Αν η  $\mu$  είχε πεπερασμένα φύλλα που τέμνουν το  $[0, 1]$ , ας πούμε  $n$ , που τέμνουν το  $[0, 1]$  στα σημεία  $x_1, \dots, x_n$ . Τότε μπορούμε να πάρουμε μία εικόνα της παραμόρφωσης του τόξου, πράττοντας ως εξής: Το  $[0, 1]$  διαμερίζεται από τα σημεία τομής του με τα φύλλα της  $\mu$  σε  $n + 1$  υποδιαστήματα. Παιρνουμε το τελευταίο υποδιαστήμα  $[x_n, 1]$  και το στρέφουμε κατά κάποια γωνία στο σημείο  $x_n$ . Κάνουμε το ίδιο και στο προηγούμενο υποδιάστημα  $[x_{n-1}, x_n]$ . Τότε η συνολική γωνία κάμψης ενός σημείου στο  $(x_n, 1]$  είναι το άθροισμα των δύο γωνιών στα  $x_n$  και  $x_{n-1}$ . Συνεχίζοντας έτσι για όλα τα  $x_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , έχουμε μία εικόνα σε κάθε σημείο του τόξου  $[0, 1]$  για το πόσο παραμορφώνεται στη μονάδα του χρόνου. Στην υπεραριθμήσιμη περίπτωση δεν μπορούμε να έχουμε μία τέτοια περιγραφή. Αυτό που μπορούμε όμως να κάνουμε είναι να την περιγράψουμε οριακά, ως εξής: Ας πάρουμε μία διαμέριση  $\{x_1 < x_2 < \dots < x_n : x_i \in [0, 1] \forall i = 1 \dots n\}$ . Κάθε τέτοιο διάστημα της διαμέρισης, περιέχει υπεραριθμήσιμα σημεία τομής με φύλλα της  $\mu$ . Αν θεωρήσουμε ότι το συνολικό μέτρο κάμψης σε κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης  $[x_j, x_{j+1}]$  'συγκεντρώνεται' στο δεξί άκρο  $x_{j+1}$ , τότε μπορούμε να περιγράψουμε την παραμόρφωση σε κάθε σημείο, όπως στην πεπερασμένη περίπτωση που περιγράψαμε παραπάνω. Λεπταίνοντας την διαμέριση και παίρνοντας το μήκος της να τείνει στο 0, προσεγγίζουμε την πραγματική εικόνα.

Η quakebend παραμόρφωση ως προς την  $\mu \in \mathcal{ML}$  και με παράμετρο  $\tau \in \mathbb{C}$ , επάγει έναν ισομορφισμό  $Q_\mu(\tau)$  από την  $G_0 = G(p)$  στην εικόνα του  $Q_\mu(\tau)(G_0) = G_\mu^p(\tau)$ . Η pleating απεικόνιση  $\psi(\tau) = \psi_\mu^p(\tau)$  είναι τέτοια ώστε  $(\psi_\mu^p(\tau)) \circ (G_\mu^p(Re\tau)) \circ (\psi_\mu^p(\tau))^{-1} = G_\mu^p(\tau)$ . Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, παρατηρούμε ότι

1. Αν  $Im\tau \neq 0$ , τότε η  $D_\mu^p(\tau)$  έχει pleating locus  $|\mu|$ .
2. Αν  $\tau = 0$ , τότε η  $\psi_\mu^p(\tau) = id$  και  $G_\mu^p(\tau) = G_0$ .
3. Αν  $Im\tau = 0$  και  $Re\tau = t$ , ο  $Q_\mu(\tau)$  συμπίπτει με τον  $\mathcal{E}_\mu(t)$ , η  $D_\mu^p = D$  και η  $G_\mu^p(t)$  είναι διακριτή και fuchsian για κάθε  $t \in R$ .

4. Αν  $Re\tau = 0$ , ονομάζουμε το quakebend pure bend.

Αν η lamination  $\mu$  είναι ρητή,  $\mu = k\delta_\gamma$ , μία earthquake παραμόρφωση κατά μήκος της  $\mu$  δεν είναι τίποτα άλλο από ένα Fenchel-Nielsen twist. Στα πλαίσια των Fenchel-Nielsen συντεταγμένων  $(\lambda_V, \tau_{V,W})$  με  $V \in G$  να αναπαριστά την  $\gamma$ , η earthquake παραμόρφωση  $\mathcal{E}_\gamma(t)$ , δίνεται από τον τύπο:  $G(\lambda_V, \tau_{V,W}) \mapsto G(\lambda_V, \tau_{V,W} + kt)$ . Όμοια μία quakebend παραμόρφωση  $Q_\mu(\tau)$  κατά μήκος της  $\mu = k\delta_\gamma$  δεν είναι τίποτα άλλο, από ένα μιγαδικό Fenchel-Nielsen twist, που δίνεται από τον τύπο:  $G(\lambda_V, \tau_{V,W}) \mapsto G(\lambda_V, \tau_{V,W} + k\tau)$ . Ειδικότερα, αν το βασικό σημείο  $p \in \mathcal{F}$  είναι η ομάδα που αντιστοιχεί στον ορθογώνιο τόρο  $G(\lambda, 0)$  ως προς το marking  $(V, W)$ , η pleated surface εικόνα  $D_\mu^p(\tau)$  είναι ακριβώς η  $D_\gamma(\lambda, \tau)$ . Θα κάνουμε συχνή χρήση αυτής της παρατήρησης.

**Παρατήρηση 10.2:** Μέχρι τώρα, έχουμε δει quakebends, όταν το βασικό σημείο  $p$  είναι fuchsian. Μπορούμε να κάνουμε την ίδια κατασκευή ξεκινώντας από ένα βασικό σημείο  $q \in \mathcal{P}_\mu^+$ . Συγκεκριμένα, έστω  $pl^+(q)$  να είναι το μέτρο κάμψης στο  $\partial C^+(q)$ , έτσι ώστε  $pl^+(q) = k\mu$  για κάποιο  $k > 0$ . Έστω η επίπεδη δομή της  $\partial C^+(q)$  που αναπαριστάται από την fuchsian ομάδα  $F^+(q)$  που δρα στο  $D$ . Μπορούμε να ορίσουμε τον quakebend  $Q_\mu^q(\tau)$  σαν την ομάδα που προκύπτει εφαρμόζοντας την quakebend απεικόνιση  $Q_\mu^q(\tau + ik)$  που δρα στην  $F^+(q)$ . (Ουσιαστικά, αυτή η παρατήρηση λέει, ότι αν  $q \in \mathcal{P}_\mu^+$  μπορούμε να περιγράψουμε την quakebend παραμόρφωση ως εξής: ξεκινώντας από το fuchsian σημείο  $F^+(q)$ , κάνουμε πρώτα pure bend ως προς την  $\mu$  κατά γωνία  $k$ , και παίρνουμε την pleated surface  $\partial C^+(q)$ , που αντιστοιχεί στο  $Q_\mu^q(0 + ik)(F^+(q))$ . Συνεχίζουμε από εκεί και πέρα για όλες τις τιμές της παραμέτρου  $\tau$ .) Με άλλα λόγια συνθέτουμε μία earthquake απεικόνιση ως προς την  $\mu$  κατά  $Re\tau$ , με ένα pure bend κατά  $Im\tau + k$ . Δεν θα χρειαστεί να συζητήσουμε προβλήματα που έχουν να κάνουν με τον ορισμό μίας quakebend απεικόνιση με βασικό σημείο ένα τυχαίο  $q \in \mathcal{QF}$ .

## 10.2. Quakebend Planes.

Σε ότι ακολουθεί, θα θεωρούμε συχνά την quakebend παράμετρο  $\tau$  σαν ολόμορφη συνάρτηση του χώρου των αναπαραστάσεων  $p : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ , modulo συζυγίας στην  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Η ακόλουθη πρόταση, είναι η πρόταση 3.8.1 στο [5] και έχει αποδειχτεί για την περίπτωση όπου  $p \in \mathcal{F}$ . Από την Παρατήρηση 10.2, είναι φανερό πως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πρόταση ισχύει και για  $p \in \mathcal{P}_\mu^+$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 10.1:** Έστω  $p \in \mathcal{F} \cup \mathcal{P}_\mu^+$ ,  $\tau \in \mathbb{C}$ ,  $\mu \in \mathcal{ML}$  και έστω  $G_\mu^p(\tau) = Q_\mu(\tau)(G(p))$ . Τότε οι συντεταγμένες των πινάκων της  $G_\mu^p(\tau)$  είναι ολόμορφες συναρτήσεις του  $\tau$ .

Το αποτέλεσμα αυτό μας επιτρέπει να εισάγουμε τα quakebend planes που είναι από τα βασικότερα εργαλεία μας για ότι θα ακολουθήσει. Για  $q \in \mathcal{P}_\mu^+ \cup \mathcal{F}$ , θέτουμε

$$Q_\mu^q = \left\{ G_\mu^q(\tau) : \tau \in \mathbb{C} \right\},$$

που ονομάζουμε  $\mu$ -quakebend plane με βασικό σημείο  $q$ , και μερικές φορές θα γράφουμε  $Q_\mu^q(\tau)$  αντί για  $G_\mu^q(\tau)$ .

Στην ρητή περίπτωση  $\mu \in \mathcal{ML}_Q$ , το quakebend plane  $Q_\mu^q$  έχει απλή περιγραφή μέσω των μιγαδικών Fenchel-Nielsen συντεταγμένων. Υποθέτουμε ότι  $\mu = k\delta_\gamma$ ,  $\gamma \in S$ , και ότι το  $(\gamma, \gamma')$  είναι ένα ζεύγος marked γεννητόρων για την  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$ . Έστω  $(\lambda_V, \tau_{V,W}) \subset \mathbb{C}^2$  οι μιγαδικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες ως προς τους αντίστοιχους marked γεννήτορες  $(V, W)$  της  $G$ . Έστω  $c = \lambda_\mu(q)$ . Τότε, αφού μία quakebend παραμόρφωση ως προς μία ρητή lamination δεν μεταβάλλει το μήκος της σύμφωνα με όσα έχουμε πει παραπάνω, το  $Q_\mu^q$  είναι απλά η τομή  $\{(c, \tau)\} \subset \mathbb{C}^2$ . Θα τη συμβολίζουμε με  $Q_{\gamma,c}$ . Αν το ζεύγος  $(c, \tau_0)$  αντιστοιχεί σε ένα fuchsian σημείο, σύμφωνα με το 3 της παρατήρησης στην παράγραφο 10.1,  $\tau_0 \in \mathbb{R}$ . Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $(c, \tau_0) = \mathcal{E}_\gamma(t)$  για κάποιο  $t \in \mathbb{R}$ . Από αυτή την παρατήρηση, προκύπτει ότι το  $Q_{\gamma,c}$  τέμνει τον  $\mathcal{F}$  κατά μήκος του earthquake path  $\mathcal{E}_{\gamma,c}$ .

Αν  $\mu \in \mathcal{ML}$  και  $p, p' \in \mathcal{E}_{\mu,c}$  τότε  $Q_\mu^p \cap \mathcal{F} = \mathcal{E}_{\mu,c} = Q_\mu^{p'} \cap \mathcal{F}$  και τα  $Q_\mu^p$  και  $Q_\mu^{p'}$  ταυτίζονται. Ονομάζουμε αυτό το επίπεδο  $Q_{\mu,c}$ . Γενικά πάντως, αν  $q, q' \in \mathcal{P}_\mu$  και  $\lambda_\mu(q) = \lambda_\mu(q')$ , τότε δεν είναι προφανές το αν  $Q_\mu^q = Q_\mu^{q'}$  ή όχι. Ένα από τα βασικά αποτελέσματα του κειμένου αυτού είναι ότι η συνθήκη  $\lambda_\mu(q) = \lambda_\mu(q')$  συνεπάγεται πάντα  $Q_\mu^q = Q_\mu^{q'}$ , και θα το αποδείξουμε στη συνέχεια.

**Παρατήρηση 10.3:** Όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα, η quakebend παραμόρφωση ως προς κάποια  $\mu \in \mathcal{ML}$  δεν μεταβάλλει το μήκος της  $\mu$ . Τα  $Q_\mu^p$  και  $Q_{\mu,c}$  που ορίσαμε είναι το ίδιο σύνολο. Θα το συμβολίζουμε με  $Q_\mu^p$  αν μας ενδιαφέρει το βασικό σημείο  $p$ . Διαφορετικά θα το συμβολίζουμε  $Q_{\mu,c}$ .

Στο κεφάλαιο 8, είδαμε ότι ο Fuchsian χώρος  $\mathcal{F}$ , δέχεται foliation από τα earthquake paths. Τα quakebend planes που ορίσαμε, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι η 'επέκταση' των earthquake paths στον  $Q\mathcal{F}$ .



Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω, για ένα βασικό σημείο  $q \in \mathcal{P}_\mu \cup \mathcal{F}$  το quakebend plane  $Q_\mu^q$  είναι το σύνολο των ομάδων-εικόνων της βασικής ομάδας  $G(q)$ , μέσω του quakebend ισομορφισμού. Ας υποθέσουμε ότι η  $\mu = k\delta_\gamma \in \mathcal{ML}_\mathcal{Q}$ ,  $k > 0$ , και ότι η  $\gamma$  αντιστοιχεί σε κάποιο  $V \in G$ . Επιλέγουμε  $W \in G$  τέτοιο ώστε το  $(V, W)$  να είναι marking για την  $G$ . Τότε η  $G$  μπορεί να εκφραστεί μέσω των Fenchel-Nielsen συντεταγμένων ως προς το marking  $(V, W)$  ως  $G(q) = G(\lambda_V, \tau_{V,W})$ . Η quakebend παραμόρφωση, επάγει την απεικόνιση  $G(\lambda_V, \tau_{V,W}) \rightarrow G(\lambda_V, \tau_{V,W} + k\tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{C}$ . Όπως είδαμε στην παρατήρηση 7.1, η  $G(\lambda_V, \tau_{V,W} + k\tau)$  μπορεί να μην είναι quasifuchsian ομάδα. Συνεπώς, ολόκληρο το quakebend plane  $Q_\mu^q$  δεν περιέχεται εν γένει στον  $\mathcal{QF}$ . Θα δούμε μάλιστα στην πρόταση 11.14 ότι στην ειδική περίπτωση όπου  $q \in \mathcal{P}_\mu \cup \mathcal{F}$  (που είναι και η περίπτωση που μας ενδιαφέρει), αν το  $Q_\mu^q$  είναι το quakebend plane με παράμετρο  $\tau$ , τότε δεδομένου ενός  $K > 0$ , υπάρχει  $B > 0$  τέτοιο ώστε αν  $|\operatorname{Re}\tau| < K$  και  $|\operatorname{Im}\tau| > B$ , τότε το  $Q_\mu^q$  δεν περιέχεται στον  $\mathcal{QF}$ .

Σημειώνουμε ότι στην ειδική περίπτωση που το  $p$  είναι fuchsian σημείο, αφού μπορούμε να δούμε τον  $\mathcal{QF}$  σαν ανοιχτή περιοχή του  $\mathcal{F}$  (στην  $PSL(2, \mathbb{C})$  modulo συζυγίας), έπεται ότι για μικρό  $\tau$  η  $G_\mu^p(\tau)$  είναι quasifuchsian. Το ακόλουθο ισχυρό αποτέλεσμα δείχνει ότι όσο παραμορφώνουμε με quakebend κατά μήκος της  $\mu$  ξεκινώντας από ένα βασικό σημείο  $q \in \mathcal{P}_\mu^+ \cup \mathcal{F}$  (για το οποίο  $\partial C^+ = D_\mu^q(0)$ ), η pleated surface  $D_\mu^q(\tau)$  παραμένει ίδια με την  $\partial C^+$ , για όλα τα μικρά  $\tau$ . Αποδεικνύεται στην πρόταση 8.9 του [8], όταν το βασικό σημείο  $q \in \mathcal{F}$ . Από την παρατήρηση στην τελευταία παράγραφο της 10.1 έπεται ότι η απόδειξη δουλεύει και στην δική μας περίπτωση.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 10.2:** Δεδομένου ενός  $q \in \mathcal{P}_\mu^+ \cup \mathcal{F}$  και μίας  $\mu \in \mathcal{ML}$ , υπάρχει  $\epsilon > 0$  που εξαρτάται από την  $\mu$  και από το  $q$ , τέτοιο ώστε αν  $|\tau| < \epsilon$  τότε η  $G_\mu^q(\tau) \in \mathcal{QF}$  και η  $D_\mu^q(\tau)$  είναι μία συνιστώσα του  $\partial C(G_\mu^p(\tau))$ .

Από την πρόταση 10.2, προκύπτει ότι μία περιοχή του  $q$  στο  $Q_\mu^q$  περιέχεται στο  $\mathcal{P}_\mu$ . Τονίζουμε όμως ακόμα μία φορά, ότι γενικά, ολόκληρο το  $Q_\mu^q$  δεν περιέχεται στον  $\mathcal{QF}$ . Σημειώνουμε ακόμα ότι αν  $G_\mu^q(\tau) \in \mathcal{QF}$  και  $D_\mu^q(\tau) = \partial C^+(G_\mu^p(\tau))$ , τότε η επίπεδη δομή της  $\partial C^+(G_\mu^p(\tau))$ , αναπαριστάται από την fuchsian ομάδα  $\mathcal{E}_\mu(\operatorname{Re}\tau)(F^+(q))$ , που προκύπτει από την πραγματοποίηση ενός earthquake απόστασης  $\operatorname{Re}\tau$  κατά μήκος του pullback της  $\mu$  στο  $D$ .

## 11. ΔΥΟ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

### 11.1. Υλοποιήσιμες γεωδαισιακές.

Έστω  $G$  μία ομάδα του τρυπημένου τόρου, που προκύπτει από την αναπαράσταση που διατηρεί προσανατολισμό,

$$p : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow G \subset PSL(2, \mathbb{C}).$$

Η αναπαράσταση αυτή, προσάπτει ένα marking στην  $G$  με τον προφανή τρόπο: Αν  $(a, b)$  είναι ένα marking για την  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$ , το  $(p(a), p(b))$  είναι marking για την  $G$ .

Θα λέμε ότι μία lamination  $|\mu|$  στον  $\mathcal{T}_1$  υλοποιείται στην  $M = \mathbb{H}^3/G$  ως προς το marking  $p$ , αν υπάρχει μία fuchsian ομάδα  $\Gamma$ , ένας ομοιομορφισμός  $h : \mathcal{T}_1 \rightarrow \Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$  και μία pleated surface απεικόνιση  $f : \Sigma \rightarrow M$  με pleating locus που περιέχει την  $|\mu|$ , έτσι ώστε η  $fh$  να επάγει την  $p$ , δηλαδή, αν

$$fh : \mathcal{T}_1 = \mathbb{H}^2/\pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow M = \mathbb{H}^3/G,$$

τότε

$$p(\pi_1(\mathcal{T}_1)) = G.$$

Ορίζουμε  $AH(\mathcal{T}_1)$  να είναι το σύνολο όλων των 1-1 ομομορφισμών  $p : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$  με διακριτή εικόνα που διατηρούν τον προσανατολισμό του marking, με παραβολικό μεταθέτη, modulo συζυγίας στην  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, θα συμβολίζουμε

$$AH(\mathcal{T}_1) = \{M = \mathbb{H}^3/H : [H] \in AH(\mathcal{T}_1)\},$$

το σύνολο όλων των υπερβολικών 3-πολλαπλοτήτων, όπου με  $[H]$  συμβολίζουμε την κλάση συζυγίας της  $H$  στην  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Έστω τώρα  $p : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow G$  και έστω ότι η  $|\mu|$  υλοποιείται στην  $M$  ως προς το marking  $p$ . Υπάρχει δηλαδή fuchsian ομάδα  $\Gamma$ , ομοιομορφισμός  $h : \mathcal{T}_1 \rightarrow \Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$  και μία pleating απεικόνιση  $f : \Sigma \rightarrow M = \mathbb{H}^3/G$  που επάγει την  $p : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow G$ . Έστω ακόμα  $G' = VGV^{-1}$ ,  $V \in PSL(2, \mathbb{C})$  (δηλαδή  $G' \in [G]$ ) και  $M' = \mathbb{H}^3/G'$ . Τότε, αν  $p' : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow G'$ , αφού οι  $G, G'$  είναι συζυγείς, η  $p'$  ανήκει στην ίδια κλάση μετασχηματισμών με την  $p$ , σύμφωνα με τον ορισμό του quasifuchsian χώρου, και συνεπώς, αφού η  $|\mu|$  υλοποιείται στην  $M$ , υπάρχουν οι ίδιες  $\Gamma, f, h$ , τέτοιες ώστε η  $|\mu|$  να είναι υλοποιήσιμη και στην  $M'$ . Συνεπώς το αν μία lamination υλοποιείται ή όχι, δεν εξαρτάται από την κλάση συζυγίας στο  $AH(\mathcal{T}_1)$ .

Στο θεώρημα 5.3.6 του [4] αποδεικνύεται ότι οι απλές κλειστές γεωδαισιακές υλοποιούνται πάντοτε σε οποιαδήποτε υπερβολική 3-πολλαπλότητα, και σύμφωνα με το θεώρημα 5.3.10 του [4] είναι πυκνές στο σύνολο των υλοποιήσιμων laminations.

Αφού το μήκος είναι αναλλοίωτο από συζυγίες, ο ορισμός που δώσαμε στο κεφάλαιο 5 για το μήκος μίας lamination στην  $M = \mathbb{H}^3/G$ , επεκτείνεται σε κάθε  $M \in AH(\mathcal{T}_1)$ , που περιέχει μία υλοποίηση της  $|\mu|$ . Αν η  $\mu$  είναι συνεκτική (στον  $\mathcal{T}_1$  όλες οι laminations είναι συνεκτικές) και δεν υλοποιείται στην  $M$ , ορίζουμε  $l_\mu(M) = 0$ . Για την απόδειξη του Limit Pleating Theorem στην επόμενη παράγραφο, θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση, που είναι το θεώρημα 1 στο [3].

**ΠΡΟΤΑΣΗ 11.1:** Η συνάρτηση  $L : AH(\mathcal{T}_1) \times \mathcal{ML} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $L(H, \mu) = l_\mu(\mathbb{H}^3/H)$  είναι συνεχής.

**Παρατήρηση 11.1:** Αν η lamination  $\mu \in \mathcal{ML}$  υλοποιείται στην  $M \in AH(\mathcal{T}_1)$ , τότε, αφού κάθε pleating απεικόνιση είναι εξ' ορισμού ισομετρία, το μήκος της  $\mu$  στην  $M$  ισούται με το υπερβολικό μήκος της  $\mu$  στην υπερβολική επιφάνεια  $\Sigma$  όπου  $\psi : \Sigma \rightarrow M$  είναι η pleating απεικόνιση που υλοποιεί την  $|\mu|$ . Συνεπώς, το μήκος μίας υλοποιήσιμης lamination είναι αυστηρά θετικό.

Γενικά, το μήκος μίας lamination  $l_\mu(\partial C)$  και  $l_\mu(M)$  υπολογισμένο στο  $\partial C$  και στην  $M$  αντίστοιχα, δεν είναι τα ίδιο και θα πρέπει να είμαστε προσεχτικοί σε ποιό μέγεθος αναφερόμαστε κάθε φορά. Παρόλα αυτά, στην ειδική περίπτωση όπου  $q \in \mathcal{P}_\mu^+$ , σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.2, το μήκος της  $\mu$  στο  $\partial C^+(q)$  ισούται με το υπερβολικό μήκος της  $\mu$  στην επίπεδη δομή του  $\partial C^+$ ,  $F^+(q)$ . Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση 11.1, και το μήκος της  $\mu$  στην  $M(q)$  ισούται με το υπερβολικό μήκος της  $\mu$  στην υπερβολική επιφάνεια  $\Sigma(q) = \mathbb{H}^2/F^+(q)$ . Συνεπώς, τα μήκη  $l_\mu(\partial C)$  και  $l_\mu(M)$  ταυτίζονται και δεν χρειάζεται να κάνουμε την διάκριση μεταξύ τους. Αυτήν την περίπτωση θα εξετάσουμε στο limit pleating theorem παρακάτω.

## 11.2. Το Limit Pleating Theorem.

Ορίζουμε *ending invariants* μίας quasifuchsian ομάδας, να είναι οι σύμμορφες δομές  $\omega^\pm$  των τόρων  $\Omega^\pm/G$  που συνεπώς είναι σημεία του Teichmüller χώρου  $T$ . Έχουμε ορίσει τον Teichmüller χώρο  $T(\Sigma)$  μιας επιφάνειας Riemann  $\Sigma = \mathbb{H}^2/G$ , σαν τον χώρο των παραμορφώσεων των μιγαδικών δομών της  $\Sigma$ . Για  $p$  ένα σημείο του  $T(\Sigma)$ , έστω  $\Sigma_p$  η επιφάνεια που αντιστοιχεί στο  $p$ . Σε κάθε quasifuchsian ομάδα  $G'$ , υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι  $(p_1, p_2) \in T(\Sigma) \times T(\Sigma)$ , τέτοιο ώστε  $\Omega/G' = \Sigma_{p_1} \cup \Sigma_{p_2}$ . Αντίστροφα, για οποιοδήποτε ζεύγος  $(p_1, p_2) \in T(\Sigma) \times T(\Sigma)$ , υπάρχει μοναδική (μέχρι συζυγίας) quasifuchsian δομή  $G'$ , τέτοια ώστε  $\Omega/G' = \Sigma_{p_1} \cup \Sigma_{p_2}$ . Το τελευταίο είναι το simultaneous uniformization theorem του Bers.

Για μία πεπερασμένα παραγόμενη fuchsian ομάδα  $G$ , θεωρούμε το σύστημα γεννητόρων  $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_N \rangle$ . Έστω ο ομομορφισμός  $\theta : G \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ . Αφού ο ομομορφισμός καθορίζεται από τις  $\theta$ -εικόνες των γεννητόρων, μπορούμε να θεωρούμε τον  $\theta$  σαν στοιχείο της πολλαπλότητας γινόμενο  $PSL(2, \mathbb{C})^N$ . Θα λέμε ότι μία ακολουθία  $\theta_m$  συγκλίνει σε μία αναπαράσταση  $\theta$  αλγεβρικά, αν συγκλίνει στην  $PSL(2, \mathbb{C})^N$ , δηλαδή αν  $\theta_m(\gamma_i) \rightarrow \theta(\gamma_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μία ακολουθία  $q_n \in \mathcal{QF}$  με  $\omega^\pm(q_n) \rightarrow \omega^\pm \in T$ . Τότε έπεται από το simultaneous uniformization theorem του Bers, ότι οι ομάδες  $G(q_n)$  έχουν αλγεβρικό όριο στον  $\mathcal{QF}$ . Αν και οι δύο ακολουθίες  $\omega^\pm(q_n)$  συγκλίνουν στο Thurston σύνορο του  $T$ , τότε το double limit theorem του Thurston (θεώρημα 6.19 στο [15]), εγγυάται την ύπαρξη αλγεβρικού ορίου  $G$ .

Χρειαζόμαστε ένα ανάλογο αποτέλεσμα που να εγγυάται την ύπαρξη μίας οριακής ομάδας, όταν τα pleating invariants συγκλίνουν. Τα αποτελέσματα που χρειαζόμαστε, συγκεντρώνονται στο ακόλουθο limit pleating theorem.

Η απόδειξη του limit pleating theorem είναι αρκετά τεχνική. Θεωρήσαμε όμως καλό να την αναφέρουμε λεπτομερώς, αφού το εν λόγω θεώρημα, είναι από τα βασικότερα εργαλεία μας για ότι ακολουθήσει στη συνέχεια. Η απόδειξη δεν είναι πλήρης από μόνη της. Συμπληρώνεται από το λήμμα 11.4 που ακολουθεί μετά απ' αυτήν.

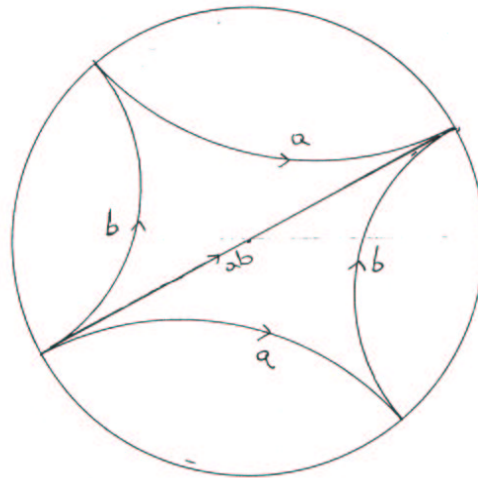
#### ΘΕΩΡΗΜΑ 11.2 (Limit pleating theorem):

Έστω  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$  τέτοιες ώστε  $[\mu] \neq [\nu]$  και έστω  $\{q_n\} \in \mathcal{P}_{\mu, \nu}$ . Τότε:

1. Αν  $l_\mu(q_n) \rightarrow c \geq 0$  και  $l_\nu(q_n) \rightarrow d \geq 0$ , τότε υπάρχει υπακολουθία των ομάδων  $\{G(q_n)\}$  με αλγεβρικό όριο  $G_\infty$ .
2. Αν η ακολουθία  $\{G(q_n)\}$  έχει αλγεβρικό όριο  $G_\infty$ , τότε οι ακολουθίες  $\{l_\mu(q_n)\}$  και  $\{l_\nu(q_n)\}$  έχουν πεπερασμένα όρια  $c \geq 0$  και  $d \geq 0$  αντίστοιχα. Η ομάδα  $G_\infty$  είναι quasifuchsian αν και μόνο αν  $c > 0$  και  $d > 0$ .

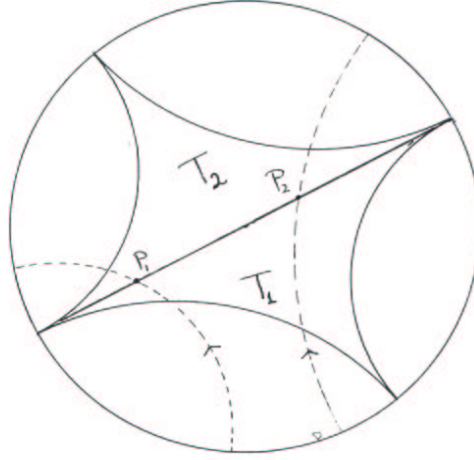
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ας αποδείξουμε πρώτα το 1. Υποθέτουμε ότι  $l_\mu(q_n) \rightarrow c \geq 0$  και  $l_\nu(q_n) \rightarrow d \geq 0$ , και θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία της  $\{q_n\}$  η οποία έχει αλγεβρικό όριο.

Επιλέγουμε και σταθεροποιούμε μία ιδεώδη τριγωνοποίηση  $\lambda$  του  $\mathcal{T}_1$ . Ειδικότερα, θεωρούμε ως  $\lambda$  τις γεωδαισιακές από την τρύπα στην τρύπα, που ανήκουν στις κλάσεις ομοτοπίας των καμπυλών  $a, b$  και  $ab$  (βλέπε Σχήμα 8), όπου  $a, b$  είναι τέτοιες ώστε η  $\langle \pi_1(\mathcal{T}_1); a, b \rangle$  να αντιστοιχεί στην  $\langle G; A, B \rangle$ .



Σχήμα 8.

Έστω  $M_n = \mathbb{H}^3 / G_n$  και υλοποιούμε την  $\lambda$  έτσι ώστε να είναι το pleating locus της pleated surface  $\Sigma_n$  στην  $M_n$ . Η  $\lambda$  δεν έχει κλειστά φύλλα. Το συμπλήρωμα της  $\lambda$  στην  $\Sigma_n$  αποτελείται από δύο ιδεώδη τρίγωνα. Επιλέγουμε μία  $\xi \in \mathcal{ML}$ . Αν κάποιο προσανατολισμένο τόξο ενός φύλλου της  $|\xi|$  τέμνει δύο διαδοχικές πλευρές ενός από τα ιδεώδη τρίγωνα, τότε αυτές τέμνονται σε κάποιο συνοριακό σημείο, και το σημείο τομής τους θα βρίσκεται είτε από την αριστερή, είτε από τη δεξιά πλευρά του προσανατολισμένου τόξου. Έστω ένα τόξο ενός φύλλου της  $|\xi|$  που τέμνει την  $\lambda$  σε ένα σημείο  $P$ . Τότε, το τόξο αυτό θα διατρέχει την επιφάνεια, περνώντας πρώτα από το ένα ιδεώδες τρίγωνο  $T_1$  και κατόπιν από το δεύτερο  $T_2$ . Θα ονομάζουμε το  $P$  συνοριακή τομή αν καθώς μετακινούμαστε από το  $T_1$  στο  $T_2$  πάνω σε κάποιο φύλλο της  $|\xi|$ , το συνοριακό σημείο τομής των πλευρών του ιδεώδους τριγώνου που τέμνει το φύλλο αυτό, αλλάζει πλευρά. Ορίζουμε τον αριθμό μεταβολής  $a(\xi, \lambda)$ , να είναι ο συνολικός αριθμός των σημείων συνοριακής τομής  $P$ .



Σχήμα 9. Το  $P_1$  δεν είναι συνοριακή τομή, όμως το  $P_2$  είναι.

Υπενθυμίζουμε ότι με  $l_\xi(\Sigma_n)$  θα συμβολίζουμε το μήκος της  $\xi$  μετρημένο στην επίπεδη δομή της  $\Sigma_n$  και με  $l_\xi(M_n)$  το μήκος της  $\xi$  στην υπερβολική 3 πολλαπλότητα  $M_n$ .

Το θεώρημα 3.3 στο [19] αποδεικνύει την ύπαρξη μιας σταθεράς  $C > 0$  τέτοιας ώστε

$$0 \leq l_\xi(\Sigma_n) \leq l_\xi(M_n) + Ca(\xi, \lambda).$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ανισότητα, για την περίπτωση μας, στις  $|\mu|$ ,  $|\nu|$ , έχουμε τις σχέσεις:

$$0 \leq l_\mu(\Sigma_n) \leq l_\mu(q_n) + Ca(\mu, \lambda) \text{ και } 0 \leq l_\nu(\Sigma_n) \leq l_\nu(q_n) + Ca(\nu, \lambda).$$

Συνεπώς, οι ακολουθίες  $\{l_\mu(\Sigma_n)\}$  και  $\{l_\nu(\Sigma_n)\}$  είναι φραγμένες.

Στον  $\mathcal{T}_1$ , αν  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$  τέτοιες ώστε  $[\mu] \neq [\nu]$ , τότε οι  $|\mu|$  και  $|\nu|$  γεμίζουν τον  $\mathcal{T}_1$ , δηλαδή το συμπλήρωμα των  $|\mu|$  και  $|\nu|$  στον  $\mathcal{T}_1$  είναι ένωση από ιδεώδη τρίγωνα. Τότε, σύμφωνα με την πρόταση 2.4 του [19], οι υπερβολικές δομές των επιφανειών  $\Sigma_n$  βρίσκονται σε κάποιο φραγμένο υποσύνολο του  $\mathcal{F}$ , και τα μήκη  $l_a(\Sigma_n)$  και  $l_b(\Sigma_n)$  των γεωδαισιακών αντιπροσώπων των καμπυλών του marking  $a, b$  στην  $\Sigma_n$  είναι φραγμένα. Όπως έχουμε επισημάνει, ισχύουν πάντα οι ανισότητες

$$l_a(M_n) \leq l_a(\Sigma_n) \text{ και } l_b(M_n) \leq l_b(\Sigma_n).$$

Συνεπώς, οι ακολουθίες  $\{|TrA_n|\}$  και  $\{|TrB_n|\}$  είναι φραγμένες. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε συγκλίνουσα υπακολουθία τέτοια ώστε οι  $TrA_n$  και  $TrB_n$  να συγκλίνουν στις  $TrA$  και  $TrB$  αντίστοιχα. Αφού τα  $TrA$  και  $TrB$  καθορίζουν δύο το πολύ κανονικοποιημένες ομάδες του τρυπημένου τόρου (modulo συζυγίας στην  $PSL(2, \mathbb{C})$ ), υπάρχει υπακολουθία

της  $\{G_n\}$  με αλγεβρικό όριο  $G_\infty$ , γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη του 1.

Υποθέτουμε τώρα ότι η  $G_\infty$  είναι το αλγεβρικό όριο της  $G_n = G(q_n)$ ,  $q_n \in \mathcal{P}_{\mu,\nu}$ . Λόγω του ότι η συνάρτηση μήκους μίας lamination είναι συνεχής στο  $AH(\mathcal{T}_1)$ , έπεται ότι οι  $\{l_\mu(q_n)\}$ ,  $\{l_\nu(q_n)\}$  συγκλίνουν στις  $l_\mu(G_\infty)$  και  $l_\nu(G_\infty)$  αντίστοιχα, δηλαδή τα όρια υπάρχουν. Πρέπει να δείξουμε ότι  $G_\infty \in \mathcal{QF}$  αν και μόνο αν και τα δύο όρια είναι μη-μηδενικά.

Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι  $G_\infty \in \mathcal{QF}$ . Τότε αν  $q_n \in \mathcal{P}_{\mu,\nu}$ , από το θεώρημα συνέχειας 9.4, έπεται ότι  $l_\mu(q_n) \rightarrow c > 0$  και  $l_\nu(q_n) \rightarrow d > 0$ .

Συνεπώς μένει να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση: Αν τα όρια είναι και τα δύο μη-μηδενικά, τότε η  $G_\infty \in \mathcal{QF}$ .

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι τα όρια υπάρχουν και είναι μη-μηδενικά. Υπάρχει περίπτωση κάποια από τις  $\mu, \nu$  να μην είναι υλοποιήσιμη στην  $M_\infty = \mathbb{H}^3/G_\infty$ ; Έστω ότι μία από τις  $\mu, \nu$ , για παράδειγμα η  $\mu$ , δεν είναι υλοποιήσιμη στην  $M_\infty$ . Σε αυτή την περίπτωση, αφού ο φορέας της  $\mu$ ,  $|\mu|$  είναι συνεκτικό σύνολο, σύμφωνα με τον ορισμό του μήκους μίας μη-υλοποιήσιμης lamination που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, έπεται ότι  $l_\mu(G_\infty) = 0$ . Τότε λόγω του ότι η συνάρτηση μήκους είναι συνεχής στο  $AH(\mathcal{T}_1)$ , έπεται ότι  $c = 0$ , που αντιφάσκει με την υπόθεσή μας. Συνεπώς δεν θα μας απασχολήσει περαιτέρω αυτό το ερώτημα.

Μένει συνεπώς να δείξουμε ότι αν οι  $\mu, \nu$  είναι και οι δύο υλοποιήσιμες στην  $M_\infty$ , και αν  $c > 0$ ,  $d > 0$ , τότε  $G_\infty \in \mathcal{QF}$ . Για να το αποδείξουμε, θα θέλαμε να δείξουμε ότι οι pleated surfaces που υλοποιούν τις  $|\mu|, |\nu|$  είναι στην πραγματικότητα οι αναλλοίωτες συνιστώσες του  $\partial C(G_\infty)$  που 'βλέπουν' προς τις απλές συνεκτικές συνιστώσες του  $\Omega(G_\infty)$ . Το βασικό σημείο που θα αποδείξουμε και θα μας οδηγήσει στο αποτέλεσμά μας, είναι ότι αν η  $|\mu|$  υλοποιείται στην οριακή 3-πολλαπλότητα  $M_\infty = \mathbb{H}^3/G_\infty$ , τότε η ανύψωση οποιουδήποτε φύλλου αυτής της υλοποίησης στο  $\mathbb{H}^3$ , είναι το όριο της ακολουθίας των ανυψώσεων στο  $\mathbb{H}^3$  των αντίστοιχων φύλλων της  $|\mu|$ , όπως αυτά υλοποιούνται στις  $M_n = \mathbb{H}^3/G_n$ . Για να το αποδείξουμε, θα χρησιμοποιήσουμε το αντίστοιχο κριτήριο αλγεβρικής σύγκλισης του McMullen, που βρίσκεται στο [16]. Το κριτήριο λέει:

*'Η ακολουθία ομάδων  $G_n \rightarrow G_\infty$  αλγεβρικά, αν και μόνο αν υπάρχουν λείες ομοτοπικές ισοδυναμίες που διατηρούν το marking  $Q_n : M_\infty \rightarrow M_n$ , τέτοιες ώστε σε κάθε συμπαγές υποσύνολο της  $M_\infty$  η  $Q_n$  να είναι  $C^\infty$  κοντά σε μία τοπική ισομετρία, για όλα τα μεγάλα  $n$ .*

Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τα markings. Έχουμε κανονικοποιήσει έτσι τις  $G_n$  και  $G_\infty$ , ώστε αν  $p_n : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow G_n$  και  $p_\infty : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow G_\infty$  οι κανονικοποιημένες αναπαραστάσεις του marked  $\mathcal{T}_1$ . τότε για κάθε  $g \in \pi_1(\mathcal{T}_1)$ ,

$$p_n(g) \rightarrow p_\infty(g).$$

Έστω λοιπόν  $\Gamma_0$  μία σταθερή fuchsian ομάδα που δρά στο  $D$ . Επιλέγουμε μία σταθερή κανονικοποιημένη αναπαράσταση  $p_0 : \pi_1(\mathcal{T}_1) \rightarrow \Gamma_0$ , διατηρεί το marking. Η δράση της  $G_n = p_n(\pi_1(\mathcal{T}_1))$  στο  $\partial C_n^+$  μεταφέρεται μέσω της pleating απεικόνισης στην δράση της αντίστοιχης κανονικοποιημένης fuchsian ομάδας  $\Gamma_n$  στο  $D$ , δηλαδή στην επίπεδη δομή του  $\partial C_n^+$ . Δηλαδή υπάρχει μία pleating surface απεικόνιση  $f_n : D \rightarrow \mathbb{H}^3$  με εικόνα το  $\partial C_n^+$ , τέτοια ώστε

$$\Gamma_n = (f_n^{-1}) \circ G_n \circ f_n.$$

(Λέμε τότε ότι η  $f_n$  εναλλάσει την δράση της  $\Gamma_n$  στο  $D$  με την δράση της  $G_n$  στο  $\partial C_n^+$ ).

Έστω τώρα  $h_n : D \rightarrow D$  ένας ομοιομορφισμός που εναλλάσει τις δράσεις των  $\Gamma_0$  και  $\Gamma_n$  στο  $D$ , έτσι ώστε η απεικόνιση  $f_n h_n : D \rightarrow \mathbb{H}^3$  να επάγει την αναπαράσταση  $p_n$ . Υπάρχει τέτοιος ομοιομορφισμός αφού η  $|\mu|$  υλοποιείται στην  $M_n$ . Αφού η  $|\mu|$  υλοποιείται και στην  $M_\infty$ , υπάρχει μία marked fuchsian ομάδα  $\Gamma_\infty$  ένας ομοιομορφισμός  $h : D \rightarrow D$  και μία pleated surface απεικόνιση  $f : D \rightarrow \mathbb{H}^3$  που εναλλάσει τις δράσεις των  $\Gamma_\infty$  και  $G_\infty$  με pleating locus που περιέχει την  $|\mu|$ , μαζί με έναν ομοιομορφισμό  $h : D \rightarrow D$  που εναλλάσει τις δράσεις των  $\Gamma_0$  και  $\Gamma_\infty$ , έτσι ώστε η απεικόνιση  $fh$  να επάγει την  $p_\infty$ .

Με αυτή την κατασκευή, η ομοιομορφική ισοδυναμία που διατηρεί τον προσανατολισμό  $\mathcal{Q}_n$  στο παραπάνω κριτήριο σύγκλισης του McMullen, ανυψώνεται στην  $\widetilde{\mathcal{Q}}_n : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ , έτσι ώστε

$$f_n h_n = \widetilde{\mathcal{Q}}_n f h.$$

Έστω τώρα  $l$  η ανύψωση στο  $D$  ενός φύλλου της  $\mu$  στον  $\mathcal{T}_1$ . Υποθέτουμε ότι με την υπερβολική δομή του  $\mathcal{T}_1$  που προκύπτει από την δράση της  $\Gamma_0$  στο  $D$ , η  $l$  έχει άκρα  $l^\pm$  στο  $\partial D$ . Τα αντίστοιχα φύλλα για τις δομές που προκύπτουν από τις  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_\infty$  είναι οι γεωδαισιακές  $l_n$  και  $l_\infty$  αντίστοιχα, με άκρα στο  $\partial D$  τα σημεία  $h_n(l^\pm)$  και  $h(l^\pm)$  αντίστοιχα. Από τον ορισμό της pleated surface τα φύλλα αυτά απεικονίζονται μέσω των  $f_n$  και  $f$  αντίστοιχα σε γεωδαισιακές στο  $\mathbb{H}^3$ . Για να δείξουμε ότι οι ανυψώσεις των φύλλων της  $|\mu|$ , όπως υλοποιούνται στην  $M_\infty$ , είναι κοντά στα φύλλα που προκύπτουν από τις αντίστοιχες ανυψώσεις των υλοποιήσεων της  $|\mu|$  στις  $M_n$  όταν το  $n$  είναι αρκετά μεγάλο, αρκεί να δείξουμε ότι  $f_n(l_n) \rightarrow f(l_\infty)$ , καθώς  $n \rightarrow \infty$ .



Στο λήμμα 5.2 του [3], αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε μικρή περιοχή της προβολής του  $f(l_\infty)$  στην  $M_\infty$  περιέχεται σε κάποιο συμπαγές υποσύνολο της  $M_\infty$ . Σταθεροποιούμε ένα βασικό σημείο  $O \in \mathbb{H}^3$  και έστω  $x \in f(l_\infty)$ , το σημείο που είναι πλησιέστερα στο  $O$ . Το γεωδαισιακό τμήμα που περιέχει το  $x$  και εκτείνεται κατά μήκος της γεωδαισιακής σε απόσταση  $L > 0$  αριστερά και δεξιά του  $x$ , το ονομάζουμε  $L$ -τμήμα ( $L$ -long segment) του  $x$ . Για κάθε  $\varepsilon > 0$ ,  $L > 0$ , μπορούμε να βρούμε  $g \in \pi_1(\mathcal{T}_1)$  τέτοιο ώστε ο άξονας της  $p_\infty(g) Ax(p_\infty(g))$ , να βρίσκεται σε μία  $\varepsilon$ -περιοχή (ως προς την Hausdorff τοπολογία που ορίσαμε στο  $\mathcal{GL}$ ) του  $L$ -τμήματος του  $x$  (που περιέχεται στην  $f(l_\infty)$ ). Η προβολή του κοντινού (στο  $L$ -τμήμα του  $x$ ) τόξου  $\sigma$  του  $Ax(p_\infty(g))$  περιέχεται σε κάποιο συμπαγές σύνολο  $V$  στην  $M_\infty$ .

Ο περιορισμός στο  $V$  της  $\tilde{Q}_n$  είναι  $C^\infty$  κοντά σε μία τοπική ισομετρία, όταν το  $n$  είναι αρκετά μεγάλο. Η εικόνα ενός γεωδαισιακού τόξου μέσω μιας απεικόνισης που είναι  $C^\infty$  κοντά σε μία τοπική ισομετρία, είναι μία καμπύλη που ονομάζεται σχεδόν-γεωδαισιακή (*quasigeodesic*) και είναι ένωση γεωδαισιακών τόξων. Άρα, αφού η  $f(l_\infty)$  και η  $\sigma$  είναι στο συμπαγές  $V$  και η  $\tilde{Q}_n$  είναι  $C^\infty$  κοντά σε μία τοπική ισομετρία, οι εικόνες  $\tilde{Q}_n(f(l_\infty))$  και  $\tilde{Q}_n(\sigma)$  είναι κοντά μεταξύ τους, και κοντά στους αντίστοιχους γεωδαισιακούς τους αντιπρόσωπους. Για να δούμε ποιό είναι αυτοί οι γεωδαισιακοί αντιπρόσωποι.

Ο γεωδαισιακός αντιπρόσωπος της  $\tilde{Q}_n(Axp_\infty(g))$  (δηλαδή της εικόνας του  $Axp_\infty(g) \in M_\infty$  στην  $M_n$ ) είναι ο  $Axp_n(g)$ . Χρησιμοποιώντας την σχέση  $f_n h_n = \tilde{Q}_n f h$ , έχουμε την ακόλουθη κατάσταση: Αφού τα άκρα του φύλλου  $l_\infty$  στο  $\partial D$  είναι τα  $h(l^\pm)$  και τα άκρα του φύλλου  $l_n$  στο  $\partial D$  είναι τα  $h_n(l^\pm)$ , σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, ο γεωδαισιακός αντιπρόσωπος του  $\tilde{Q}_n(f(l_\infty))$  είναι ο  $f_n(l_n)$ . Ακόμα, αφού έχουμε υποθέσει την αλγεβρική σύγκλιση, προκύπτει ακόμα ότι ο  $Axp_n(g)$  είναι κοντά στον  $Axp_\infty(g)$  για μεγάλα  $n$ . Συνεπώς, έχουμε την ακόλουθη κατάσταση:

Για μεγάλα  $n$ , το  $f(l_n)$  είναι κοντά στον  $Axp_n(g)$  ο οποίος είναι κοντά στον  $Axp_\infty(g)$ . Από την άλλη, ο  $Axp_\infty(g)$  είναι κοντά στο  $f(l_\infty)$ . Συνδυάζοντας αυτά τα αποτελέσματα, έπεται ότι για μεγάλα  $n$ , το  $f_n(l_n)$  είναι κοντά στο  $f(l_\infty)$ , που θέλαμε να δείξουμε.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα αυτό το γεγονός, για να δείξουμε ότι η εικόνα της pleated surface απεικόνισης  $f : D \rightarrow \mathbb{H}^3$  είναι μία από τις συνιστώσες του  $\partial C_\infty$ .

Η προβολή του pleating locus της  $f$  στην  $D/\Gamma_\infty$  είναι μία geodesic lamination  $\hat{\mu}$  που περιέχει την  $|\mu|$ , αφού η  $|\mu|$  είναι υλοποιήσιμη στην

$M_\infty$ . Αποδεικνύεται ότι κάθε ανύψωση της  $|\mu|$  στο  $D$  κινείται με συνεχή τρόπο, καθώς το  $n \rightarrow \infty$ . Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος είναι πολύ τεχνική και δεν θα την αναφέρουμε.

Ένα ιδεώδες τρίγωνο στο  $\mathbb{H}^3$  που προκύπτει από τις ανυψώσεις των συνοριακών φύλλων ενός επίπεδου κομματιού τις  $\widehat{\mu}$  μέσω της pleated surface απεικόνισης θα το ονομάζουμε πλάκα (*plaque*). Οι κορυφές ενός τέτοιου τριγώνου θα είναι είτε άκρα των φύλλων της lamination είτε παραβολικά σταθερά σημεία. Θα συμβολίζουμε τις εικόνες της  $\widehat{\mu}$  μέσω των pleated surface απεικονίσεων  $f_n, f$  με  $\widehat{\mu}_n$  και  $\widehat{\mu}_\infty$  αντίστοιχα.

Σύμφωνα με όσα είπαμε νωρίτερα, τα φύλλα της  $\widehat{\mu}_n$  είναι κοντά με τα φύλλα της  $\widehat{\mu}_\infty$  στο  $\mathbb{H}^3$ . Συνεπώς, κάθε πλάκα της  $\widehat{\mu}_n$  προσεγγίζεται από κάποια πλάκα της  $\widehat{\mu}_\infty$  στον  $\mathbb{H}^3$ . Ονομάζουμε επίπεδο φορέα (support plane) του  $\partial C$  για ένα σημείο  $x \in \partial C$  το υπερβολικό επίπεδο στον  $\mathbb{H}^3$  που περιέχει το  $x$  και χωρίζει το  $\mathbb{H}^3$  σε δύο ημιχώρους, έτσι ώστε η κυρτή θήκη  $C$  να περιέχεται ολόκληρη σε έναν από αυτούς. Παρατηρήστε ότι, αφού για κάθε  $n$ , η  $\widehat{\mu}_n$  είναι το pleating locus της  $\partial C_n^+$  και αφού γνωρίζουμε ότι το  $\partial C_n^+$  είναι ένα κυρτό υπερεπίπεδο στον  $\mathbb{H}^3$ , κάθε πλάκα της  $\widehat{\mu}_n$  περιέχεται σε ένα επίπεδο φορέα του  $\partial C_n^+$ .

Έστω τώρα  $\Pi^+$  η εικόνα της pleated surface απεικόνισης  $f : D \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι η  $\Pi^+$  είναι μία από τις συνιστώσες του  $\partial C(G_\infty)$ . Έστω  $X$  ένα επίπεδο που περιέχει μία πλάκα της  $|\mu_\infty|$ , και έστω  $X_n$  η ακολουθία των επιπέδων που περιέχουν τις πλάκες που προσεγγίζουν την πλάκα της  $|\mu_\infty|$ . Ισχυριζόμαστε ότι η  $\Pi^+$  περιέχεται ολόκληρη στην ίδια πλευρά του  $\mathbb{H}^3 - X$ , και άρα το  $X$  είναι ένα επίπεδο φορέας για την  $\Pi^+$ . Πράγματι, αν ο ισχυρισμός μας είναι εσφαλμένος, μπορούμε να βρούμε  $y, y' \in \Pi^+$  με τα  $y, y'$  να μην ανήκουν στον ίδιο ημιχώρο. Τότε η γεωδαισιακή που τα ενώνει, τέμνει τον  $X$ . Επιλέγοντας  $n$  αρκετά μεγάλο, μπορούμε να βρούμε  $y_n, y'_n$  κοντά στα  $y, y'$  και ένα επίπεδο φορέα  $X_n$  στο  $\partial C_n^+$  κοντά στο  $X$ , έτσι ώστε η γεωδαισιακή από το  $y_n$  στο  $y'_n$  να τέμνει το  $X_n$ . Κάτι τέτοιο όμως είναι αδύνατο, αφού το  $X_n$  είναι επίπεδο φορέας, γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Ας συμβολίσουμε  $H_X$  τον κλειστό ημίχωρο που φράσσεται από το  $X$  και περιέχει την  $\Pi^+$ . Έστω ακόμα  $K = \bigcap_X H_X$ , με το  $X$  να μεταβάλλεται στο σύνολο των επιπέδων που περιέχουν πλάκες της  $\Pi^+$ . Τότε  $\Pi^+ \subset K$ , και άρα  $K \neq \emptyset$ . Από κατασκευής, το  $K$  είναι κυρτό και κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{H}^3$ . Ακόμα το  $K$  είναι  $G_\infty$  αναλλοίωτο, αφού η  $\Pi^+$  είναι  $G_\infty$  αναλλοίωτη. Έστω  $g \in \Gamma_0$  και έστω  $y \in K$ . Τότε  $p_\infty(g)^{\pm m}(y) \in K$  για  $m = 1, 2, \dots$  Λόγω κυρτότητας το  $K$  περιέχει γεωδαισιακή που ενώνει τα  $p_\infty(g)^{-m}(y)$  και  $p_\infty(g)^m(y)$  για όλα τα  $m \in \mathbb{N}$ . Αφού το  $K$  είναι και κλειστό, περιέχει και ολόκληρο τον άξονα της  $p_\infty(g)$ , δηλαδή την γεωδαισιακή

με τα άκρα στο  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Αφού τα σταθερά σημεία των υπερβολικών στοιχείων της  $G_\infty$  είναι πυκνά στο  $\Lambda(G_\infty) \times \Lambda(G_\infty)$ , οι άξονες των στοιχείων της  $G_\infty$  είναι πυκνοί στο σύνολο των γεωδαισιακών που ενώνουν τα οριακά σημεία της  $G_\infty$ . συνεπώς  $C(G_\infty) \subset K$ .

Ισχυριζόμαστε ότι  $\Pi^+ \subset \partial C(G_\infty)$ . Πράγματι, έστω  $P$  μία πλάκα της  $\Pi^+$ . Τότε  $P \subset C(G_\infty)$ , αφού η  $P$  είναι ένα ιδεώδες τρίγωνο με κορυφές στο  $\Lambda(G_\infty)$ . Συνεπώς  $P \subset K$ . Αφού η  $P$  περιέχεται εξ' ορισμού σε ένα επίπεδο φορέα από αυτά που σχηματίζουν το  $\partial K$ , έπεται ότι  $P \subset \partial C(G_\infty)$ . Αφού η  $\Pi^+$  είναι η κλειστότητα στο  $\mathbb{H}^3$  της ένωσης των πλακών της, το αποτέλεσμα έπεται.

Αποδεικνύουμε στο λήμμα 11.4 που ακολουθεί ότι η  $\Pi^+$  είναι εμβυθισμένη στο  $\mathbb{H}^3$ . Συνεπώς η  $\Pi^+$  είναι ισομετρική με μία πλήρη υπερβολική επιφάνεια και άρα είναι ανοιχτή και κλειστή στο  $\partial C(G_\infty)$ . Αφού η  $\Pi^+$  είναι συνεκτική, θα πρέπει να είναι μία συνιστώσα του  $\partial C(G_\infty)$ . Άρα θα βλέπει την συνιστώσα  $\Omega^+$  της  $\Omega(G_\infty)$ . Ακόμα, αφού η  $\Pi^+$  είναι απλά συνεκτική, το ίδιο ισχύει και για την συνιστώσα  $\Omega^+$ . Συνεπώς, η  $\Omega^+$  είναι  $G_\infty$  αναλλοίωτη, γεγονός που έπεται από το ότι και η  $\Pi^+$  είναι  $G_\infty$  αναλλοίωτη.

Υπάρχει μία παρόμοια εικόνα για την  $\Pi^-$  για την εικόνα δηλαδή της pleated surface απεικόνισης, που υλοποιεί την  $|\nu|$ . Ομοίως συμπεραίνουμε ότι η  $\Pi^-$  βλέπει την απλά συνεκτική,  $G_\infty$  αναλλοίωτη συνιστώσα  $\Omega^-$  του  $\Omega(G_\infty)$ . Από το λήμμα 3.2 του [14], έπεται ότι  $G_\infty \in \mathcal{QF}$ , που ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

Για την απόδειξη του λήμματος 11.4 που θα ολοκληρώσει την απόδειξη του Limit Pleating Theorem, θα χρησιμοποιήσουμε το uniform injectivity theorem, η απόδειξη του οποίου βρίσκεται στο [17], που αναφέρουμε ως θεώρημα 11.3. Πριν το διατυπώσουμε, έστω  $M$  μία πλήρης υπερβολική  $n$ -πολλαπλότητα. Ορίζουμε την *injectivity radius* στο  $x$ , που συμβολίζουμε  $inj(x)$  να είναι

$$inj(x) = \frac{1}{2} \inf_{\gamma} \{l_{\gamma}\}$$

με το  $\inf$  να λαμβάνεται ως προς όλες τις  $\gamma$  στο σύνολο των ομοτοπικά μη-τετριμμένων κλειστών καμπυλών που διέρχονται από το  $x$ .

Για κάποιο  $\varepsilon > 0$ , έστω

$$M_{[\varepsilon, \infty)} = \{x \in M : inj(x) \geq \varepsilon\}.$$

Το σύνολο  $M_{[\varepsilon, \infty)}$  ονομάζεται  $\varepsilon$ -παχύ κομμάτι (*thick part*) της  $M$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 11.3** (*Uniform injectivity theorem*): Για κάθε  $\varepsilon > 0$  και για κάθε  $M \in AH(\mathcal{T}_1)$ , υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε pleated surface  $F : S \rightarrow M$ , αν η απόσταση στην  $S$  ανάμεσα σε δύο σημεία  $u, v$  που ανήκουν αντίστοιχα στα φύλλα  $l_u, l_v$  της pleating lamination είναι μεγαλύτερη από  $\varepsilon$ , και αν τα  $u, v$  βρίσκονται στο παχύ κομμάτι της  $S$ , τότε η απόσταση ανάμεσα στα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα των  $F(l_u), F(l_v)$  στα σημεία  $F(u), F(v)$  αντίστοιχα στην μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη της  $M$ , είναι τουλάχιστον  $\delta$ .

Διατυπώνουμε τώρα και αποδεικνύουμε το λήμμα 11.4, που συμπληρώνει την απόδειξη του limit pleating theorem.

**ΛΗΜΜΑ 11.4:** Με τον συμβολισμό και τις συνθήκες στην απόδειξη του *Limit Pleating Theorem*, η εικόνα  $\Pi^+$  της pleated surface απεικόνιση  $f : D \rightarrow \mathbb{H}^3$ , είναι εμβυθισμένη στο  $\mathbb{H}^3$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Αν η  $\Pi^+$  δεν είναι εμβυθισμένη στο  $\mathbb{H}^3$ , τότε  $f(x) = f(y)$  για δύο διαφορετικά σημεία  $x, y \in D$ . Αφού κάθε pleated surface απεικόνιση είναι ισομετρία στις πλάκες της pleated surface και αφού  $x, y$  διαφορετικά στο  $D$  (συνεπώς έχουν μεταξύ τους γνήσια θετική απόσταση), τα  $f(x), f(y)$  δεν μπορούν να ανήκουν στην ίδια πλάκα της  $\Pi^+$ . Θα δείξουμε ότι τα  $x, y$  ανήκουν σε φύλλα της προβολής του pleating locus της  $f$  στο  $D$ , που συμβολίζουμε  $\hat{\mu}$ . Αν όχι, έστω ότι το  $x$  ανήκει σε κάποια συμπληρωματική περιοχή της  $\hat{\mu}$  στο  $D$  και έστω  $P_x$  η πλάκα που περιέχει το  $f(x)$ . Το  $y$  θα βρίσκεται είτε σε κάποια συμπληρωματική περιοχή της  $\hat{\mu}$  διαφορετική από αυτή του  $x$ , με εικόνα μέσω της  $f$  την πλάκα  $P_y$ , είτε σε κάποιο φύλλο της  $\hat{\mu}$  με εικόνα την γεωδαισιακή  $L$  στην  $\Pi^+$ .

Στην πρώτη περίπτωση, η  $P_x$  τέμνει την  $P_y$ , αφού έχουμε υποθέσει ότι  $f(x) = f(y)$ . Τότε το ίδιο θα ισχύει και για τις κοντινές pleated surfaces  $f_n$ , αφού όπως είδαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 11.2, οι κορυφές των πλακών κινούνται με συνεχή τρόπο, καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Κάτι τέτοιο όμως δεν μπορεί να συμβαίνει αφού υποθέτουμε ότι οι  $f_n(D) = \partial C_n^+$  είναι εμβυθισμένες στο  $\mathbb{H}^3$ .

Αν πάλι η  $L$  τέμνει την  $P_x$ , φτάνουμε πάλι σε άτοπο, από το ίδιο επιχείρημα, αφού τότε, για μεγάλα  $n$ , το αντίστοιχο φύλλο της γεωδαισιακής που ανήκει το  $y$ , θα απεικονίζεται μέσω της  $f_n$  σε φύλλο που τέμνει την αντίστοιχη πλάκα που περιέχει το  $x$ .

Συνεπώς, αν υπάρχουν  $x, y \in D$  τέτοια ώστε  $f(x) = f(y)$ , η μόνη δυνατή περίπτωση είναι να ανήκουν και τα δύο σε φύλλα της  $\hat{\mu}$  στο  $D$ .

Χρησιμοποιούμε τώρα το ακόλουθο επιχείρημα: Αφού το κομμάτι της  $D/\Gamma_\infty$  που δεν περιέχει την τρύπα  $D/\Gamma_\infty^*$  έχει φραγμένη διάμετρο, ισχυριζόμαστε ότι η injectivity radius της  $M_\infty$  θα είναι κάτω φραγμένη στο  $\bar{f}(D/\Gamma_\infty^*) \subset M_\infty$ , όπου με  $\bar{f}$  συμβολίζουμε την επαγόμενη από την  $f$  απεικόνιση στους χώρους πηλίκο. Πράγματι, έστω ότι η injectivity radius στην  $M_\infty$  δεν είναι κάτω φραγμένη. Τότε δεδομένου ενός  $\varepsilon > 0$ , θα υπάρχουν κλειστές καμπύλες φραγμένου μήκους στην  $D/\Gamma_\infty^*$ , που απεικονίζονται μέσω της  $\bar{f}$  σε κλειστές καμπύλες σε κάποιο παχύ κομμάτι της  $M_\infty$ ,  $M_{[\varepsilon, \infty)}$  έτσι ώστε οι γεωδαισιακοί αντιπρόσωποι τους στις αντίστοιχες κλάσεις ομοτοπίας, να έχουν μήκος μικρότερο από  $\varepsilon$ . Σύμφωνα όμως με την παράγραφο 2.1 του [17], κάθε σημείο  $w \in M_{[\varepsilon, \infty)}$  περιέχεται σε δύο κλειστές καμπύλες φραγμένου μήκους οι οποίες παράγουν την θεμελιώδη ομάδα της  $M$ . Αφού στο  $M_{[\varepsilon, \infty)}$ , το ελάχιστο μήκος μίας κλειστής ομοτοπικά μη τετριμμένης καμπύλης είναι τουλάχιστον  $\varepsilon$ , κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβαίνει.

Συνεπώς η injectivity radius της  $M_\infty$  είναι κάτω φραγμένη. Έστω λοιπόν  $s$  μικρότερο από το κάτω φράγμα της injectivity radius. Τότε, αν  $f(x) = f(y)$ , η απόσταση ανάμεσα στα  $x$  και  $y$  στο  $D$  πρέπει να είναι τουλάχιστον  $s$ . Έστω  $l_x$  και  $l_y$  τα φύλλα της  $\hat{\mu}$  στο  $D$ , που διέρχονται από τα  $x$  και  $y$  αντίστοιχα. Τότε, από το uniform injectivity theorem, τα φύλλα εικόνες  $f(l_x), f(l_y)$  τέμνονται υπό κάποια μη μηδενική γωνία στο  $\mathbb{H}^3$ .

Θεωρούμε το επίπεδο  $P$  που περιέχει αυτά τα δύο φύλλα. Η τομή του  $P$  με το  $\hat{C}$  είναι ένας κύκλος  $C$ . Οποιοσδήποτε άλλος κύκλος περνάει από τα άκρα του  $f(l_x)$  (ή του  $f(l_y)$ ) εκτός του  $C$ , διαχωρίζει τα άκρα του  $f(l_y)$  (ή του  $f(l_x)$ ). Για οποιαδήποτε κοντινή ομάδα  $G_n$ , υπάρχουν φύλλα  $f_n(l_x)$  και  $f_n(l_y)$  κοντά στα  $f(l_x)$  και  $f(l_y)$  αντίστοιχα. Κάθε επίπεδο φορέας του  $\partial C_n^+$  που περιέχει το  $f_n(l_x)$  για παράδειγμα, τέμνει το  $\hat{C}$  σε κύκλο που δεν διαχωρίζει τα άκρα του  $f_n(l_y)$ , αφού κάθε επίπεδο φορέας της εμβυθισμένης pleated surface  $\partial C_n^+$  χωρίζει το  $\mathbb{H}^3$  σε δύο ημιχώρους, έτσι ώστε ένας από αυτούς να περιέχει την pleated surface ολόκληρη. Ένα οποιοδήποτε ζεύγος από επίπεδα φορείς για το  $\partial C_n^+$  τέμνει το  $\hat{C}$  σε δύο κύκλους κοντά στον  $C$ . Το οριακό σύνολο  $\Lambda(G_n)$  περιέχεται στην λεπτή λωρίδα ανάμεσα στους δύο κύκλους. Τότε, κάθε επίπεδο φορέας για το  $\partial C_n^-$  έχει πολύ μικρή ευκλείδεια διάμετρο και άρα είναι σε αρκετά μεγάλη απόσταση από τον κύκλο  $C$ . Μάλιστα, όσο το  $n \rightarrow \infty$ , οι δύο κύκλοι πλησιάζουν τον  $C$ , η λωρίδα ανάμεσά τους γίνεται λεπτότερη η διάμετρος ενός επιπέδου φορέα για την  $\partial C_n^-$  μικραίνει και συνεπώς η απόστασή του από τον  $C$  μεγαλώνει. Συμπεραίνουμε ότι καθώς το  $n \rightarrow \infty$ , η απόσταση του  $f(x)$  από ένα τέτοιο επίπεδο φορέα για την  $\partial C_n^-$  τείνει στο  $\infty$ .

Από την άλλη μεριά, αν το  $n$  είναι αρκετά μεγάλο, ένα τέτοιο επίπεδο φορέας, για την  $\partial C_n^-$  περιέχει σημεία κοντά σε κάποια πλάκα της pleated surface που υλοποιεί την  $|\nu|$  στην  $M_\infty$ . Επιλέγουμε ένα  $z \in \mathbb{H}^3$ , στην ανύψωση κάποιου φύλλου της  $|\nu|$ , που απέχει από το  $f(x)$  απόσταση  $Z$ . Αφού το  $z$  ανήκει σε κάποια πλάκα της  $|\nu|$ , θα είναι κοντά σε ένα επίπεδο φορέα του  $\partial C_n^-$ . Συνεπώς, υπάρχουν σημεία στο  $\partial C_n^-$  που βρίσκονται σε φραγμένη απόσταση, περίπου  $Z$ , από το  $f(x)$ . Άρα έχουμε αντίφαση.  $\square$

### 11.3. Το Local Pleating Theorem.

Σε αυτήν την παράγραφο, θα αποδείξουμε το local pleating theorem 11.5. Συνάγουμε διάφορα συμπεράσματα και κάνουμε μία λεπτομερή περιγραφή του πώς οι pleating varieties τέμνουν τον  $\mathcal{F}$ . Η διατύπωση του θεωρήματος είναι η ακόλουθη:

**ΘΕΩΡΗΜΑ 11.5 (Local Pleating Theorem):** Υποθέτουμε ότι  $\nu \in \mathcal{ML}$  και  $q_0 \in \mathcal{P}_\nu \cup \mathcal{F}$ . Τότε υπάρχει περιοχή  $U$  του  $q_0$  στον  $\mathcal{QF}$  τέτοια ώστε αν  $q \in U$  και  $\lambda_\nu(q) \in \mathbb{R}^+$ , τότε  $q \in \mathcal{P}_\nu \cup \mathcal{F}$ .

Το σημείο εκκίνησης για την απόδειξη του θεωρήματος, είναι η πρόταση 7.6 του [8] που αναδιατυπώνουμε για την περίπτωση μας. Θα γράψουμε  $G_\gamma^{q_0}(\tau)$  αντί για  $G_{\delta_\gamma}^{q_0}(\tau) = Q_{\delta_\gamma}(\tau)(G(q_0))$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 11.6:** Έστω  $\gamma \in S$  και  $q_0 \in \mathcal{F}$ . Τότε υπάρχει  $\epsilon > 0$  τέτοιο ώστε αν  $|\tau| < \epsilon$  και  $\lambda_\gamma(G_\gamma^{q_0}(\tau)) \in \mathbb{R}^+$ , τότε η  $G_\gamma^{q_0}(\tau) \in \mathcal{P}_\gamma \cup \mathcal{F}$ .

Αυτή η πρόταση μπορεί να θεωρηθεί ειδική περίπτωση του θεωρήματος 11.5 στην οποία  $\nu = k\delta_\gamma \in \mathcal{ML}_Q$ , το βασικό σημείο  $q_0 \in \mathcal{F}$  και η συνάρτηση μήκους  $\lambda_\gamma$  είναι περιορισμένη στο quakebend plane  $Q_\gamma^{q_0}$ . Θα κάνουμε πρώτα μία περίληψη της απόδειξης της πρότασης 11.6, αφού πρώτα αναφέρουμε δύο λήμματα που χρησιμοποιούνται για την απόδειξή της, διατυπωμένα για τη δική μας περίπτωση.

**ΛΗΜΜΑ 11.7 ( Λήμμα 7.1 του [8]):** Έστω  $p \in \mathcal{F}$ ,  $G_0 = G(p)$  και  $\gamma$  μία απλή κλειστή γεωδαισιακή στην  $D/G_0$ . Έστω  $\tau = i\theta \in \mathbb{C}$  και  $(\mathbb{D}^*)$  η pleated surface που προκύπτει από το quakebend  $Q_\gamma^p$ . Αν  $|\tau| < \epsilon$  για κατάλληλα μικρό  $\epsilon = \epsilon(\gamma)$ , τότε η  $D_\gamma^p(\tau)$  χωρίζει τον  $B^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$  σε δύο συνιστώσες, μία εκ των οποίων είναι κυρτή.

**ΛΗΜΜΑ 11.8 ( Λήμμα 7.2 του [8]):** Έστω  $p \in \mathcal{F}$ ,  $G_0 = G(p)$  και  $\gamma$  μία απλή κλειστή γεωδαισιακή στην  $D/G_0$ . Έστω  $\tau = i\theta \in \mathbb{C}$  και  $D_\gamma^p(\tau)$  η pleated surface που προκύπτει από το quakebend  $Q_\gamma^p$ . Αν  $|\tau| < \epsilon$  για

κατάλληλα μικρό  $\epsilon = \epsilon(\gamma)$ , τότε η  $D_\gamma^p(\tau)$  είναι μία από τις συνιστώσες του  $\partial C(G_\gamma^p(\tau))$ .

Ας δούμε τώρα τα βασικά επιχειρήματα της απόδειξης της πρότασης 11.6.

Έστω  $\gamma \in S$  και  $V \in G = G(q)$ , για  $q \in \mathcal{QF}$ , που αναπαριστά την  $\gamma$ . Επιλέγουμε ένα  $W \in G$  τέτοιο ώστε το  $(V, W)$  να είναι ένα marking για την  $G$ . Έστω ακόμα  $(\lambda_V, \tau_{V,W})$  οι ολόμορφες μιγαδικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες για τον  $\mathcal{QF}$  ως προς το  $(V, W)$ . Όπως επισημαίνουμε στην Παρατήρηση 9.3, όταν  $\lambda_V = \lambda_V(q) \in \mathbb{R}^+$ , η μιγαδική Fenchel-Nielsen κατασκευή, ορίζει μία pleating απεικόνιση  $D \rightarrow \mathbb{H}^3$ , με pleating locus  $\gamma$ . Αν  $q_0 \in \mathcal{F}$ , τότε  $Im\tau_{V,W}(q_0) = 0$ , και άρα για  $q$  κοντά στο  $q_0$ , το  $Im\tau_{V,W}(q)$  είναι μικρό. Από το λήμμα 11.7, έπεται ότι η  $D_\gamma^{q_0}(\tau)$  χωρίζει τον  $B \cup \hat{C}$  σε δύο συνεκτικές συνιστώσες, μία εκ των οποίων είναι κυρτή. Από το λήμμα 11.8 η  $D_\gamma^{q_0}(\tau)$  είναι μία από τις συνιστώσες του  $\partial C(q)$ , και άρα η  $G_\gamma^{q_0}(\tau) \in \mathcal{P}_\gamma \cup \mathcal{F}$ .

Υπάρχουν δύο βασικά προβλήματα στην εφαρμογή αυτών των επιχειρημάτων για την απόδειξη του θεωρήματος 11.5. Πρώτον, θέλουμε να συμπεριλάβουμε την περίπτωση όπου  $q_0 \notin \mathcal{F}$  και τότε δεν μπορούμε πια να θεωρούμε ότι το  $Im\tau_{V,W}$  είναι μικρό. Δεύτερον, η σταθερά  $\epsilon$  στα παραπάνω λήμματα εξαρτάται από το  $\gamma$  και δεν είναι ομοιόμορφη. Άρα προσπαθώντας να δείξουμε το αποτέλεσμα για μία τυχαία  $\mu \in \mathcal{ML}$ , προσεγγίζοντας την από ακολουθία ρητών laminations, η οριακή διαδικασία αποτυγχάνει. Για να ξεπεράσουμε αυτά τα προβλήματα, θα μελετήσουμε την γεωμετρία των pleated surfaces  $D_\gamma^{q_0}(\tau)$  πιο προσεκτικά.

Σταθεροποιούμε το  $q_0 \in \mathcal{QF}$ , μία  $\gamma \in S$  και ένα marking  $(V, W)$  όπως παραπάνω. Υποθέτουμε ότι  $q \in \mathcal{QF}$  και ότι  $\lambda_V(q) \in \mathbb{R}^+$ . Έστω  $\phi_\gamma(q)$  η κανονικοποιημένη fuchsian ομάδα με πραγματικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες  $(\lambda_V(q), Re\tau_{V,W}(q))$ . Έστω  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q)$  να είναι η εικόνα της pleating απεικόνισης  $D \rightarrow \mathbb{H}^3$  που ορίζεται από το pure bend κατά γωνία  $Im\tau_{V,W}(q)$  ως προς την  $\delta_\gamma$ . Θα ονομάζουμε την  $\phi_\gamma(q)$  επίπεδη δομή της  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q)$ . Μπορούμε να επισυνάψουμε ένα εγκάρσιο μέτρο  $b_\gamma(q)$  στην  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q)$  με τον προφανή τρόπο: Για κάθε τόξο  $\sigma$  στην  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q)$  που τέμνει το pleating locus  $\gamma$ , θέτουμε  $b_\gamma(q)(\sigma) = i(\sigma, \gamma)Im\tau_{V,W}$ . Άρα μπορούμε να γράψουμε  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q) = \mathcal{Q}_{b_\gamma(q)}^p(i)$ , όπου  $p$  είναι η εικόνα της  $\phi_\gamma(q)$  στο  $\mathcal{F}$ .

Σημειώνουμε ότι δεν ισχυριζόμαστε ότι η  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q)$  είναι συνιστώσα του  $\partial C(q)$ , ή ότι η  $\phi_\gamma(q)$  είναι μία από τις επίπεδες δομές  $F^\pm(q)$  του  $\partial C(q)$ . Στην πραγματικότητα, αυτό ακριβώς θέλουμε να αποδείξουμε. Ειδικότερα, δεν μπορούμε ακόμα να υποθέσουμε ότι το  $b_\gamma(q)$  είναι το μέτρο

κάμψης  $pl^\pm(q)$ . Παρόλα αυτά, το ακόλουθο αποτέλεσμα δίνει πληροφορίες για την επίπεδη δομή  $\phi_\gamma(q)$  και το μέτρο κάμψης  $b_\gamma(q)$ , για  $q$  κοντά στο  $q_0 \in \mathcal{P}_{\nu_0}$  για  $\nu_0 \in \mathcal{ML} - \mathcal{ML}_\mathcal{Q}$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 11.9:** *Δεδομένων μίας  $\nu_0 \in \mathcal{ML} - \mathcal{ML}_\mathcal{Q}$  και ενός  $q_0 \in \mathcal{P}_{\nu_0}^+ \cup \mathcal{F}$ , έστω  $F^+(q_0) \in \mathcal{F}$  και  $pl^+(q_0)$  να είναι η επίπεδη δομή και το μέτρο κάμψης για το  $\partial C^+(q_0)$  αντίστοιχα. (Αν  $q_0 \in \mathcal{F}$ , τότε  $pl^+(q_0) = 0$  και η  $F^+(q_0)$  είναι η fuchsian ομάδα που αναπαριστά το  $q_0$ .) Τότε δεδομένων περιοχών  $V$  του  $F^+(q_0)$  στον  $\mathcal{F}$ , και  $W$  του  $pl^+(q_0)$  στο  $\mathcal{ML}$ , υπάρχουν περιοχές  $U$  του  $q_0$  στον  $\mathcal{QF}$  και  $X$  του  $[\nu_0]$  στο  $\mathcal{PML}$  τέτοιες ώστε αν  $q \in U$ ,  $[\delta_\gamma] \in X \cap \mathcal{PML}_\mathcal{Q}$  και  $\lambda_\gamma(q) \in \mathbb{R}^+$ , τότε η επίπεδη δομή  $\phi_\gamma(q)$  της  $\Pi_\gamma(q)$  είναι στην  $V$  και το εγκάρσιο μέτρο  $b_\gamma(q)$  είναι στην  $W$ .*

Η ιδέα της απόδειξης αυτής της πρότασης είναι ότι αφού από το λήμμα 3.3 για  $\nu_0 \in \mathcal{ML} - \mathcal{ML}_\mathcal{Q}$ , ισχύει ότι κοντινές ρητές laminations είναι κοντά στην Hausdorff τοπολογία, τότε τα bending loci και άρα και οι δομές των αντίστοιχων pleated surfaces θα είναι κοντά. Δεν θα αναφέρουμε την απόδειξη λεπτομερώς, γιατί χρειάζεται να αναφέρουμε αρκετούς νέους ορισμούς και λήμματα, που δεν θα ξαναχρησιμοποιήσουμε περαιτέρω. Σημειώνουμε ακόμα ότι το αποτέλεσμα της πρότασης ισχύει και για  $\nu_0 \in \mathcal{ML}_\mathcal{Q}$ , όμως αυτή η περίπτωση δεν θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.

Το πλάνο για την απόδειξη του θεωρήματος 11.5 είναι το ακόλουθο: Η δύσκολη περίπτωση να χειριστούμε είναι όταν  $\nu \notin \mathcal{ML}_\mathcal{Q}$ . Θα δείξουμε στο θεώρημα 11.11 παρακάτω, ότι αν  $q_0 \in \mathcal{P}_\nu$ , τότε για  $q$  κοντά στο  $q_0$  (στον  $\mathcal{QF}$ ) και  $[\delta_\gamma]$  κοντά στην  $[\nu]$  στο  $\mathcal{PML}$ , η συνθήκη  $\lambda_\gamma(q) \in \mathbb{R}^+$ , συνεπάγεται ότι η pleated surface  $\Pi_\gamma(q)$  είναι επίσης μία συνιστώσα του  $\partial C(q)$ . Τότε το θεώρημα 11.5, έπεται από ένα εύκολο οριακό επιχείρημα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα συνέχειας 9.4.

Αποδεικνύουμε το θεώρημα 11.11 χρησιμοποιώντας μία επέκταση του της πρότασης 10.2, που σημειώνουμε σαν πρόταση 11.10. Διατυπωμένη χοντρικά λέει ότι αν  $p \in \mathcal{F}$  και η pleated surface  $D_\mu^p(\tau)$  που προκύπτει από το quakebend  $Q_\mu^p(\tau)$  είναι συνιστώσα του  $\partial C$ , τότε το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε επιφάνεια  $D_{\mu'}^{p'}(\tau')$  που προκύπτει από το quakebend κατά μία κοντινή ποσότητα  $\tau'$ , από ένα κοντινό βασικό σημείο  $p'$  κατά μήκος μίας κοντινής lamination  $\mu'$ .

Μία συνιστώσα του  $\partial C$ , μπορεί να προκύψει από την fuchsian ομάδα που αναπαριστά την επίπεδη δομή της, μέσω ενός pure bend κατά μήκος



της pleating lamination  $|\mu|$ . Η πρόταση 11.9, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 11.10 στην  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q)$  για  $[\delta_\gamma]$  κοντά στην  $[\nu]$  και  $q$  κοντά στο  $q_0$ , που αποδεικνύει το θεώρημα 11.11.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 11.10:** Έστω  $p_0 \in \mathcal{F}$  που αναπαριστάται από την  $G_0 = G(p_0)$  και υποθέτουμε ότι το  $\tau_0 \in \mathbb{C}$  είναι τέτοιο ώστε  $q_0 = Q_{\mu_0}^{p_0}(\tau_0) \in \mathcal{P}_{\mu_0}^+$ . Τότε υπάρχουν περιοχές  $X, Y$  και  $Z$  των  $\mu_0, p_0$  και  $\tau_0$  στα  $\mathcal{ML}, \mathcal{F}$ , και  $\mathbb{C}$  αντίστοιχα, τέτοιες, ώστε αν  $\mu \in X, p \in Y$  και  $\tau \in Z$ , τότε  $q = Q_\mu^p(\tau) \in \mathcal{QF}$  και η  $D_\mu^p(\tau)$  είναι συνιστώσα του  $\partial C(q)$ .

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα 11.11.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 11.11:** Υποθέτουμε ότι  $\nu_0 \in \mathcal{ML} - \mathcal{ML}_Q$  και  $q_0 \in \mathcal{P}_{\nu_0}^+ \cup \mathcal{F}$ . Τότε υπάρχουν περιοχές  $U$  του  $q_0$  στον  $\mathcal{QF}$  και  $X$  του  $[\nu_0]$  στο  $\mathcal{PML}$  τέτοιες ώστε αν  $q \in U, [\delta_\gamma] \in X \cap \mathcal{PML}_Q$  και  $\lambda_\gamma(q) \in \mathbb{R}^+$ , τότε η  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q)$  είναι μια από τις συνιστώσες του  $\partial C(q)$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Χρησιμοποιώντας την πρόταση 11.9 μπορούμε να βρούμε περιοχές  $X$  του  $[\nu_0]$  στο  $\mathcal{PML}$  και  $U$  του  $q_0$  στον  $\mathcal{QF}$ , τέτοιες ώστε για  $q \in U$  και  $[\delta_\gamma] \in X$ , οι επίπεδες δομές  $F^+(q_0)$  του  $\partial C^+(q_0)$  και  $\phi(q)$  της  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q)$  να είναι κοντά στον  $\mathcal{F}$  και τα transverse measures  $pl^+(q_0)$  και  $b_\gamma(q)$  να είναι κοντά στο  $\mathcal{ML}$ . Για να δείξουμε ότι η  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q)$  είναι μία από τις συνιστώσες του  $\partial C^+(q_0)$ , αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το  $\partial C^+(q_0)$  είναι μία pleated surface που προκύπτει από την  $F^+(q_0)$  κάνοντας pure bend κατά μήκος της measured lamination  $pl^+(q_0)$ . Αντίστοιχα, η  $\mathbf{\Pi}_\gamma(q)$  προκύπτει από την  $\phi_\gamma(q)$  μέσω ενός pure bend κατά μήκος της  $b_\gamma(q)$ . Αφού οι  $F^+(q_0), \phi_\gamma(q)$  είναι κοντά στον  $\mathcal{F}$ , το αποτέλεσμα έπεται από την πρόταση 11.10.  $\square$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 11.5:** Ας εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση όπου  $\nu = \delta_\gamma \in \mathcal{ML}_Q$ . Αν  $q_0 \in \mathcal{F}$ , από την πρόταση 11.6 υπάρχει  $\varepsilon > 0$  τέτοιο ώστε αν  $|\tau| < \varepsilon$  και  $\lambda_\gamma(G_\gamma^{q_0}(\tau)) \in \mathbb{R}^+$ , τότε η  $G_\gamma^{q_0}(\tau) \in \mathcal{P}_\nu \cup \mathcal{F}$ . Έστω τώρα  $q_0 \in \mathcal{P}_\nu$ . Θεωρούμε  $p_0 \in \mathcal{F}$ , τέτοιο ώστε  $q_0 = Q_{\mu_0}^{p_0}(\tau_0)$ . Από την πρόταση 11.10, αν  $Y$  περιοχή του  $p_0$ , υπάρχει περιοχή  $U$  του  $q_0$  στον  $\mathcal{QF}$  τέτοια ώστε αν  $q \in U$  τότε  $q \in \mathcal{P}_\nu$ . Συνεπώς, αν  $\nu \in \mathcal{ML}_Q$  έχουμε το ζητούμενο.

Υποθέτουμε τώρα ότι  $\nu \notin \mathcal{ML}_Q$  και θεωρούμε την ακολουθία  $\nu_n \in \mathcal{ML}_Q$  τέτοια ώστε  $\nu_n \rightarrow \nu$ . Βρίσκουμε περιοχές  $U$  του  $q_0$  στον  $\mathcal{QF}$  και  $X$  του  $[\nu]$  στο  $\mathcal{PML}$  που ικανοποιούν το συμπέρασμα του 11.11. Υποθέτουμε ακόμα ότι υπάρχει  $q \in U$  με  $\lambda_\nu(q) \in \mathbb{R}^+$ . Τότε, οι  $[\nu_n]$  από κάποιο δείκτη και πέρα, βρίσκονται στην  $X$ . Αφού  $\lambda_{\nu_n} \rightarrow \lambda_\nu$  ομοιόμορφα

στο  $U$ , έπεται από το θεώρημα του Hurwitz ότι μπορούμε να βρούμε ακολουθία  $q_n \in U$  με  $q_n \rightarrow q$ , τέτοια ώστε  $\lambda_{\nu_n}(q_n) = \lambda_\nu(q)$  και ειδικότερα τέτοια ώστε  $\lambda_{\nu_n}(q_n) \in \mathbb{R}^+$ . Από το θεώρημα 11.11 βλέπουμε ότι για αρκετά μεγάλα  $n$ , η  $\Pi_{|\nu_n|}(q_n)$  είναι μία από τις συνιστώσες του  $\partial C^+(q_n)$ , και άρα  $q_n \in \mathcal{P}_{\nu_n}^+$ . Όμως αφού  $q_n \rightarrow q$ , από το θεώρημα συνέχειας 9.4, έπεται ότι  $q \in \mathcal{P}_\nu^+$ .  $\square$

**ΠΟΡΙΣΜΑ 11.12:** Υποθέτουμε ότι  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$  με  $[\mu] \neq [\nu]$ . Έστω  $q_0 \in \mathcal{P}_{\mu, \nu} \cup \mathcal{F}$  και έστω  $Q_\mu^{q_0}$  το  $\mu$ -quakebend plane με βασικό σημείο το  $q_0$ . Υπάρχει περιοχή  $U$  του  $q_0$  στο  $Q_\mu^{q_0}$ , τέτοια ώστε αν  $q \in U$  και  $\lambda_\nu(q) \in \mathbb{R}^+$ , τότε  $q \in \mathcal{P}_{\mu, \nu} \cup \mathcal{P}_{\nu, \mu} \cup \mathcal{F}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Αυτό είναι απλά το θεώρημα 11.5, αν εφαρμοστεί στο quakebend plane  $Q_\mu^{q_0}$ . Μπορούμε να το αποδείξουμε είτε εφαρμόζοντας την πρόταση 10.2 για να δούμε ότι αν  $q \in Q_\mu^{q_0}$  κοντά στο  $q_0$ , τότε  $q \in \mathcal{P}_\mu \cup \mathcal{F}$  και μετά να εφαρμόσουμε το 11.5 στην  $\nu$ , είτε παρατηρώντας ότι αφού το  $\lambda_\mu$  είναι σταθερό στο  $Q_\mu^{q_0}$  και έχει πραγματική τιμή στο  $q_0$ , εφαρμόσουμε το θεώρημα 11.5 δύο φορές, πρώτα για την  $\mu$  και μετά για την  $\nu$ .  $\square$

#### 11.4. Συνέπειες του local pleating theorem.

Από το θεώρημα 11.5 έπεται η ακόλουθη τοπική επέκταση της εικόνας του Fuchsian χώρου, που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 8. Θυμίζουμε ότι αν  $i(\mu, \nu) > 0$  τότε  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap \mathcal{P}_{\nu, \mu} = \emptyset$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 11.13:** Έστω  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$ ,  $i(\mu, \nu) > 0$  και  $p \in \mathcal{F}$ . Τότε υπάρχει περιοχή  $U$  του  $p$  στον  $\mathcal{QF}$  τέτοια ώστε:

1. αν  $p \notin \mathcal{F}_{\mu, \nu}$ , τότε  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap U = \emptyset$ , ενώ
2. αν  $p \in \mathcal{F}_{\mu, \nu}$ , τότε ο  $\mathbb{R}$ -locus της  $\lambda_\nu$  στην  $U$  είναι ακριβώς ο  $(\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cup \mathcal{P}_{\nu, \mu} \cup \mathcal{F}) \cap U$

Στην δεύτερη περίπτωση, έστω  $p = p(\mu, \nu, c) \in \mathcal{F}_{\mu, \nu}$ , έστω  $Q_\mu^p$  το quakebend plane ως προς την  $\mu$ , με βασικό σημείο  $p$ , και έστω  $V = U \cap Q_\mu^p$ . Τότε η  $\lambda_{\nu|_V}$  έχει απλό κρίσιμο σημείο στο  $p$  και το  $\lambda_\nu^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap (V \setminus \mathcal{F})$ , έχει ακριβώς δύο συνιστώσες, τη μία στο  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$  και την άλλη στο  $\mathcal{P}_{\nu, \mu}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Για το 1: Αφού  $p \notin \mathcal{F}_{\mu, \nu}$ , από το πόρισμα 11.2, υπάρχει περιοχή  $U$  του  $p$  στο quakebend plane  $Q_\mu^p$  με βασικό σημείο το  $p$ , τέτοια ώστε  $\lambda_\nu^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap U \subset \mathcal{F}$ . Από το θεώρημα 8.1, η  $\lambda_{\nu|_{\mathcal{E}_{\mu, c}}}$  έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο, το  $p$ , που είναι απλό. Με αυτήν την παρατήρηση, το 2 είναι απλά αναδιατύπωση του πορίσματος 11.12 με  $q_0 = p$ .  $\square$

Από το παραπάνω θεώρημα, φαίνεται ότι τα pleating planes  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$  είναι οι επεκτάσεις των critical lines  $\mathcal{F}_{\mu,\nu}$ . Είδαμε, στο κεφάλαιο 8, ότι οι critical lines αποτελούν foliation για τον  $\mathcal{F}$ . Στο θεώρημα 11.16 που αναφέρουμε στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι τα ρητά pleating planes  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$ ,  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$ , είναι πυκνά στον  $\mathcal{QF}$ . Οι δύο προτάσεις που ακολουθούν, μας επιτρέπουν να το αποδείξουμε.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 11.14:** Υποθέτουμε ότι  $\mu \in ML$ ,  $q \in \mathcal{P}_{\mu} \cup \mathcal{F}$  και έστω το quakebend plane  $Q_{\mu}^q$  κατά μήκος της  $\mu$ , με βασικό σημείο  $q$  και παράμετρο  $\tau = \tau_{\mu}$ . Δεδομένου ενός  $K > 0$ , υπάρχει  $B > 0$  τέτοιο ώστε αν  $|Re\tau| < K$  και  $|Im\tau| > B$ , τότε  $Q_{\mu}^q(\tau) \notin \mathcal{P}_{\mu}$ .

Η απόδειξη παραλείπεται.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 11.15:** Υποθέτουμε ότι  $q \in \mathcal{QF}$ ,  $q \in \mathcal{P}_{\mu,\nu} \cup \mathcal{F}$ . Τότε η ολόμορφη συνάρτηση  $\lambda_{\nu}(q)$  δεν είναι σταθερή στο  $Q_{\mu}^q \cap \mathcal{QF}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Έστω πρώτα  $q \in \mathcal{P}_{\mu,\nu} \setminus \mathcal{F}$ . Τότε  $q \in \mathcal{P}_{\nu}$ . Από το θεώρημα 9.8 έχουμε ότι  $\lambda_{\nu}(q) = c \in \mathbb{R}^+$ . Υποθέτουμε ότι για κάθε  $q' \in Q_{\mu}^q \cap \mathcal{QF}$  ισχύει  $\lambda_{\nu}(q') = c \in \mathbb{R}^+$ .

Από την πρόταση 10.2 προκύπτει ότι  $\mathcal{P}_{\mu,\nu} \subset Q_{\mu}^q \cap \mathcal{QF}$ . Από το πόρισμα 11.12 υπάρχει περιοχή  $U$  του  $q$  στο  $Q_{\mu}^q$  τέτοια ώστε  $U \subset \mathcal{P}_{\mu,\nu} \cup \mathcal{P}_{\nu,\mu} \cup \mathcal{F}$ . Αφού  $q \in \mathcal{P}_{\mu,\nu} - \mathcal{F}$  και  $\mathcal{P}_{\mu,\nu} \cap \mathcal{P}_{\nu,\mu} = \emptyset$  μπορούμε μικραίνοντας αν χρειάζεται την  $U$  να πετύχουμε  $U \subset \mathcal{P}_{\mu,\nu}$ . Συνεπώς η  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$  είναι ανοιχτή στο  $Q_{\mu}^q \cap \mathcal{QF}$ .

Έστω τώρα  $q_n \in \mathcal{P}_{\mu,\nu}$  με  $q_n \rightarrow q$ . Αφού  $\lambda_{\nu}(q_n) = c \in \mathbb{R}^+$  και  $\lambda_{\mu}(q_n) = d \in \mathbb{R}^+$  (κάνοντας quakebend κατά μήκος της  $\mu \in \mathcal{ML}$  δεν αλλάζει το μήκος της  $\mu$ ) έπεται ότι  $\lambda_{\nu}(q) = c$  και  $\lambda_{\mu}(q) = d$  άρα η  $q_n$  έχει αλγεβρικό όριο στον  $\mathcal{QF}$  το  $q$  και μάλιστα  $q \in \mathcal{P}_{\mu,\nu}$ . Άρα το  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$  είναι κλειστό στο  $Q_{\mu}^q \cap \mathcal{QF}$ .

Συνεπώς το  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$  είναι ανοιχτό και κλειστό στο  $Q_{\mu}^q \cap \mathcal{QF}$ , και άρα ισούται με ολόκληρο το  $Q_{\mu}^q$ , που είναι αδύνατον από την πρόταση 11.14.

Αν τώρα  $q \in \mathcal{F}$ , τότε η  $\lambda_{\nu} = l_{\nu}$  δεν είναι σταθερή στο  $\mathcal{E}_{\mu}^q = Q_{\mu}^q \cap \mathcal{F}$ , από το θεώρημα 8.1, άρα και στο  $Q_{\mu}^q \cap \mathcal{QF}$ .  $\square$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 11.16:** Οι ρητές pleating varieties  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$  με  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$  είναι πυκνές στον  $\mathcal{QF}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Έστω  $q \in \mathcal{QF}$  και έστω  $\mu \in [pl^+(q)]$ ,  $\nu \in [pl^-(q)]$ . Από το θεώρημα 9.8 έχουμε ότι  $\lambda_{\mu}(q), \lambda_{\nu}(q) \in \mathbb{R}^+$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\mu \notin \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$ . Βρίσκουμε ακολουθία  $\{\mu_n\}$  στο  $\mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$  με  $\mu_n \rightarrow \mu$ . Από

το θεώρημα του Hurwitz στον  $\mathcal{QF}$  μπορούμε να βρούμε σημεία  $q_n \rightarrow q$  με  $\lambda_{\mu_n}(q_n) \in \mathbb{R}^+$  και άρα από το θεώρημα 11.11  $q_n \in \mathcal{P}_{\mu_n}$  για μεγάλα  $n$ . Αν  $\nu \in \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$  τελειώσαμε, διαφορετικά βρίσκουμε ακολουθία  $\{\nu_n\} \in \mathcal{ML}_{\mathcal{Q}}$  με  $\nu_n \rightarrow \nu$ . Από την πρόταση 11.15 η  $\lambda_{\nu_n}$  δεν είναι σταθερή στο  $Q_{\mu_n}^{q_n} \cap \mathcal{QF}$  και μπορούμε πάλι να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Hurwitz στο  $Q_{\mu_n}^{q_n} \cap \mathcal{QF}$  και να βρούμε  $q'_n$  κοντά στα  $q_n$  τέτοια ώστε  $q'_n \rightarrow q$  και  $\lambda_{\nu_n}(q'_n) \in \mathbb{R}^+$ . Από το θεώρημα 11.11 και πάλι,  $q'_n \in \mathcal{P}_{\mu_n, \nu_n}$  για μεγάλα  $n$ .  $\square$

## 12. PLEATING RAYS ΚΑΙ Η ΔΟΜΗ ΤΩΝ PLEATING PLANES

Τα local και limit pleating theorems, είναι βασικά εργαλεία προκειμένου να καταφέρουμε να φτάσουμε μία εικόνα για τα pleating planes και τις pleating rays. Οι παρατηρήσεις που θα κάνουμε θα μας οδηγήσουν στην απόδειξη του βασικού μας θεωρήματος 12.10, που λέει ότι ‘Μία ομάδα του τρυπημένου τόρου καθορίζεται μοναδικά από τα pleating invariants’, δηλαδή από τις προβολικές κλάσεις των ζευγών  $(\mu^{\pm}, l_{\mu}^{\pm})$ , για  $\mu \in [pl^{\pm}]$ .

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της pleating ray

$$\mathcal{P}_{\mu, \nu, c} = \{q \in \mathcal{P}_{\mu, \nu} : l_{\mu}(q) = c\}$$

όπου  $(\mu, \nu) \in \mathcal{ML} \times \mathcal{ML}$  και  $c > 0$ . Οι pleating rays είναι τα βασικά εργαλεία από τα οποία θα κατασκευάσουμε τα pleating planes και τις  $\mathcal{BM}$ -slices.

Σημειώνουμε ότι λόγω του θεωρήματος 9.8, μπορούμε ισοδύναμα να ορίσουμε

$$\mathcal{P}_{\mu, \nu, c} = \{q \in \mathcal{P}_{\mu, \nu} : \lambda_{\mu}(q) = c\}.$$

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τους ορισμούς,

$$\mathcal{P}_{\mu, \nu} = \bigcup_{c \in \mathbb{R}^+} \mathcal{P}_{\mu, \nu, c}.$$

συνεπώς, οι pleating rays είναι θεμελιώδη συστατικά των pleating planes. Θα ξεκινήσουμε να ερευνούμε τις pleating rays.

Η στρατηγική μας έχει ως ακολούθως: Ξεκινάμε, εφαρμόζοντας το limit pleating theorem για να εξάγουμε γενικά αποτελέσματα για τις  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$  για γενικές  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$ . Μετά αποδεικνύουμε το θεώρημα 12.5 στην περίπτωση όπου  $[\mu] = [\delta_{\gamma}]$   $[\nu] = \delta_{\gamma'}$  και  $(\gamma, \gamma')$  είναι ένα marking του  $\mathcal{T}_1$ .

Θα δείξουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση, η  $\mathcal{P}_{\delta_\gamma, \delta_\nu, c}$  που ονομάζουμε integral pleating ray, είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στο quakebend plane  $Q_{\gamma, c}$ . Χρησιμοποιώντας τις integral pleating rays, εξάγουμε περιορισμούς για τις rays  $\mathcal{P}_{\delta_\gamma, \nu, c} \subset Q_{|\mu|, c}$  για τυχούσα  $\nu$ . Χρησιμοποιώντας τα γενικά αποτελέσματα, μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα 12.8 στην γενική περίπτωση. Τέλος εφαρμόζουμε το θεώρημα 12.8 για να αποδείξουμε τα βασικά θεωρήματα της εργασίας μας, 12.9 και 12.10. Τα αποτελέσματά μας δικαιολογούν τους όρους "rays" και "planes".

### 12.1. Pleating rays.

Τα τέσσερα λήματα που ακολουθούν, μας δίνουν μία εικόνα για τις pleating rays μέσα στον  $\mathcal{QF}$ . Οι  $\mu, \nu$  είναι τυχούσες laminations στο  $\mathcal{ML}$  και ως συνήθως το  $Q_\mu^q$  συμβολίζει το  $\mu$ -quakebend plane, από το  $q \in \mathcal{P}_\mu \cup \mathcal{F}$ .

**ΛΗΜΜΑ 12.1:** Έστω  $q \in \mathcal{P}_{\mu, \nu}$ . Το σύνολο  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap Q_\mu^q$  είναι ένωση συνεκτικών συνιστωσών του  $\mathbb{R}$ -locus της  $\lambda_\nu$  στο  $(\mathcal{QF} \setminus \mathcal{F}) \cap Q_\mu^q$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Αρκεί να δείξουμε ότι το  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap Q_\mu^q$  είναι ανοιχτό και κλειστό στο  $\mathbb{R}$ -locus της  $\lambda_\nu$  στο  $(\mathcal{QF} \setminus \mathcal{F}) \cap Q_\mu^q$ .

Για το ανοιχτό: Έστω  $q \in \mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap Q_\mu^q$ . Αφού  $\mathcal{P}_\nu = \mathcal{P}_\nu^+ \cup \mathcal{P}_\nu^-$ , έπεται ότι  $q \in \mathcal{P}_{\mu, \nu} \subset \mathcal{P}_\nu^- \subset \mathcal{P}_\nu$ . Τότε, από το θεώρημα 11.12, υπάρχει περιοχή  $U$  του  $q$  στον  $\mathcal{QF}$  τέτοια ώστε

$$U \cap \lambda_\nu^{-1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}_\nu \cup \mathcal{F}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} U \cap \lambda_\nu^{-1}(\mathbb{R}) \cap (\mathcal{QF} \setminus \mathcal{F}) \cap Q_\mu^q &\subset \\ &(\mathcal{P}_\nu \cup \mathcal{F}) \cap Q_\mu^q \cap (\mathcal{QF} \setminus \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Όμως

$$\mathcal{P}_\nu \cap Q_\mu^q = (\mathcal{P}_\nu^+ \cap Q_\mu^q) \cup (\mathcal{P}_\nu^- \cap Q_\mu^q) \subset \mathcal{P}_{\nu, \mu} \cup \mathcal{P}_{\mu, \nu}.$$

Αν  $i(\mu, \nu) > 0$ , τότε  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap \mathcal{P}_{\nu, \mu} = \emptyset$  και άρα μικραίνοντας κατάλληλα την  $U$  μπορούμε να πετύχουμε

$$U \cap \lambda_\nu^{-1}(\mathbb{R}) \cap (\mathcal{QF} \setminus \mathcal{F}) \cap Q_\mu^q \subset \mathcal{P}_{\mu, \nu}.$$

Αν  $i(\mu, \nu) = 0$ , τότε  $[\mu] = [\nu]$  και άρα από την πρόταση 9.3  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} = \mathcal{P}_{\nu, \mu} = \mathcal{P}_{\mu, \mu} = \emptyset$

Για το κλειστό: Θεωρούμε την ακολουθία  $\{q_n\} \in \mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap Q_\mu^q$ , τέτοια ώστε  $q_n \in \mathcal{QF} \setminus \mathcal{F}$  και  $\lambda_\nu(q_n) \in \mathbb{R}$ , για κάθε  $n$ . Υποθέτουμε ότι  $q_n \rightarrow q_0$ . Τότε από το θεώρημα συνέχειας 9.4, έπεται ότι  $pl^+(q_0) = \mu$ ,  $pl^-(q_0) = \nu$

και προφανώς αφού  $q_n \in Q_\mu^q$  (δηλαδή  $\lambda_\mu(q_n) = c \in \mathbb{R}$ ), έπεται ότι  $\lambda_\mu(q_0) = c$ , δηλαδή  $q_0 \in \mathcal{P}_{\mu,\nu} \cap Q_\mu^q$ .  $\square$

Αν  $\nu = k\delta_\gamma$  για  $\gamma \in S$ , παρατηρούμε ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα: Έστω  $V \in G$  που αναπαριστά την  $\gamma$ . Σε αυτή την περίπτωση, από την πρόταση 7.1, η συνάρτηση  $TrV$  ορίζεται σαν ολόμορφη συνάρτηση του  $q$ , σ' ολόκληρο το  $Q_\mu^q$  (και στο κομμάτι που βρίσκεται έξω από τον  $\mathcal{QF}$ ) και έχουμε μία παραλλαγή του λήμματος 12.1. Ορίζουμε το *hyperbolic locus* της  $\gamma$  στο  $Q_\mu^q$  να είναι το σύνολο

$$\{q \in Q_\mu^q : TrV(q) \in \mathbb{R}, |TrV(q)| > 2\}.$$

**ΛΗΜΜΑ 12.2:** Έστω  $\nu = k\delta_\gamma \in \mathcal{ML}_Q$  και έστω  $q \in \mathcal{P}_{\mu,\nu}$ . Έστω ακόμα  $V \in G$  που αναπαριστά την  $\gamma$ . Τότε το σύνολο  $\mathcal{P}_{\mu,\nu} \cap Q_\mu^q$  είναι ένωση συνεκτικών συνιστωσών του *hyperbolic locus* της  $\gamma$  στο  $Q_\mu^q \setminus \mathcal{F}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Όπως και πριν, αρκεί να δείξουμε ότι το  $\mathcal{P}_{\mu,\nu} \cap Q_\mu^q$  είναι ανοιχτό και κλειστό στο *hyperbolic locus* της  $\gamma$  στο  $Q_\mu^q \setminus \mathcal{F}$ .

Για το ανοιχτό, αρκεί να δείξουμε ότι αν  $q_0 \in \mathcal{P}_{\mu,\nu} \cap Q_\mu^q$ , τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή  $U$  του  $q_0$  τέτοια ώστε

$$U \cap \left[ Tr^{-1}((-\infty, -2) \cup (2, +\infty)) \right] \cap (Q_\mu^q \setminus \mathcal{F}) \subset \mathcal{P}_{\mu,\nu} \cap Q_\mu^q.$$

Όμως  $Tr^{-1}((-\infty, -2) \cup (2, +\infty)) = \lambda_\nu^{-1}(\mathbb{R})$ , από την σχέση  $TrV = 2 \cosh(\lambda_\gamma/2)$ . Άρα όπως στην απόδειξη του λήμματος 12.1, έχουμε το ανοιχτό.

Για το κλειστό: Έστω  $\{q_n\} \in \mathcal{P}_{\mu,\nu} \cap Q_\mu^q$ , τέτοια ώστε  $|TrV(q_n)| > 2$  και  $q_n \in Q_\mu^q \setminus \mathcal{F}$  για κάθε  $n$ . Τότε, αν  $q_n \rightarrow q_0$  έπεται ότι  $TrV(q_n) \rightarrow TrV(q_0)$ , δηλαδή  $\lambda_\gamma(q_n) \rightarrow \lambda_\gamma(q_0) \geq 0$ . Φυσικά  $\lambda_\mu(q_n) = c$ , άρα  $\lambda_\mu(q_0) \geq 0$ . Τότε από το θεώρημα 11.2 το  $q_0$  είναι το αλγεβρικό όριο της  $q_n$  και προφανώς  $q_0 \in \mathcal{P}_{\mu,\nu} \cap Q_\mu^q$ .  $\square$

Το λήμμα 12.2 είναι δυνατό αποτέλεσμα. Το σημαντικό είναι ότι ξεκινώντας από ένα σημείο που γνωρίζουμε ότι βρίσκεται στον  $\mathcal{QF}$ , το λήμμα υποστηρίζει ότι αν κινηθούμε κατά μήκος των κλάδων του *hyperbolic locus* τότε παραμένουμε μέσα στον  $\mathcal{QF}$ , μέχρι να φτάσουμε σε συνοριακό σημείο στο  $\partial\mathcal{QF}$ , στο οποίο  $|TrV| = 2$ . Η παρατήρηση αυτή είναι πολύ σημαντική για υπολογισμούς.

**Παρατήρηση 12.1:** Με τον συμβολισμό που εισάγαμε στο λήμμα 12.1, θέτουμε  $c = \lambda_\mu(q)$ . Από τους ορισμούς προκύπτει ότι  $\mathcal{P}_{\mu,\nu} \cap Q_\mu^q \subset \mathcal{P}_{\mu,\nu,c}$ .

Όπως συνήθως, έστω  $p(\mu, \nu, c) \in \mathcal{F}_{\mu, \nu}$  να είναι το σημείο ελαχίστου για την συνάρτηση μήκους  $l_\nu$  στο earthquake path  $\mathcal{E}_{\mu, c}$ . Τα ακόλουθα δύο λήμματα, κάνουν ουσιαστική χρήση του limit pleating theorem 11.2.

**ΛΗΜΜΑ 12.3:** Έστω  $q \in \mathcal{P}_{\mu, \nu}$  και  $c = \lambda_\mu(q)$ . Η εικόνα του  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap Q_\mu^q$  μέσω της απεικόνισης  $\lambda_\nu$  είναι ένωση διαστημάτων της μορφής  $(0, \infty)$ ,  $(0, d)$ ,  $(d, \infty)$ , όπου  $d = f_{\mu, \nu}(c) = \lambda_\nu(p(\mu, \nu, c))$ . Ακόμα, υπάρχει το πολύ μία συνιστώσα του  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap Q_\mu^q$  της οποίας η εικόνα μέσω της  $\lambda_\nu$  να είναι το  $(0, d)$ . Η κλειστότητα μίας τέτοιας συνιστώσας, τέμνει τον  $\mathcal{F}$  ακριβώς στο  $p(\mu, \nu, c)$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Από το λήμμα 12.1, είδαμε ότι το  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap Q_\mu^q$  είναι ένωση των συνεκτικών συνιστωσών του  $\mathbb{R}$ -locus της  $\lambda_\nu$  στο  $(\mathcal{QF} - \mathcal{F}) \cap Q_\mu^q$ . Έστω λοιπόν  $K$  μία συνεκτική συνιστώσα του  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap Q_\mu^q$ . Από το θεώρημα 9.8, η  $\lambda_{\nu|K}$  έχει πραγματικές τιμές και από την πρόταση 11.15 δεν είναι σταθερή στο  $Q_\mu^q$ . Άρα η εικόνα  $I_K$  της  $\lambda_{\nu|K}$  είναι ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^+$ .

Έστω τώρα  $r \in \mathbb{R}^+$  και έστω ότι υπάρχει ακολουθία  $\{q_n\} \in K$  τέτοια ώστε  $\lambda_\nu(q_n) \rightarrow r$ . Αφού  $\lambda_\mu(q_n) = c$ , από το θεώρημα 11.2, μία υπακολουθία της  $\{G(q_n)\}$  έχει αλγεβρικό όριο  $G_\infty$ . Ακόμα, αφού  $\lambda_\nu(q_n) \rightarrow r > 0$ , η ομάδα  $G_\infty$  αναπαριστάται από ένα  $q \in \mathcal{QF}$ , τέτοιο ώστε  $\lambda_\nu(q) = r$ . Αν  $q \in \mathcal{QF} \setminus \mathcal{F}$ , τότε από το θεώρημα 9.4  $q \in K$  και  $r \in I_K$ . Από την άλλη, αν  $q \in \mathcal{F}$ , τότε από το θεώρημα 11.13,  $q = p(\mu, \nu, c)$  και  $r = \lambda_\nu(q) = f_{\mu, \nu}(c) = d$ . Άρα το  $\lambda_\nu(K)$  είναι ανοιχτό και κλειστό στο  $(0, d) \cup (d, \infty)$ . Συνεπώς το  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \cap Q_\mu^q$  έχει μοναδική συνεκτική συνιστώσα η οποία να απεικονίζεται από την  $\lambda_\nu$  στο  $(0, d)$ . Η κλειστότητα αυτής της συνιστώσας, τέμνει τον  $\mathcal{F}$  στο  $p(\mu, \nu, c)$ .  $\square$

**ΛΗΜΜΑ 12.4:** Έστω  $q \in \mathcal{P}_{\mu, \nu}$  και έστω  $c = \lambda_\nu(q)$ . Έστω ακόμα  $\tau$  η quakebend παράμετρος στο quakebend plane  $Q_\mu^q$ . Υποθέτουμε ότι τα σημεία  $q_n \in \mathcal{P}_{\mu, \nu, c}$  αναπαριστώνται από την quakebend παράμετρο  $\tau_n$  και ότι  $\lambda_\nu(q_n) \rightarrow \infty$ . Τότε  $|Re(\tau_n)| \rightarrow \infty$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Αν δεν ισχύει το λήμμα, υπάρχει  $M > 0$  τέτοιο ώστε  $|Re(\tau_n)| < M$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Από την πρόταση 11.14, υπάρχει  $M'$  τέτοιο ώστε αν  $Q_\mu^q(\tau_n) \in \mathcal{P}_\mu$ , τότε  $|Im(\tau_n)| < M'$ . Λόγω συμπάγειας, επιλέγοντας μία υπακολουθία αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\tau_n \rightarrow \tau_\infty$ . Τότε η ομάδα που προκύπτει από το quakebend  $Q_\mu^q(\tau_\infty)$  είναι το αλγεβρικό όριο των  $G(q_n)$ . Μα τότε, από το θεώρημα 11.2, η  $\{\lambda_\nu(q_n)\}$  είναι φραγμένη, πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεση.  $\square$

Μπορούμε τώρα να αρχίσουμε να ερευνούμε τις integral pleating rays. Υποθέτουμε ότι  $[\mu] = [\delta_\gamma]$  και  $[\nu] = [\delta_{\gamma'}]$ , όπου  $(\gamma, \gamma')$  είναι ένα marking του  $\mathcal{T}_1$ . Για λόγους συντομίας, θα γράφουμε  $\mathcal{P}_\gamma$  αντί  $\mathcal{P}_{\delta_\gamma}$  κ.ο.κ. Έστω  $(\lambda_V, \tau_{V,W}) \in \mathbb{C}^2$  οι μιγαδικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες ως προς το marked ζεύγος των γεννητόρων  $(V, W)$  που αντιστοιχούν στο  $(\gamma, \gamma')$ . Θα συμβολίζουμε  $Q_{\gamma,c}$  την τομή  $\{(c, \tau)\} \subset \mathbb{C}^2$ , που είναι το quakebend plane ως προς την  $\gamma$ , που τέμνει τον  $\mathcal{F}$  κατά μήκος του earthquake path  $\mathcal{E}_{\gamma,c}$ . Θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του  $Q_{\gamma,c}$  με την quakebend παράμετρο  $\tau = \tau_{\delta_\gamma}$ . Όπως πάντα, το  $\tau = 0$ , αντιστοιχεί στο σημείο  $p(\gamma, \gamma', c) \in \mathcal{F}$ , ενώ το  $Im\tau = 0$  είναι το earthquake path  $\mathcal{E}_{\gamma,c}$ .

Για  $m \in \mathbb{Z}$ , το ζεύγος  $(\gamma, \gamma^m \gamma')$  είναι ζεύγος marked γεννητόρων για την  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$  που αντιστοιχεί στο ζεύγος γεννητόρων  $(V, V^m W)$  για την  $G$ . Προφανώς  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma^m \gamma', c} \subset Q_{\gamma,c}$ . Οι γεννήτορες  $V, V^m W$  προκύπτουν από το ζεύγος  $V, W$  μέσω της απεικόνισης που επάγεται από ένα Dehn twist, δηλαδή μία πλήρη περιστροφή γύρω από την  $\gamma$ . Το βασικό σημείο ως προς το οποίο μετράμε την twist παράμετρο αλλάζει και ισχύει ότι  $\tau_{V, V^m W} = \tau_{V,W} + m\lambda_V$ . Επαγωγικά, βρίσκουμε ότι  $\tau_{V, V^m W} = \tau_{V,W} + m\lambda_V$ . Ο επόμενος τύπος αποδεικνύεται στο [18] για οποιοδήποτε ζεύγος  $(V, W)$  marked γεννητόρων για την  $G$ .

$$\cosh \frac{\tau_{V,W}}{2} = \pm \cosh \frac{\lambda_W}{2} \tanh \frac{\lambda_V}{2} \quad (2)$$

Από τις συμβάσεις μας,  $Re(\lambda_V) > 0$ ,  $Re(\lambda_W) > 0$ , και μπορούμε να επιλέξουμε το πρόσημο  $+$  στον  $\mathcal{F}$  και άρα παντού στον  $\mathcal{QF}$ . Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο στους γεννήτορες  $(V, V^{-m}W)$  παίρνουμε:

$$\cosh \frac{\tau_{V, V^{-m}W}}{2} = \cosh \frac{\lambda_{V^{-m}W}}{2} \tanh \frac{\lambda_V}{2} \quad (3)$$

Ειδικά για  $\tau = mc$ ,

$$1 = \cosh \frac{\lambda_{\gamma^{-m}\gamma'}}{2} \tanh \frac{\lambda_\gamma}{2} \quad (4)$$

και ισοδύναμα

$$\sinh \frac{c}{2} \sinh \frac{\lambda_{\gamma^{-m}\gamma'}}{2} = 1 \quad (5)$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 12.5:** Έστω  $(\gamma, \gamma')$  ένα marked ζεύγος γεννητόρων για την  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$  και έστω  $c > 0$ . Τότε για  $m \in \mathbb{Z}$ , οι  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma^{-m}\gamma', c}$  και  $\mathcal{P}_{\gamma^{-m}\gamma', \gamma, c}$  είναι τα δύο ευθύγραμμα τμήματα  $Re\tau = mc$ ,  $0 < |Im\tau| < 2 \arccos \tanh c/2$  στο  $Q_{\gamma,c}$ . Τα δύο ευθύγραμμα τμήματα  $Re\tau = mc$ ,  $|Im\tau| \geq \arccos \tanh c/2$  στο  $Q_{\gamma,c}$  έχουν κενή τομή με τον  $\mathcal{QF}$ .



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αφού  $\tau_{V,V-mW} = \tau_{V,W} - mc$ , μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση  $m = 0$ . Από το λήμμα 12.2 η  $\mathcal{P}_{\gamma,\gamma'}$  είναι ένωση των συνεκτικών συνιστώσων του hyperbolic locus της  $\gamma'$  στο  $Q_{\gamma,c} \setminus \mathcal{F}$  και από το θεώρημα 11.13, υπάρχει μοναδική συνεκτική συνιστώσα  $K$  της  $\mathcal{P}_{\gamma,\gamma'}$  που τέμνει την critical line  $\mathcal{F}_{\gamma,\gamma'}$  στο  $p(\gamma, \gamma', c)$ . Το λήμμα 12.1 μας λέει ότι το σύνολο  $\mathcal{P}_{\gamma,\gamma'} \cap Q_{\gamma,c} \subset \mathcal{P}_{\gamma,\gamma',c}$  είναι ένωση των συνεκτικών συνιστώσων του  $\mathbb{R}$ -locus της  $\lambda_{\gamma'}$  στο  $(\mathcal{QF} - \mathcal{F}) \cap Q_{\gamma,c}$ . Θα προσδιορίσουμε αυτές τις συνιστώσες.

Από την εξίσωση (2) έχουμε

$$\cosh \frac{\tau}{2} = \cosh \frac{\lambda_{\gamma'}}{2} \tanh \frac{\lambda_{\gamma}}{2}.$$

Άρα ο  $\mathbb{R}$ -locus της  $\lambda_{\gamma'}$  στο  $Q_{\gamma,c}$  είναι το σύνολο που ορίζεται από την σχέση  $\cosh(\tau/2) \in \mathbb{R}$  ή ισοδύναμα  $\{Re\tau = 0\} \cup \{Im\tau = 0\}$ . Ο πραγματικός άξονας  $\{Im\tau = 0\}$ , αντιστοιχεί στο  $\mathcal{E}_{\gamma,c} = Q_{\gamma,c} \cap \mathcal{F}$ . Από το λήμμα 12.2, προκύπτει ότι οι μοναδικές συνεκτικές συνιστώσες του hyperbolic locus της  $\gamma'$  στο  $Q_{\gamma,c} \setminus \mathcal{F}$  που τέμνουν τον πραγματικό άξονα (δηλαδή το  $\mathcal{E}_{\gamma,c}$ ) προκύπτουν από την σχέση  $|TrV(q)| > 2$ , όταν το  $V$  αναπαριστά την  $\gamma'$ . Συνεπώς

$$|TrV(q)| > 2 \Leftrightarrow |2 \cosh(\lambda_{\gamma'}/2)| > 2$$

$$\Leftrightarrow |\cosh(\lambda_{\gamma'}/2)| > 1$$

$$\Leftrightarrow |\cosh(\tau/2)(\tanh(c/2))^{-1}| > 1$$

$$\Leftrightarrow |\cosh(\tau/2)| > \tanh(c/2)$$

Στον φανταστικό άξονα,  $\tau = i\psi$  και τότε  $\cosh(\tau/2) = \cos(\psi/2)$ . Συνεπώς, έχουμε την σχέση

$$\tanh(c/2) < |\cos(\psi/2)| < 1.$$

Άρα

$$|\psi| \in (0, 2 \arccos \tanh(c/2)),$$

που σημαίνει ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του hyperbolic locus της  $\gamma'$  στο  $Q_{\gamma,c} - \mathcal{F}$  που τέμνουν τον πραγματικό άξονα είναι τα δύο σύνολα  $0 < |Im\tau| < 2 \arccos \tanh c/2$ . Μία από αυτές τις συνιστώσες πρέπει να είναι η  $K$  και η άλλη, η αντίστοιχη συνιστώσα για την  $\mathcal{P}_{\gamma',\gamma}$ . Κάθε μία απ' αυτές τις συνιστώσες απεικονίζεται αμφιμονοσήμαντα από την  $\lambda_{\gamma'}$  στο  $(0, 2 \arccos \tanh c/2)$ .

Αφού στον φανταστικό άξονα ισχύει

$$\cosh(\tau/2) = \cos(Im\tau),$$

από την σχέση (2), προκύπτει ότι

$$\cosh(\lambda_{\gamma'}/2) \leq \left( \tanh c/2 \right)^{-1}.$$

Όμως  $\mathcal{P}_{\gamma,\gamma'} \cap \mathcal{Q}_{\gamma,c} \subset \mathcal{P}_{\gamma,\gamma',c}$ . Συνεπώς, από το λήμμα 12.3 οι  $\mathcal{P}_{\gamma,\gamma',c}$  και  $\mathcal{P}_{\gamma',\gamma,c}$  δεν έχουν άλλες συνεκτικές συνιστώσες, γιατί αν είχαν, θα απεικονίζονταν μέσω της  $\lambda_{\gamma'}$  στο  $(0, d)$ , που δεν γίνεται αφού η  $K$  είναι η μοναδική συνοστώσα με αυτήν την ιδιότητα. Απομένει να δείξουμε ότι κανένα άλλο σημείο στον φανταστικό άξονα δεν βρίσκεται στον  $\mathcal{QF}$ . Η εξίσωση (3) ισχύει για ομάδες στον  $\mathcal{Q}_{\gamma,c}$  ακόμα και αν αυτές δεν είναι στον  $\mathcal{QF}$ . Σ' αυτόν τον άξονα όμως ισχύει πάντα

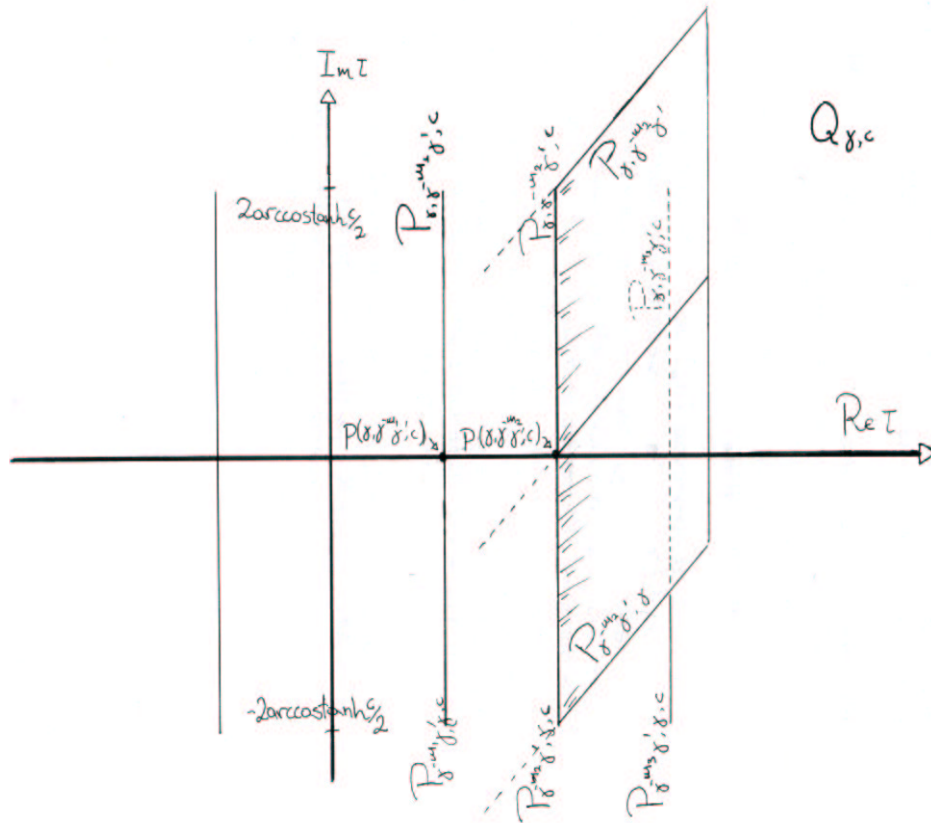
$$-1 \leq \cosh \frac{\lambda_{\gamma'}}{2} \tanh \frac{c}{2} \leq 1.$$

Στην πρόταση 6.2 του [11] αποδεικνύεται ότι αν  $\lambda_{\gamma'} \in \mathbb{R}$  και η παραπάνω ανισότητα είναι γνήσια, τότε η ομάδα που παράγεται από τα  $V, W$  είναι quasifuchsian και περιέχεται στην  $\mathcal{P}_{\gamma,\gamma'}$ . Ακόμα, σε αυτή την περίπτωση η ομάδα καθορίζεται από τα  $\lambda_{\gamma}, \lambda_{\gamma'}$  μοναδικά μέχρι συζυγίας. Αν ισχύει η ισότητα, τότε η ομάδα αναπαριστά το μοναδικό σημείο  $p(\gamma, \gamma', c) \in \mathcal{F}$ . Αυτές είναι οι ομάδες που έχουμε ήδη δει.

Αφού  $\cosh(\lambda_{\gamma'}/2) \in \mathbb{R}$ , η μόνη άλλη δυνατότητα, είναι η  $\lambda_{\gamma'}$  να είναι καθαρά φανταστική. Τότε όμως,

$$|TrV(q)| = |2 \cosh(\lambda_{\gamma'}/2)| < 2$$

και τότε το  $V$  θα είναι ελλειπτικό, που δεν γίνεται στον  $\mathcal{QF}$ . □



Σχήμα 10.

**Παρατήρηση 12.2:** Το Σχήμα 10 παραπάνω, μας δίνει μία εικόνα για τις  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma^{-m}\gamma', c}$  και  $\mathcal{P}_{\gamma^{-m}\gamma', \gamma, c}$ . Το ποιο από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα του παραπάνω λήμματος αντιστοιχεί στην  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma^{-m}\gamma', c}$  και ποιο στην  $\mathcal{P}_{\gamma^{-m}\gamma', \gamma, c}$  εξαρτάται από την σύμβαση που θα τηρούμε όσον αφορά στο πως θα μετράμε την παράμετρο  $\tau$ . Κατι τέτοιο δεν μας απασχολεί εδώ.

Μπορούμε τώρα να βρούμε ένα φράγμα για τις pleating rays  $\mathcal{P}_{\gamma, \nu, c}$  για τυχούσα  $\nu \in \mathcal{ML}$ .

**ΠΟΡΙΣΜΑ 12.6:** Έστω  $\nu \in \mathcal{ML}$  με  $i(\gamma, \nu) > 0$ . Τότε το  $|\text{Re } \tau|$  είναι φραγμένο σε κάθε συνιστώσα της  $\mathcal{P}_{\gamma, \nu, c}$ , με  $\tau$  να συμβολίζει την quake-bend παράμετρο  $\tau_{\delta_\gamma}$  στο  $Q_{\gamma, c}$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν κατά μήκος κάποιας συνιστώσας της  $\mathcal{P}_{\gamma,\nu,c}$  στο  $Q_{\gamma,c}$  συμβαίνει  $|Re\tau| \rightarrow \infty$ , η συνιστώσα αυτή θα πρέπει να τέμνει τουλάχιστον δύο από τις ευθείες  $\tau = mc + i\theta, \theta \in \mathbb{R}$ . Σύμφωνα με την πρόταση 12.5 όμως, κάθε τέτοια ευθεία είναι ένωση των integral pleating rays  $\mathcal{P}_{\gamma,\gamma^{-m}\gamma',c}, \mathcal{P}_{\gamma^{-m}\gamma',\gamma,c}$ , του σημείου  $p(\gamma, \gamma^{-m}\gamma', c) \in \mathcal{F}$  και σημείων εκτός του  $\mathcal{QF}$ . Κάτι τέτοιο όμως δεν μπορεί να συμβαίνει.  $\square$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα για την δομή των pleating rays. Υπεθυμίζουμε ότι το  $Q_{\mu,c}$  είναι το quakebend plane ως προς την lamination  $\mu$ , που τέμνει τον  $\mathcal{F}$  κατά μήκος του earthquake path  $\mathcal{E}_{\mu,c}$ .

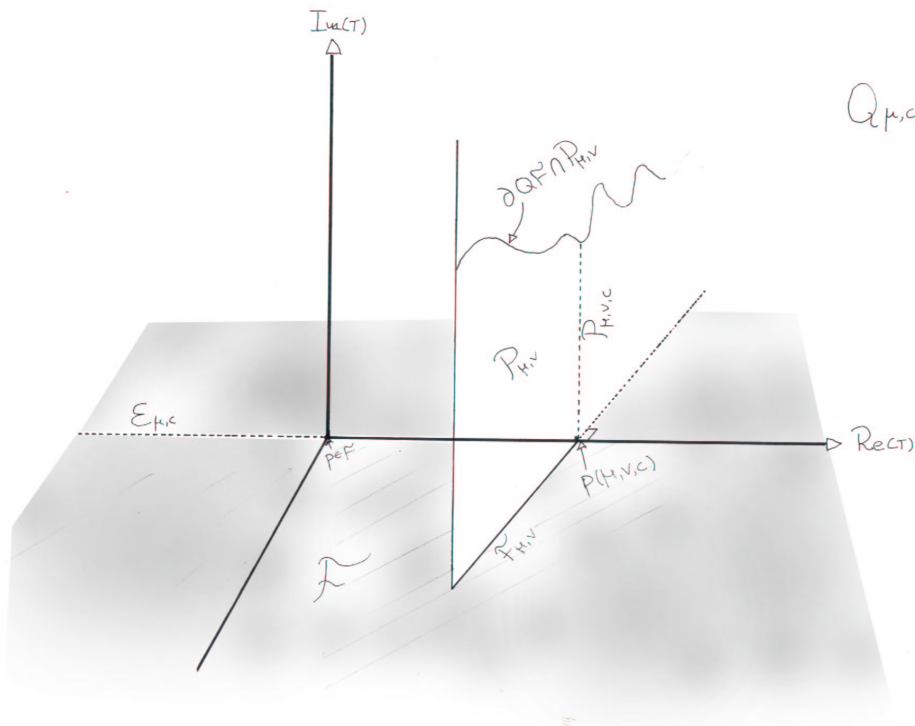
**ΘΕΩΡΗΜΑ 12.7:** Έστω  $\mu, \nu \in \mathcal{ML}$  με  $i(\mu, \nu) > 0$  και έστω  $c > 0$ . Τότε το σύνολο  $\mathcal{P}_{\mu,\nu,c} \subset \mathcal{QF}$ , είναι μή κενή, συνεκτική, μη ιδιάζουσα συνιστώσα του  $\mathbb{R}$ -locus του περιορισμού της  $\lambda_\nu$  στο  $Q_{\mu,c}$ . Ο περιορισμός της  $\lambda_\nu$  στο  $\mathcal{P}_{\mu,\nu,c}$  είναι αμφιδιαφόριση επί της εικόνας της  $(0, f_{\mu,\nu}(c)) \subset \mathbb{R}^+$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Υποθέτουμε αρχικά ότι  $\mu \in \mathcal{ML}_Q$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε  $\mu = \delta_\gamma, \gamma \in S$ . Έστω  $K$  μία συνιστώσα του  $\mathcal{P}_{\gamma,\nu,c}$ . Από το πόρισμα 12.6 το  $|Re\tau|$  είναι φραγμένο στο  $K$ . Από το λήμμα 12.4 η  $\lambda_{\nu|K}$  είναι φραγμένη και άρα από το λήμμα 12.3, η εικόνα της είναι το  $(0, d)$ , όπου  $d = f_{\gamma,\nu}(c)$ . Η  $\lambda_{|K}$  απεικονίζεται αμφιμονοσήμαντα στο  $(0, d)$  και είναι διαφορίσιμη. Άρα ο περιορισμός της  $\lambda_\nu$  στο  $\mathcal{P}_{\gamma,\nu,c}$  είναι αμφιδιαφόριση επί του  $(0, f_{\gamma,\nu}(c))$ .

Ακόμα, υπάρχουν  $\tau_n \in K$  τέτοια ώστε  $\tau_n \rightarrow p(\gamma, \nu, c) \in \mathcal{F}$ . Τώρα, από το θεώρημα 11.14 υπάρχει μοναδικός κλάδος της  $\lambda_\nu^{-1}(\mathbb{R})$  κοντά στο  $p(\gamma, \nu, c)$ . Άρα, η μοναδική συνεκτική συνιστώσα της  $\mathcal{P}_{\gamma,\nu,c} \subset \mathcal{QF}$  είναι η  $K$ . Αν ο βαθμός της  $\lambda_{\nu|K}$  ήταν μεγαλύτερος από ένα, θα υπήρχαν σημεία  $\tau'_n \in K$ , με  $\lambda_{\nu|K}(\tau'_n) \rightarrow d$  αλλά  $\tau'_n \rightarrow q_\infty \in \mathcal{QF} \setminus \mathcal{F}$ , από το θεώρημα 11.14. Τότε από το λήμμα 12.3, η μοναδική περίπτωση που μπορεί να ισχύει είναι  $\lambda_\nu(K) \supset (0, \infty)$  που είναι άτοπο.

Έστω τώρα  $\mu \in \mathcal{ML}$ . Έστω  $q \in \mathcal{P}_{\mu,\nu,c}$ . Αντικαθιστούμε το  $Q_{\gamma,c}$  με το  $Q_\mu^q$  με παράμετρο  $\tau_\mu = \tau$ . Επειδή δεν υπάρχουν οι integral pleating rays αν η  $\mu$  είναι άρρητη, πρέπει να βρούμε άλλο τρόπο για να φράξουμε το  $Re\tau$ . Όλα τα υπόλοιπα επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε για την περίπτωση  $\mu \in \mathcal{ML}_Q$  δουλεύουν για  $\mu \in \mathcal{ML}$ . Επιλέγουμε ακολουθία  $\nu_n \in \mathcal{ML}_Q$  τέτοια ώστε  $\nu_n \rightarrow \nu$ . Από την πρόταση 11.16, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του Hurwitz για να βρούμε  $q_n \in Q_\mu^q$  τέτοια ώστε  $q_n \rightarrow q$  και  $\lambda_{\nu_n}(q_n) \in \mathbb{R}^+$ . Από το θεώρημα 11.12 για μεγάλο  $n$  η  $q_n \in \mathcal{P}_{\mu,\nu,c}$ . Αφού  $\nu_n \in \mathcal{ML}_Q$  από το παραπάνω επιχείρημα,  $\lambda_\nu(q_n) <$

$f_{\mu, \nu_n}(c)$ . Άρα, αφού  $\nu_n \rightarrow \nu$ , από το λήμμα 8.8 και το θεώρημα 6.4 προκύπτει ότι  $f_{\mu, \nu_n}(c) \rightarrow f_{\mu, \nu}(c)$ , έτσι ώστε η  $\{\lambda_{\nu_n}(q_n)\}$  να είναι φραγμένη από μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από τις  $\mu, \nu, c$  και η  $\{\lambda_{\nu}(q_n)\}$  να είναι φραγμένη. Άρα και η  $\lambda_{\nu|K}$  είναι φραγμένη. Η απόδειξη συνεχίζει τώρα όμοια με το πρώτο μέρος.  $\square$



Σχήμα 11. Μία εικόνα που συγκεντρώνει όλα τα παραπάνω αποτελέσματα.

Σαν άμεσο πόρισμα, έχουμε το ακόλουθο

**ΠΟΡΙΣΜΑ 12.8:** Αν  $q \in \mathcal{P}_{\mu}$  τότε η  $G(q)$  προκύπτει από μία ομάδα  $G(p)$ ,  $p \in \mathcal{F}$  μέσω ενός quakebend  $Q_{\mu}^p(\tau^*)$  κατά μήκος της  $\mu$ . Ακόμα, υπάρχει ένα quakebend path  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  στον  $\mathcal{QF}$  από το  $p$  στο  $q$ , ή ως προς τις συντεταγμένες του  $Q_{\mu}^p(\tau)$ ,  $\sigma(0) = 0$ ,  $\sigma(1) = \tau^*$  και το  $Q_{\mu}^p(\sigma(t)) \in \mathcal{QF}$  για  $0 \leq t \leq 1$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Έστω  $q \in \mathcal{P}_{\mu}$ , και ας υποθέσουμε ότι  $q \in \mathcal{P}_{\mu}^+$ . Θεωρούμε την επίπεδη δομή της  $\partial C^+(q)$  και έστω  $p \in \mathcal{F}$ , η υπερβολική δομή του

$\mathbb{H}^2$  που αντιστοιχεί στη επίπεδη δομή της  $\partial C^+(q)$ . Μπορούμε να βρούμε μονοπάτι  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = \tau^*$  μέσα στο quakebend plane  $Q_\mu^p(\tau)$ , ώστε  $G_\mu^p(\sigma(0)) = G(p)$  και  $G_\mu^p(\sigma(1)) = G(q)$ . Ειδικότερα, μπορούμε να βρούμε περισσότερα από ένα τέτοια μονοπάτια. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν ήδη γνωστό, από την περιγραφή που κάναμε για την quakebend παραμόρφωση. Όμως το  $Q_\mu^p$  δεν περιέχεται εν γέννηι στον  $\mathcal{QF}$ , άρα κάποια σημεία πάνω στο μονοπάτι, μπορεί να μην αντιστοιχούν σε quasifuchsian σημεία.

Παρατηρούμε τώρα ότι αφού  $q \in \mathcal{P}_\mu$  τότε για κάποια  $\nu \in \mathcal{ML}$  με  $i(\mu, \nu) > 0, q \in \mathcal{P}_{\mu, \nu}$ . Από την πρόταση 9.14,  $\lambda_\nu(q) \in \mathbb{R}^+$ . Αφού  $\lambda_\nu(p) \in \mathbb{R}^+(p \in \mathcal{F})$  από το θεώρημα 12.7, γνωρίζουμε πως υπάρχει μία συνεκτική συνιστώσα του  $\mathbb{R}$ -locus της  $\lambda_\nu$  στο  $Q_\mu^p$ , συγκεκριμένα η  $\mathcal{P}_{\mu, \nu, c}$ . Συνεπώς, επιλέγουμε το μονοπάτι που βρίσκεται στην συνιστώσα αυτή. Αφού  $\mathcal{P}_{\mu, \nu, c} \subset \mathcal{QF}$ , έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

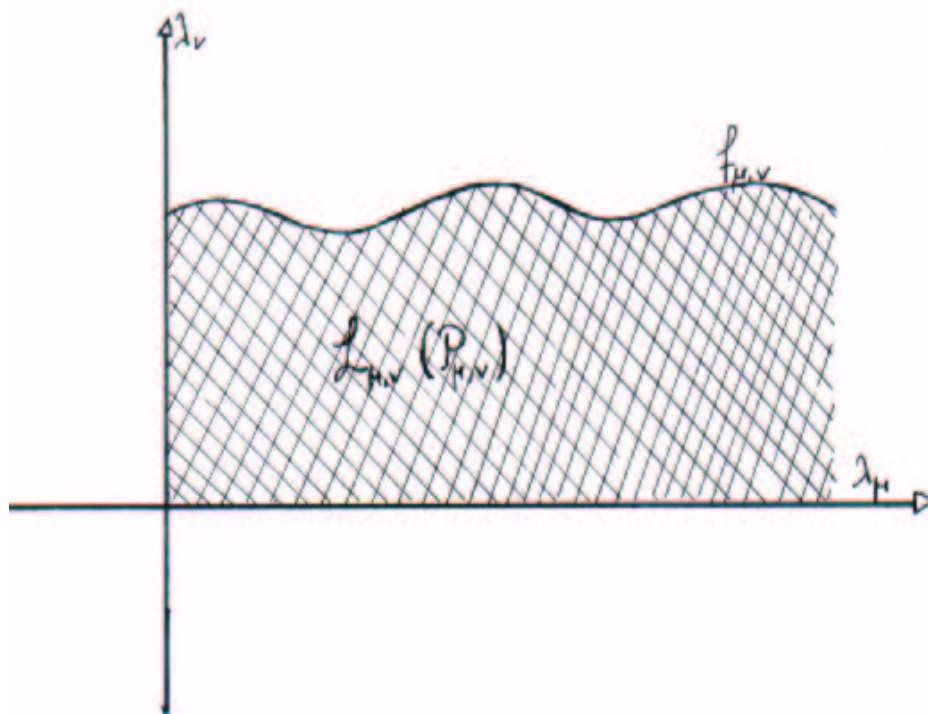
## 12.2. Pleating planes και Pleating invariants.

Είμαστε πλέον σε θέση, να αποδείξουμε το θεώρημα 12.9, για την δομή των pleating planes  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$ , και να εξάγουμε σαν άμεσο πόρισμά του, το βασικό μας θεώρημα 12.10 για την σχέση των ομάδων του τρυπημένου τόρου με τα pleating invariants.

Θεωρούμε την απεικόνιση  $\mathcal{L}_{\mu, \nu} : \mathcal{QF} \rightarrow \mathbb{C}^2$  με τύπο  $\mathcal{L}_{\mu, \nu}(q) = (\lambda_\mu(q), \lambda_\nu(q))$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 12.9:** Έστω  $(\mu, \nu)$  δύο *measured laminations* στον  $\mathcal{T}_1$  τέτοιες ώστε  $i(\mu, \nu) > 0$ . Τότε το σύνολο  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} \subset \mathcal{QF}$  στο οποίο  $[pl^+] = [\mu], [pl^-] = [\nu]$  είναι μία μη κενή, συνεκτική, μη ιδιάζουσα συνιστώσα του  $\mathbb{R}^2$ -locus στο  $\mathcal{QF} - \mathcal{F}$  της συνάρτησης  $\mathcal{L}_{\mu, \nu}$ . Ο περιορισμός της  $\mathcal{L}_{\mu, \nu}$  στο  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$  είναι αμφιδιαφόριση επί της ανοιχτής περιοχής κάτω από το γράφημα της συνάρτησης  $f_{\mu, \nu}$  στο  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Από το θεώρημα 9.8, η απεικόνιση  $\mathcal{L}_{\mu, \nu}|_{\mathcal{P}_{\mu, \nu}}$  παίρνει τιμές στο  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Ισχυριζόμαστε ότι η  $\mathcal{L}_{\mu, \nu}$  περιορισμένη στο  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$  είναι μονομορφισμός. Πράγματι, έστω  $q_1, q_2 \in \mathcal{QF}$  με  $\mathcal{L}_{\mu, \nu}(q_1) = \mathcal{L}_{\mu, \nu}(q_2)$ . Τότε  $\lambda_\mu(q_1) = \lambda_\mu(q_2)$  και  $\lambda_\nu(q_1) = \lambda_\nu(q_2)$ . Τα  $q_1, q_2 \in \mathcal{P}_{\mu, \nu}$ . Όμως  $\mathcal{P}_{\mu, \nu} = \bigcup_{c \in \mathbb{R}^+} \mathcal{P}_{\mu, \nu, c}$ . Από το θεώρημα 12.7 η  $\lambda_\nu$  είναι μονομορφισμός σε κάθε συνιστώσα του  $\mathcal{P}_{\mu, \nu, c}$  που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Άρα το  $\mathcal{P}_{\mu, \nu}$  είναι μία μη ιδιάζουσα συνιστώσα του  $\mathbb{R}^2$ -locus στο  $\mathcal{QF} - \mathcal{F}$  της  $\mathcal{L}_{\mu, \nu}$ . Τέλος, η  $\mathcal{L}_{\mu, \nu}$  είναι αμφιδιαφόριση επί της εικόνας της από το θεώρημα 12.7.  $\square$



Σχήμα 12. Η εικόνα του pleating plane  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$  μέσω της  $\mathcal{L}_{\mu,\nu}$ .

Σημειώνουμε ότι μπορούμε όμοια να δείξουμε ότι οι  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$  και  $\mathcal{P}_{\nu,\mu}$  είναι οι μοναδικές συνεκτικές συνιστώσες του  $\mathbb{R}^2$ -locus της  $\mathcal{L}_{\mu,\nu}$  στο  $\mathcal{QF} - \mathcal{F}$  των οποίων η κλειστότητα στον  $\mathcal{QF}$ , τέμνει τον  $\mathcal{F}$  στην  $\mathcal{F}_{\mu,\nu}$ .

**Παρατήρηση 12.3:** Αν στο θεώρημα 12.9 αντικαταστήσουμε τις  $\mu, \nu$  με  $\mu' = s\mu$  και  $\nu' = t\nu$  για  $s, t \in \mathbb{R}^+$  τότε η  $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$  δεν αλλάζει, (εξαρτάται μόνο από τις κλάσεις των  $\mu, \nu$ ) και  $\mathcal{L}_{\mu',\nu'}(q) = (s\lambda_\mu(q), t\lambda_\nu(q))$ . Υπενθυμίζουμε ότι τα pleating invariants για μία  $G \in \mathcal{QF} - \mathcal{F}$ , δεν είναι τίποτα άλλο από τις προβολικές κλάσεις των ζευγών  $(\mu^\pm, l_\mu^\pm)$  για οποιαδήποτε επιλογή measured laminations  $\mu^\pm$  στο  $[pl^\pm]$ .

Το θεώρημα 12.10 που ακολουθεί, είναι άμεσο πόρισμα του θεωρήματος 12.9 μαζί με την παραπάνω παρατήρηση.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 12.10:** Μία ομάδα του τρυπημένου τόρου  $G \in \mathcal{QF} - \mathcal{F}$ , καθορίζεται πλήρως από τα pleating invariants, μοναδικά μέχρι συζυγίας στο  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

13.  $\mathcal{BM}$ -SLICES

Είπαμε νωρίτερα, ότι ο χώρος των σύμμορφων δομών στον  $\mathcal{T}_1$  μπορεί να ταυτιστεί με τον  $\mathcal{F}$ . Για ένα  $q \in \mathcal{QF}$  θεωρούμε τα ebding invariants  $\omega^\pm(q)$ , που αντιστοιχούν στις marked σύμμορφες δομές των  $\Omega^\pm/G(q)$ . Ο Bers εμβύθισε τον  $\mathcal{QF}$  στον  $\mathcal{F} \times \overline{\mathcal{F}}$  μέσω της απεικόνισης  $q \mapsto (\omega^+, \omega^-)$  και απέδειξε ότι αν κρατήσουμε σταθερή την συντεταγμένη  $\omega^-$  τότε η  $\omega^+$  μεταβάλλεται σ' ολόκληρο τον  $\mathcal{F}$ . Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε τι θα συμβεί στην περίπτωση μας, αν σταθεροποιήσουμε τα pleating invariants σε μία μεριά του  $\partial C$ . Θα δούμε ότι οι τομές που θα οριστούν με αυτόν τον τρόπο είναι μιγαδικές επεκτάσεις των earthquake paths στον  $\mathcal{QF}$ .

Έστω  $\mu \in \mathcal{ML}$ , και  $c \in \mathbb{R}^+$ . Θέτουμε

$$\mathcal{BM}_{\mu,c}^+ = \left\{ q \in \mathcal{P}_\mu^+ : \lambda_\mu(q) = c \right\}.$$

Στο  $\mathcal{BM}_{\mu,c}^+$ , δεν είναι σταθερή η σύμμορφη δομή στο  $\Omega^+/G$  ούτε η επίπεδη δομή της  $\partial C^+/G$ . Το πόσο μεταβάλλονται όμως, περιορίζεται από την συνθήκη  $\lambda_\mu = c$ . Ορίζουμε

$$J : \mathcal{BM}_{\mu,c}^+ \rightarrow \left( \mathcal{PML} - \{[\mu]\} \right) \times \mathbb{R}^+,$$

με τύπο

$$J(q) = \left( [pl^-(q)], \frac{l_{pl^-(q)}}{i(\mu, pl^-(q))} \right).$$

Αφού  $[pl^+(q)] \neq [pl^-(q)]$ , τότε  $i(\mu, pl^-(q)) > 0$ . Από το θεώρημα 9.4, η απεικόνιση  $J$  είναι συνεχής. Αφού για σταθερή  $\mu \in \mathcal{ML}$  οι συναρτήσεις  $l_\nu$  και  $i(\mu, \nu)$  μεταβάλλονται ανάλογα καθώς μεταβάλλεται το  $\nu$  στην προβολική του κλάση στο  $\mathcal{PML}$ , η δεύτερη συντεταγμένη της απεικόνισης  $J$  εξαρτάται μόνο από το  $[pl^-]$ . Μπορούμε λοιπόν να την γράψουμε με τους όρους των pleating invariants  $\lambda_\nu(q)/i(\mu, \nu)$  για οποιαδήποτε επιλογή του  $\nu \in [pl^-]$ .

Ορίζουμε ακόμα

$$\mathcal{X}(\mu, \nu) = \left\{ ([\nu], s) \in \left( \mathcal{PML} - \{[\mu]\} \right) \times \mathbb{R}^+ : 0 < s < \frac{f_{\mu,\nu}(c)}{i(\mu, \nu)} \right\}.$$

Ταυτίζοντας το  $\mathcal{PML} - \{[\mu]\}$  με το  $\mathbb{R}$ , μπορούμε να θεωρήσουμε το  $\mathcal{X}(\mu, c)$  ως το χωρίο του  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  κάτω από το γράφημα της συνάρτησης  $[\nu] \mapsto \frac{f_{\mu,\nu}(c)}{i(\mu,\nu)}$ . Όπως είδαμε παραπάνω, η συνάρτηση αυτή είναι καλά ορισμένη και από το λήμμα 8.8 είναι συνεχής.



Όπως και παραπάνω, θέτουμε  $Q_{\mu,c}$  να είναι το quakebend plane ως προς την  $\mu$  που τέμνει τον  $\mathcal{F}$  κατά μήκος του  $\mathcal{E}_{\mu,c}$ . Από τον ορισμό του  $Q_{\mu,c}$ , προκύπτει ότι  $Q_{\mu,c} = Q_{\mu}^p$  για όλα τα  $p \in \mathcal{E}_{\mu,c}$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 13.1** Έστω  $\mu \in \mathcal{ML}$  και έστω  $c > 0$ . Τότε οι κλειστότητες στον  $\mathcal{QF}$  ακριβώς δύο εκ των συνεκτικών συνιστώσων του  $Q_{\mu,c} \cap (\mathcal{QF} - \mathcal{F})$  τέμνουν τον  $\mathcal{F}$ . Οι συνιστώσες αυτές είναι οι  $\mathcal{BM}$ -slices  $\mathcal{BM}_{\mu,c}^{\pm}$ . Η τομή της κλειστότητας κάθε μίας εκ των  $\mathcal{BM}$ -slices με τον  $\mathcal{F}$  είναι το earthquake path  $\mathcal{E}_{\mu,c}$  και η απεικόνιση  $J : \mathcal{BM}_{\mu,c}^+ \rightarrow \mathcal{X}(\mu, c)$  είναι ομοιομορφισμός.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Με την σημείωση ότι  $\nu \in \mathcal{ML}$ , η pleating ray  $\mathcal{P}_{\mu,\nu,c}$  εξαρτάται μόνο από την προβολική κλάση  $[\nu]$  της  $\nu$ , προκύπτει από τους ορισμούς ότι

$$\mathcal{BM}_{\mu,c}^+ = \bigcup_{[\nu] \in \mathcal{PML} - \{[\mu]\}} \mathcal{P}_{\mu,\nu,c}.$$

Αφού για  $[\nu] \in \mathcal{PML} - \{[\mu]\}$ , η κλειστότητα της pleating ray  $\mathcal{P}_{\mu,\nu,c}$  στον  $\mathcal{QF}$  περιέχει το σημείο  $p(\mu, \nu, c)$ , η κλειστότητα του  $\mathcal{BM}_{\mu,c}^+$  στον  $\mathcal{QF}$  περιέχει το  $\mathcal{E}_{\mu,c}$ . Έπεται από τα limit pleating theorem και local pleating theorem ότι το  $\mathcal{BM}_{\mu,c}^+$  είναι ανοιχτό και κλειστό στο  $Q_{\mu,c} \cap (\mathcal{QF} - \mathcal{F})$ . Από το θεώρημα 11.13 δεν υπάρχουν άλλες συνιστώσες του  $Q_{\mu,c}$  που οι κλειστότητες τους να τέμνουν τον  $\mathcal{F}$ . Για  $[\nu] \in \mathcal{PML} - \{[\mu]\}$ , από το λήμμα 12.2, η  $\lambda_{\nu|_{\mathcal{P}_{\mu,\nu,c}}}$  είναι ομοιομορφισμός επί του διαστήματος  $(0, f_{\mu,\nu,c})$ . Αυτό αποδεικνύει ότι η  $J$  είναι ομοιομορφισμός επί του  $\mathcal{BM}_{\mu,c}^+$ . Άρα το  $\mathcal{BM}_{\mu,c}^+$  είναι απλά συνεκτικό και συρικνώνεται μέσω μίας retraction στο  $\mathcal{E}_{\mu,c}$  πάνω στις pleating rays.  $\square$

Ανάλογα με το θεώρημα 11.16, έχουμε το ακόλουθο

**ΘΕΩΡΗΜΑ 13.2:** Οι ρητές pleating rays  $\mathcal{P}_{\mu,\nu,c}$  είναι πυκνές στο  $\mathcal{BM}_{\mu,c}^+$ .

## 14. PHTA PLEATING PLANES

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε την θέση ρητών pleating planes στον  $\mathcal{QF}$ . Ξεκινάμε αποδεικνύοντας το ακόλουθο θεώρημα που μας επιτρέπει να κάνουμε κάτι τέτοιο.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 14.1:** Έστω  $\delta_\gamma, \delta_{\gamma'}$  ρητές laminations που αναπαριστώνται από μη-συζυγή στοιχεία  $V, V' \in G$ . Τότε τα  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma'}$  και  $\mathcal{P}_{\gamma', \gamma}$  είναι οι μοναδικές συνεκτικές συνιστώσες του  $\mathbb{R}^2$ -locus της συνάρτησης  $TrV \times TrV'$  στον  $\mathcal{QF} - \mathcal{F}$  των οποίων οι κλειστότητες τέμνουν τον  $\mathcal{F}$  κατά μήκος της  $\mathcal{F}_{\gamma, \gamma'}$ . Στην ένωση  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma'} \cup \mathcal{P}_{\gamma', \gamma}$  η συνάρτηση  $TrV \times TrV'$  είναι μη-ιδιάζουσα και το σύνορο της ένωσης  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma'} \cup \mathcal{P}_{\gamma', \gamma}$  μπορεί να υπολογιστεί, λύνοντας τις εξισώσεις  $TrV = \pm 2$  και  $TrV' = \pm 2$  στην ένωση.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Αν  $V, V' \in G$  τέτοια ώστε να αναπαριστούν τις  $\gamma, \gamma'$  αντίστοιχα, τότε οι  $\mathbb{R}^+$ -loci στον  $\mathcal{QF}$  των συναρτήσεων  $TrV$  και  $\lambda_\gamma$ , καθώς και των  $TrV'$  και  $\lambda_{\gamma'}$  ταυτίζονται μέσω των σχέσεων  $TrV = 2 \cosh(\frac{1}{2}\lambda_\gamma)$  και  $TrV' = 2 \cosh(\frac{1}{2}\lambda_{\gamma'})$  αντίστοιχα. Με αυτή την παρατήρηση, από το θεώρημα 12.9 προκύπτει ότι το  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma'}$  είναι η μοναδική μη-ιδιάζουσα συνιστώσα του  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ -locus της συνάρτησης  $TrV \times TrV'$  στον  $\mathcal{QF}$  που τέμνει τον  $\mathcal{F}$  κατά μήκος της critical line  $F_{\gamma, \gamma'}$ . Το σύνορο της κλειστότητας της ένωσης  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma'} \cup \mathcal{P}_{\gamma', \gamma}$  είναι τα  $q \in \mathcal{QF}$  για τα οποία  $\lambda_\gamma(q) = \lambda_{\gamma'}(q) = 0$ , συνεπώς οι λύσεις των εξισώσεων  $TrV = \pm 2$  και  $TrV' = \pm 2$ .  $\square$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, έχοντας εμβυθίσει τον  $\mathcal{QF}$  στο  $\mathbb{C}^2$  μέσω των Fenchel-Nielsen συντεταγμένων, μπορούμε να εντοπίσουμε ακριβώς την θέση του  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma'}$  (και του  $\mathcal{P}_{\gamma', \gamma}$ ) και του συνόρου του αρκεί να μπορούμε να εκφράσουμε τις συναρτήσεις  $TrV$  και  $TrV'$ , όπου οι  $V, V' \in G$  αναπαριστούν τις  $\gamma, \gamma'$ , σαν ολόμορφες συναρτήσεις των παραμέτρων. Πριν το κάνουμε αυτό, αποδεικνύουμε την πρόταση 14.2, που μας εξασφαλίζει την ολόμορφη εξάρτηση των  $TrV$  και  $TrV'$  από τις μιγαδικές Fenchel-Nielsen παραμέτρους.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 14.2:** Έστω  $(\lambda_V, \tau_{V,W})$  οι μιγαδικές Fenchel-Nielsen συντεταγμένες για τον  $\mathcal{QF}$  ως προς το marking  $(V, W)$ . Έστω  $\gamma' \in S$  που αντιστοιχεί στο στοιχείο  $V' \in G$ . Τότε κρατώντας σταθερό το  $\lambda_V$ , η συνάρτηση  $TrV' = \pm 2 \cosh(\frac{1}{2}\lambda_{\gamma'})$  είναι πολυώνυμο των συναρτήσεων  $\cosh(\frac{1}{2}\tau_{V,W})$  και  $\sinh(\frac{1}{2}\tau_{V,W})$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε ζεύγος marked γεννητόρων  $(V, W)$  ισχύουν οι σχέσεις:

$$\cosh(\frac{1}{2}\lambda_W) = \cosh(\frac{1}{2}\tau_{V,W}) (\tanh(\frac{1}{2}\lambda_V))^{-1}$$

και

$$\cosh(\frac{1}{2}\lambda_{VW\pm 1}) = \cosh(\frac{1}{2}(\tau_{V,W} \pm \lambda_V)) (\tanh(\frac{1}{2}\lambda_V))^{-1}$$

Τότε αν  $V' = W$ , θέτωντας  $\tanh(\frac{1}{2}\lambda_V) = c$ , έχουμε

$$\text{Tr}V' = 2 \cosh(\frac{1}{2}\lambda_{V'}) = \frac{2}{c} \cosh(\frac{1}{2}\tau_{V,V'}).$$

Αν  $V' = VW^{\pm 1}$ , τότε

$$\text{Tr}V' = 2 \cosh(\frac{1}{2}\lambda_{VW^{\pm 1}}) = \frac{2}{c} \cosh\left(\frac{1}{2}(\tau_{V,W} \pm \lambda_V)\right)$$

Αναπτύσσοντας το  $\cosh\left(\frac{1}{2}(\tau_{V,W} + \lambda_V)\right)$  και θέτωντας  $\cosh(\frac{1}{2}\lambda_V) = d$  και  $\sinh(\frac{1}{2}\lambda_V) = e$ , όπου  $d, e$  σταθερές, προκύπτει

$$\text{Tr}V' = \frac{2d}{c} \cosh(\frac{1}{2}\tau_{V,W}) + \frac{2e}{c} \sinh(\frac{1}{2}\tau_{V,W}).$$

Για γενική  $V' = VW^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , το αποτέλεσμα αποδεικνύεται επαγωγικά στο [22] και μας επιτρέπει να εκφράσουμε την συνάρτηση  $\text{Tr}V'$  ως πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές των  $\text{Tr}V, \text{Tr}W$  και κάποιου από τα  $\text{Tr}VW$  ή  $\text{Tr}VW^{-1}$ .  $\square$

Τώρα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την θέση του pleating plane  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma'}$  στον  $\mathcal{QF}$ . Για να βρούμε την critical line  $\mathcal{F}_{\gamma, \gamma'}$  πράττουμε ως εξής:

Σταθεροποιούμε ένα  $c > 0$  και θεωρούμε την συνάρτηση  $\text{Tr}V' = \text{Tr}V'(\lambda_V, \tau_{V,W})$ . Κατά μήκος του earthquake path  $\mathcal{E}_{\gamma, c}$ , η παράμετρος  $t = \tau_{V,W} \in \mathbb{R}$  μεταβάλλεται σε ολόκληρο το  $\mathbb{R}$ . Από το θεώρημα 8.1, η  $\lambda_{\gamma' | \mathcal{E}_{\gamma, c}}$  έχει μοναδικό σημείο ελαχίστου  $p$  και μάλιστα  $p = p(\gamma, \gamma', c) \in F_{\gamma, \gamma'}$ . Συνεπώς, αφού  $\text{Tr}V' = 2 \cosh(\frac{1}{2}\lambda_{\gamma'})$ , το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση  $\text{Tr}V'$ . Από την πρόταση 14.2, η θέση του σημείου  $p$  μπορεί να υπολογιστεί, συναρτήσει της παραμέτρου  $t = \tau_{V,W}$ . Από το θεώρημα 11.13, υπάρχουν ακριβώς δύο κλάδοι  $\sigma^{\pm}$  του  $\mathbb{R}$ -locus της συνάρτησης  $\text{Tr}V'$  στο  $\mathcal{QF} - \mathcal{F}$  που οι κλειστότητές τους τέμνουν τον  $\mathcal{F}$  στο  $p$ . Το pleating plane  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma'}$  είναι η ένωση των pleating rays  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma', c}$  για όλα τα  $c \in \mathbb{R}^+$ . Από το θεώρημα 12.7, η  $\mathcal{P}_{\gamma, \gamma', c}$  είναι ένας από τους δύο αναλυτικούς κλάδους  $\sigma^{\pm}$ . Οι κλάδοι αυτοί απεικονίζονται αμφιμονοσήμαντα μέσω της  $\text{Tr}V'$  επί του διαστήματος  $\left(0, 2 \cosh\left(\frac{1}{2}f_{\gamma, \gamma'}(c)\right)\right)$ . Από το ίδιο θεώρημα, οι κλάδοι αυτοί, είναι οι μη ιδιάζοντες  $\mathbb{R}$ -loci και περιέχονται στον  $\mathcal{QF}$ . Οι κλειστότητές τους φτάνουν μέχρι το  $\partial\mathcal{QF}$ , όπου εκεί,  $\text{Tr}V'(\tau^*) = \pm 2$ . Στα σημεία στο  $\mathcal{QF}$  που αντιστοιχούν στις παραμέτρους  $\tau^*$ , η  $\gamma'$  είναι εκφυλισμένη καμπύλη (έχει μηδενικό μήκος) και αντιστοιχεί σε κάποιο παραβολικό στοιχείο στην  $G(\tau^*)$ . Αν ζωγραφίσουμε τις pleating rays για όλα τα  $c \in \mathbb{R}^+$ , παίρνουμε την εικόνα των pleating planes.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] A.F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [2] L. Bers. Spaces of kleinian groups. In *several complex variables I*, Maryland 1970, ed. J Horváth, Lecture notes in Mathematics 155, Springer-Verlag.
- [3] J.Brock. Continuity of Thurston's length function, *Geom. and Funct. Analysis*, 10(4):741-797, 2000.
- [4] R.D. Canary, D.B.A Epstein and P. Green. Notes on notes of Thurston. In D.B.A Epstein, editor, *Analytical and Geometrical aspects of Hyperbolic Space*, LMS Lecture Notes 111, 3-92, Cambridge University Press, 1987
- [5] D.B.A Epstein and A. Marden. Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan and measured pleated surfaces. In D.B.A Epstein, editor, *Analytical and Geometrical aspects of Hyperbolic Space*, LMS Lecture Notes 111, 3-92, Cambridge University Press, 1987.
- [6] L. Keen and C. Series. Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of punctured tori. *Topology*, 32(4): 719-749, 1993.
- [7] L. Keen and C. Series. Continuity on convex hull boundaries. *Pacific J. Math* 168(1) :183-206, 1995.
- [8] L. Keen and C. Series. How to bend pairs of punctured tori. In J. Dodziuk and L. Keen, editors, *Lipa's Legacy, Proceedings of the Bers Colloquium 1995*, Contemp. Math. 221, 359-388 AMS, 1997.
- [9] S. Kerchhoff. The Nielsen realization problem, *Ann of Math.* 117(2) :235-265, 1983.
- [10] S. Kerchhoff. Earthquakes are analytic, *Coment. Mat. Helv.*, 60 :17-30, 1985.

- [11] C. Kourouniotis. Complex length coordinates for quasi-fuchsian groups, *Mathematika*, 41(1) :173-188, 1994.
- [12] S. Kerchoff. Lines of Minima in Teichmüller space, *Duke Math. J.*, 65:187-213, 1992.
- [13] A.M. Macabeth. Topological Background. In W.J Harvey, editor, *Discrete Groups and Automorphic Functions*, 1-45, Academic press, 1977.
- [14] A. Marden. The geometry of finetely generated Kleinian groups. *Ann. Math.*, 99:607-639, 1974.
- [15] K. Matsuzaki and M. Taniguchi. Hyperbolic manifolds and Kleinian Groups, *Oxford Mathematical Monographs* 36, Clarendon Press, Oxford 1998.
- [16] C. McMullen. Complex earthquakes and Teichmüller theory, *J. Amer. Math. Soc.*, 11:283-320, 1998.
- [17] Y. Minsky. Harmonic maps into hyperbolic 3-manifolds, *Trans. A.M.S.*, 332: 539-558,1992.
- [18] J.R Parker and C. Series. Bending formulae for convex hull boundaries, *J. Anal. Math.* 67 :165-198, 1995.
- [19] W. Thurston. Hyperbolic structures on 3-manifolds II, Unpublished preprint.
- [20] W. Thurston. Geometry and topology of three-manifolds, *Princeton Lecture Notes*, 1979.
- [21] S. Wolpert. The Fenchel-Nielsen deformation, *Ann. Math*, 115(3) :501-528, 1992.
- [22] D. J. Wright. The shape of the boundary of the Maskit's embedding of the Teichmüller space of once punctured tori, Unpublished preprint.